ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR

I 1944 1—2

МАТЕМАТИКА

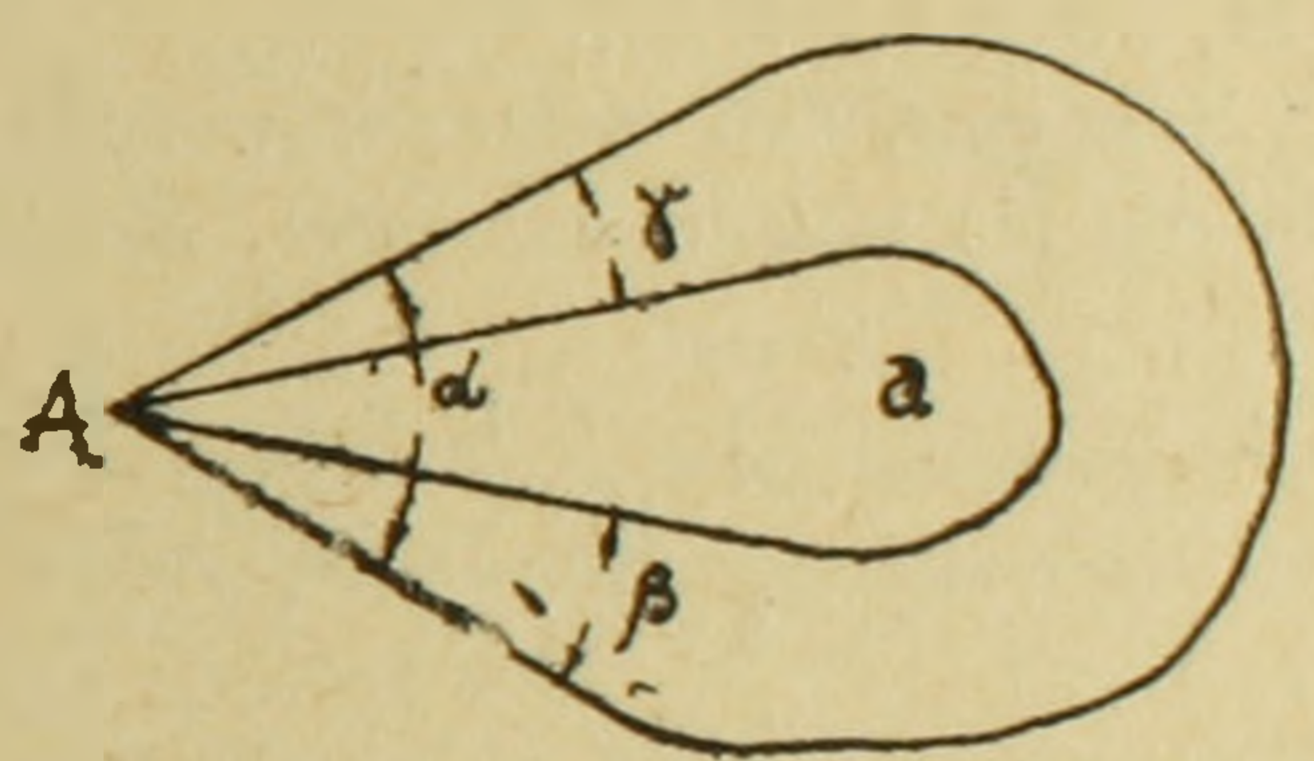
А. Л. Шагинян

Заметки по исследованию полноты рациональных функций в комплексной области*

III

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 9 IV 1944)

1. Пусть D° ограниченная односвязная область, топологически эквивалентная области, ограниченной двумя соприкасающимися окружностями. Предполагаем, что в кратной граничной точке A существуют односторонние касательные к контуру, составляющие между собой определенные углы, указанные на чертеже 1.



Черт. 1.

