Известия НАН Армении, Физика, т.60, №2, с.190–196 (2025)

УДК 530.145
DOI: 10.54503/0002-3035-2025-60.2-190

ЭФФЕКТ ШТАРКА В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ МИК–КЕПЛЕРА

Л.Г. МАРДОЯН*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: mardoyan@theor.jinr.ru, mardoyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 10 марта 2025 г.)

Рассмотрен эффект Штарка в обобщенной задаче МИК–Кеплера. Приведены волновая функция обобщенной задачи МИК–Кеплера для дискретного спектра энергии в параболических координатах, а также интегралы движения, собственными функциями которых является параболический базис. Показано, что в обобщенной задаче МИК–Кеплера имеется линейный эффект Штарка, полностью снимающий вырождение энергетических уровней по азимутальному квантовому числу, и вычислен ее дипольный момент. Получено явное выражение для добавочного интеграла движения для обобщенной задачи МИК–Кеплера при наличии постоянного однородного электрического поля.

1. Введение

Предложенную нами [1] модель минимально суперинтегрируемой системы, описываемую гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{\lambda_1}{r(r+z)} + \frac{\lambda_2}{r(r-z)}, \tag{1}$$

где λ_1 и λ_2 неотрицательные постоянные, мы назвали обобщенной задачей МИК-Кеплера. При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ гамильтониан (1) переходит в гамильтониан

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\mu}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r}, \tag{2}$$

который описывает задачу МИК–Кеплера, построенную Цванцигером [2], а потом заново открытую МакИнтошем и Кизнеросом [3]. Здесь векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{g}{r(r-z)}(y, -x, 0) \tag{3}$$

соответствует монополю Дирака [4] с магнитным зарядом $g = \hbar cs/e$ ($s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots$) и с осью сингулярности $z > 0$.

Отличительной особенностью этой системы является кулоновская скрытая симметрия, определяемая следующими интегралами движения:

$$\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{r} \times \left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) - s\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left[\hat{\mathbf{J}} \times \left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) - \left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \times \hat{\mathbf{J}}\right] - \frac{e\sqrt{\mu}}{\hbar}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{5}$$

Здесь оператор $\hat{\mathbf{J}}$ определяет угловой момент системы, а оператор $\hat{\mathbf{I}}$ является аналогом вектора Рунге–Ленца. Подобно задаче Кулона эти интегралы движения вместе с гамильтонианом (2) образуют квадратичную алгебру. При фиксированных отрицательных значениях энергии интегралы движения составляют алгебру so(4), а при положительных значениях энергии – so(3,1). В силу скрытой симметрии задача МИК–Кеплера факторизуется не только в сферических и параболических координатах, а также в вытянутых сфероидальных координатах. Таким образом, система МИК–Кеплера является естественным обобщением кулоновской проблемы при наличии монополя Дирака.

Система МИК–Кеплера может быть построена путем редукции четырехмерного изотропного осциллятора с использованием так называемого преобразования Кустаанхеймо–Штифеля (KS-преобразование) [5] как на классическом, так и на квантовом уровнях [6–8].

Для целых значений s система МИК–Кеплера описывает относительное движение двух дираковских дионов (заряженных магнитных монополей), где вектор $\mathbf{r}$ определяет положение второго диона относительно первого [2]. Для полуцелого s предполагается наличие магнитного поля соленоида, придающего системе спин 1/2 [9, 10].

Гамильтониан (1) при $s = 0$ и $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2$) переходит в гамильтониан обобщенной системы Кеплера–Кулона [11]

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta - \frac{e^2}{r} + \frac{\lambda_1}{r(r+z)} + \frac{\lambda_2}{r(r-z)}. \tag{6}$$

Потенциальная энергия

$$V = -\frac{e^2}{r} + \frac{\lambda_1}{r(r+z)} + \frac{\lambda_2}{r(r-z)} \tag{7}$$

является одним из потенциалов типа Смородинского–Винтерница [12]. Потенциалы типа Смородинского–Винтерница были возрождены и исследованы Эвансом [13]. В случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ потенциал (7) сводится к потенциалу Хартманна, который использовался для описания аксиально-симметричных систем, подобных кольцеобразным молекулам [14–17].

