ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR

II 1945 4

МАТЕМАТИКА

А. Л. Шагинян

О функциях представимых интегралом Коши-Лебега

(Представлено В. А. Амбарцумяном 11 VI 1945)

Пусть B—односвязная область, ограниченная произвольной спрямляемой кривой C.

Обозначим через $w=\varphi(z)$ функцию, конформно отображающую B на круг $|w|<1$.

В. И. Смирнов охарактеризовал класс функций $f(z)$ регулярных в B, допускающих почти всюду на C предельные значения и выражаемые этими значениями посредством интеграла Коши-Лебега ([1]). Для этого необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ удовлетворяла условию

$$\lim_{r\to 1}\int\limits_{|\varphi(z)|=r} |f(z)|\,|dz| < \infty. \tag{1}$$

М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев заметили ([2]), что вместо (1) достаточно иметь ограниченность интегралов

$$\int\limits_{C_n} |f(z)|\,|dz| \tag{2}$$

где $\{C_n\}$ — какая-либо последовательность спрямляемых кривых внутри B и $C_n \to C$.

1. Могло бы казаться, что если функция $f(z)$ в B удовлетворяет неравенству (1), то интегралы (2) будут ограничены на произвольных спрямляемых кривых $\{C_n\}$ равномерно ограниченных по длине. Приведем пример, показывающий, что это вообще говоря не так.

Пусть B—единичный круг $|z|<1$, C—окружность $|z|=1$. Очевидно функция $\frac{1}{(1-z)^\rho}$, $\rho<1$ удовлетворяет неравенству (1).

Построим в $|z|<1$ последовательность кривых $C_n \to C$, длины которых $l_n \to 2\pi$ и, однако, интегралы (2) неограничены.

Возьмем полярную систему координат (ρ, φ) с полюсом в точке $z=1$, а дуги φ будем откладывать от единичной окружности C внутрь круга $|z| < 1$. Построим в верхнем и нижнем полукругах кривые

$$A_1 : \quad \varphi=\rho^q \qquad (1<q<2)$$
$$A_2 : \quad \varphi=2\rho^q$$

Проведем между A_1 и A_2 дуги окружностей C_k радиусами

$$\rho=\frac{1}{k} \qquad (k=n,\ n+1, \ldots)$$

Соединив эти дуги с теми дугами, которые получаются на A_1 и A_2 и, наконец, соединив концы кривой A_1 окружностью $|z| = r < 1$, получим некоторую односвязную область Жордана B_n. Выкинем из B_n часть, общую с кругом $|z-1| \leqslant \frac{1}{n^2}$, и обозначим оставшуюся Жорданову область через Δ_n, а длину ее контура через l_n.

Очевидно $l_n \to 2\pi$ при $n \to \infty$,

$$\int\limits_{C_n} \frac{|dz|}{|1-z|^p} > \sum_{k=n}^{n^2} k^p \cdot \frac{1}{k^q}$$

и так как $q-p < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{C_n} \frac{|dz|}{|1-z|^p} = \infty \tag{3}$$

По контуру L_n области B_n

$$\int\limits_{L_n} \frac{|dz|}{|1-z|^p} = \infty \tag{4}$$

Последнее равенство показывает, что *из представимости $f(z)$ интегралом Коши-Лебега в области B со спрямляемой границей C не следует представимость $f(z)$ интегралом Коши-Лебега в произвольной подобласти B_1 с границей $C_1 \subset B+C$.*

Но нетрудно видеть, что такое представление возможно при суммируемом $|f(z)|$ на C_1.

Для кривой C_1 аппарат Коши можно сохранить, если понимать в нем интегрируемость в обычном смысле существования несобственных интегралов Коши ([3]).

Для этого достаточно выделить из области B_1 односвязную часть с границей C_1, общую с кругом $|z| \leqslant r < 1$, представить в этой области $f(z)$ интегралом Коши и, приняв во внимание (4) равностепенно—абсолютную непрерывность интегралов

$$\int\limits_0^{\varphi} |f(re^{i\alpha})|\, d\alpha \qquad (0<r<1),$$

перейти к пределу, когда $r \to 1$.

