

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА ДЛЯ РАСПАДА $b \rightarrow s\gamma$

Г. Г. АСАТРЯН*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: hrachya.asatryan@ysu.am

(Поступила в редакцию 4 июня 2025 г.)

В недавних работах был вычислен полный набор трехпетлевых диаграмм (порядка α_s^2), связанных с ток-токовыми операторами O_1 и O_2 , вносящими вклад в амплитуду распада $b \rightarrow s\gamma$. В данной статье одна пара таких диаграмм вычисляется при различных значениях массы очарованного кварка m_c с использованием различных методов, а точность и удобство численных методов сравниваются с аналитическими результатами, полученными другими. Точные численные результаты в широком диапазоне значений массы очарованного кварка были получены с использованием AMFlow и DiffExp для решения дифференциальных уравнений на мастер интегралы. Кроме того, были выполнены асимптотические разложения и разложение в ряд Тейлора вокруг точек $z = m_c^2/m_b^2 = 0$ и $z = 1/10$, соответственно. Также было выполнено полностью численное вычисление мастер-интегралов с помощью программы PySecDec.

1. Введение

Редкие распады B -мезонов, такие как инклюзивный радиационный переход $B \rightarrow X_s\gamma$, в Стандартной Модели (СМ) подавлены петлевыми диаграммами, что делает их чувствительными индикаторами возможных виртуальных эффектов новой физики. Текущее экспериментальное среднее значение коэффициента ветвления при нижнем пороге энергии фотона $E_\gamma > 1.6$ ГэВ составляет $\mathcal{B}(B \rightarrow X_s\gamma) = (3.49 \pm 0.19) \times 10^{-4}$ [1]. В ближайшем будущем эксперимент Belle II, как ожидается, улучшит текущую экспериментальную точность.

Теоретически предсказания получаются с помощью низкоэнергетического эффективного гамильтониана с пятью активными ароматами кварков, в котором тяжелые электрослабые бозоны и t -кварк интегрированы. Для соответствия ожидаемой экспериментальной точности требуется полный анализ на уровне NNLL (next-to-next-to-leading logarithmic order), то есть включение двухпетлевых матричных элементов, а также трёхпетлевых аномальных размерностей и двухпетлевых вкладов от излучения (bremsstrahlung).

Постоянным источником теоретической неопределённости долгое время оставалась NNLL-интерференция между ток-токовыми операторами $O_{1,2}$ и электромагнитным дипольным оператором O_7 . До недавнего времени этот вклад был известен лишь посредством интерполяции между пределами $m_c \gg m_b$ и $m_c \rightarrow 0$ [2, 3], что вносило ошибку порядка $O(3\%)$ в общее предсказание. В работах [4–7]

данная интерполяция была устранена путем вычисления точной зависимости интерференционной амплитуды операторов $O_{1,2}-O_7$ от массы очарованного кварка. В этих работах был аналитически вычислен полный набор диаграмм порядка α_s^2 , вносящих вклад в переход $b \rightarrow s\gamma$, при физическом значении массы кварка m_c .

В настоящем исследовании проводится сравнительный анализ современных численных техник вычисления многоцикловых интегралов с использованием амплитуды перехода $B \rightarrow X_s\gamma$ в качестве эталона. Для этого были выбраны две характерные диаграммы из аналитического вычисления, проведённого в работе [4], для которых доступны точные аналитические результаты (рис. 1). Эти диаграммы были пересчитаны с помощью нескольких современных численных методов, таких как метод разложения по секторам с использованием PySecDec [8], решение дифференциальных уравнений с помощью DiffExp [9] и метод вспомогательного массового потока AMFlow [10]. Сравнение численных результатов с известными аналитическими выражениями позволяет количественно оценить достижимую точность и практическое удобство применения каждого из методов и может служить ориентиром для будущих теоретических исследований редких распадов B -мезонов с высокой точностью.

