

ISSN 0002-3051

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

Հանդիսանում է

Том

Volume

78

2025

**СДВИГОВЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В СОСТАВНОМ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ЭЛЕКТРОДАМИ НА
ПЛОСКОСТИ КОНТАКТА**

Агаян К.Л.

Ключевые слова: пьезоэлектрик, поверхностная волна, перемещение, амплитуда, волновое число.

Aghayan K.L.

Shear electro elastic waves in composite piezoelectric space with electrodes on the contact plane

Keywords: piezoelectric, surface wave, displacement, amplitude, wave number.

An exact solution of the problem of excitation and propagation of shear surface waves localized along the interface of two piezoelectric half-spaces connected to each other with two semi-infinite electrodes is constructed. Piezoelectric surface waves are caused by the presence of electrodes in the form of a thin metal or adhesive conductive layer with a given piecewise constant value of the electric field potential on the electrodes.

Աղայան Կ.Լ.

**Կոնտակտի հարթության վրա էլեկտրոդներ պարունակող բաղադրյալ պիեզոէլեկտրիկ
տարածության սահմանի էլեկտրաառաձգական ալիքներ**

Հիմնաբառեր. Պիեզոէլեկտրիկ, մակերևութային ալիք, տեղափոխություն, ամպլիտուդա, ալիքային թիվ:

Կառուցվել է, երկու պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածություններից կազմված բաղադրյալ տարածությունում, կոնտակտային մակերևութի շուրջը տեղայնացված, սահման մակերևութային ալիքների զրգրման և տարածման խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Պիեզոէլեկտրական ալիքների գոյությունը պայմանավորված է բարակ մետաղական կամ սոսնձային էլեկտրաահադրդիչ շերտի վրա տրված էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի կտոր առ կտոր հաստատուն արժեքներով:

Построено точное решение задачи возбуждения и распространения сдвиговых, локализованных у границы раздела, поверхностных волн в пространстве, составленном из двух пьезоэлектрических полупространств и содержащим электроды на границе раздела. Пьезоэлектрические поверхностные волны обусловлены наличием электродов, в виде тонкого металлического или клеевого электропроводящего слоя, с заданным кусочно – постоянным значением потенциала электрического поля на электродах.

1. Введение

Исследование закономерностей и особенностей распространения волновых процессов в диэлектрических средах, обладающих свойством пьезоэффекта, при взаимодействии упругих и электрических полей, занимают ключевое место в современной теории механики деформируемого тела. Особое внимание среди этих исследований уделяется задачам о возникновении и распространении локализованных (поверхностных) волн, возникающих при взаимодействии различных физических полей. Пьезоэффект и конструктивные (механические, электрические) неоднородности

существенно влияют на распределение волнового поля, особенно, в кусочно-однородных деформируемых твердых телах сложной структуры.

В современных электромеханических структурах часто используются тонкие электропроводящие металлические слои разной длины, а также обыкновенный клей разной структуры для соединения контактирующих тел. Возникает естественный вопрос об устранении или возникновении поверхностной волны около контактных поверхностей составной конструкции.

Проблеме возбуждения и распространения поверхностных сдвиговых волн по граничной поверхности в неоднородных пьезоэлектрических структурах с разными граничными и контактными условиями посвящено большое количество работ. Коротко остановимся на некоторых работах, тесно связанных с рассматриваемой здесь задачей. Отметим, в первую очередь, книги [1-4], посвященные исследованию и разработке основных вопросов, возникающих в рассматриваемой области.

В работах [5-20] изучаются волновые процессы, связанные, в основном, с появлением и распространением поверхностных сдвиговых волн в пьезоупругих средах. Исследуются контактные и смешанные задачи для составных пьезоэлектрических пространств и слоев с различными контактными и граничными условиями на контактных и свободных поверхностях, а также содержащих концентраторы напряжений в виде трещин, включений и электродов разных длин.

В работе [5] рассматривается распространение поверхностных электроупругих сдвиговых волн по границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств с разными кристаллическими структурами, склеенных электропроводящим тонким слоем. Получены условия существования и особенности распространения электроупругих волн. В работах [6-16] и цитированных в них работах изучаются задачи дифракции электроупругой сдвиговой плоской волны в составном пьезоэлектрическом пространстве. При этом, предполагается, что на поверхностях раздела осуществляются различные смешанные механические и электрические условия, обусловленные наличием на контактных поверхностях заземленных электродов, трещин, металлических слоев, бесконечной или полубесконечной длины. В работах [17-20] рассмотрены аналогичные задачи для полупространств и слоя с конечным или полубесконечным электродом.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим, обладающее пьезоэффектом, составное упругое пространство в декартовой системе координат $Oxyz$. Пространство состоит из двух, соединенных между собой, пьезоэлектрических полупространств, занимающих области $\Omega_1 (|x| < \infty, y > 0, |z| < \infty)$ и $\Omega_2 (|x| < \infty, y < 0, |z| < \infty)$. Главная ось пьезоэлектрических полупространств (кристалл 6mm гексагональной симметрии) параллельна оси Oz . На контактной плоскости $y = 0$, разделяющей полупространства, приклеен электрод бесконечной, полубесконечной или конечной длины, в виде тонкого металлического или клеевого электропроводящего слоя. Предполагается, что электрод невесомый, абсолютно гибкий и идеально проводящий, так что механическими воздействиями электрода на полупространства можно пренебречь. На электродах, в виде электрических граничных условий, заданы амплитуды электрического потенциала $H(x)$.

Очевидно, что вид электрических граничных условий связан со способом подвода электрической энергии к пьезоэлементу. Если гармонические волны в пьезоэлементе возбуждаются генератором напряжения, то значение потенциала $H(x)$ на электродах считается известным. При этом предполагается, что $H(x)$ постоянная или кусочно – постоянная функция.

Введем некоторые обозначения, связанные с электромеханическими параметрами пьезоэлектрических полупространств индексами $j = 1, 2$. $k_j = \omega/c_j$ – волновое число, $c_j = \sqrt{\mu_j(1+\chi_j)/\rho_j}$ – фазовая скорость распространения сдвиговой упругой волны, μ_j и ρ_j – модуль сдвига и плотность, $\chi_j = e_j^2/\mu_j\epsilon_j$ – коэффициент электромеханической связи, $e_j = e_{js}$, $\epsilon_j = \epsilon_{jj}$ – диэлектрические и пьезоэлектрические постоянные соответствующих полупространств [1,17].

В пьезоэлектрическом пространстве Ω_1 распространяется заданная сдвиговая плоская упругая волна антиплоской деформации (SH - волна) $w_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$ с сопутствующим потенциалом электрического поля $\phi_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$, падающая из бесконечности под углом β ($0 < \beta < \pi/2$) к плоскости xz и поляризованная вдоль оси симметрии.

Здесь

$$\begin{aligned} w_\infty(x, y) &= A_0 e^{ipx - iqy}, \quad \phi_\infty(x, y) = (e_1/\epsilon_1) w_\infty(x, y), \\ (p &= k_1 \cos \beta, \quad q = k_1 \sin \beta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

амплитуды упругого перемещения и электрического потенциала падающих волн, A_0 – постоянная, ω – частота колебаний падающей волны, t – время.

Рассматривается задача определения, обусловленного наличием в контактной зоне электродов, дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пространстве $\Omega_1 \cup \Omega_2$ при дифракции сдвиговой электроупругой плоской волны (2.1) и электрического потенциала $H(x)$ на электроде.

Для определения амплитуд упругого перемещения $w_j(x, y)$ и электрического потенциала $\phi_j(x, y)$ в соответствующих полупространствах имеем [1,12]

$$\begin{aligned} \Delta w_j(x, y) + k_j^2 w_j(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Omega_j \\ \Delta \phi_j(x, y) + k_j^2 \frac{e_j}{\epsilon_j} w_j(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Omega_{js} \end{aligned} \quad (2.2)$$

По постановке задачи решения уравнений (2.2) должны удовлетворять следующим контактными - граничным условиям на плоскости $y = 0$ (непрерывность электроупругого поля):

$$\begin{aligned}
w_1(x, +0) &= w_2(x, -0), \quad |x| < \infty \\
\varphi_1(x, +0) &= \varphi_2(x, -0) = H(x), \quad |x| < \infty \\
\sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) &= \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0), \quad |x| < \infty
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа, $H(x)$ – заданный потенциал электрического поля на линии $y = 0$.

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений (2.2) при граничных условиях (2.3).

Отметим, что в зависимости от конкретно поставленной задачи, т.е. от конкретного распределения заданной функции $H(x)$, условия (2.3) могут изменяться. Исходя из этого, сначала построим общее решение задачи (2.2), (2.3) при заданной $H(x)$.

3. Решение задачи (2.2), (2.3). Введем функции

$$W_1(x, y) = w_1(x, y) - w_\infty(x, y); \quad \Phi_1(x, y) = \varphi_1(x, y) - \varphi_\infty(x, y) \tag{3.1}$$

Подставим (3.1) в (2.2) и применим к этим уравнениям и граничным условиям (2.3) преобразование Фурье (ПФ) по переменной x . В итоге придем к следующей краевой задаче

$$\frac{d^2 \bar{W}_1}{dy^2} - \gamma_1^2 \bar{W}_1(\sigma, y) = 0; \quad \frac{d^2 \bar{\Phi}_1}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_1(\sigma, y) + \frac{e_1}{\varepsilon_1} k^2 \bar{W}_1(\sigma, y) = 0, \quad y > 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{d^2 \bar{W}_2}{dy^2} - \gamma_2^2 \bar{W}_2(\sigma, y) = 0; \quad \frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_2(\sigma, y) + k_2^2 \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{W}_2(\sigma, y) = 0, \quad y < 0,$$

$$\left[\mu_1 \left(\frac{d\bar{W}_1}{dy} - \frac{d\bar{W}_\infty}{dy} \right) + e_1 \left(\frac{d\bar{\Phi}_1}{dy} - \frac{d\bar{\Phi}_\infty}{dy} \right) \right]_{y=+0} = \left[\mu_2 \frac{d\bar{W}_2}{dy} + e_2 \frac{d\bar{\Phi}_2}{dy} \right]_{y=-0} \tag{3.3}$$

В (3.2) – (3.3)

$$\gamma_j(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2}, \quad \bar{F}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{i\sigma x} dx \tag{3.4}$$

$$\bar{w}_\infty(\sigma, y) = 2\pi A_0 e^{iqy} \delta(\sigma + p); \quad \bar{\varphi}_\infty(\sigma, y) = (e_1/\varepsilon_1) \bar{w}_\infty(\sigma, y) \tag{3.5}$$

Общее решение системы (3.2), представляющее уходящие волны, имеет вид:

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = A_1 e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} + \bar{w}_\infty(\sigma, y), \quad y > 0 \tag{3.6}$$

$$\bar{\Phi}_1(\sigma, y) = B_1 e^{-|\sigma| y} + (e_1/\varepsilon_1) \bar{W}_1(\sigma, y), \quad y > 0$$

$$\bar{W}_2(\sigma, y) = A_2 e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y}, \quad y < 0 \tag{3.7}$$

$$\bar{\Phi}_2(\sigma, y) = B_2 e^{|\sigma| y} + (e_2/\varepsilon_2) \bar{W}_2(\sigma, y), \quad y < 0$$

где A_i, B_i ($i = 1, 2$) – подлежащие определению постоянные интегрирования.

Удовлетворяя, при помощи (3.6), (3.7), условиям (3.3) для неизвестных A_i, B_i получим:

$$A_1 = \frac{(e_1 + e_2)|\sigma|\bar{H}(\sigma)}{\bar{K}(\sigma)} - 2\pi A_0 \left[\frac{2\mu_1^* i q}{\bar{K}(-p)} + 1 \right] \delta(\sigma + p)$$

$$A_2 = A_1 + 2\pi A_0 \delta(\sigma + p) \quad (3.8)$$

$$B_1 = B_2 = -(e_1/\varepsilon_1) A_1 - 2\pi A_0 (e_1/\varepsilon_1) \delta(\sigma + p) + \bar{H}(\sigma)$$

Здесь

$$\bar{K}(\sigma) = \mu_1^* \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \mu_2^* \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - |\sigma| (e_1^2/\varepsilon_1 + e_2^2/\varepsilon_2) \quad (3.9)$$

где

$$\mu_j^* = \mu_j (1 + \chi_j); \quad \chi_j = e_j^2 / (\varepsilon_j \mu_j); \quad j = 1, 2, \quad (3.10)$$

а $\bar{K}(\sigma)$ представляет собой дисперсионную функцию задачи.