Наконец, при $s = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ мы приходим к обычной задаче Кеплера–Кулона.

Также следует отметить, что переменные в уравнение Шредингера для обобщенной задачи МИК–Кеплера разделяются не только в сферических и параболических координатах [1], но также и в вытянутых сфероидальных координатах [18]. В работе [19] показано, что обобщенная система МИК–Кеплера и четырехмерный двойной сингулярный осциллятор дуальны друг другу, а преобразованием дуальности является обобщенная версия преобразования Кустаанхеймо–Штифеля. В работе [20] вычислены сферические и параболические волновые функции для обобщенной задачи МИК–Кеплера в непрерывном спектре и решена квантово-механическая задача рассеяния заряженных частиц в обобщенной системе МИК–Кеплера.

Отметим также, что обобщенная задача МИК–Кеплера и дуальный ей четырехмерный двойной сингулярный осциллятор с разных точек зрения рассматривались в работах [21–34].

2. Параболический базис

Согласно работе [1] (см. также [35]), нормированная на единицу волновая функция обобщенной задачи МИК–Кеплера в параболических координатах $\xi, \eta \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, которые определяются формулами

$$x=\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi,\quad y=\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi,\quad z=\frac{1}{2}(\xi-\eta),\tag{8}$$

имеет вид

$$\psi^{(s)}_{n_1n_2m}\left(\xi,\eta,\varphi;\delta^{(s)}_1,\delta^{(s)}_2\right)=\kappa^2\sqrt{\frac{r_0}{\pi}}\Phi_{n_1m_1}\left(\xi;\delta^{(s)}_1\right)\Phi_{n_2m_2}\left(\eta;\delta^{(s)}_2\right)e^{i(m-s)\varphi},\tag{9}$$

где

$$\Phi_{pq}\left(x;\delta^{(s)}_i\right)=\sqrt{\frac{\Gamma(p+q+1)}{p!}}\frac{e^{-\kappa x/2}}{\Gamma(q+1)}(\kappa x)^{q/2}F(-p;q+1;\kappa x).\tag{10}$$

Здесь $\kappa=\sqrt{-2\mu E}/\hbar$, $F(a;c;x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, m – азимутальное квантовое число, n_1 и n_2 – параболические квантовые числа, а

$$m_1=|m-s|+\delta^{(s)}_1=\sqrt{(m-s)^2+4\mu\lambda_1/\hbar^2},$$
$$m_2=|m+s|+\delta^{(s)}_2=\sqrt{(m+s)^2+4\mu\lambda_2/\hbar^2}.$$

Энергетический спектр обобщенной задачи МИК–Кеплера определяется формулой

$$E^0_n=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2\left(n+\frac{\delta^{(s)}_1+\delta^{(s)}_2}{2}\right)^2},\qquad n=|s|+1,|s|+2,\ldots,\tag{11}$$

где n – главное квантовое число и оно связано с параболическими квантовыми числами следующим образом:

$$n=n_1+n_2+m_++1.\tag{12}$$

Здесь

$$m_\pm=\frac{|m+s|\pm|m-s|}{2}.$$

Отметим, что параболическая волновая функция обобщенной задачи МИК–Кеплера является собственной функцией системы коммутирующих операторов $\{\hat{H},\hat{\Omega}^{(s)},\hat{J}_z\}$, и имеют место следующие спектральные задачи:

$$\hat{\Omega}^{(s)}\psi^{(s)}_{n_1n_2m}=\ \Omega^{(s)}\psi^{(s)}_{n_1n_2m}=\frac{\kappa\hbar}{\sqrt{\mu}}\left(n_1-n_2-m_-+\frac{\delta^{(s)}_1-\delta^{(s)}_2}{2}\right)\psi^{(s)}_{n_1n_2m},$$
$$\hat{J}_z\,\psi^{(s)}_{n_1n_2m}=\left(s-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi^{(s)}_{n_1n_2m}=m\psi^{(s)}_{n_1n_2m}.$$

Здесь оператор $\hat{\Omega}^{(s)}$ имеет вид:

$$\hat{\Omega}^{(S)}=\hat{I}_Z+\frac{\sqrt{\mu}}{\hbar}\left[\lambda_1\frac{r-z}{r(r+z)}-\lambda_2\frac{r+z}{r(r-z)}\right],\tag{13}$$

где $\hat{I}_z$ – z-компонента аналога вектора Рунге–Ленца (5). Оператор $\hat{\Omega}^{(s)}$ получается путем исключения энергии E из уравнений, полученных после разделения переменных в уравнении Шредингера в параболических координатах, собственным значением которого является параболическая постоянная разделения $\Omega^{(s)}$.