Через D будем обозначать произвольную область, топологически эквивалентную D° и составляющую часть D°, либо совпадающую с ней. Обозначим через N класс функций f(z) регулярных внутри D и непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$. Через D_2 будем обозначать класс функций регулярных в D и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{D} |f(z)|^2 dxdy < \infty$$

где интегрирование совершается по внутренней площади D. Очевидно в замкнутой области $\overline{D}$ не имеет места полнота полиномов $\{Q_n(z)\}$ в классе N при равномерной аппроксимации по $\overline{D}$.

Укажем условия, когда в областях типа D система полиномов полна при взвешенно-равномерной аппроксимации, либо при аппроксимации в среднем.

Пусть $p(z) > o$ положительная внутри D и ограниченная весовая функция; z_0 афикс точки A.

* Две заметки по этому вопросу печатаются в ДАН СССР.

Теорема I. Для любой $f(z) \in N$ при условии

$$\varliminf_{z \to z_0} \frac{\lg\lg \frac{1}{p(z)}}{\lg \frac{1}{|z - z_0|}} > \frac{\alpha}{\alpha - \beta - \gamma} \tag{1}$$

возможна аппроксимация

$$\sup_{n \to \infty} p(z). \left[F(z) - Q_n(z) \right] \to 0 \tag{2}$$

а в случае

$$\varlimsup_{z \to z_0} \frac{\lg\lg \frac{1}{p(z)}}{\lg \frac{1}{|z - z_0|}} < \frac{\alpha}{\alpha - \beta - \gamma} \tag{3}$$

в области типа D равенство (2), вообще говоря, невозможно. Например (2) не выполняется в D_0 для функции $\frac{1}{z - a}$, при условии (3), a — афикс точки в области дополнительной к D^0 и не содержащей $z = \infty$; $2\pi > \alpha > \beta + \gamma$.

Заметим, что ограничение, налагаемое на весовую функцию $p(z)$ условием (1) можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\lg\lg \frac{1}{p(z)} - \lg\lg \frac{1}{|z - z_0|}}{\lg \frac{1}{|z - z_0|}} > \frac{\alpha}{\alpha - \beta - \gamma} \tag{1'}$$

2. Пусть E произвольная, нигде неплотная совокупность в D, переходящая при преобразовании $t = \sqrt{z - a}$ (черт. 1) в совокупность, не разбивающую плоскость.

Теорема II. Для произвольной непрерывной на E функции $f(z)$, при условии (1) либо (1'), возможна аппроксимация (2), а при условии (3) равенство (2), вообще говоря, не выполняется.

3. Обозначим теперь через $T(\rho)$ линейную меру дуг, которые отсекает область D на окружности радиуса ρ с центром в точке A.

Теорема III. В области D, при условии

$$\varliminf_{\rho \to 0} \frac{\lg\lg \frac{1}{T(\rho)}}{\lg \frac{1}{\rho}} > \frac{\alpha}{\alpha - \beta - \gamma} \tag{4}$$

для любой $f(z) \in D_2$ имеет место равенство

$$\inf_{n \to \infty} \iint\limits_{(D)} |f(z) - Q_n(z)|^2 \, dx\, dy = 0 \tag{5}$$