Теперь, с учетом (3.8), из (3.6) – (3.7), после обратного ПФ, для потенциалов $w_j(x, y)$ и $\varphi_j(x, y)$ получим:

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_1 + e_2}{\bar{K}(\sigma)} |\sigma| \bar{H}(\sigma) e^{-\gamma_1 y} e^{-i\sigma x} d\sigma -$$

$$- 2A_0 [\bar{K}(-p)]^{-1} \mu_1^* i q e^{ipx + iqy} + A_0 [e^{-iqy} - e^{iqy}] e^{ipx}, \quad y \geq 0 \quad (3.11)$$

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_1 + e_2}{\bar{K}(\sigma)} |\sigma| \bar{H}(\sigma) e^{\gamma_2 y} e^{-i\sigma x} d\sigma - A_0 [\bar{K}(\sigma)]^{-1} \mu_1^* i q e^{ipx - iqy}, \quad y \leq 0 \quad (3.12)$$

$$\varphi_1(x, y) = \frac{e_1}{2\pi\varepsilon_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_1 + e_2}{\bar{K}(\sigma)} |\sigma| \bar{H}(\sigma) [e^{-\gamma_1 y} - e^{-|\sigma|y}] e^{-i\sigma x} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(\sigma) e^{-|\sigma|y} e^{-i\sigma x} d\sigma + A_0 (e_1/\varepsilon_1) [e^{-iqy} - e^{iqy}] e^{ipx} -$$

$$- 2A_0 [\bar{K}(-p)]^{-1} (e_1/\varepsilon_1) \mu_1^* i q (e^{iqy} - e^{-|p|y}) e^{ipx}, \quad y \geq 0 \quad (3.13)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{e_2}{2\pi\varepsilon_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_1 + e_2}{\bar{K}(\sigma)} |\sigma| \bar{H}(\sigma) [e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} - e^{|\sigma|y}] e^{-i\sigma x} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(\sigma) e^{|\sigma|y} e^{-i\sigma x} d\sigma -$$

$$- 2A_0 [\bar{K}(-p)]^{-1} (e_2/\varepsilon_2) \mu_1^* i q (e^{\sqrt{p^2 - k_2^2} y} - e^{|p|y}) e^{ipx}, \quad y \leq 0 \quad (3.14)$$

Не останавливаясь на общем исследовании полученных волновых составляющих из (3.11) - (3.14), это будет сделано в следующем пункте, заметим следующее.

Формулами (3.11) - (3.14) даются амплитудные выражения электроупругого поля в пьезоэлектрических полупространствах Ω_1 и Ω_2 , в виде суммы отдельных составляющих от внешних воздействий $H(x)$ и $w_\infty(x, y)$. Потенциалы $w_j(x, y)$ и $\varphi_j(x, y)$ $j = 1, 2$ представляют собой точное решение поставленной задачи в квадратурах в виде интегралов Фурье. Нетрудно убедиться, что полученные выражения для $w_j(x, y)$, $\varphi_j(x, y)$ удовлетворяют всем контактными условиям (2.3), и условиям уходящей волны.

В подынтегральных выражениях (3.11) – (3.14) фигурирует дисперсионная функция $\bar{K}(\sigma)$ из (3.9). Очевидно, что для полного изучения характерных особенностей волнового поля в пьезоэлектрическом пространстве следует подробно исследовать функцию $\bar{K}(\sigma)$, которую, следуя [5,14,15], представим в следующем виде:

$$\bar{K}(\sigma) = \mu_1^* \bar{K}_1(\sigma) + \mu_2^* \bar{K}_2(\sigma) \quad (3.15)$$

где

$$\bar{K}_j(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2} - \bar{\chi}_j |\sigma|; \quad \bar{\chi}_j = \chi_j / (1 + \chi_j); \quad j = (1, 2) \quad (3.16)$$

Функции $\bar{K}_1(\sigma)$ и $\bar{K}_2(\sigma)$ имеют нули только в точках $\pm\sigma_1$ и $\pm\sigma_2$, где

$$\sigma_j = \frac{1 + \chi_j}{\sqrt{1 + 2\chi_j}} k_j > k_j > 0 \quad (3.17)$$

Здесь ω/σ_1 и ω/σ_2 скорости сдвиговых поверхностных электроупругих волн Гуляева-Блюстейна в полупространствах Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Оказывается [5,14,15], дисперсионная функция $\bar{K}(\sigma)$ из (3.15) имеет нули в точках $\sigma = \pm\sigma_3$, где σ_3 – единственный положительный корень уравнения $\bar{K}(\sigma) = 0$. При этом, ω/σ_3 – скорость распространения поверхностной волны. Доказано, что

$$\begin{aligned} \sigma_3 > k_2 > k_1, \text{ если } \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \left(1 + \frac{\mu_2 \chi_2}{\mu_1 \chi_1} \right) \\ \sigma_3 > k_1 > k_2, \text{ если } \sqrt{1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}} < \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \left(1 + \frac{\mu_1 \chi_1}{\mu_2 \chi_2} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

а также, что $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$ или $\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1$, т.е. значение скорости - ω/σ_3 возникающей поверхностной волны находится между значениями скоростей волн Гуляева-Блюстейна в пространствах Ω_1 и Ω_2 .

Используя эти результаты, при заданном $\bar{H}(\sigma)$, из интегральных составляющих, входящих в (3.11) – (3.14), можно определить обусловленные распределением потенциала $H(x)$ дополнительные компоненты волнового поля. В итоге получим, что наличие источника колебаний потенциала электрического поля в виде $H(x)$ приводит к распространению сдвиговой поверхностной волны, локализованной у плоскости контакта, а также дифрагированных затухающих объемных волн в соответствующих полупространствах. Этими вопросами займемся в следующем пункте.

4. Решение задачи при заданном $H(x)$.

Рассмотрим случай, когда функция $H(x)$ из (2.3) дается формулой

$$H(x) = V_- \vartheta(-x) + V_+ \vartheta(+x) \quad (4.1)$$

где $\vartheta(x)$ – известная функция Хевисайда [22].

Тогда для $\bar{H}(\sigma)$ будем иметь:

$$\bar{H}(\sigma) = \pi(V_+ + V_-)\delta(\sigma) + i(V_+ - V_-)/\sigma \quad (4.2)$$

где $\delta(\sigma)$ – известная дельта функция Дирака.

Из (3.11) – (3.14) нетрудно убедиться, что для окончательного определения потенциалов $w_j(x, y)$ и $\phi_j(x, y)$ следует вычислить следующий интеграл:

$$J(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sigma|}{\sigma \bar{K}(\sigma)} e^{-\gamma_1 y} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (4.3)$$

где $\bar{K}(\sigma)$ – дается формулами (3.15) и (3.16), а $\gamma_1(\alpha)$ – формулой (3.4).

Не останавливаясь на вычислительных подробностях, отметим лишь, что для исследования и вычисления полученных несобственных интегралов из (3.11) – (3.14) использованы результаты из [23,24]. Функция $\bar{K}(\alpha)$, как отмечалось выше, имеет два действительных корня в точках $\sigma = \pm \sigma_s$. Для выбора однозначных ветвей функций $\gamma_j(\alpha) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2}$ ($j = 1, 2$) и $|\alpha|$, входящих в подынтегральную функцию, в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ проведены соответствующие разрезы, обеспечивающие условие уходящей волны.

Принимая, для определенности, $k_2 > k_1$, тогда и $\sigma_s > k_2$, получены аналитические выражения для амплитуд всех компонентов электроупругого волнового поля – упругое перемещение и потенциал электрического поля во всех участках пьезоэлектрического пространства.

Полученные, в итоге, амплитудные выражения в полном объеме здесь не приводятся. Здесь, в основном, будем останавливаться на амплитудных выражениях дифрагированных поверхностных, неоднородных, отраженных и проходящих волн.

Обозначим через $W_j^{(\pm)}(x, y)$ и $\Phi_j^{(\pm)}(x, y)$ суммарную амплитуду от внешних нагрузок, для упругого перемещения и электрического потенциала в отдельных квадрантах плоскости $z = 0$. Тогда из (3.11) - (3.14) получим –

в квадранте $\omega_1^{(+)}(x > 0, y > 0)$:

$$\begin{aligned} W_1^{(+)}(x, y) &= w_{11}^{(+)}(x, y) + w_{12}^{(+)}(x, y) + w_{\infty}(x, y) + \widetilde{W}_1(x, y) \\ W_1^{(-)}(x, y) &= w_{11}^{(-)}(x, y) + w_{12}^{(-)}(x, y) + w_{\infty}(x, y) + \widetilde{W}_2(x, y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

в квадранте $\omega_1^{(-)}(x < 0, y > 0)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(+)}(x, y) &= \phi_{11}^{(+)}(x, y) + \phi_{12}^{(+)}(x, y) + \phi_{13}^{(+)}(x, y) + \phi_{14}^{(+)}(x, y) + \widetilde{\Phi}_1(x, y) \\ \Phi_1^{(-)}(x, y) &= \phi_{11}^{(-)}(x, y) + \phi_{12}^{(-)}(x, y) + \phi_{13}^{(-)}(x, y) + \phi_{14}^{(-)}(x, y) + \widetilde{\Phi}_2(x, y) \end{aligned} \quad (4.5)$$

в квадранте $\omega_2^{(+)}(x > 0, y < 0)$:

$$\begin{aligned} W_2^{(+)}(x, y) &= w_{22}^{(+)}(x, y) + w_{21}^{(+)}(x, y) + \widetilde{W}_3(x, y) \\ W_2^{(-)}(x, y) &= w_{22}^{(-)}(x, y) + w_{21}^{(-)}(x, y) + \widetilde{W}_4(x, y) \end{aligned} \quad (4.6)$$

в квадранте $\omega_2^{(-)}(x < 0, y < 0)$:

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(+)}(x, y) &= \phi_{22}^{(+)}(x, y) + \phi_{21}^{(+)}(x, y) + \phi_{24}^{(+)}(x, y) + \widetilde{\Phi}_3(x, y) \\ \Phi_2^{(-)}(x, y) &= \phi_{22}^{(-)}(x, y) + \phi_{21}^{(-)}(x, y) + \phi_{24}^{(-)}(x, y) + \widetilde{\Phi}_4(x, y) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь

$$w_{11}^{(\pm)}(x, y) = A_1^{(\pm)} e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} e^{\pm i \sigma_3 x}, \quad (4.8)$$

$$w_{12}^{(\pm)}(x, y) = -A_0 \left(1 + 2 \left[\bar{K}(-p) \right]^{-1} \mu_1^* i q \right) e^{ipx + iqy}, \quad y > 0$$

$$w_{21}^{(\pm)}(x, y) = -2A_0 \left[\bar{K}(-p) \right]^{-1} \mu_1^* i q e^{ipx} e^{-i \sqrt{k_2^2 - p^2} y} \quad (4.9)$$

$$w_{22}^{(\pm)}(x, y) = A_2^{(\pm)} e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y} e^{\pm i \sigma_3 x}, \quad y < 0$$

$$\phi_{11}^{(\pm)}(x, y) = A_1^{(\pm)} (e_1 / \varepsilon_1) \left[e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} - e^{-|\sigma_3| y} \right] e^{\pm i \sigma_3 x} \quad (4.10)$$

$$\phi_{22}^{(\pm)}(x, y) = A_2^{(\pm)} (e_2 / \varepsilon_2) \left[e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y} - e^{-|\sigma_3| y} \right] e^{\pm i \sigma_3 x}$$

$$\phi_{12}^{(\pm)}(x, y) = -A_0 2\pi i \mu_1^* q (e_1 / \varepsilon_1) \bar{K}^{-1}(\sigma) \left[e^{-iqy} - e^{-|p|y} \right] e^{ipx} \quad (4.11)$$

$$\phi_{21}^{(\pm)}(x, y) = -A_0 \frac{2i \mu_1^* q e_2}{\varepsilon_2 \bar{K}(-p)} \left[e^{-i \sqrt{k_2^2 - p^2} y} - e^{|p|y} \right] e^{ipx}$$

$$\Phi_{13}(x, y) = \Phi_{\infty}(x, y) - A_0(e_1/\varepsilon_1)e^{ipx+iqy} \quad (4.12)$$

$$\Phi_{j4}^{(\pm)}(x, y) = \frac{V_+ + V_-}{2} - (-1)^j \frac{V_+ + V_-}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad (4.13)$$

