

М. М. Джрбашян

О некоторых экстремальных проблемах в нежордановых областях

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 22 IX 1944)

Пусть ограниченная односвязная область D ограничена спрямляемой кривой Γ и точка $\alpha \in D$, функция

$$W = \Phi(z), \quad \Phi(\alpha) = 0, \quad \Phi'(z) = 1$$

конформно отображает D на круг $|w| < \rho$; $z = \Psi(w)$ обратная функция. Говорят, что функция $F(z)$ голоморфная в данной области D , принадлежит к классу E_2 , если существует последовательность спрямляемых кривых Γ_n , лежащих в D , сходящихся к ее границе Γ и таких, что интегралы

$$\int_{\Gamma_n} |F(z)|^2 d\sigma$$

остаются ограниченными; $d\sigma$ — дифференциал дуги. Известно ⁽¹⁾, что если $F(z) \in E_2$ в D , тогда она имеет предельные значения $F(t)$ по всем некасательным путям почти всюду на Γ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} |F(z)|^2 d\sigma = \int_{\Gamma} |F(t)|^2 d\sigma.$$

Рассмотрим семейство функций $i(z)$, регулярных в D и принадлежащих к классу E_2 , кроме того удовлетворяющих условию $i(\alpha) = 1$.

Известно ⁽²⁾, что на этом семействе функционал

$$\mu(f) = \int_{\Gamma} |i(z)|^2 d\sigma$$

достигает минимума при

$$i(z) \equiv \sqrt{\Phi'(z)},$$

причем

$$\min \mu(f) = \int_{\Gamma} |\sqrt{\Phi'(t)}|^2 d\sigma = 2\pi\rho.$$

Обозначим,

$$P_n(z) \{n = 0, 1, 2, \dots\} \quad (1)$$

последовательность ортогональных полиномов, которая единственным образом определяется из условий

$$1) \int_{\Gamma} P_n(t) P_m(\bar{t}) d\sigma = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (2)$$

2) $P_n(z)$ — полином степени n с положительным старшим коэффициентом.

Известно (G. Szegő), что среди всех полиномов $Q_n(z)$ степени n , удовлетворяющих условию $Q_n(\alpha) = 1$ минимум функционала

$$\mu(Q_n) = \int_{\Gamma} |Q_n(z)|^2 d\sigma$$

достигается при полиноме

$$\Pi_n(z) = \frac{\sum_{k=0}^n P_k(\bar{\alpha}) P_k(z)}{\sum_{k=0}^n |P_k(\alpha)|^2},$$

$$\text{причем} \quad \mu^n = \min \mu(P_n) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(\alpha)|^2}, \quad (3)$$

Когда область D ограничена жордановой кривой Γ , удовлетворяющей условию В. И. Смирнова о представимости $\lg |\Phi'(w)|$ интегралом Poisson'a в $|w| < \rho$, тогда как известно (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 2\pi\rho \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(z) = \sqrt{\Phi'(z)} \quad (4)$$

причем сходимость полиномов $\Pi_n(z)$ к функции $\sqrt{\Phi'(z)}$ равномерна в каждой замкнутой части D .

Для нежордановых областей D_0 топологически эквивалентных области ограниченной двумя соприкасающимися окружностями $C_1: |z| = R$ и $C_0: |z - (R - r)| = r$ ($r < R$) было доказано (3), что предельная функция экстремальных полиномов, т. е. ряд

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\bar{\alpha}) P_k(z)}{\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(\alpha)|^2} \quad (4')$$

равномерно сходится в каждой замкнутой части области D_1 ограниченной внешним контуром области D_0 когда $z \in D_1$ и представляет функцию класса E_2 в D_1 т. е. для указанных областей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n > 2\pi\rho \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(z) \neq \sqrt{\Phi'(z)}.$$

Нашей целью является определение предельной функции полиномов $\Pi_n(z)$, т. е. суммы ряда (4¹) для случая нежордановой области D_0 ограниченной окружностями C_0 и C_1 .

1°. Укажем на одну лемму, нужную нам в дальнейшем.