2. Теория

Вычисление амплитуд распада B -мезона (или b -кварка) наиболее удобно проводить в рамках эффективной теории слабых взаимодействий (Weak Effective Theory, WET), в которой все частицы СМ с массами порядка электрослабого масштаба уже интегрированы. Получающийся низкоэнергетический лагранжиан содержит обычные взаимодействия лёгких кварков в рамках квантовой хромодинамики и квантовой электродинамики, дополненные бесконечной серией локальных операторов более высокой размерности, которая на практике обрывается на операторах размерности 6 [11, 12]. Для вкладов, рассматриваемых в данной работе, WET-лагранжиан можно записать в виде:

$$L_{\text{WET}} = L^4 + \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{ts}^* V_{tb} [C_1 O_1 + C_2 O_2 + C_7 O_7],$$

где

$$O_1 = (\bar{s}\gamma_\mu P_L T^a c)(\bar{c}\gamma^\mu P_L T^a b),$$

$$O_2 = (\bar{s}\gamma_\mu P_L c)(\bar{c}\gamma^\mu P_L b),$$

$$O_7 = \frac{e}{16\pi^2} m_b(\mu)(\bar{s}\sigma_{\mu\nu} P_R b)F^{\mu\nu}.$$

Член $L^{(4)}$ включает кинетические и массовые члены для лёгких кварков u, d, s, c, b , а также их взаимодействия с фотонами и глюонами. Используются обозначения $P_{L,R} = (1 \mp \gamma_5)/2$ для операторов киральной проекции и $\sigma_{\mu\nu} \equiv (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Принятые соглашения для калибровочно-ковариантной производной имеют вид: $D_\mu q = (\partial_\mu + ieQ_q A_\mu + ig_s T^A G_\mu^A)q$, а величина $m_b(\mu)$ в операторе O_7 обозначает массу b -кварка в $\overline{MS}$ -схеме, ренормированную при масштабе μ .

На протяжении всей работы масса странного кварка m_s последовательно опускается во всех выражениях.

3. Вычислительные методы

Для вычисления трёхпетлевых мастер-интегралов были использованы как методы решения дифференциальных уравнений, так и методы разложения по секторам. Программы DESolver (встроенный решатель дифференциальных уравнений в AMFlow), метод вспомогательного массового потока (AMFlow), DiffExp и SeaSyde [13] решают дифференциальные уравнения для мастер-интегралов (обычно с помощью разложений в ряды) и обеспечивают высокоточную численную оценку. Напротив, программы PySecDec и FIESTA5 [14] используют метод разложения по секторам с последующим прямым численным интегрированием. Далее описан каждый инструмент с указанием того, является ли метод полуаналитическим или полностью численным, а также как в нем обеспечивается обработка граничных условий.

Среди аналитических подходов ключевым методом является решение систем дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют мастер интегралы. В благоприятных случаях эти системы можно привести к каноническому виду, в котором явно факторизуется зависимость от параметра размерностной регуляризации ϵ :

$$\partial_x \mathbf{M}(\epsilon, x) = \epsilon \mathbf{A}(x) \mathbf{M}(\epsilon, x),$$

где $\mathbf{M}(\epsilon, x)$ — вектор мастер-интегралов, а $\mathbf{A}(x)$ — матрица рациональных функций, имеющая лишь логарифмические сингулярности. В этом виде решение представляется рядом по ϵ , коэффициенты которого выражаются через итеративные интегралы над структурой сингулярностей $\mathbf{A}(x)$ — обычно через обобщённые полилогарифмы Гончарова (GPL). Для решения системы требуется как выбор подходящего преобразования к каноническому виду, так и фиксация констант интегрирования через граничные условия, чаще всего выбираемые в пределах $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$. Данный подход был применён для вычисления соответствующих мастер-интегралов в работах [4, 15].