В вышеприведенных формулах (4.8) – (4.13) σ_3 – корень дисперсионного уравнения $\bar{K}(\sigma) = 0$, где $\bar{K}(\sigma)$ дается формулой (3.15), а

$$\bar{K}'(\sigma_3) = \frac{\partial \bar{K}(\sigma)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_3} = \mu_1^* \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2}} + \mu_2^* \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2}} - (\mu_1^* \tilde{\chi}_1 + \mu_2^* \tilde{\chi}_2) \operatorname{sgn} \sigma_3,$$

$$A_1^{(\pm)} = A_2^{(\pm)} = [(V_+ - V_-)(e_1 + e_2)] / \bar{K}'(\pm \sigma_3)$$

Волновое поле перемещений, связанных с $\tilde{W}_j(x, y)$ ($j = \overline{1, 4}$), входящими в формулы (4.4)–(4.7), состоит из дифрагированных затухающих объемных волн, распространяющихся со скоростью ω/k_j . Для них, следуя работам [13, 21], получены асимптотические формулы, представляющие волновое поле в дальних зонах, которые здесь не приводятся.

Формулами (4.4) – (4.7) дается распределение электроупругого волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах Ω_1 и Ω_2 . Оно состоит из падающей, отраженной и проходящих волн, дифрагированных затухающих объемных, а также локализованной у контактной плоскости поверхностной волны, распространяющейся со скоростью ω/σ_3 (σ_3 – волновое число поверхностной волны).

$w_{11}^{(\pm)}(x, y)$ из (4.8) – отраженные поверхностные волны, локализованные у электрода, распространяются в Ω_1 по противоположным направлениям к оси Ox с волновым числом σ_3 и затухают при $y \rightarrow +\infty$ по закону $\exp(-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y)$.

Появление этих составляющих целиком обусловлено наличием электрода, на двух полубесконечных частях которого заданы постоянные, но разные по величине, значения потенциала электрического поля, а также свойством пьезоэффекта.

При этом, нетрудно заметить, что если $V_+ = V_- = \text{const}$ или $V_+ = V_- = 0$ поверхностная волна не появляется.

Примерно то же самое можно сказать относительно проходящих поверхностных волн $w_{22}^{(\pm)}(x, y)$ из (4.8), распространяющихся в Ω_2 в противоположных направлениях к оси Ox со скоростью ω/σ_3 и убывающих при $y \rightarrow -\infty$ по закону $\exp(\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y)$.

$w_{12}^{(\pm)}(x, y)$ и $w_{21}^{(\pm)}(x, y)$, из (4.9), амплитуды отраженной и проходящей волн, распространяющихся в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$ соответственно.

$w_{12}^{(\pm)}(x, y)$ как отраженная волна в Ω_1 распространяется со скоростью ω/k_1 , а $w_{21}^{(\pm)}(x, y)$, как проходящая из Ω_1 в Ω_2 , распространяется со скоростью ω/k_2 .

Потенциал электрического поля $\Phi(x, y)$, не обладает волновым характером. Однако, присваивание ему волновых свойств, имеет смысл как в теоретическом, так и в практическом аспекте, чтобы исследовать характерные особенности потенциала электрического поля, как неотъемлемой части электроупругого волнового поля. Это особенно важно в рассматриваемой здесь задаче, в которой в роли внешнего воздействия (нагрузки) выступает ненулевое значение потенциала электрического поля на электроде.

Обратимся теперь к выражениям $\Phi_{11}^{(\pm)}(x, y)$ и $\Phi_{22}^{(\pm)}(x, y)$ из (4.10), представляющим часть электрических потенциалов $\Phi_1^{(\pm)}(x, y)$ и $\Phi_2^{(\pm)}(x, y)$.

Первые составляющие этих выражений представляют собой потенциалы, сопутствующие поверхностным волнам $w_{11}^{(\pm)}(x, y)$ и $w_{22}^{(\pm)}(x, y)$, и обладают аналогичными волновыми характеристиками. Вторые составляющие представляют собой отраженную (проходящую) поверхностную волну, распространяющуюся в Ω_1 (Ω_2) по противоположным направлениям к оси Ox с волновым числом σ_3 и затухающую по закону $\exp(\pm|\sigma_3|y)$ при $y \rightarrow \pm\infty$. Появление этих слагаемых опять обусловлено наличием электрода с заданным значением потенциала на нем. $\Phi_{11}^{(\pm)}(x, y)$, $\Phi_{22}^{(\pm)}(x, y)$ обращаются в ноль при $y \rightarrow \pm 0$, обеспечивая, совместно с $\Phi_{j4}^{(\pm)}(x, y)$ из (4.13), выполнение граничных условий (2.4).

Аналогично, $\Phi_{12}^{(\pm)}(x, y)$ и $\Phi_{21}^{(\pm)}(x, y)$ из (4.11) представляют собой потенциалы, сопутствующие поверхностным волнам перемещений $w_{12}^{(\pm)}(x, y)$ и $w_{21}^{(\pm)}(x, y)$, и обладают волновыми свойствами.

5. Частные случаи. Рассмотрим два частных случая рассмотренной задачи при заданном распределении электрического потенциала $H(x)$, предполагая при этом, что падающая волна из бесконечности отсутствует ($A_0 = 0$). Иными словами, примем, что гармонические электроупругие волны в пьезоэлектрическом пространстве возбуждаются под воздействием заданных на электродах потенциалов электрического поля в виде кусочно-постоянной функции $H(x)$. Отметим, что будем останавливаться только на амплитудах перемещений и потенциала электрического поля поверхностных волн в области Ω_1 , так как в такой постановке задачи, полупространства Ω_1 и Ω_2 находятся, качественно, в одинаковом состоянии.

1) Пусть

$$H(x) = V_1 \delta(x+a) + V_2 \delta(x-a), (V_1, V_2) \sim const \quad (5.1)$$

т.е. предполагается, что потенциал на линии $y=0$ сосредоточен в точках $\pm a$.

Для ПФ $H(x)$ будем иметь:

$$\bar{H}(\sigma) = V_1 e^{-i\sigma a} + V_2 e^{i\sigma a} \quad (5.2)$$

Подстановкой (5.2) в (3.12) и (3.13) и вычислением интегралов для поверхностных компонентов упругих перемещений $w_1^{(n)}(x, y)$ и потенциала электрического поля $\phi_1^{(n)}(x, y)$ в Ω_1 получим:

$$w_1^{(n)}(x, y) = iN_1 [V_1 e^{\pm i\sigma_3 a} + V_2 e^{\mp i\sigma_3 a}] e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} e^{\pm i\sigma_3 x} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \phi_1^{(n)}(x, y) = & i \frac{e}{\epsilon_1} N_1 [V_1 e^{\pm i\sigma_3 a} + V_2 e^{\mp i\sigma_3 a}] \left[e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} - e^{-|\sigma_3| y} \right] e^{\pm i\sigma_3 x} + \\ & + \pi^{-1} \left[V_1 y \left((x+a)^2 + y^2 \right)^{-1} - V_2 y \left((x-a)^2 + y^2 \right)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\text{где } N_1 = (e_1 + e_2) \sigma_3 (2\pi \bar{K}'(\sigma_3))^{-1} \quad (5.5)$$

Из (5.3) и (5.4) следует, что вследствие дифракции, в полупространстве $y > 0$ возникают поверхностные волны, обусловленные сугубо наличием точек разрыва потенциала электрического поля на электроде $H(x)$ в точках $\pm a$. Эти волны, локализованные у электрода, распространяются в Ω_1 по противоположным направлениям к оси Ox , исходя из точек разрывов $\pm a$. Скорость распространения, по направлению оси Ox , а также порядок убывания поверхностных волн по направлению Oy , как и следовало ожидать, совпадают с соответствующими значениями $w_{11}^{(\pm)}(x, y)$ и $\phi_{11}^{(\pm)}(x, y)$ из (4.8) и (4.10), соответственно.

Второе составляющее из (5.4) не имеет волновой характер, но обеспечивает выполнение граничного условия (5.1) при $y \rightarrow +0$.

2) Распределение $H(x)$ задано формулой:

$$H(x) = V_1 \vartheta(-x-a) + V_0 [\vartheta(x+a) - \vartheta(x-b)] + V_2 \vartheta(x-b)$$

где $\vartheta(x)$ – функция Хевисайда.

Теперь для ПФ $H(x)$ получим

$$\begin{aligned}\bar{H}(\sigma) = & \left[i \frac{V_0 - V_1}{\sigma} + \pi(V_0 + V_1) \delta(\sigma) \right] e^{-ia\sigma} + \\ & + \left[i \frac{V_2 - V_0}{\sigma} + \pi(V_2 - V_0) \delta(\sigma) \right] e^{ib\sigma}\end{aligned}\quad (5.6)$$

Аналогичным образом, как и в случае 1), подставляя (5.6) в (3.12), (3.15) и учитывая, что $A_0 = 0$, для поверхностных компонентов $w_1^n(x, y)$ и $\phi_1^n(x, y)$ волнового поля в пьезоэлектрическом полупространстве Ω_1 получим:

$$w_1^n(x, y) = -\frac{N_1}{\sigma_s} W_0(x) e^{-\sqrt{\sigma_s^2 - k_1^2} y} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}\phi_2^n(x, y) = & -\frac{N_1}{\sigma_s} \frac{e_1}{\varepsilon_1} W_0(x) \left[e^{-\sqrt{\sigma_s^2 - k_1^2} y} - e^{-|\sigma_s| y} \right] + \frac{V_0 - V_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} + \\ & + \frac{V_2 - V_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-b}{y} + \frac{V_1 + V_2}{2}\end{aligned}\quad (5.8)$$

$$W_0(x) = \begin{cases} (V_0 - V_1) e^{i\sigma_s(x+a)} + (V_2 - V_0) \vartheta(x-b) e^{i\sigma_s(x-b)}; & x > -a \\ (V_0 - V_1) \vartheta(-x-a) e^{-i\sigma_s(x+a)} + (V_2 - V_0) e^{-i\sigma_s(x-b)}; & x < b \end{cases} \quad (5.9)$$

Полученные формулы (5.7), (5.8) указывают на полное качественное сходство распределений дифрагированного поверхностного волнового поля с рассмотренным выше случаем 1). Из этих формул также следует, что:

- а) при $V_0 = V_1$ ($V_0 = V_2$) поверхностные волны возникают только из точки $b(-a)$.
- б) при $V_0 = V_1 = V_2 = \text{const}$, волновое поле в пьезоэлектрическом пространстве не возбуждается.
- г) при $V_0 = 0$ ($V_1, V_2 \neq 0$) или $V_1 = V_2 = 0$ ($V_0 \neq 0$) поверхностные волны возникают из точек $-a$ и b .

Заключение. В рамках антиплоской деформации исследуется динамическая контактная задача о возбуждении и распространении сдвиговых поверхностных и объемных волн в составном электроупругом пространстве, состоящем из двух жестко соединенных между собой пьезоэлектрических полупространств.