В конце отметим, что оператор $\hat{\Omega}^{(s)}$ в параболических координатах имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}^{(s)}=\frac{\hbar}{\sqrt{\mu}}\left\{\frac{2}{\xi+\eta}\left[\xi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)-\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]+\frac{\xi-\eta}{2\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{2is\xi}{\eta(\xi+\eta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{2s^2\xi}{\eta(\xi+\eta)}\right\}\\+\frac{2\sqrt{\mu}}{\hbar}\left[\lambda_1\frac{\eta}{\xi(\xi+\eta)}-\frac{\lambda_2\xi}{\eta(\xi+\eta)}\right].\end{aligned}\tag{14}$$

3. Эффект Штарка

Гамильтониан обобщенной задачи МИК–Кеплера во внешнем постоянном однородном электрическом поле имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{\lambda_1}{r(r+z)} + \frac{\lambda_2}{r(r-z)} + |e|\varepsilon z. \tag{15}$$

Мы считаем, что электрическое поле ε направлено в положительном, а действующая на электрон сила – в отрицательном направлении оси z. Поскольку гамильтониан (15) обладает аксиальной симметрией, уравнение Шредингера обобщенной задачи МИК–Кеплера во внешнем постоянном однородном электрическом поле удобно рассмотреть в параболических координатах. Таким образом, для вычисления матричных элементов переходов между взаимно вырожденными состояниями удобно выбрать в качестве невозмущенных волновых функций параболические волновые функции (9) обобщенной задачи МИК–Кеплера.

Нас интересуют матричные элементы переходов $n_1\, n_2\, m \;\rightarrow n_1' n_2' m'$ при фиксированном значении главного квантового числа n. Так как оператор возмущения есть $\widehat{V} = |e|\varepsilon z = |e|\varepsilon(\xi - \eta)/2$, то согласно теории возмущений, поправка первого приближения к собственному значению энергии E_n^0 (11) есть

$$E_n^{(1)} = \int \psi^{(s)*}_{n_1 n_2 m}\left(\xi,\eta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)\hat{V}\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}\left(\xi,\eta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)dV. \tag{16}$$

С учётом (9) имеем

$$E_n^{(1)} = \frac{|e|\varepsilon}{4r_0^3\left(n+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)^4}\left(\mathfrak{I}_{n_1 m_1} I_{n_2 m_2} - I_{n_1 m_1}\mathfrak{I}_{n_2 m_2}\right), \tag{17}$$

где $r_0 = \hbar^2/\mu e^2$ – боровский радиус, а

$$I_{pq} = \int_0^\infty \left[\Phi_{pq}(x)\right]^2 dx, \qquad \mathfrak{I}_{pq} = \int_0^\infty x^2\left[\Phi_{pq}(x)\right]^2 dx, \tag{18}$$

Далее мы воспользуемся формулами [36, 37]

$$\int_0^\infty e^{\lambda x} x^{\nu} \mathrm{F}(\alpha;\gamma;kx)dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}} F\left(\alpha,\nu+1;\gamma;\frac{k}{\lambda}\right),$$

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

где $F(a,b;c;x)$ – гипергеометрическая функция. Отметим, что согласно [37], последнее формула имеет место при условии $\mathcal{R}e\; c > \; Re\; a > 0$, $\mathcal{R}e$ (c – a – b) > 0. В нашем случае эти условия соблюдаются. В результате мы получим для интегралов I_{pq} и $\mathfrak{I}_{pq}$ следующие выражения:

$$I_{pq} = \frac{1}{\kappa} = r_0\left(n + \frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right), \quad \mathfrak{I}_{pq} = \frac{2}{\kappa^3}\left[3p(p+q+1) + \frac{1}{2}\,q(q+3) + 1\right].$$

Теперь, пользуясь вычисленными интегралами, можно найти поправку первого приближения к собственному значению энергии (11):