Метод вспомогательного массового потока является систематическим вариантом подхода на основе дифференциальных уравнений и реализован в пакете

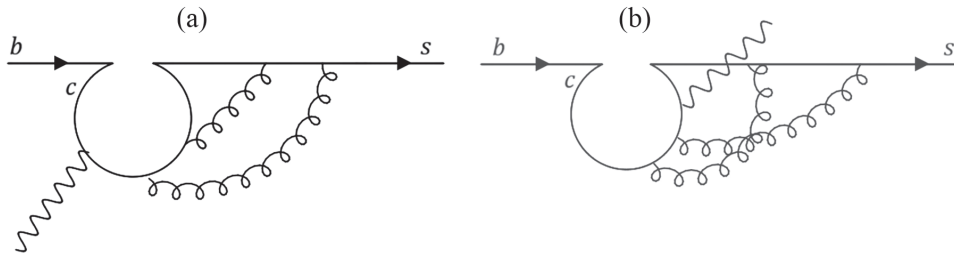


Рис.1. Две диаграммы, для которых выполнены вычисления. Диаграммы имеют одинаковый набор пропагаторов, но различаются порядком вершин вдоль s -линии: (а) фотон испускается из s -линии до присоединения глюонных линий; глюонные линии не пересекаются, (б) фотон испускается между двумя глюонными вершинами на s -линии; глюонные линии пересекаются.

AMFlow. Вводится фиктивный массовый параметр η во все пропагаторы, в результате чего каждый интеграл становится $I(\eta)$, причём при $\eta \rightarrow \infty$ задача упрощается. Затем выводятся дифференциальные уравнения $\partial_\eta I(\eta) = A(\eta)I(\eta)$. Ключевым преимуществом является простота задания граничных условий при $\eta \rightarrow \infty$ (обычно это рациональные значения для старших по ϵ членов). Система решается аналитическим продолжением от $\eta \rightarrow \infty$ до $\eta = 0$ через комплексную плоскость η , с выбором пути в обход точек ветвления и выполнением серии разложений Фробениуса в промежуточных точках $\{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_l\}$. В частности, в AMFlow процедура делится на три этапа: первый этап — разложение всех интегралов при $\eta \rightarrow \infty$ и вычисление первой точки η_0 ; второй этап — для каждого сегмента $i = 0, \dots, l-1$ осуществляется разложение в точке η_i и с его помощью результат переносится в следующую точку η_{i+1} ; третий этап — формальное разложение около точки $\eta = 0$ с подгонкой в точке η_l для восстановления оставшихся неизвестных коэффициентов ряда. Затем определяется предел $\eta \rightarrow i0^+$ для получения физических интегралов при $\eta = 0$. Каждое разложение приводит к рекуррентным соотношениям для коэффициентов по степеням $\eta - \eta_i$ и ϵ , фиксируемым граничными условиями при $\eta \rightarrow \infty$, и условием непрерывности. Этот метод существенно упрощает как структуру системы ДУ, так и обработку граничных условий. Таким образом, метод вспомогательного массового потока является полуаналитическим, поскольку он опирается на аналитические разложения в η , которые, однако, численно суммируются. Метод полностью реализован в AMFlow и активно используется для многоцикловых задач.

Пакет AMFlow также включает встроенный решатель дифференциальных уравнений, называемый DESolver, который принимает систему линейных дифференциальных уравнений для мастер-интегралов и «переносит» граничные значения вдоль выбранной переменной (например, кинематического соотношения). Пользователь предоставляет матрицу дифференциальных уравнений и граничные условия в начальной точке; затем DESolver численно интегрирует эти уравнения до новых точек. На практике DESolver использует разложения в ряды (ряды Фробениуса) и высокоточную арифметику для продвижения решения. Решатель не требует канонического базиса — он способен работать с любым набором мастер-интегралов, полученным путём редукции методом интеграции по частям, что делает его гибким для произвольных систем дифференциальных уравнений.

В процессе работы DESolver строит усечённые степенные ряды вокруг последовательных точек и согласует их, чтобы продолжить решение. В тестовых расчётах этот решатель был отмечен как «высокопроизводительный» инструмент, подходящий для вычислений с очень высокой численной точностью. Высокая точность, достигаемая с помощью AMFlow, в сочетании с его возможностью работать напрямую с исходными дифференциальными уравнениями и мастер-интегралами без дополнительных преобразований, делает его особенно мощным инструментом для вычислений диаграмм Фейнмана. Таким образом, DESolver представляет собой полуаналитический интегратор дифференциальных уравнений.