На граничной плоскости, где расположен электрод бесконечной длины, заряженный кусочно – постоянным значением потенциала электрического поля, осуществляется полный электромеханический контакт.

Построено замкнутое решение задачи в виде интегралов Фурье. Получены аналитические представления для амплитуд компонентов электроупругого поля (3.11) – (3.14). Для поверхностных, отраженных и проходящих волн вычислены и приведены конечные выражения амплитудных формул для упругих перемещений и потенциала электрического поля в каждом квадранте пьезоэлектрического пространства. Эти формулы в явном виде содержат основные волновые особенности, прису-

щие возбужденным электроупругим волнам, о которых было сказано выше. Из этих формул, в частности, для последних двух случаев, следует, что наличие в распределении $H(x)$ точек разрыва приводит к существенному перераспределению общего электроупругого волнового поля, обусловленному появлением новых поверхностных волн. Имеет место и обратный процесс, сокращая точки разрыва в нагрузке потенциала электрического поля на электроде, можно устранить поверхностную волну.

Следует отметить, что из (3.11) – (3.14), непосредственно получится решение соответствующей задачи для пьезоэлектрического полупространства Ω_1 , на свободной от напряжений граничной поверхности которого расположен электрод с потенциалом $H(x)$. С этой точки зрения, интересна выше рассмотренная задача 2) при $V_1 = V_2 = 0, V_0 \neq 0$.

Полученные результаты позволяют в дальнейшем поставить и решить аналогичные задачи, со смешанными электромеханическими условиями для составных областей, более приближенных к реальным конструкциям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Balakirev M.K. and Gilinski I. A. Waves in Piezocrystals (Novosibirsk: Nauka 1982) p. 239.
2. Parton V.Z., Kudravcev B.A. Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. – M. Nauka, 1988, p. 472.
3. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulcha N.A. Electroelasticity. //Mechanics of related fields in structural elements. V.5/- Kiev., Nauka. Dumka., 1989., p. 230.
4. Фильштинский Л.А., Бардзокас Д.И. Метод граничных интегральных уравнений в проблемах дифракции электроупругих волн. Сумы: Изд-во Сумского Ун-та, 1999, 194 с.
5. Avetisyan A.S., Margaryan J.M. Electroelastic surface shear waves on a division surface of two piezoelectric half-spaces. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 1994. T.47. №3-4. p.31-36.
6. Jin F., Wang Z., Wang Tiejun, The Bluestein-Gulyaev (B-G) wave in a piezoelectric layered half-space. Int. J. Eng. Sci. 39, 1271-1285 (2001).
7. Li P., Jin. F., Qian Z. Propagation of the Bluestein-Gulyaev waves in a functionally graded transversely isotropic electro-magneto-elastic half-space. //European Journal of Mechanics A/Solids. 37, 2013, pp. 17-23.
8. Фильштинский Л.А., Хворост В.А. Возбуждение составного пьезоэлектрического пространства сосредоточенными гармоническими источниками. Теоретическая и прикладная механика. №34. с. 121-125.
9. Grigoryan E.Kh., Melkumyan A.S. Diffraction of a shear plane wave in piezoelectric space at the edge of a semi-infinite metal layer. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2004. T.57. №4. p. 43-52.
10. Grigoryan E.Kh., Jilavyan S.H. Diffraction of a plane shear wave in a piezoelectric space with two parallel semi-infinite cracks., Proceedings of V International Conference "Topical problems of continuum mechanics". Goris 2005 pp. 163-168.

11. Белубекян М.В. Локализованные электроупругие волны при движении слоя вдоль полупространств. Докл. НАН Армении 2009, Т. 109, №4. с. 297-303.
12. Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Terzyan S.A. Dispersion of shear surface waves in an elastic substrate imperfectly bonded with an elastic layer. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2023. T.76. №1. p.p 75-82.
13. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. Diffraction of a plane electro elastic wave on a semi-infinite electrode in a piezoelectric space with a slit. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2010. T.63. №1. p. 50-69.
14. Grigoryan E.Kh., Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of a shear plane wave on a semi-infinite crack in piezoelectric-dielectric space. Proceedings of VII Int. Conf. "Topical problems of continuum mechanics". Goris-Stepanakert 2011. pp. 137-143.
15. Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of Plane Shear Wave in Piezoelectric Semi-Space at a Semi-Infinite Metallic Layer in the Dielectric Medium. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2015. T.68. №1. P.45-56.
16. Aghayan K.L. Diffraction of electroelastic shear plane waves at the edges of semi-infinite electrodes in piezoelectric space with a slit. / Environmental herald of the scientific centers of the Black Sea economic cooperation./ 2011. №1. p.3-18.
17. Bardzokas D.I., Kudryavcev B.A., Senik N.A. Wave propagation in electromagneto-elastic environments. M. Editorial URSS. 2003. p. 336.
18. Aghayan K.L. Plane shear wave in a piezoelectric layer with mixed boundary conditions. NASA, Reports, 2023. V.123, №3-4. p.61-73.
19. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. Amplitude-phase distortion of the normal high-frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces – Proc. of NAS RA Mechanics. 2017. V70, №2. p. 28-42.
20. Aghayan K.L., Zakaryan V.G. Surface Electro-Elastic Shear Waves in Piezo-Electrical Half-Space with Semi-Infinite Electrode. Springer Nature Switzerland AG 2025 H. Altenbach. Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials. 2025. V.223, pp.1-16.
21. Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L. On a new method for determining asymptotic formulas in wave diffraction problems. NASA, Reports, 2010. V.110, №3. p.261-271.
22. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции. Вып.1. м. Физматанализ. 1958. 440 с.
23. Brichkov Yu. A., Prudnikov A.P. Integral transformations of generalized functions. M-Nauka., 1977., p. 287.
24. Reference mathematical library. /Functional analysis./ M. 1972., p. 544.

Сведения об авторе:

Агаян Каро Леренцович—д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник,
Институт Механики НАН Армении
Тел.: (37491) 485566
E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Поступила в редакцию 12 июня 2025

ОТРАЖЕНИЕ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТ ПОВЕРХНОСТИ
СОПРИКОСНОВЕНИЯ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПОЛОСЫ И
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л.

Ключевые слова: упруго-спиновые волны, диэлектрическое полупространство, ферромагнитный слой, магнитный экран.

Aghayan K.L., Atoyan L.A., Sahakyan S.L.

Reflection of an elastic wave from the contact surface of a ferromagnetic layer and a dielectric half-space

Key words: elastic-spin waves, dielectric half-space, ferromagnetic layer, magnetic screen.

The paper solves the problem of reflection and refraction of an elastic wave from the contact surface of a dielectric half-space and a ferromagnetic layer with a magnetic screen. In addition, the dependences of the amplitudes of these waves on the frequency of the incident wave and the intensity of the external magnetic field in which the structure under consideration is located are numerically investigated.

Աղայան Կ.Լ., Աթոյան Լ.Ա., Սահակյան Ս.Լ.

Դիֆրակտիկ կիսատարածության և ֆերոմագնիսական շերտի շփման մակերևույթից առաձգական ալիքի անդրադարձումը

Բանալի բառեր՝ առաձգա-սպինային ալիքներ, դիֆրակտիկ կիսատարածություն, ֆերոմագնիսական շերտ, մագնիսական էկրան:

Հոդվածում լուծված է առաձգական ալիքի անդրադարձման և բեկման խնդիրը դիֆրակտիկ կիսատարածության և մագնիսական էկրանով ֆերոմագնիսական շերտի շփման մակերեսից: Բացի այդ, թվային կերպով հետազոտվել են այդ ալիքների ամպլիտուդների կախվածությունը անկման ալիքի հաճախականությունից և արտաքին մագնիսական դաշտի ինտենսիվությունից, որում գտնվում է դիտարկվող կառուցվածքը:

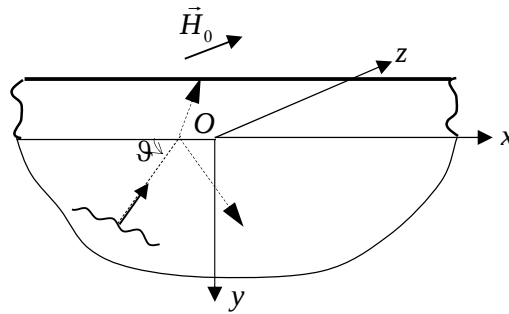
В работе решается задача отражения и преломления упругой волны от поверхности контакта диэлектрического полупространства и ферромагнитной полосы с магнитным экраном. Кроме этого численно исследованы зависимости амплитуд этих волн от частоты падающей волны и интенсивности внешнего магнитного поля, в котором находится рассматриваемая конструкция.

1. Введение. Как известно [1-3,8,10] в магнитоупорядоченных средах на определенных частотах возникают взаимосвязанные (гибридные) магнитоупругие волны (МУВ), или иначе упруго-спиновые волны (УСВ). Впервые описание движения намагниченности в магнитоупорядоченных средах было дано Ф. Блохом в 1930 г., им же был введен термин “спиновые волны”. Взаимодействие спиновых и упругих волн происходит на ультразвуковых и гиперзвуковых частотах $\approx 10^9$ Гц, верхняя граница для МУВ равна $5 \cdot 10^{10}$ Гц. В качестве ферромагнитного материала используется железо-иттриевый гранат (ЖИГ), который обладает низкими потерями при прохождении как спиновых, так и МУВ.

В предлагаемой работе рассматривается конструкция, состоящая из диэлектрического упругого полупространства (подложки) и примыкающего к нему ферромагнитного слоя с магнитным экраном, закрепленным на его внешней поверхности. Вопросы распространения МУВ в различных ферромагнитных конструкциях типа магнит/немагнит, магнит/ магнит и пр. рассмотрены во многих работах [1-12]. Предполагается, что вся конструкция находится во внешнем, постоянном магнитном поле $\vec{H}_0(0,0,H_0)$, направленном перпендикулярно распространению МУВ.

Решается задача отражения и преломления упругой, сдвиговой волны, падающей изнутри из бесконечности диэлектрического полупространства на его поверхность соприкосновения с магнитным слоем. Найдены волновые поля в конструкции, кроме того проведено численное исследование зависимостей амплитуд отраженной и преломленной волн от частоты падающей волны и интенсивности внешнего магнитного поля. Приведены соответствующие графики зависимостей.

2. Постановка задачи. Рассматривается упругое диэлектрическое полупространство в декартовой системе координат $Oxyz$, занимающее область $(-\infty < x, z < \infty; y > 0)$, и примыкающий к нему ферромагнитный слой с магнитным экраном, закрепленным на поверхности слоя $y = -h$. Полагается, что вся конструкция находится во внешнем, магнитном поле $\vec{H}_0(0,0,H_0)$, направленном по оси Oz . Далее полагаем, что на поверхность соприкосновения $y = 0$ изнутри полупространства из бесконечности под углом ϑ падает упругая сдвиговая волна, которая преломляясь на границе соприкосновения, возбуждает упруго-спиновую волну в ферромагнитной полосе (Фиг. 1).



Фиг.1

В дальнейшем, все величины, относящиеся к полупространству, будут отмечены индексом 1, а относящиеся к ферромагнитному слою - индексом 2.