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} = \frac{1}{2} r_0|e|\varepsilon\Big\{3\Big[\left(n + \frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)\left(n_1 - n_2 - m_- + \frac{\delta_1^{(s)}-\delta_2^{(s)}}{2}\right) + \frac{ms}{3} \\ + \left(n_1 - n_2 - \frac{m_-}{3}\right)\left(\delta_1^{(s)} + \delta_2^{(s)}\right)\Big] - \frac{\mu}{\hbar^2}(\lambda_1 - \lambda_2)\Big\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, как и в случае атома водорода, линейный член по n пропорционален z- компоненте вектора Рунге–Ленца. Однако имеются дополнительные линейные по m поправки, снимающие вырождение по z-компоненте вращательного момента.

Итак, в обобщенной задаче МИК–Кеплера, как и в системе заряд–дираковский дион [38], имеется линейный эффект Штарка, полностью снимающий вырождение по азимутальному квантовому числу m.

При фиксированном s, согласно формуле (12), две крайние компоненты расщепившегося уровня соответствуют следующим значениям параболических квантовых чисел: $n_1 = n - |s| - 1$, $n_2 = 0$ и $n_1 = 0, n_2 = n - |s| - 1$. Согласно (19), расстояние между этими крайними уровнями есть

$$\Delta E_n = 3r_0|e|\varepsilon n(n - |s| - 1),$$

т.е., как и в случае атома водорода, общее расщепление уровня при эффекте Штарка примерно пропорционально n^2.

Наличие линейного эффекта Штарка означает, что в невозмущенном состоянии обобщенная задача МИК–Кеплера обладает дипольным моментом со среднем значением

$$\begin{aligned}\bar{d}_z = -\frac{1}{2}r_0|e|\Bigg\{3\Bigg[\left(n + \frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)\left(n_1 - n_2 - m_- + \frac{\delta_1^{(s)}-\delta_2^{(s)}}{2}\right) + \frac{ms}{3} \\ + \left(n_1 - n_2 - \frac{m_-}{3}\right)\left(\delta_1^{(s)} + \delta_2^{(s)}\right)\Bigg] - \frac{\mu}{\hbar^2}(\lambda_1 - \lambda_2)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{20}$$

Из выражения для среднего дипольного момента естественно следует определение оператора

$$\begin{aligned}\hat{d} = -\frac{1}{2}r_0|e|\Bigg\{3\Bigg[\frac{r_0\sqrt{\mu}}{\hbar}\left(n + \frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)^2 \widehat{\Omega}^{(s)} + \frac{s}{3}\hat{J}_z \\ + \left(n_1 - n_2 - \frac{m_-}{3}\right)\left(\delta_1^{(s)} + \delta_2^{(s)}\right)\Bigg] - \frac{\mu}{\hbar^2}(\lambda_1 - \lambda_2)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{21}$$

или, с учетом формулы для энергетического спектра обобщенной задачи МИК–Кеплера (11), имеем

$$\hat{d} = \frac{3}{2}|e|\left\{\frac{\hbar\widehat{\Omega}^{(s)}}{2\sqrt{\mu E_n^0}} - r_0\left[\frac{s}{3}\hat{J}_z + \left(n_1 - n_2 - \frac{m_-}{3}\right)\left(\delta_1^{(s)} + \delta_2^{(s)}\right)\right] - \frac{|e|}{2e^2}(\lambda_1 - \lambda_2)\right\}. \tag{22}$$

Уравнение Шредингера для обобщенной задачи МИК–Кеплера во внешнем постоянном однородном электрическом поле, описываемое гамильтонианом (15), как и уравнение Шредингера с гамильтонианом (1) с $\varepsilon = 0$, допускает разделение переменных в параболических координатах. Подстановка

$$\psi(\xi, \eta, \varphi) = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta)\frac{e^{i(m-s)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