Пакет DiffExp, реализованный на языке Mathematica, также решает систему дифференциальных уравнений для мастер-интегралов с помощью одномерного

интегрирования в виде рядов, но делает это непосредственно вдоль контуров в физическом кинематическом пространстве. В подходе DiffExp выбирается одномерный контур (линия в пространстве параметров), соединяющий точку с известными граничными условиями и целевую точку. Затем система связанных линейных дифференциальных уравнений решается путём разложения решения в степенной ряд по параметру линии последовательно по порядкам размерностного регулятора ε . На практике DiffExp вычисляет усечённый степенной ряд вокруг начальной точки, а затем шаг за шагом осуществляет аналитическое продолжение: на каждом сегменте используется либо метод вариации постоянных, либо методы Вронского, чтобы согласовать решения в виде рядов через особые точки. Это позволяет получить численные результаты высокой точности для мастер-интегралов. Пользователь должен предоставить численные граничные условия, которые затем DiffExp переносит к целевой точке.

Основным результатом работы DiffExp является само решение в виде степенного ряда. Пакет строит ряды Фробениуса и явно решает уравнения для коэффициентов этих рядов; лишь после этого процесса полученные ряды вычисляются численно. Таким образом, DiffExp также представляет собой полуаналитический метод. Он способен работать с системами в неканоническом базисе и обрабатывает потенциально вырожденные линии с помощью малых сдвигов и аналитического продолжения. Поскольку DiffExp работает вдоль выбранного пути сегмент за сегментом, он может гибко обрабатывать многомасштабные задачи, соединяя несколько разложений. Пакет DiffExp требует предварительного приведения системы дифференциальных уравнений к форме, свободной от полюсов $1/\varepsilon$, тогда как DESolver может работать без таких преобразований, обеспечивая большую гибкость применения.

В пакете PySecDec применяется метод разложения по секторам, принципиально отличный от подходов на основе дифференциальных уравнений. Сначала каждый петлевой интеграл записывается в форме параметров Фейнмана (с использованием многочленов Симанзика U и F). В этом представлении ультрафиолетовые или инфракрасные расходимости проявляются как сингулярности при стремлении параметров Фейнмана $x_i \rightarrow 0$. Алгоритм разложения по секторам систематически выделяет эти сингулярности, разбивая область интегрирования на секторы и перенормируя переменные таким образом, чтобы явно выделить каждый фактор вида x_i^α . В каждом секторе многочлены подынтегрального выражения факторизуются в виде произведения одночлена, ненулевой константы и остаточного многочлена. Точнее, единичный гиперкуб разбивается на области (например, $x_1 \geq x_2 \geq \dots$) и вводятся новые переменные таким образом, чтобы каждый многочлен в знаменателе $P(x)$ приобрёл вид $\prod_j x_j^{\alpha_j} (c + p(x))$, где $c \neq 0$. Повторяя это подразделение, все расходимости проявляются только в виде полюсов, явно умноженных на выделенные одночлены. Пакет PySecDec полностью автоматизирует всю последовательность: создание начального разложения на сектора, итеративное подразделение подсекторов (или геометрическую стратегию), и подготовку подынтегрального выражения к выделению полюсов. После извлечения полюсов (разложения по регулятору ε) оставшиеся конечные интегралы вычисляются численно. Пакет обычно использует интеграторы библиотеки Cuba (Vegas, QMC и др.) для многомерного численного интегрирования

конечных частей. Таким образом, PySecDec преобразует каждый интеграл в сумму численных интегралов, разложенных по ϵ . Алгоритм стремится факторизовать каждый многочлен в виде произведения одночлена и многочлена с ненулевой константой при нулевом порядке. В результате PySecDec — полностью численный метод: после разложения по секторам и выделения полюсов все интегралы вычисляются численно.