Упругое волновое поле в подложке определяется следующим уравнением [13]:

$$\vec{w}_1 = S_1^2 \Delta w_1, \quad (1)$$

где $w_1(x, y, t) = w_{1p}(x, y, t) + w_{1o}(x, y, t)$, $w_{1p}(x, y, t)$, $w_{1o}(x, y, t)$ - падающая и отраженная упругие волны, $S_1^2 = G_1 / \rho_1$ - скорость упругой поперечной волны, G_1 - модуль сдвига, ρ_1 - плотность материала подложки, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Магнитостатическое поле в диэлектрическом полупространстве характеризуется магнитным потенциалом $\varphi_1(x, y, t)$, который определяется уравнением [6, 14]:

$$\Delta \varphi_1 = 0. \quad (2)$$

Система уравнений, характеризующая упруго-спиновую волну в ферромагнитном слое, имеет вид [1-3,5]:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_2 &= S_2^2 \Delta w_2 + \rho_2 B(\mu_{2x} + v_{2y}), \\ \dot{\mu}_2 &= \omega_M (\varphi_{2y} + \hat{b} v_2 + B w_{2y}), \\ \dot{v}_2 &= -\omega_M (\varphi_{2x} + \hat{b} \mu_2 + B w_{2x}), \\ \Delta \varphi_2 &= (\mu_{2x} + v_{2y}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $w_2(x, y, t)$ - механическое перемещение, $\bar{\mu}_2(\mu_2, v_2, t)$ - намагниченность ферромагнетика, $S_2^2 = G_2 / \rho_2$ - скорость упругой поперечной волны в слое, $\omega_M = \gamma_0 M_0$, γ_0 - гиромагнитное отношение, $M_0 = \rho_2 \mu_0$ - объемная плотность намагниченности насыщения, ρ_2 - плотность ферромагнетика, μ_0 - массовая плотность намагниченности насыщения, $B = f \mu_0$, $\hat{b} = b + H_0 / M_0$; b , f - магнитоупругие коэффициенты связи, H_0 - внешнее постоянное магнитное поле, φ_2 - магнитостатический потенциал магнитного слоя.

Граничные и контактные условия представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
w_1(x, y)|_{y=+0} &= w_2(x, y)|_{y=-0}, \\
\left[G_1 \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} \right]_{y=+0} &= \left[G_2 \frac{\partial w_2(x, y)}{\partial y} + \rho_2 B v_2 \right]_{y=-0}, \\
\varphi_1(x, y)|_{y=+0} &= \varphi_2(x, y)|_{y=-0}, \\
\left[\frac{\partial \varphi_1(x, y)}{\partial y} \right]_{y=+0} &= \left[\frac{\partial \varphi_2(x, y)}{\partial y} - \rho_2 v_2 \right]_{y=-0}, \\
w_2(x, y)|_{y=-h} &= 0, \\
\left[\frac{\partial \varphi_2(x, y)}{\partial y} - \rho_2 v_2 \right]_{y=-h} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Выше временной фактор опущен. Первые два соотношения (4) - это условия непрерывности перемещений и напряжений, третье и четвертое условия - это условия равенства магнитных потенциалов и индукций, пятое - это условие закрепления магнитного экрана и слоя, шестое - равенство нулю магнитной индукции на магнитном экране.

Как следует из уравнения (1) падающая и отраженная упругие сдвиговые волны в подложке определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
w_{1p} &= W_{1p} e^{i(px-qt)} e^{-i\omega t}, \\
w_{1o} &= W_{1o} e^{i(px+qt)} e^{-i\omega t},
\end{aligned} \tag{5}$$

где W_{1p}, W_{1o} - постоянные.

Магнитостатический потенциал в подложке, как следует из уравнения (2), представляется следующим выражением:

$$\varphi_1(x, y, t) = \Phi_1 e^{-|p|y} e^{ipx} e^{-i\omega t}, \tag{6}$$

где Φ_1 - постоянная.

Ставится задача определения волновых полей отраженных и преломленных волн в конструкции, а также задача определения зависимостей амплитуд этих волн от безразмерной частоты $\Omega = \omega / \omega_M$ и нормированной интенсивности внешнего магнитного поля $H = H_0 / M_0$.

3. Решение задачи. В ранее опубликованной нашей работе [11] были определены образы Фурье функций $W_2(x, y), \Phi_2(x, y), M_2(x, y), N_2(x, y)$, которые характеризуют амплитуды парциальных волн преломленной гибридной волны в ферромагнитном слое:

$$(w_2, \phi_2, \mu_2, \nu_2) = (W_2, \Phi_2, M_2, N_2)e^{-i\omega t}. \quad (7)$$

Образы Фурье амплитудных функций имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{W}_2(\sigma, y) &= Q_1 e^{-\gamma y} + Q_2 e^{\gamma y}, \\ \bar{\Phi}_2(\sigma, y) &= R_1 e^{-\sigma y} + R_2 e^{\sigma y} + \tau_0 (Q_1 e^{-\gamma y} + Q_2 e^{\gamma y}), \\ \bar{M}_2(\sigma, y) &= C_1 \bar{W}_{2y} + i\sigma C_2 \bar{W}_2 + C_3 \bar{\Phi}_{2y} + i\sigma C_4 \bar{\Phi}_2, \\ \bar{N}_2(\sigma, y) &= i\sigma C_1 \bar{W}_2 - C_2 \bar{W}_{2y} + i\sigma C_3 \bar{\Phi}_2 - C_4 \bar{\Phi}_{2y}. \end{aligned} \quad (8)$$

где Q_1, Q_2, R_1, R_2 - постоянные, σ - параметр Фурье,

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_M &= \hat{b}^2 - \Omega^2; \quad \tilde{\Omega}_{SV}^2 = \Omega_{SV}^2 - \rho_2 \hat{b} B S_2^{-2}; \quad \Omega_{SV}^2 = \hat{b}^2 + \hat{b}; \quad \tau_0 = \frac{\hat{b} B}{\Omega_{SV}^2 - \Omega^2}; \\ C_1 &= \frac{B \Omega_M}{\Omega_M}; \quad C_2 = \frac{\hat{b} B}{\Omega_M}; \quad C_3 = \frac{\Omega_M}{\Omega_M}; \quad C_4 = \frac{\hat{b}}{\Omega_M}; \quad \Omega = \omega / \omega_M; \\ \Omega_M &= -i\Omega, \quad \gamma^2 = \sigma^2 - r^2; \quad r^2 = \frac{\omega^2 (\Omega^2 - \Omega_{SV}^2)}{S^2 (\Omega^2 - \tilde{\Omega}_{SV}^2)}; \end{aligned}$$

Далее сделаем ПФ функций (5),(6) и граничных контактных условий (4), получим:

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(\sigma, y) &= 2\pi(W_{1p} e^{-iqy} + W_{10} e^{iqy})\delta(\sigma + p); \\ \bar{\phi}_1(\sigma, y) &= 2\pi\Phi_1 W_{1p} e^{-|p|y}\delta(\sigma + p). \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_1|_{+0} &= \bar{w}_2|_{-0}, \quad G_1 \bar{w}_{1y}|_{+0} = [G_2 \bar{w}_{2y} + \rho_2 B \bar{N}_2]_{-0}, \quad \Phi_1|_{+0} = \bar{\Phi}_2|_{-0}, \\ \bar{\phi}_{1y}|_{+0} &= [\bar{\phi}_{2y} - \rho_2 \bar{N}_2]_{-0}, \quad \bar{w}_2|_{y=-h} = 0, \quad [\bar{\phi}_{2y} - \rho_2 \bar{N}_2]_{-h} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив образы Фурье общих решений (8), (9) в граничные и контактные условия (10), получим алгебраическую систему для определения неизвестных: $Q_1, Q_2, R_1, R_2, \Phi_1, W_{10}$:

$$\begin{aligned}
2\pi(W_{1p} + W_{1o})\delta(\sigma + p) &= Q_1 + Q_2, \\
2\pi iqG_1(W_{1o} - W_{1p})\delta(\sigma + p) + \gamma G_2(Q_2 - Q_1) + \\
+ \rho_2 B[i\sigma C_1(Q_1 + Q_2) - \gamma C_2(Q_2 - Q_1) + i\sigma C_3(R_1 + R_2 + \\
+ \tau_0(Q_1 + Q_2)) - C_4(\sigma(R_2 - R_1) + \gamma\tau_0(Q_2 - Q_1))] &= 0, \\
2\pi\Phi_1\delta(\sigma + p) &= R_1 + R_2 + \tau_0(Q_1 + Q_2), \\
2\pi\Phi_1 |p| \delta(\sigma + p) + \sigma(R_2 - R_1) + \gamma\tau_0(Q_2 - Q_1) - \\
- \rho_2 [i\sigma C_1(Q_1 + Q_2) - \gamma C_2(Q_2 - Q_1) + i\sigma C_3(R_1 + R_2 + \\
+ \tau_0(Q_1 + Q_2)) - C_4(\sigma(R_2 - R_1) + \gamma\tau_0(Q_2 - Q_1))] &= 0, \\
Q_1 e^{\gamma h} + Q_2 e^{-\gamma h} &= 0, .
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(R_2 e^{-\sigma h} - R_1 e^{\sigma h}) + \gamma\tau_0(-Q_1 e^{\gamma h} + Q_2 e^{-\gamma h}) - \rho_2 [i\sigma C_1(Q_1 e^{\gamma h} + Q_2 e^{-\gamma h}) - \\
- \gamma C_2(Q_2 e^{-\gamma h} - Q_1 e^{\gamma h}) + i\sigma C_3(R_1 e^{\sigma h} + R_2 e^{-\sigma h} + \tau_0(Q_1 e^{\gamma h} + Q_2 e^{-\gamma h})) - \\
- C_4(\sigma(R_2 e^{-\sigma h} - R_1 e^{\sigma h}) + \gamma\tau_0(Q_2 e^{-\gamma h} - Q_1 e^{\gamma h}))] &= 0
\end{aligned}$$

Решение системы (11) приводит нас к выражениям:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{1}{2\pi} [\eta_1 + \eta_2 + \tau_0(\eta_3 + \eta_4)]; \quad R_1 = \eta_1 \delta(\sigma + p); \\
R_2 &= \eta_2 \delta(\sigma + p); \quad Q_1 = \eta_4 \delta(\sigma + p); \\
Q_2 &= \eta_3 \delta(\sigma + p); \quad W_{1o} = \frac{L(t_{11}t_9 - t_{12}t_8)}{2\pi\Delta} - W_{1p};
\end{aligned} \tag{12}$$

Выше введены обозначения:

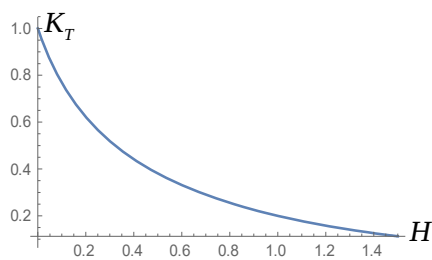
$$\begin{aligned}
L &= 4iq\pi G_1 W_{1p}; \quad t_1 = \frac{e^{2\gamma h} + 1}{e^{2\gamma h} - 1}; \quad t_2 = \frac{e^{2\gamma h}}{1 - e^{2\gamma h}}; \quad t_3 = \frac{1}{1 - e^{2\gamma h}}; \\
t_4 &= iqG_1 - \gamma t_1 G_2 + \rho_2 B(i\sigma C_1 + C_2 \gamma t_1 - i\sigma C_3 \tau_0 + \gamma C_4 \tau_0 t_1); \\
t_5 &= -\rho_2 B\sigma(iC_3 + C_4); \quad t_6 = \rho_2 B\sigma(-iC_3 + C_4); \\
t_7 &= \gamma(t_2 e^{-\gamma h} + t_3 e^{\gamma h})(\rho_2 C_2 - \rho_2 \tau_0 - \tau_0) - (t_3 e^{\gamma h} - t_2 e^{-\gamma h})(\tau_0 C_3 + C_1) i\sigma \rho_2; \\
t_8 &= -\sigma e^{\sigma h}(1 + i\rho_2 C_3 + \rho_2 C_4); \quad t_9 = \sigma e^{-\sigma h}(1 - i\rho_2 C_3 + \rho_2 C_4); \\
t_{10} &= \tau_0(|p| + \gamma t_1) + \rho_2(C_2 \gamma t_1 - i\sigma C_1 - i\sigma C_3 \tau_0 + \gamma C_4 \tau_0 t_1); \\
t_{11} &= |p| - \sigma(1 + i\rho_2 C_3 + \rho_2 C_4); \quad t_{12} = |p| + \sigma(1 - i\rho_2 C_3 - \rho_2 C_4);
\end{aligned}$$

$$\eta_1 = \frac{L(t_{10}t_9 - t_{12}t_7)}{\Delta}; \quad \eta_2 = \frac{L(t_{10}t_8 - t_{11}t_7)}{\Delta}; \quad \eta_3 = -2\pi t_2(W_{1p} + W_{1o});$$