приводит к двум уравнениям:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\Phi_1}{d\xi}\right) + \left[\frac{\mu E}{2\hbar^2}\xi - \frac{m_1^2}{4\xi} + \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar}\mathrm{M}^{(s)}\left(\varepsilon, \delta_1^{(s)}, \delta_2^{(s)}\right) + \frac{1}{2r_0}\right]\Phi_1 = 0, \tag{23}$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{d\Phi_2}{d\eta}\right) + \left[\frac{\mu E}{2\hbar^2}\eta - \frac{m_2^2}{4\eta} - \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar}\mathrm{M}^{(s)}\left(\varepsilon, \delta_1^{(s)}, \delta_2^{(s)}\right) + \frac{1}{2r_0}\right]\Phi_2 = 0. \tag{24}$$

Здесь энергию E будем рассматривать как параметр, а постоянную разделения $M^{(s)}\left(\varepsilon, \delta_1^{(s)}, \delta_2^{(s)}\right)$ – как собственное значение оператора $\widehat{M}^{(s)}$, явный вид которого получаем путем исключения энергии E из уравнений (23) и (24). Этот добавочный интеграл движения в параболических координатах имеет вид:

$$\begin{aligned}\widehat{M}^{(s)} = \frac{\hbar}{\sqrt{\mu}}\Bigg\{\frac{2}{\xi+\eta}\left[\xi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right] + \frac{\xi-\eta}{2\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{2is\xi}{\eta(\xi+\eta)} - \\ \frac{2s^2}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{\xi-\eta}{r_0(\xi+\eta)}\Bigg\} + \frac{2\sqrt{\mu}}{\hbar}\left[\frac{\lambda_1\eta}{\xi(\xi+\eta)} - \frac{\lambda_2\xi}{\eta(\xi+\eta)}\right] + \frac{\sqrt{\mu}|e|\varepsilon}{4\hbar}\xi\eta.\end{aligned}$$

Далее, учитывая формулу (14), последнее соотношение можно записать в виде

$$\widehat{M}^{(s)} = \widehat{\Omega}^{(s)} + \frac{\sqrt{\mu}|e|\varepsilon}{4\hbar}\xi\eta + \frac{\sqrt{\mu}|e|\varepsilon}{4\hbar}(x^2 + y^2).$$

Отметим, что при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ полученные в этой работе формулы переходят в соответствующие формулы для эффекта Штарка в системе заряд–дираковский дион полученные нами в работе [38].

И наконец важно отметить, что при $s = 0$, полученные нами результаты описывают линейный эффект Штарка для обобщенной системы Кеплера–Кулона (6), и как нам известно эта задача до сих пор не была рассмотрена, а при $s = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ полученные нами формулы переходят в соответствующие формулы для атома водорода.

4. Заключение

Рассмотрен эффект Штарка в обобщенной задаче МИК–Кеплера, описывающей взаимодействие заряда с дираковским дионом в поле обобщенного кольцеобразного потенциала. Найдено, что несмотря на сходство обобщенной задачи МИК–Кеплера, и следовательно системы заряд–дион, с атомом водорода, отношение первой к эффекту Штарка качественно иное. Именно в обобщенной задаче МИК–Кеплера и в системе заряд–дираковский дион имеет место линейный эффект Штарка, полностью снимающий вырождение энергетического спектра по азимутальному квантовому числу m. Наличие линейного эффекта Штарка, как и ненулевого дипольного момента обобщенной задачи МИК–Кеплера являются следствием присутствия магнитного монополя.

Наконец, было бы интересно провести аналогичный анализ эффекта Штарка в обобщенной задаче МИК–Кеплера на трехмерной сфере и гиперболоиде с целью выяснения его зависимости от кривизны пространства. Еще более поучительным может быть исследование эффекта Штарка в пятимерной задаче $SU(2)$ монополя Янга–Кулона [39, 40] в силу наличия изоспиновых степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **L. Mardoyan**. J. Math. Phys., **44**, 4981 (2003).
2. **D. Zwanziger**. Phys. Rev., **176**, 1480 (1968).
3. **H. McIntosh, A. Cisneros.** J. Math. Phys., **11**, 896 (1970).
4. **P.A.M. Dirac**. Proc. Roy. Soc. A, **133**, 60 (1931).
5. **P.Kustaanheimo, E.Stiefel.** J. ReineAngew. **218**, 204 (1965).
6. **T. Iwai, Y. Uwano.** J. Phys. A, **21**, 4083 (1988).
7. **A. Nersessian, V. Ter-Antonyan**. Mod. Phys. Lett. A, **9**, 2431 (1994).
8. **A. Nersessian, V. Ter-Antonyan.** Mod. Phys. Lett. A, **10**, 2633 (1995).
9. **A. Nersessian, V. Ter-Antonyan, M.M.Tsulaia.** Mod. Phys. Lett. A, **11**, 1605 (1996).
10. **A. Nersessian, V. Ter-Antonyan.** Phys. At. Nucl., **61**, 1756 (1998).
11. **M. Kibler, L.G. Mardoyan, G.S.Pogosyan**. Int. J. Quan. Chem., **52**, 1301 (1994).
12. **J. Fris, V. Mandrosov, Ya.A. Smorodinsky, M. Uhlir, P.Winternitz.** Phys. Lett., **16**, 354, (1965).
13. **N.W. Evans.** Phys. Lett. A, **147**, 483 (1990).
14. **H. Hartmann.** Theor. Chim. Acta, **24**, 201 (1972).