Наконец, следует упомянуть ещё два общедоступных инструмента для вычисления многоцикловых мастер-интегралов — пакеты SeaSyde и FIESTA5. Оба реализуют стратегии, аналогичные основным методам, использованным в данной работе, хотя имеют отличия в подходах и технических деталях. Первый, SeaSyde — это пакет на языке Mathematica, который строит решения систем дифференциальных уравнений для мастер-интегралов в виде рядов Фробениуса. Он осуществляет аналитическое продолжение решений в комплексной плоскости кинематических инвариантов, преодолевая разрезы путём согласования решений в промежуточных точках. Хотя в принципе эта программа является мощным и универсальным инструментом, способным обрабатывать задачи с несколькими масштабами и сложными внутренними массами, в данной работе, в итоге, не удалось включить её в расчёты. Несмотря на значительные усилия, затраченные на установку и тестирование, после многих попыток настройки и тестирования ряд технических сложностей не позволил успешно применить её в рамках доступного времени. Предполагается вернуться к использованию данного инструмента в будущих работах по мере его дальнейшей доработки и улучшения документации.

Второй, пакет FIESTA5 — это инструмент на основе C++ и Mathematica, использующий разложение по секторам и численное интегрирование в пространстве параметров Фейнмана. Хотя он чрезвычайно универсален по своему назначению, его сложность в настройке и конфигурации делает эффективное использование затруднительным. Более того, в предыдущих работах в рамках нашей коллаборации для вычисления нескольких граничных условий использовался пакет FIESTA5, и при этом наблюдалось значительное снижение численной точности в некоторых компонентах результата. В работе [6] было указано, что классы диаграмм из [4], которые вычислялись с использованием пакета FIESTA5, совпадали лишь до 5 значащих цифр, в то время как классы диаграмм, которые не использовали FIESTA5, совпадали до 10 значащих цифр включительно. На основе этих результатов, а также принимая во внимание трудоёмкость и сложность использования, пакет FIESTA5 не использовался в дальнейших расчётах данной работы.

4. Результаты

В этом разделе аналитические результаты сравниваются с ранее доступными численными оценками амплитуды. Цель состоит в том, чтобы подтвердить правильность и точность аналитических выражений. Проведено покомпонентное сравнение в различных физически значимых кинематических конфигурациях. Относительная разница между аналитическими и численными результатами вычислялась по формуле

$$\Delta_{\text{rel}} = \left| \frac{I_{\text{analytic}} - I_{\text{numeric}}}{I_{\text{numeric}}} \right|,$$

где I_{analytic} — значение, полученное из нашего аналитического решения на основе GPL, а I_{numeric} — результат, полученный с помощью проверенных численных методов. Эти сравнения проводились при физических значениях безразмерного параметра $z = m_c^2/m_b^2$. Результаты сведены в табл.1. Графические сравнения также представлены на рис.2.