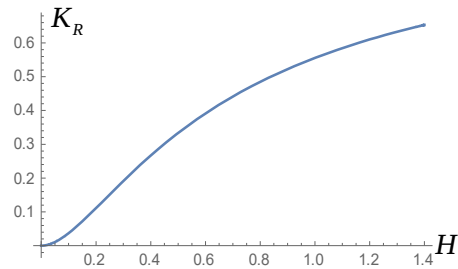
$$\eta_4 = 2\pi t_3(W_{1p} + W_{1o}); \quad \Delta = \begin{vmatrix} t_4 & t_5 & t_6 \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_7 & t_8 & t_9 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Подставив найденные выражения (12) в (8), (9), мы определим Фурье-трансформанты искоемых решений. Далее, сделав обратное ПФ, получим вид функций, определяющих волновые поля в рассматриваемой конструкции:

$$\begin{aligned} w_1(x, y, t) &= 2\pi(W_{1p}e^{-iqy} + W_{1o}e^{iqy})e^{i(px-\omega t)}; \\ \varphi_1(x, y, t) &= -2\pi\Phi_1e^{-|p|y}e^{i(px-\omega t)}; \\ w_2(x, y, t) &= (\eta_4e^{-\gamma y} + \eta_3e^{\gamma y})e^{i(px-\omega t)}; \\ \varphi_2(x, y, t) &= [\eta_1e^{-\sigma y} + \eta_2e^{\sigma y} + \tau_0(\eta_4e^{-\gamma y} + \eta_3e^{\gamma y})]e^{i(px-\omega t)}; \\ \mu_2(x, y, t) &= \{C_1(-\gamma\eta_4e^{-\gamma y} + \gamma\eta_3e^{\gamma y}) + i\sigma C_2(\eta_4e^{-\gamma y} + \eta_3e^{\gamma y}) + \\ &+ C_3[-\sigma(\eta_1e^{-\sigma y} - \eta_2e^{\sigma y}) + \tau_0\gamma(-\eta_4e^{-\gamma y} + \eta_3e^{\gamma y})] + \\ &+ i\sigma C_4[\eta_1e^{-\sigma y} + \eta_2e^{\sigma y} + \tau_0(\eta_4e^{-\gamma y} + \eta_3e^{\gamma y})]\}e^{i(px-\omega t)}; \\ v_2(x, y, t) &= i\sigma C_1(\eta_4e^{-\gamma y} + \eta_3e^{\gamma y}) - C_2\gamma(-\eta_4e^{-\gamma y} + \eta_3e^{\gamma y}) + \\ &+ i\sigma C_3[\eta_1e^{-\sigma y} + \eta_2e^{\sigma y} + \tau_0(\eta_4e^{-\gamma y} + \eta_3e^{\gamma y})] - \\ &- C_4[-\sigma\eta_1e^{-\sigma y} + \sigma\eta_2e^{\sigma y} + \tau_0\gamma(-\eta_4e^{-\gamma y} + \eta_3e^{\gamma y})]\}e^{i(px-\omega t)}. \end{aligned} \quad \# \quad (14)$$



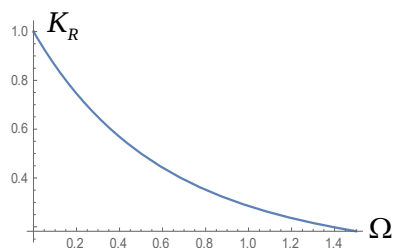
Фиг. 2



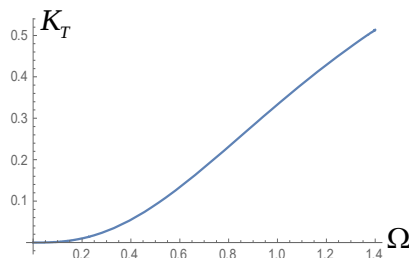
Фиг. 3

В (14) необходимо все “ σ ” заменить на “ $-p$ ”. Таким образом, волновые поля в конструкции найдены. Перейдем к численному анализу зависимостей амплитуд

упругих и упруго-спиновых отраженных и преломленных волн от безразмерной частоты $\Omega = \omega / \omega_M$ падающей волны и интенсивности нормированного внешнего поля $H = H_0 / M_0$. Результаты анализа представлены на фигурах 2-5. Введены обозначения: $K_T = W_2 / W_{1p}$, $K_R = W_{1o} / W_{1p}$.



Фиг. 4



Фиг. 5

4. Заключение. Решена задача отражения и преломления упругой, сдвиговой волны в конструкции, где к упругому диэлектрическому полупространству примыкает ферромагнитная полоса с закрепленным на ее внешней поверхности магнитным экраном.

Определены волновые поля в рассматриваемой конструкции, а также проведено численное исследование зависимостей коэффициентов отражения и преломления от частоты падающей волны и интенсивности внешнего поля. В результате исследования выявлена сильная зависимость коэффициентов отражения и преломления от частоты падающей упругой волны и интенсивности внешнего магнитного поля. Это дает основание заключить, что путем изменения частоты и интенсивности внешнего магнитного поля можно регулировать перераспределение энергии падающей волны между отраженной и преломленной волнами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991, 560 стр.
2. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. Москва: Наука, 1973, 591 с..
3. Ахизер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
4. Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З. “Квазипериодические спиновые волны в одномерной ферромагнитной среде”. Proceed. Of 8-th Int. Conf. “The problems of dynamics of interaction of deformable media”, 22-25 Sept., 2014, Goris- Stepanakert.p.205-212.

5. Hasanyan D., Batra R. Antiplane Shear Waves in Two Contacting Ferromagnetic Half Spaces. *J. Elast.* (2011) 103, p.189-203.
6. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Р., Атоян Л.А., Манукян Г.А. Отражение спиновых волн от границы ферромагнитного полупространства. Тр. VI межд. конф. сентябрь, 2008, Горис–Степанакерт, с.115-125.
7. Даноян З.Н., Агаян К.Л., Атоян Л.А. Упруго–спиновые волны в слоистой среде ферромагнит–диэлектрик. Тр. 4-ой межд. конф. по совр. проблем мех. сплош. среды, Армения, Цахкадзор, 21-26 сент., 2015г., стр.185-189.
8. Kittel C. Interaction of spin waves and ultrasonic waves in ferromagnetic crystals. *Phys. Rev.* B110, 1958, 836-841.
9. Camley R.E., Maradudin A.A. Pure shear elastic surface wave guided by the interface between two semi-infinite magneto-elastic media. *Appl. Phys. Lett.* 38(8), 1981, 610-612.
10. Nikitov, S.A., Tailhades, Ph., Tsai, C.S. Spin waves in periodic magnetic structures-magnonic crystals. *J.Magnet.Mater.*, v.23, 3, 2001, p.p.320-331.
11. Агаян К.Л., Атоян Л.А. “Упруго-спиновые волны в ферромагнитном полупространстве с экраном”, Изв. НАН Армении, Механика т.76, 2, 2023 г.
12. Агаян К.Л., Атоян Л.А. “Упруго-спиновые волны в ферромагнитной среде с экраном”, Тезисы докладов 22-ой Международной конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, г. Ростов-на-Дону, 11-13 окт., 2023 г.
13. Э. Дьелесан, Д. Руайе. Упругие волны в твердых телах. Москва, Наука, 424 с.
14. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Изд. Наука, Москва. 500 с.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – д.ф.-м.н., вед. науч.сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 246.
E-mail: karoaghayan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович – к.ф.-м.н., ст.науч. сотр. Института механики НАН РА.
E-mail: levous@mail.ru

Саакян Саак Левонович – к.ф.-м.н., ЕГУ, факультет Информатики и прикладной математики. Тел.: (+374 77) 002-408;
E-mail: ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 15 января 2025 г.

СВЕРХЗВУКОВАЯ ЛОКАЛИЗОВАННАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ ШИРОКОЙ ПАНЕЛИ, НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: РАСТЯНУТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА И СЖАТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мартirosян С. Р.

Ключевые слова: достаточно широкая прямоугольная пластинка, полубесконечная пластина–полоса, сверхзвуковое обтекание, первоначальные силы растяжения и сжатия, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, аэроупругая устойчивость, локализованная дивергенция, аналитическое решение

S. R. Martirosyan

Supersonic localized divergence of a wide panel loaded in two directions: stretched along the gas flow and compressed in the perpendicular direction

Keywords: sufficiently wide rectangular plate, semi-infinite plate-strip, initial tensile and compressive forces, concentrated inertial masses and moments of rotation, supersonic flow, aeroelastic stability, localized divergence, analytical solution method

In the article, in a linear formulation, we study the influence of the initial stressed state of a sufficiently wide rectangular elastic plate, loaded in two directions: stretched along the supersonic gas flow and compressed in the perpendicular direction, on the stability of the dynamic system “plate-flow” under the assumption that at the free edge plates there are concentrated inertial masses and moments of rotation. An analytical solution to the stability problem is found. The possibility of loss of stability of the unperturbed equilibrium state of the system only in the form of localized divergence is shown. An accurate assessment of the influence of the ratio of initial tensile and compressive forces on the stability threshold of the “plate-flow” system is given, with the aim of subsequent analysis of the possibility of controlling it.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային զազի հոսքի ուղղությամբ նախնական ձգված և միաժամանակ սեղմված ուղղահայած ուղղությամբ բավականին լայն սալի տեղայնացված դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ բավականին լայն ուղղանկյուն սալ, կիսաանվերջ սալ–շերտ, ձգող և սեղմող ուժեր, գերձայնային շրջհոսում, աերոառաձգական կայունություն, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, տեղայնացված դիվերգենցիա, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է նախնական ձգված գերձայնային զազի հոսքի ուղղությամբ և միաժամանակ սեղմված իրեն ուղղահայած ուղղությամբ լայն ուղղանկյուն սալի լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ – հոսք» գծային դինամիկ համակարգի կայունության շեմի վրա, սալի ազատ եզրին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայությանը: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ համակարգը կորցնում է միայն ստատիկ կայունությունը՝ տեղայնացված դիվերգենցիայի տեսքով: Գտնված են կրիտիկական արագությունները: Գնահատված է ազդող ուժերի հարաբերակցությունը համակարգի չխտորված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной упругой пластинки, нагруженной по двум направлениям: растянутой по сверхзвуковому потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости

динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что поток набегаёт на свободный край, на котором приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости. Показана возможность потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток» в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки. Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных растягивающих и сжимающих сил на порог устойчивости системы, с целью последующего анализа возможности управления им.

Введение. Теоретические исследования задач аэроупругой устойчивости позволяют выявить различные виды потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток», обусловленные характером деформаций. А также, позволяют дать оценку влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им [1–4].

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния упругой достаточно широкой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при предположениях. Пластика нагружена первоначально по двум направлениям статическими продольными силами – силами растяжения и сжатия, направленными, соответственно, по потоку газа и в перпендикулярном направлении. Сверхзвуковой поток набегаёт на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы «пластинка–поток». Получена формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа.

Исследована граница области устойчивости. Установлено, что при малых значениях относительной толщины достаточно широкой пластинки невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» теряет только статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции панели в окрестности её свободного края, подобно системе «полубесконечная пластина–полоса – поток». При больших значениях относительной толщины пластинки – оно является устойчивым на всём промежутке сверхзвуковых скоростей.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции в предположении, что в момент «выпучивания» в пластинке возникают только напряжения изгиба. Показана существенная зависимость критической скорости локализованной дивергенции от отношения первоначальных усилий и от коэффициента Пуассона.

Дана точная оценка влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости системы.

Данная статья является продолжением работ [18, 19].