а при

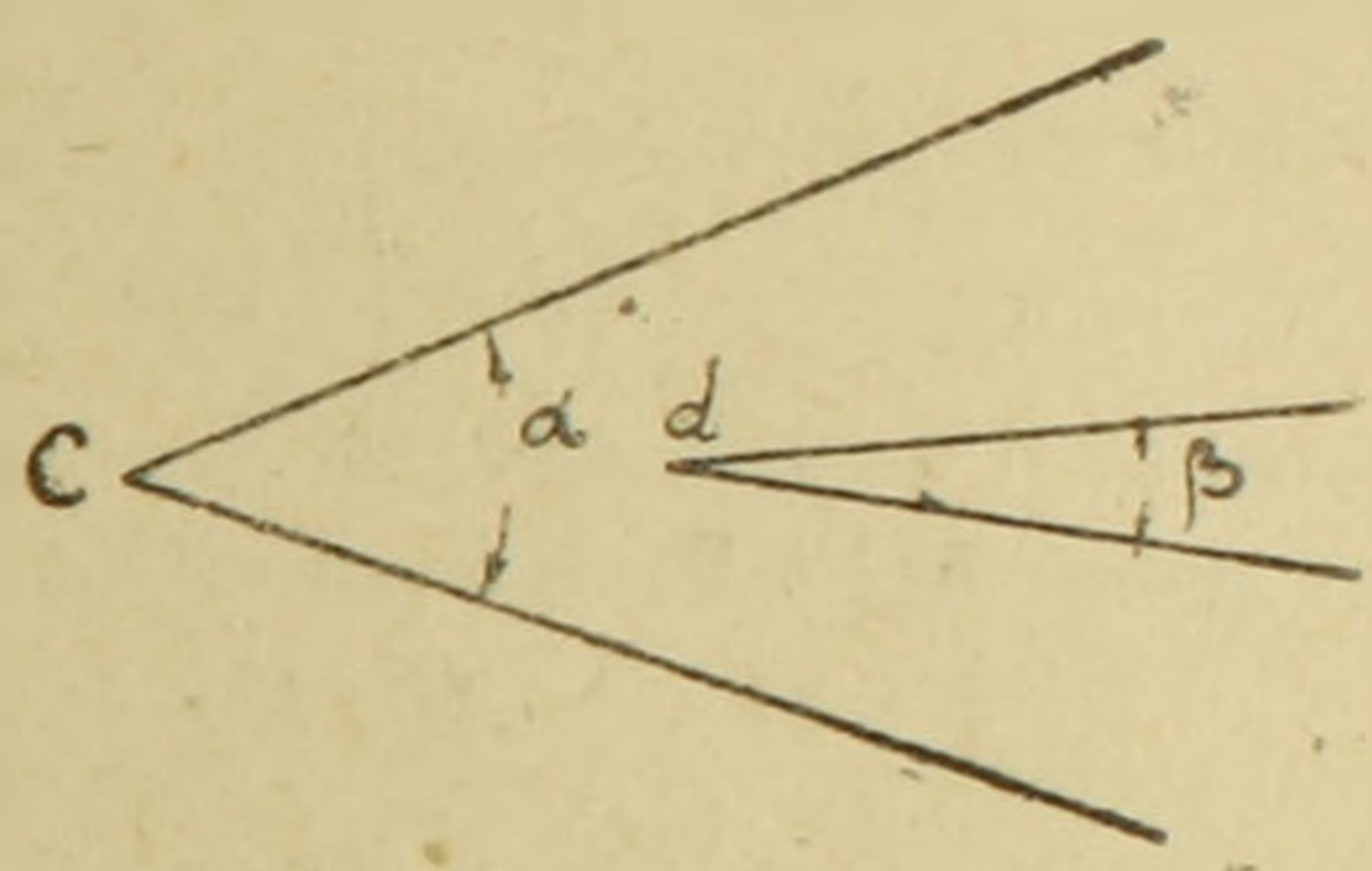
$$\overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{\lg\lg \frac{1}{T(\rho)}}{\lg \frac{1}{\rho}} < \frac{\alpha}{\alpha - \beta - \gamma} \tag{6}$$

равенство (6), вообще говоря, не выполняется.