2. Из равенства (4) следует неверность заключений Ghika Alexander'а ([5]), где он утверждает, что

$$\int_{C_1} |f(z)|^2 \, |dz| < M^2 \int_{C} |f(z)|^2 \, |dz|,$$

где M не зависит от $f(z)$, а только от C и C_1, а $f(z)$—произвольная функция, представимая в B интегралом Коши-Лебега. Предыдущие результаты вполне естественны, мы привели их в ответ на заметку M. H. Heins ([5]).

Физико-математический Институт
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1945, июнь.

Ա. Լ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Կոշի-Լեբեգի ինտեգրալով ներկայացվող ֆունկցիաների մասին

Դիցուք B *միակապ միաթերթ տիրույթ է ուղղելի* C *եզրագծով և* $f(z)$ *ֆունկցիան հոլոմորֆ է այդ տիրույթում ունի համարյա ամենուրեք եզրային արժեքներ ու այդ արժեքների միջոցով արտահայտվում է Կոշի-Լեբեգի ինտեգրալով։ Նշանակենք* B_1*-ով մի կամայական միաթերթ տիրույթ* B*-ի ներսը* C_1 *ուղղելի եզրագծով և* $C_1 \subset B+C$։

Ներկա հոդվածում ապացուցված են հետևյալ դրույթները.

1. Ընդհանրապես $f(z)$ *ֆունկցիան* B_1 *տիրույթում կարող է չներկայացվել Կոշի-Լեբեգի ինտեգրալով.*

2. B *տիրույթում հնարավոր է կառուցել* $\{C_n\}$ *գծերի այնպիսի հաջորդականություն, որ նրանց երկարությունները ձգտեն* C*-ի երկարությանը և սակայն* B *տիրույթում Կոշի-Լեբեգի ինտեգրալով ներկայացվող որոշ* $f(z)$ *ֆունկցիայի համար*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} |f(z)| \, |dz| = \infty$$

3. Երկրորդ կետում բերված արդյունքով ապացուցվում է Ֆրանսիական Գիտությունների Ակադեմիայի Զեկույցներում լույս տեսած ([5]) *մեկ հոդվածի անճշտությունը։ Հոդվածի հեղինակը՝* Ghika Alexander *պնդում է, որ վերը նկարագրված դասի որևէ* $f(z)$ *ֆունկցիայի համար*

$$\int_{C_1} |f(z)|^2 \, |dz| < M^2 \int_{C} |f(z)|^2 \, |dz|,$$

որտեղ M *հաստատուն է և կախում չունի* $f(z)$*-ից։ Դա հակասում է 2-րդ կետում բերված արդյունքին։*

A. L. Shahinian

About Functions Representable by the Integral of Cauchy-Lebesgue

Let B be arbitrary simple connected region with the rectifiable boundary C and f(z),—a function analytical in B, representable in B by the integral of Cauchy-Lebesgue. Let B_1 be the arbitrary subregion in B with the rectifiable boundary $C_1 \subset B+C$.

In the present note is proved:

1. Generally speaking in the region B_1 the function $f(z)$ cannot be represented by the integral of Cauchy-Lebesgue.

2. In the region of B it is possible to build a sequence of Jordan curves $\{C_n\}$, the length of which tend to that of the contour C, but for certain $f(z)$ representable in B by the integral of Cauchy-Lebesgue

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} |f(z)| \, |dz| = \infty$$

3. By the example given in the 2-nd item it is proved the incorrectness of the result of Ghika Alexander ([5]), that for the function f(z) of the above mentioned class, with boundary values of $|f(z)|^2$ integrable on C

$$\int_{C_1} |f(z)|^2 \, |dz| < M^2 \int_C |f(z)|^2 \, |dz|$$

where M is a constant independent of f(z).

ЛИТЕРАТУРА

1. Изв. Акад. Наук СССР, том 7, стр. 337—371, 1932. 2. Ann. Ec. Norm. sup. (3), LIV—fasc. I, p. 28. 3. *Лебег*. Интегрирование и отыскание примитивных, стр. 15—21, Москва-Ленинград, 1934 г. 4. *Привалов*. Граничные свойства однозначн. анал. функц., стр. 98—100, Москва—МГУ, 1941 г. 5. Comptes Rendus, Paris, 210, 598—600, 1940. Цитирую по реферату M. H. Heins в Mathem. Reviews, 2, 79, 1941.