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка ($ab^{-1} \geq 1.96$), которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$ [19]. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённого равновесного состояния пластинки, а ось Oz перпендикулярна к

пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край пластинки $x=0$ – свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c , интенсивность которых намного превосходит интенсивность распределённой массы пластинки [9].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих $N_x = 2h\sigma_x$ и сжимающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, распределённых равномерно по краям пластинки $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ соответственно, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности пластинки и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y, t)$ [1].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории»: $\delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$, где

a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [7, 8]. Прогибы $w = w(x, y, t)$ предполагаются малыми относительно толщины пластинки $2h$ [1, 2].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками δp , растягивающими σ_x и сжимающими σ_y усилиями в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами I_c поворота, приложенными вдоль её свободного края $x=0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{pr.}$ и $(\sigma_y)_{cr.}$, где $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [10]; $(\sigma_y)_{cr.}$ – усилие, которые могут произвести «выпучивание» пластинки в отсутствии обтекания ($V=0$) при условии $\sigma_x=0$ [1, 15].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [7, 8] в предположении малости интенсивности $m \partial^2 w / \partial t^2$ распределённой массы

пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c \partial^2 w / \partial t^2$ и $I_c \partial^2 w / \partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1,2,18,19]:

$$D \Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1,2,9,14,18,19]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и} \quad y = b; \quad (1.3)$$

ν – коэффициент Пуассона.

Задача устойчивости динамической системы (1.1)–(1.3) состоит:

1) в нахождении критической скорости V_{cr} – наименьшей скорости потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m.} \approx 33.85; \quad (1.4)$$

приводящей к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.}, \quad \sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}, \quad (1.5)$$

когда все параметры системы заданы, кроме скорости потока V ;

2) в определении относительной толщины пластинки $(2hb^{-1})_{\min}$, которая обеспечивала бы её прочность по критерию устойчивости колебаний, когда форма, материал пластинки и все параметры потока известны.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) по Ляпунову [11] сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.3) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок [1, 2, 14 – 16]:

$$\gamma = ab^{-1} \in [1.96; \infty), \quad (1.6)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

Согласно обозначению (1.6) значению $\gamma = \infty$ соответствует полубесконечная пластина–полоса, как один из предельных случаев прямоугольной пластинки.

В работе [14] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.3) для всех значений $\gamma \in [0, \infty]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки ($\sigma_x = \sigma_y = 0$). В работе [15] исследована исходная задача устойчивости при условии $\sigma_x = 0, \sigma_y \neq 0$. Показано, что сжимающие усилия σ_y приводят к понижению устойчивости системы, в отличие от случая, когда $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0$ [16]: растягивающие усилия σ_x приводят к существенному повышению устойчивости системы. В работе [17] получено решение задачи (1.1) – (1.3) для всех $\gamma \in [0, \infty]$ в статической постановке по методу Эйлера. Показано, что возмущённое движение системы «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от её существенных параметров. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Показано, что на границу между областями статической неустойчивости влияют в основном растягивающие усилия σ_x и коэффициент Пуассона ν , а влияние сжимающих усилий σ_y исчезающе мало.

В работах [18] и [19] получено решение задачи (1.1) – (1.3) при всех $\gamma \in [0; 0.33]$ и $\gamma \in [0.33; 1.96]$ соответственно. Показано, что несмотря на наличие сжимающих усилий σ_y , растягивающие усилия σ_x приводят к существенному повышению устойчивости системы, возрастающей с ростом параметра γ .

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.3). Аналогично, как и в [18, 19], сведём задачу устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде суммы гармонических колебаний:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re} \lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re} \lambda > 0$) [11, 14]. Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re} \lambda = 0$) [1, 2, 11, 14].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [17– 19]:

$$r^4 - 2 \cdot (1 + \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1 - \beta_y^2) = 0, \quad (2.2)$$

где α_n^3 – параметр, определяющий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3}, a_0^2 \rho_0 M_{2\cos m} D^{-1} \mu_n^{-3}), \alpha_n^3 > 0; \quad (2.3)$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты, характеризующие усилия σ_x и σ_y соответственно, определяющие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{pr}, (\beta_x^2)_{pr} = h(\sigma_x)_{pr} \cdot D^{-1} \mu_n^{-2}; \quad (2.4)$$

$$\beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2 h \sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_y^2)_{cr}, (\beta_y^2)_{cr} = 2 h(\sigma_y)_{cr} \cdot D^{-1} \mu_n^{-2} \text{ (табл. 1);}$$

согласно условиям (1.4), (1.5).

В соответствии с известным методом решения алгебраического уравнения четвёртой степени – методом Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде группы двух квадратных уравнений [17–19]:

$$(r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}) = 0, \quad (2.5)$$

$$(r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}) = 0; \quad (2.6)$$

где параметр $q = q(V) \in R$, характеризующий скорость потока газа V , единственный действительный корень кубического уравнения:

$$8 \cdot (q+1+\beta_x^2)(q^2 - 1 + \beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0, \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} > 0; \quad (2.7)$$

в силу положительности его дискриминанта.

Учитывая условие (1.4), имеем

$$q = q(V) \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})) \subseteq (q(a_0 M_0), q(a_0 M_{2\cos m})). \quad (2.8)$$

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), переписанного в виде (2.5) и (2.6), можно показать, что [17–19]

$$q_0 = \left(- (1 + \beta_x^2) + 2 \sqrt{(1 + \beta_x^2)^2 + 3(1 - \beta_y^2)} \right) / 3 \text{ (табл.2)} \quad (2.9)$$

$$\text{при } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr} \text{ и } \beta_y^2 \in \left[0; \left(0.25(1 + \beta_x^2)^2 + 1 \right) \right) \cap \left[0; (\beta_y^2)_{cr} \right), \quad (2.10)$$

в силу очевидного условия $q > 0$ и известного требования к корням r_i уравнения (2.2) [1, 2, 14]:

$$r_1 < 0, r_2 < 0, r_{3,4} = \alpha \pm i\beta \in W, \alpha > 0. \quad (2.11)$$

Корни r_i характеристического уравнения (2.2), как решения квадратных уравнений (2.5) и (2.6), легко находятся и определяются выражениями [17–19]:

$$r_{1,2} = -0.5 \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}, r_1 < 0, r_2 < 0; \quad (2.12)$$

$$r_{3,4} = 0.5 \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}, r_{3,4} \in W. \quad (2.13)$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента β_y напряжения σ_y :
 $(\beta_y^2)_{cr} = (\beta_y^2)_{cr}(n, \gamma, v)$ – решения дисперсионных уравнений исходной задачи
 устойчивости в отсутствии обтекания ($V = 0$) при $n = 1$, $\beta_x^2 = 0$ и $m_c = 0, I_c = 0$,
 найденные с точностью до порядка 10^{-4} [1, 15]:
 для $\gamma < 80$

$$F_1(n, \gamma, v, \beta_y^2) =$$

$$= \left(\sqrt{1 + \beta_y} (1 - \beta_y - v)^2 + \sqrt{1 - \beta_y} (1 + \beta_y - v)^2 \right) sh \left(\pi n \gamma \left(\sqrt{1 + \beta_y} - \sqrt{1 - \beta_y} \right) \right) -$$

$$- \left(\sqrt{1 + \beta_y} (1 - \beta_y - v)^2 - \sqrt{1 - \beta_y} (1 + \beta_y - v)^2 \right) sh \left(\pi n \gamma \left(\sqrt{1 + \beta_y} + \sqrt{1 - \beta_y} \right) \right) = 0$$

когда $\beta_y^2 < 1$;

$$F_2(n, \gamma, v) = (2 - v^2) sh(\sqrt{2} \pi n \gamma) - v^2 \sqrt{2} \pi n \gamma \cdot ch(\sqrt{2} \pi n \gamma) = 0,$$

когда $\beta_y^2 = 1$;

$$F_3(n, \gamma, v, \beta_y^2) = \sqrt{\beta_y - 1} (\beta_y + 1 - v)^2 sh(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y + 1}) \cos(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y - 1}) -$$

$$- \sqrt{\beta_y + 1} (\beta_y - 1 + v)^2 ch(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y + 1}) \sin(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y - 1}) = 0, \text{ когда } \beta_y^2 > 1;$$

для $\gamma \geq \gamma_{cr.} \approx 80$

$$F_4 = F_4(v, \beta_y^2) = \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2} \right)^2 - 2v \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2} \right) - (1 - v)^2 = 0, \text{ когда } \beta_y^2 < 1.$$

Заметим, что $\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{cr}} F_1(n, \gamma, v, \beta_y^2) = F_4(v, \beta_y^2)$ при всех n , когда $\gamma \geq \gamma_{cr.} \approx 80$.

Иными словами, начиная с значения $\gamma = \gamma_{cr.} \approx 80$, возмущённое состояние равновесия пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$) теряет устойчивость в виде локализованной неустойчивости в окрестности её свободного края при всех допустимых значениях остальных параметров.

Из данных таблицы 2 следует, что $q_0 = q_0(\beta_x^2, \beta_y^2)$ – монотонно возрастающая функция от коэффициента напряжения β_x^2 , а от коэффициента β_y^2 – монотонно убывающая функция, определяемых выражениями (2.4) соответственно.

В работе [19] показано, что при всех $\gamma \in [1.96, \infty)$ и при всех допустимых значениях остальных параметров возмущённое состояние равновесия динамической системы «пластинка–поток» при скоростях потока $V \geq V_{locdiv}$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки,

подобно системе с полубесконечной пластиной–полосой ($\gamma = \infty$): эйлерова и неэйлерова дивергенция панели, а также, панельный флаттер отсутствуют.

Таблица 1. Значения $(\beta_y^2)_{cr} = (\beta_y^2)_{cr}(n, \gamma, \nu)$ при $n = 1, \beta_x^2 = 0, m_c = 0; I_c = 0$.

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
1.96	1.125	1.105	1.092	1.067	1.004
2.00	1.120	1.101	1.089	1.064	1.0015
2.87	1.057	1.045	1.037	1.020	1.0
4.226	1.026	1.018	1.0123	1.0	0.9605
5.00	1.018	1.0115	1.0067	0.9956	0.9586
7.20	1.0084	1.0036	1.0	0.9910	0.9573
11.08	1.0032	1.0	0.9971	0.9892	0.9571
20.0	1.0008	0.99860	0.9962	0.9892	0.9571
50.7	1.0	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571
≥ 80.0	0.99992	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571

Таблица 2. Значения $q_0 = q_0(\beta_x^2, \beta_y^2)$ при $n = 1$.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0.0	0.3	0.5	0.8	1.0	1,5.
0.0	1.000	1.010	1.027	1.065	1.097	1.194
0.1	0.949	0.963	0.983	1.025	1.059	1.161
0.3	0.840	0.864	0.890	0.940	0.980	1.093
0.5	0.721	0.757	0.791	0.851	0.897	1.022
0.7	0.586	0.640	0.683	0.756	0.809	0.949

А тогда, в соответствии с условием затухания колебаний на краю $x = a$ общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда [5, 6, 13]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \gamma \in [1.96; \infty); \quad (2.14)$$

где $r_k, k = 1, 2$ определены выражениями (2.12).

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 D(a_0 \rho_0 b^3)^{-1}, \quad \gamma \in [1.96; \infty]; \quad (2.15)$$

позволяющую по известному значению параметра $q = q(n, \beta_x^2, \beta_y^2, \nu)$ определить приведённую скорость потока газа $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$.

Так как невозмущённое состояние равновесия системы в случае достаточно широких пластинок $\gamma \in [1.96; \infty]$ устойчиво вблизи $a_0 \sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) [19], то очевидно, что

$$V(q) \in (V(q_0), a_0 M_{2\cos m}) \subset (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}). \quad (2.16)$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 / (12(1 - \nu^2))$ отсюда следует [15–17]:

$$V(q) D^{-1} (a_0 \rho_0 b^3) \in (V(q_0) D^{-1} (a_0 \rho_0 b^3), a_0 M_{2\cos m} \Psi) \subset (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi, \\ \Psi = 12(1 - \nu^2) a_0 \rho_0 E^{-1} (2hb^{-1})^{-3}, \gamma \in [1.96; \infty]. \quad (2.17)$$

Подставляя значения коэффициента Пуассона ν и относительной толщины пластинки $2hb^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в выражения (2.17), получаем интервалы $d(\nu, 2hb^{-1}) = (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi$ допустимых значений приведённой скорости потока $V(q) D^{-1} (a_0 \rho_0 b^3)$, представленные для стальных пластинок в таблице 3.