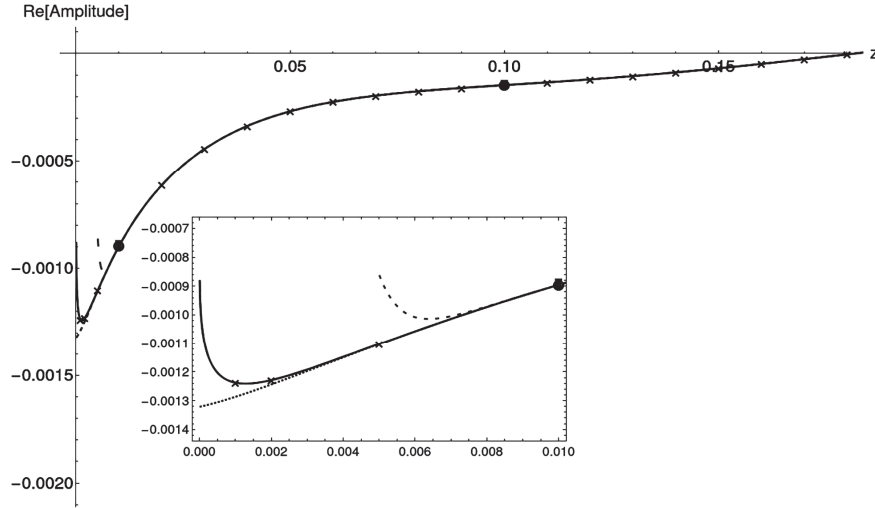


Рис.2. Реальная часть коэффициента при ϵ^0 для вклада O_1 в интервале $z \in [0, 0.18]$. На основном графике видно, что во всем физически важном диапазоне $z \in [0.04; 0.16]$ результаты AMFlow (прямая оценка ●, перенос X, Тейлор ..., асимптота —), DiffExp (- - -), и PySecDec (■) совпадают с аналитической кривой; асимптотика AMFlow полностью накладывается на аналитику, тогда как обе Тейлоровы серии расходятся при $z \rightarrow 0$. На вставке показано поведение в области $z \leq 0.01$, где расхождимость Тейлоровских разложений и устойчивость асимптотического совпадения видны наиболее отчётливо.

При численном вычислении в конкретных кинематических точках AMFlow выделяется как исключительно удобный и надёжный инструмент. Он вычисляет все мастер-интегралы одновременно, обеспечивает чрезвычайно высокую точность и требует минимального ввода данных — только определения самих мастер-интегралов. Также он является гибким и относительно быстрым. Напротив, метод PySecDec, хотя и обеспечивает качественно корректные результаты, демонстрирует существенно более низкую точность и требует больших вычислительных усилий, поскольку каждый интеграл приходится обрабатывать отдельно, а сходимость может существенно зависеть от выбранных параметров.

При выполнении разложений в ряды пакет AMFlow также демонстрирует отличные результаты. И разложение Тейлора, и асимптотическое разложение показывают хорошее согласие с аналитическими выражениями. Существенным преимуществом AMFlow является то, что он может работать с исходной системой дифференциальных уравнений без необходимости предварительного

Табл.1. Сравнение относительных различий и уровня совпадения по цифрам с аналитическими результатами для различных методов в точках z , равных 0.1 и 0.01. Рассматривается действительная часть коэффициента при ε^0 амплитуды

Метод	Отн. разн., $z = 0.1$	Совп. цифр, $z = 0.1$	Отн. разн., $z = 0.01$	Совп. цифр, $z = 0.01$
Разложение AMFlow при $z = 0.1$	6.5×10^{-7}	6	1.0×10^{-5}	4
Асимптотическое разложение AMFlow	6.5×10^{-7}	6	2.2×10^{-18}	17
Вспомогательный массовый поток AMFlow	6.5×10^{-7}	6	2.2×10^{-18}	17
Перенос AMFlow от $z = 0.01$	6.5×10^{-7}	6	2.2×10^{-18}	17
PySecDec	1.4×10^{-2}	2	7.5×10^{-3}	1
Разложение DiffExp при $z = 0.1$	6.5×10^{-7}	6	6.8×10^{-5}	3

преобразования в форму, свободную от полюсов вида $1/\varepsilon$. В отличие от него, DiffExp требует выполнения такого преобразования, что добавляет дополнительный шаг к подготовке задачи и может быть нетривиальным. Важно отметить, что как для AMFlow, так и для DiffExp, в пределах физически значимых диапазонов значений z , точность численного результата в первую очередь ограничена точностью начальных граничных условий — обычно получаемых из прямого вычисления с помощью AMFlow — и сохраняется на этом уровне в пределах радиуса сходимости соответствующего ряда.