15. **H. Hartmann, R. Schuch, J. Radke.** Theor. Chim. Acta, **42,** 1 (1976).
16. **H. Hartmann, R. Schuch.** Int. J. Quant. Chem., **18**, 125 (1980).
17. **C. Quesne.** J. Phys. A., **21**, 3093 (1988).
18. **L.G. Mardoyan.** Phys. At. Nucl., **68**, 1746 (2005).
19. **L.G. Mardoyan, M.G. Petrosyan.** Phys. At. Nucl., **70**, 572 (2007).
20. **Л.Г. Мардоян.** ТМФ, **217**, 285 (2023).
21. **N. Ünal**. J. Math. Phys., **47**, 122105 (2006).
22. **P.R. Giri**. Mod. Phys. Lett. A, **22**, 2365 (2007).
23. **P.R. Giri**. Mod. Phys. Lett. A, **23**, 895 (2008).
24. **P.R. Giri**. Int. J. Mod. Phys. A, **25**, 155 (2010).
25. **A. Nersessian, V. Yeghikyan.** J. Phys. A, **41**, 155203 (2008).
26. **I. Marquette**. J. Math. Phys., **51**, 102105 (2010).
27. **I. Marquette**. J. Phys. A, **44**, 235203 (2011).
28. **M.F. Hoque, I. Marquette, Y.-Z. Zhang**. J. Phys. A, **48**, 445207 (2015).
29. **M.F. Hoque, I.Marquette, Y.-Z. Zhang**. J. Math. Phys., **57**, 092104 (2016).
30. **M. Salazar-Ramìrez, D. Martìnez, V.D. Granados, R.D.Mota**. ArXiv: quant-ph/1005.3973.
31. **M. Salazar-Ramìrez, D. Ojeda-Guillé, R.D. Mota.** J. Math. Phys., **57**, 021704 (2016).
32. **H. Shmavonyan**. Phys. Lett. A., **383**, 1223 (2019).
33. **A. Lavrenov**. ArXiv: math-ph/1908.03572.
34. **M.G. Petrosyan.** Phys. At. Nucl.,**71**, 1094 (2008).
35. **L.G. Mardoyan.** ArXiv: math-ph/2411.07733.
36. **Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.** Квантовая механика. Москва, Наука, 1974.
37. **Г. Бейтмен, А. Эрдейи.** Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Москва, Наука, 1973.
38. **Л.Г. Мардоян, А.П. Нерсесян, М.Г. Петросян.** ТМФ, **140**, 78 (2004).
39. **Л.Г. Мардоян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян.** ЯФ, **61**, 1859 (1998).
40. **L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan.** Mod. Phys. Lett. A, **14**, 1303 (1999).

STARK EFFECT IN THE GENERALIZED MIC–KEPLER PROBLEM

L.G. MARDOYAN

The Stark effect in the generalized MIK–Kepler problem is considered. The wave function of the generalized MIK–Kepler problem for a discrete energy spectrum in parabolic coordinates are presented, as well as the integrals of motion whose eigenfunctions is the parabolic basis. It is shown that in the generalized MIK–Kepler problem there is a linear Stark effect, completely removing the degeneracy of energy levels in the azimuthal quantum number, and its dipole moment is calculated. An explicit expression for the additional integral of motion for the generalized MIK–Kepler problem in the presence of a constant uniform electric field is obtained.