Известно (4), что если $F(x)$ монотонна начиная с некоторого значения аргумента x , непрерывна и интеграл $\int_0^\infty F(x)dx$ существует, то

$$\lim_{h \rightarrow +0} h \sum_{k=1}^{\infty} F(kh) = \int_0^\infty F(x)dx$$

отсюда в частности получается также

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{1+r^k} = \lg 2 \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k r^k}{1-r^k} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Таким же способом доказывается:

Лемма. Пусть $r_1(z)$ и r_2 переменные зависящие от некоторого параметра δ , и при $\delta \rightarrow 0$ одновременно стремящиеся к единице, причем всегда $|r_1(z)| < 1$ и $r_2 < 1$, $r_1(z)$ стремится к единице равномерно в каждой замкнутой части области D , где она регулярна.

Пусть далее

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - r_1(z)}{1 - r_2} = \omega(z) \quad \text{и} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - |r_1(z)|}{1 - r_2} = \beta(z)$$

где $\omega(z)$ регулярна в D и там $|\omega(z)| > 0$, $\beta(z) > 0$. Пусть на некоторой открытой дуге $L \subset D$ имеем $r_1(z) > 0$, тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (1 - r_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_1^k(z)}{1 + r_2^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega(z) + n} \quad (5)$$

и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (1 - r_2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k r_1^k(z)}{1 - r_2^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[\omega(z) + n]^2}, \quad (6)$$

причем сходимость равномерна в каждой замкнутой части D .

2°. Рассмотрим двусвязную область D_δ ограниченную окружностями

$$C_1: |z| = R \quad \text{и} \quad C_\delta: |z - b| = \rho$$

где

$$b < R - r, \quad \rho < r, \quad 2(r - \rho) = \delta, \quad b + \rho + \delta = R$$

Область D_0 может быть рассматриваема как предел областей D_δ при $\delta \rightarrow 0$. При этом $C_\delta \rightarrow C_0$.

Простыми вычислениями получаем, что среди всех функций регулярных и принадлежащих к классу E_2 в круге $|z| < R$ и удовлетворяющих условию $f(a) = 1$, $z \in D_0$ минимум функционала

$$\mu_\delta(f) = \int_{C_\delta + C_1} |f(z)|^2 dz$$

реализует функция

$$f_{\delta}(z) = \frac{\mu_{\delta}}{2\pi} \sqrt{\frac{X_2 - X_1}{(X_2 - z)(X_2 - \bar{z})(z - X_1)(\bar{z} - X_1)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_1^{2n+1}(z)}{1 + r_2^{2n+1}}$$

и

$$\min \mu_{\delta}(f) = \mu_{\delta} = \int_{C_{\delta} + C_1} |f_{\delta}(z)|^2 d\sigma = \frac{2\pi |z - X_1| |X_2 - \alpha|}{(X_2 - X_1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_1^{2n+1}(\alpha)}{1 + r_2^{2n+1}}},$$

где

$$r_1(z) = \sqrt{\frac{(z - X_1)(\bar{\alpha} - X_1)}{(X_2 - z)(X_2 - \bar{\alpha})}} \frac{R}{X_1}, \quad r_2 = \frac{X_1 - b}{\rho} \cdot \frac{R}{X_1},$$

а X_1 и X_2 абсциссы точек, лежащих на положительной действительной оси и одновременно симметричные относительно окружностей C_{δ} и C_1 . Легко видеть, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} X_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} X_2 = R, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} r_1(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} r_2 = 1.$$

Несложные вычисления дают

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - r_1(z)}{1 - r_2} = \frac{r}{R - r} \frac{R^2 - \alpha z}{(R - z)(R - \alpha)} = \omega(z, \alpha).$$

Далее проверив выполнение всех условий вышеприведенной леммы и используя равенство (6), получаем:

$$\mu_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_{\delta} = \frac{2\pi |R - \alpha|^2 (R - r)}{Rr \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(\alpha, \alpha) + k}} \quad (7)$$

и

$$f_{\delta}(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} f_{\delta}(z) = \frac{R - \alpha}{R - z} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(z, \alpha) + k}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(\alpha, \alpha) + k}} \quad (8)$$