Радиусы сходимости, тем не менее, различаются. Асимптотическое разложение AMFlow начинает расходиться лишь после $z = 0.25$ (что не отображено на графике), тогда как разложение Тейлора AMFlow демонстрирует ухудшение при приближении $z \rightarrow 0$. В случае DiffExp, разложение Тейлора также начинает расходиться ближе к $z \rightarrow 0$ и раньше при приближении $z = 0.2$. Таким образом, DiffExp показывает такую же высокую точность, как и AMFlow, в ограниченной области $z \in [0.04; 0.16]$, соответствующей физическим значениям, однако вне этой области его точность может снижаться. Дополнительно, как уже было отмечено, для использования DiffExp требуется нетривиальное преобразование системы дифференциальных уравнений в каноническую форму, что усложняет подготовку расчётов по сравнению с AMFlow.

Учитывая высокую точность, надёжность и простоту использования, AMFlow остаётся предпочтительным инструментом для будущих вычислений. Вместе с тем DiffExp является мощной альтернативой в пределах своего оптимального диапазона.

5. Заключение

Полученные численные результаты демонстрируют отличное совпадение с известными аналитическими выражениями во всех исследованных кинематических областях. Пакет AMFlow стабильно давал высокоточную оценку, часто совпадая с аналитическими результатами более чем по десяти значащим цифрам при прямом вычислении в отдельных точках. Разложения Тейлора и асимптотические разложения пакета AMFlow также показывают отличное согласие с аналитикой в физически значимом диапазоне $z \in [0.04; 0.16]$, однако разложение Тейлора становится ненадёжным при приближении к точке $z \rightarrow 0$, а асимптотическое разложение начинает расходиться после $z \approx 0.25$. Тем не менее, пакет остаётся простым и удобным в использовании, поскольку требуются только исходные дифференциальные уравнения и мастер-интегралы без необходимости предварительных преобразований в каноническую форму. Пакет DiffExp также давал точные результаты в физически значимом диапазоне, однако его разложение Тейлора становится ненадёжным как при $z \rightarrow 0$, так и при увеличении z . Кроме того, необходимость предварительного преобразования системы дифференциальных уравнений усложняет использование данного пакета. Инструменты, использующие метод разложения по секторам (например, PySecDec), также были протестированы и показали хорошее согласие с аналитическими результатами в отдельных точках. Тем не менее, их численная точность ниже, а использование требует значительных усилий, поскольку каждый мастер-интеграл необходимо обрабатывать отдельно. Эти сравнения подтверждают как корректность проведённых расчётов, так и надёжность подхода, основанного на решении дифференциальных уравнений.

Автор выражает благодарность Г.М. Асатрян за обсуждения и рекомендации, связанные с радиационными распадами B -мезонов, а также за полезные замечания. Работа автора поддержана Комитетом по науке и высшему образованию Республики Армения в рамках программного гранта № 21AG-1C084 и гранта № 24AA-1C025.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y.S. Amhis et al. Phys. Rev. D, **107**, 052008 (2023).
2. M. Misiak, H.M. Asatrian, K. Bieri, M. Czakon, A. Czarnecki, T. Ewerth, A. Ferroglia, P. Gambino, M. Gorbahn, C. Greub, U. Haisch, A. Hovhannisyan, T. Hurth, A. Mitov, V. Poghosyan, M. Slusarczyk, M. Steinhauser. Phys. Rev. Lett., **98**, 022002 (2007).
3. M. Misiak, H.M. Asatrian, R. Boughezal, M. Czakon, T. Ewerth, A. Ferroglia, P. Fiedler, P. Gambino, C. Greub, U. Haisch, T. Huber, M. Kaminski, G. Ossola, M. Poradzinski, A. Rehman, T. Schutzmeier, M. Steinhauser, J. Virto. Phys. Rev. Lett., **114**, 221801 (2015).
4. C. Greub, H.M. Asatrian, F. Saturnino, C. Wiegand. JHEP, **05**, 201 (2023).
5. C. Greub, H.M. Asatrian, H. H. Asatryan, L. Born, J. Eicher. JHEP, **11**, 058 (2024).
6. M. Fael, F. Lange, K. Schönwald, M. Steinhauser. JHEP, **11**, 166 (2023).
7. M. Czaja, M. Czakon, T. Huber, M. Misiak, M. Niggetiedt, A. Rehman, K. Schönwald, M. Steinhauser. Eur. Phys. J. C, **83**, 1108 (2023).