Условие (4) можно заменить более слабым

$$\underline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{\lg\lg \frac{1}{T(\rho)} - \lg\lg \frac{1}{\rho}}{\lg \frac{1}{\rho}} > \frac{\alpha}{\alpha - \beta - \gamma} \tag{4'}$$

4. Обозначим через B_0 бесконечную область между углами α и β с вершинами соответственно в c и d вещественной оси ox ($c < d$) (черт. 2), $0 < \beta \leqslant \alpha < 2\pi$. Пусть B произвольная неограниченная область, топологически эквивалентная B_0 и составляет часть B_0 либо совпадает с ней. Здесь N означает класс функций $f(z)$ аналитических внутри B и непрерывных вплоть до контура, за исключением, может быть, точки $z = \infty$. $p(z) > 0$ опять положительная внутри B ограниченная весовая функция.



Черт. 2.

Т е о р е м а IV. Если $f(z) \in N$ и $|f(z)| < M = \text{const.}$, то при условии

$$\underline{\lim_{|z| \to \infty}} \frac{\lg\lg \frac{1}{p(z)} - 2\lg\lg|z|}{\lg|z|} > \inf\left\{\frac{\pi}{2\pi - \alpha}; \frac{\pi}{\beta}\right\} \tag{6}$$

в области B

$$\sup_{n \to \infty} p(z). \left| F(z) - Q_n(z) \right| \to 0 \tag{7}$$

А если

$$\overline{\lim_{|z| \to \infty}} \frac{\lg\lg \frac{1}{p(z)}}{\lg|z|} < \inf\left\{\frac{\pi}{2\pi - \alpha}; \frac{\pi}{\beta}\right\} \tag{8}$$

то (7), вообще говоря, не имеет место, напр. для $\frac{1}{z - a}$ (a вне угла α) в B_0.

При условиях этой теоремы имеет место теорема аналогичная теореме II для аппроксимации произвольных непрерывных функций на нигде не плотных совокупностях.

5. Пусть, наконец, B имеет конечную внутреннюю площадь и B_2 класс функций $f(z)$ регулярных в B и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{B} |f(z)|^2 dxdy < \infty .$$

Обозначим через $T(\rho)$ линейную меру дуг, отсекаемых областью B на окружности радиуса ρ с центром в начале координат.

Можно высказать следующую теорему:

Т е о р е м а V. При условии

$$\overline{\lim_{\rho \to \infty}} \frac{\lg\lg \frac{1}{T(\rho)} - 2\lg\lg\rho}{\lg\rho} \geqslant \inf \left\{ \frac{\pi}{2\pi - \alpha} ; \frac{\pi}{\beta} \right\} \tag{9}$$

имеет место

$$\inf_{n \to \infty} \iint\limits_{B} [f(z) - Q_n(z)]^2 dxdy = o \tag{10}$$

для любой $f(z) \varepsilon B_2$. А если

$$\overline{\lim_{\rho \to \infty}} \frac{\lg\lg \frac{1}{T(\rho)}}{\lg\rho} < \inf \left\{ \frac{\pi}{2\pi - \alpha} ; \frac{\pi}{\beta} \right\} \tag{11}$$

равенство (10) вообще не выполняется.

Для доказательства положительных утверждений в приведенных выше теоремах мы применяем метод интерполирования.

Аппроксимируем предварительно данную функцию полиномами в областях Жорданова характера, близких к данным областям. Затем оцениваем рост интерполяционных полиномов в оставшейся части данной области.

Применяем метод интерполирования при равно отстоящих узлах указанный L. Fejer'ом(1). Для доказательства отрицательных результатов пользуемся способом, указанным нами в других наших заметках(2,3)

Физико-математический институт
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1944, апрель

Ա. Լ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Կոմպլեքս փոփոխականի ռացիոնալ մոտավորությունների հարցի շուրջը

Ներկա հոդվածում մենք բերում ենք մի քանի նոր արդյունքներ կշռյալ և միջին մոտավորությունների խնդրում, երբ տիրույթը ոչ ժորդանյան է կամ անսահմանափակ և եզրային կրկնակի կետում կան անկյուններ։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Götting. Nachr. 1916, 1918. 2. ДАН СССР 1940 г. 3. Известия АН СССР, т. 5 № 4—5 1941. Мат. серия.