Отсюда имеем:

Теорема 1. Если полиномы

$$P_n(z) \left\{ n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

определяются из условий (2), тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \inf \mu(f) = \int_{C_0 + C_1} |f_0(z)|^2 d\sigma = \mu_0 = \frac{2\pi |R - \alpha|^2 (R - r)}{Rr \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(\alpha, \alpha) + k}}, \quad (9)$$

где экстремальная функция имеет вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = f_0(z) = \frac{R - \alpha}{R - z} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(z, \alpha) + k}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(\alpha, \alpha) + k}}, \quad (10)$$

а $\omega(z, \bar{z})$ определяется из равенства

$$\omega(z, \bar{z}) = \frac{r}{R-r} \frac{R^2 - \alpha \bar{z}}{(R-z)(R-\bar{z})} \quad (11)$$

Замечание: Для круговой луночки

$$\sqrt{\Phi'(z)} = \frac{R-z}{R-z} \frac{\sin \pi \omega(z, \bar{z})}{\sin \pi \omega(z, \alpha)} = \frac{R-z}{R-z} \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(z, \alpha) + k}}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(z, \alpha) + k}} \quad (12)$$

отсюда получаем:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\sqrt{\Phi'(t)}}{t-z} dt = \frac{1}{\pi} \frac{R-\alpha}{R-z} \sin \pi \omega(z, \bar{z}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(z, \alpha) + k}$$

отсюда очевидна

Теорема 1 bis. Экстремальная функция имеет вид

$$F_0(z) = \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\sqrt{\Phi'(t)}}{t-z} dt}{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\sqrt{\Phi'(t)}}{t-\alpha} dt} \quad (13)$$

3°. Из равенств (9) и (10) получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) P_k(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{Rr}{R-r} \frac{1}{(R-z)(R-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(z, \alpha) + k}, \quad (14)$$

$(z, \alpha) \in |z| < R$

причем легко усмотреть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_0 + C_1} \left| \frac{1}{2\pi} \frac{Rr}{R-r} \frac{1}{(R-z)(R-t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(z, t) + k} - \sum_{k=0}^n P_k(t) P_k(z) \right|^2 d\sigma = 0 \quad (15)$$

Использував равенство (15), получаем теорему

Теорема 2. Если $f_1(t)$ любая функция заданная на $C_0 + C_1$ суммируемая с квадратом модуля

$$\int_{C_0 + C_1} |f_1(t)|^2 d\sigma < +\infty,$$

тогда среди всех функций $f(z)$ регулярных в $|z| < R$ и принадлежащих там к классу E_2 , минимум интеграла

$$\int_{C_0 + C_1} |f_1(t) - f(t)|^2 d\sigma \quad (16)$$

реализует функция

$$f_1^*(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{Rr}{R-r} \frac{1}{R-z} \int_{C_0+C_1} \frac{f_1(t)}{R-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega(z,t)+k} d\tau \quad (17)$$

являющаяся пределом последовательности полиномов Фурье функции $f_1(t)$ относительно ортогональной системы (1).

Так как для любой функции $f(z) \in E_2$ в $|z| < R$

$$\inf_{C_0+C_1} \int |f(z) - P(z)|^2 d\tau = 0,$$

то если $f_1(t)$ представляет значения функции $f_1(z)$ класса E_2 в $|z| < R$ тогда будем иметь

$$f_1^*(z) \equiv f_1(z),$$

При $r \rightarrow 0$ получаем для круга доказанную I. L. Walsh-ем теорему для любых жордановых областей (6).