8. **S. Borowka, G. Heinrich, S. Jahn, S.P. Jones, M. Kerner, J. Schlenk, T. Zirke.** Comput. Phys. Commun., **222**, 313 (2018).
9. **M. Hidding.** Comput. Phys. Commun., **269**, 108125 (2021).
10. **X. Liu, Y.Q. Ma.** Comput. Phys. Commun., **283**, 108565 (2023).
11. **G. Buchalla, A.J. Buras, M.E. Lautenbacher.** Rev. Mod. Phys., **68**, 1125 (1996).
12. **J. Aebischer, M. Fael, C. Greub, J. Virto.** JHEP, **09**, 158 (2017).
13. **T. Armadillo, R. Bonciani, S. Devoto, N. Rana, A. Vicini.** Comput. Phys. Commun., **282**, 108545 (2023).
14. **A.V. Smirnov, N.D. Shapurov, L.I. Vysotsky.** Comput. Phys. Commun. **277**, 108386 (2022).
15. **H.H. Asatryan, H.M. Asatrian.** J. Contemp. Phys., **56N3**, 177 (2021).

**ՖԵՅՆՄԱՆԻ ԴԻԱԳՐԱՄՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՉԱՆԱԶԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ
ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆ $b \rightarrow s\gamma$ ՏՐՈՇՄԱՆ ՀԱՄԱՐ**

Հ.Հ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Վերջերս հաշվարկվել է երեք օղականի դիագրամների ամբողջական հավաքածու (α_s^2 կարգի), որոնք կապված են O_1 և O_2 հոսանք-հոսանք օպերատորների հետ և ներդրում ունեն $b \rightarrow s\gamma$ տրոհման ամպլիտուդի մեջ: Այս հոդվածում նման դիագրամների մի զույգ հաշվարկվում է c քվարկի m_c զանգվածի տարբեր արժեքների համար՝ կիրառելով տարբեր մեթոդներ, և համեմատվում են այս մեթոդների թվաբանական ճշգրտությունն այլոց կողմից ստացված անալիտիկ արդյունքների հետ: Հաշվի է առնվում նաև օգտագործման հարմարավետությունը: Օգտագործելով AMFlow և DiffExp ծրագրերը վարպետ ինտեգրալների նկատմամբ դիֆերենցյալ հավասարումների լուծման համար՝ ստացվել են ճշգրիտ թվային արդյունքներ c քվարկի զանգվածի լայն տիրույթի համար: Բացի այդ, հաշվարկվել են ասիմպտոտիկ վերլուծություններ և Թեյլորի շարքեր՝ համապատասխանաբար $z = m_c^2/m_b^2 = 0$ և $z = 1/10$ կետերի շուրջ: Բերվել է նաև վարպետ ինտեգրալների բացառապես թվային հաշվարկ՝ օգտագործելով PySecDec ծրագիրը:

**COMPARISON OF VARIOUS FEYNMAN DIAGRAM
CALCULATION METHODS FOR THE DECAY $b \rightarrow s\gamma$**

H.H. ASATRYAN

In recent works, the full set of three-loop diagrams (of order α_s^2) associated with the current-current operators O_1 and O_2 contributing to the decay amplitude for $b \rightarrow s\gamma$ were calculated. In this paper, one pair of these diagrams is calculated at various values of the charm-quark mass m_c using different methods, and the numerical accuracy/ease of use of these methods are compared to the analytic results obtained by others. Using the programs AMFlow and DiffExp to solve the differential equations for the master integrals, precise numerical results were obtained across a range of charm-quark mass values. In addition, asymptotic and Taylor series expansions were performed around $z = m_c^2/m_b^2 = 0$ and $z = 1/10$, respectively. A fully numerical evaluation of the master integrals using PySecDec was also carried out.