4.^o Методом, аналогичным изложенному выше, используя равенство (6) доказываются теоремы:

Теорема 3. Среди всех функций $f(z)$ регулярных в круге $|z| < R$ и удовлетворяющих в нежордановой области D_0 условиям $F(z) = 1$

$$\iint_{D_0} |F(z)|^2 dx dy < +\infty \text{ и } \inf_{D_0} \iint |F(z) - P(z)|^2 dx dy = 0, \quad (18)$$

минимум интеграла

$$\mu(F) = \iint_{D_0} |F(z)|^2 dx dy$$

реализует функция

$$F_0(z) = \left(\frac{R-\alpha}{R-z} \right)^2 \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[\omega(z,\alpha)+k]^2}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[\omega(\alpha,\alpha)+k]^2}}, \quad (19)$$

причем

$$\inf \mu(F) = \iint_{D_0} |F_0(z)|^2 dx dy = \frac{\pi |R-\alpha|^4 (R-r)^2}{R^2 r^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[\omega(\alpha,\alpha)+k]^2}} \quad (20)$$

Обозначив через $\pi_n(z)$ полином реализующий минимум функционала

$$\mu(P_n) = \iint_{D_0} |P_n(z)|^2 dx dy,$$

при условии $P_n(\alpha) = 1$ ($\alpha \in D_0$), будем иметь предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_0} |\pi_n(z)|^2 dx dy = \inf \mu(F) \quad (21)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(z) = F_0(z). \quad (22)$$

Причем сходимость равномерна в каждой замкнутой части круга $|z| < R$

Производя несложные вычисления, получаем:

$$F_0(z) = \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\Phi'(t)}{t-z} dt}{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\Phi'(t)}{t-z} dt} \quad (23)$$

Теорема 4. Если $F_1(z)$ любая функция заданная в D_0 и удовлетворяющая условию

$$\iint_{D_0} |F_1(z)|^2 dx dy < +\infty,$$

тогда среди всех функций $F(z)$ регулярных в $|z| < R$ и удовлетворяющих условиям (18), минимум интеграла

$$\iint_{D_0} |F_1(z) - F(z)|^2 dx dy$$

реализует функция

$$F_1^*(z) = \frac{1}{\pi} \frac{Rr}{R-r} \frac{1}{(R-z)^2} \iint_{D_0} \frac{F_1(t)}{(R-\bar{t})^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[\omega(z, \bar{t}) + k]^2} du dv. \quad (24)$$

($t = u + iv$)

Если $F_1(z)$ любая голоморфная функция в $|z| < R$, удовлетворяющая условию

$$\iint_{D_0} |F_1(z)|^2 dx dy < +\infty,$$

то вообще нельзя утверждать, что $F_1^*(z) \equiv F_1(z)$ например (3) для функции

$$e^{-\frac{1}{2} \frac{z+1}{z-1}}$$

И в этом случае при $r \rightarrow 0$ получаем для круга теорему доказанную Walsh-ем для любой жордановой области (*).

Вид экстремальных функций (13) и (23) зависящий от функции отображающей область D_0 на круг, позволяет высказать предположение о справедливости этих формул для других нежордановых областей, в которых не имеет место полнота полиномов. Способ, выбранный нами, позволил выявить эти функции только для круговой луночки.

В заключение считаю долгом выразить благодарность А. Л. Шагиняну за указания и советы при выполнении настоящей работы.

Ереванский Гос. Университет
им. В. М. Молотова
Ереван, 1944, июль.

Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Խի բանի էֆստեմալ պրորիւմներ ոչ-ժորդանյանի սիրույթներում

Այս հոդվածում դրվում և լուծվում են մի քանի էքստրեմալ պրորիւմներ մի առանձին ոչ-ժորդանյան տիրույթի համար:

Ստացված արդյունքներն էապես տարբեր են ժորդանյան տիրույթների համար արդեն հայտնի արդյունքներից և որոշ եզրակացություններում ընդհանուր դեպքում այդ պրորիւմների լուծումների հնարավոր ելքի մասին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. И. Смирнов--а) Журнал Ленинградского Физико-мат. об-ва, т. II, вып. I, 1928. б) Известия Ак. Наук СССР 1932. 2. G. Julia--Bulletin de la Soc. Math. de France, 1927 decembre. 3. Шагинян А. Л.--Доклады Академии Наук 1940, т. XXVII, № 4. 4. Полюа и Сегё--Задачи и теоремы Анализа, т. I, отд. II, гл. I, задачи 30, 33, 34. 5. М. В. Келдыш--Доклады Академии Наук, 1941, т. XXX, № 9. 6. I. L. Walsh--Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, 1935, p. 146--151.