Таблица 3.

$\nu \backslash 2hb^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.8, 1311.7)	(52.0, 1245.2)	(50.5, 1209.0)	(47.7, 1141.6)	(41.6, 996.3)
0.007	(34.5, 811.1)	(32.7, 769.4)	(32.0, 753.4)	(30.0, 705.3)	(26.2, 615.5)
0.008	(23.1, 544.3)	(22.0, 516.4)	(21.5, 505.6)	(20.1, 473.3)	(17.6, 413.1)
0.009	(16.2, 381.8)	(15.4, 362.1)	(15.1, 354.6)	(14.1, 332.0)	(12.3, 289.7)
0.010	(11.8, 283.5)	(11.2, 269.1)	(10.9, 261.3)	(10.3, 246.7)	(9.0, 215.3)
0.011	(8.9, 209.4)	(8.4, 198.7)	(8.1, 190.4)	(7.74, 182.1)	(6.75, 158.9)
0.012	(6.85, 164.0)	(6.5, 155.7)	(6.3, 151.2)	(5.96, 142.7)	(5.2, 124.6)
0.013	(5.39, 126.9)	(5.11, 120.34)	(5.0, 117.84)	(4.69, 110.32)	(4.09, 96.3)
0.014	(4.3, 101.5)	(4.09, 96.24)	(4.0, 94.24)	(3.75, 88.22)	(3.27, 77.0)
0.015	(3.5, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

3. Достаточный признак потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) для $\gamma \in [1.96; \infty]$.

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.14) в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к характеристическому определителю – биквадратному уравнению относительно собственного значения λ :

$$\tilde{F}(\lambda) = \chi_n \delta_n \tilde{A}_0 \lambda^4 + (\chi_n \tilde{A}_1 + \delta_n \tilde{A}_2) \lambda^2 + \tilde{A}_3 = 0, \gamma \in [1.96; \infty], \quad (3.1)$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \delta_n > 0, \chi_n > 0; \quad (3.2)$$

δ_n и χ_n – приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края пластинки;

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 &= 1, \quad \tilde{A}_1 = \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot (q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}), \quad \tilde{A}_2 = \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}, \\ \tilde{A}_3 &= (q+1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2})^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 + 2\beta_x^2(q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Отсюда очевидно, что

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 > 0, \tilde{A}_1 > 0, \tilde{A}_2 > 0 \text{ при всех } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}, \\ \beta_y^2 \in \left[0; \left(0.25(1+\beta_x^2) + 1\right)\right) \cap \left[0; (\beta_y^2)_{cr.}\right) \text{ и } q \in (q_0, q(a_0 M_{2 \cos m})).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n)^2 \cdot (m_c b^2)^{-1}, \quad k_n > 0, \quad (3.5)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2), (3.4) и (3.5), переписывается в виде

$$\lambda^4 + (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) \chi_n^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \tilde{A}_3 = 0, \quad (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) > 0. \quad (3.6)$$

Легко показать, что дискриминант уравнения (3.6)

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(q, n, v, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n) = (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)^2 - 4k_n \tilde{A}_0 \tilde{A}_3 > 0 \quad (3.7)$$

при всех допустимых значениях параметров системы.

В самом деле, подставляя в формулу (3.7) выражения (3.3), после несложных преобразований получаем

$$\tilde{\Delta} = 2(q+1+\beta_x^2) \left(k_n (q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}) - 1 \right)^2 + 4k_n (2(q+1)v + (1-v)^2) > 0.$$

Соответственно, для всех $\gamma \in [1.96; \infty]$ анализ устойчивости возмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» будет сводиться к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.6) при условиях $(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) > 0$ и $\tilde{\Delta} > 0$, определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров $\mathfrak{V} = \{q(V), n, v, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n\}$. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Здесь, также, как и в работах [18 и 19], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\mathfrak{V}$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\mathfrak{V}_0(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0, \tilde{A}_3 > 0, \tilde{\Delta} > 0)$ и области неустойчивости: $\mathfrak{V}_1(\tilde{A}_3 < 0, \tilde{\Delta} > 0)$, $\mathfrak{V}_2(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0, \tilde{A}_3 > 0, \tilde{\Delta} > 0)$ и $\mathfrak{V}_3(\tilde{A}_3 > 0, \tilde{\Delta} < 0)$.

где $\tilde{A}_i, i=1,2,3, k_n$ и $\tilde{\Delta}$ – определены выражениями (3.3), (3.5) и (3.7).

Учитывая условия $(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) > 0$ и $\tilde{\Delta} > 0$, отсюда очевидно, что границей области устойчивости $\mathfrak{I}_0$ системы для всех $\gamma \in [1.96; \infty]$ является гиперповерхность $\tilde{A}_3 = 0$, которая, в соответствии с выражением (3.3), описывается соотношением

$$\left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 + 2\beta_x^2 \left(q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) = 0. \quad (4.1)$$

На гиперповерхности (4.1) определитель (3.6) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2: уравнение (4.1), определяет границу «апериодической устойчивости», при переходе через которую невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) при скоростях потока газа $V \geq V_{locdiv} = V(q_{locdiv})$ для всех $\gamma \in [1.96; \infty]$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

Критические скорости $V_{locdiv} = V_{locdiv}(n, v, \beta_x^2, \beta_y^2)$ потока газа разграничивают область устойчивости $\mathfrak{I}_0$ и область локализованной дивергенции $\mathfrak{I}_{locdiv}$ [19]. При скоростях потока $V \geq V_{locdiv}$ происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k , вызывающий плавное изменение характера невозмущённого состояния равновесия системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции: прогибы пластинки локализованы в окрестности её свободного края $x = 0$. Граница «апериодической устойчивости» (4.1) является «безопасной» в смысле Н.Н. Баутина [12]: малое превышение критической скорости локализованной дивергенции соответствует малым дивергентным деформациям, локализованным в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

А также, из уравнения (4.1) очевидно, что его решение $q_{locdiv} \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm}))$ не зависит от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$. Соответственно, приведённые значения критической скорости локализованной дивергенции $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$, определяемые подстановкой единственного корня $q_{locdiv} \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm}))$ уравнения (4.1) в формулу (2.15), также не зависят от $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, а зависят лишь от параметров n, v, β_x^2 и β_y^2 . Из независимости функции $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$ следует, что коэффициенты χ_n и δ_n , характеризующие сосредоточенные инерционные моменты поворота I_c и массы m_c соответственно, влияют лишь только на показатель экспоненты

собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$ [13, 14].

Следует отметить, что уравнение (4.1) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании исходной задачи в статической постановке по методу Эйлера.

Таким образом, невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) в случае достаточно широких прямоугольных пластинок $\gamma \in [1.96; \infty)$ и полубесконечной пластины–полосы $\gamma = \infty$ теряет только лишь статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$, в отличие от удлинённых прямоугольных пластинок [18] и пластинок умеренных размеров [19].

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2)\} \in \mathfrak{I}$, параметризованных в пространстве $\mathfrak{I}$ надлежащим образом.

Таблица 4. Значения $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ при $n = 1$, $\nu = 0.125; 0.3; 0.5$.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0.0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5
0.0	296.222 143.905 79.668	367.225 184.005 107.391	413.345 210.785 126.692	483.020 250.895 153.467	528.651 276.964 176.110	574.074 303.485 195.321	641.382 343.018 223.981
0.1	274.189 132.801 72.771	341.179 170.236 99.259	384.762 195.945 118.186	449.573 233.386 145.277	492.573 257.806 163.292	535.338 288.671 181.591	598.480 320.360 208.492
0.2	252.075 121.059 65.578	314.376 156.899 90.589	355.330 180.426 107.914	415.362 215.322 133.529	455.910 238.871 150.057	495.409 262.700 167.308	554.396 296.830 192.684
0.3	229.370 109.651 58.233	296.760 142.591 81.521	324.512 164.150 97.252	380.458 195.920 121.041	417.283 219.786 136.653	453.433 240.358 152.484	507.385 272.213 175.944
0.4	205.655 97.886 50.535	257.897 127.919 72.237	296.581 145.717 83.375	343.492 177.246 108.090	376.583 197.140 122.766	410.738 217.069 137.075	460.344 246.490 158.649
0.5	181.210 85.407 42.625	228.296 112.287 61.782	259.040 130.397 75.525	304.794 157.201 94.452	334.477 174.810 107.819	365.136 192.807 120.803	409.839 219.385 140.222
0.6	155.448 72.305 34.249	196.328 96.046 51.756	223.615 111.232 62.725	263.831 135.225 75.487	296.289 144.496 80.067	316.744 166.941 103.334	355.950 190.328 120.654
0.7	127.687 58.411 26.703	132.212 78.558 40.375	185.496 92.078 50.241	219.357 112.112 60.958	241.842 125.367 67.958	264.804 134.303 72.521	296.268 143.481 79.359

В этом случае так же, как и в работах [13– 17], критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является возрастающей функцией от числа полуволн n : её наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Подставляя решение $q_{loc.div.} \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm}))$ уравнения (4.1) в формулу (2.15), получаем значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$, представленные в таблице 4 для некоторых допустимых значений параметров системы β_x^2 , β_y^2 и ν при $n = 1$.

Из данных таблицы 4 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ является монотонно возрастающей функцией от коэффициента напряжения β_x^2 , а от β_y^2 и коэффициента Пуассона ν – убывающей функцией: на промежутке $\beta_x^2 \in [0; 1.5]$ возрастает, примерно, в 2 – 4 раза; на промежутке $\beta_y^2 \in [0; 0.7]$ убывает, примерно, в 2 – 3 раза; а в пластинах из материалов с большим значением ν меньше в 2.86 – 4.8 раз.

Из сопоставления данных таблиц 1, 3 и 3, 4 очевидно, что при обтекании происходит «падение» критического значения $(\beta_y^2)_{cr}$ коэффициента напряжения β_y^2 , примерно, в 1.33 – 1.56 раз, существенно зависящим от коэффициента Пуассона ν : с ростом ν «падение» уменьшается; невозмущённое состояние равновесия системы является устойчивым вблизи $a_0 \sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) при всех допустимых значениях её «существенных» параметров, в частности, для стальных пластинок относительной толщины $2h^{-1}b \in (0.006, 0.015]$.

Для всех $\gamma \geq 1.96$ при определённом соотношении растягивающих сил N_x и сил сжатия N_y , имеет место эффект их «взаимной компенсации»: критическая скорость $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ одна и та же, что и при их отсутствии ($N_x = N_y = 0$) (табл.5).

Таблица 5.

β_{xc}^2	0.1	0.2	0.3	0.5	0.65	1.0	1.5
β_{yc}^2	0.1	0.134	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\varphi_c = \beta_{xc}^2 \cdot (\beta_{yc}^2)^{-1}$	1	1	1	1.25	1.3	1.6	2.14

При $\varphi \geq \varphi_c$ на порог устойчивости системы оказывают влияние преимущественно растягивающие силы N_x , с ростом которых устойчивость системы

повышается, и, наоборот, при $\varphi < \varphi_c$ – сжимающие силы N_y , приводящие в основном к понижению устойчивости системы.

6. Влияние относительной толщины пластинки на порог устойчивости системы «пластинка–поток».

Из соотношения (2.17) легко можно получить формулу, связывающую относительную толщину пластинки $2hb^{-1}$ с приведенной скоростью потока газа. В частности, имеем [20]:

$$\left(2hb^{-1}\right)_{\min}^3 = a_0 M_{2\cos m} \cdot \left(12(1-v^2)a_0\rho_0 E^{-1}\right) \cdot \left(V_{locdiv} D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)\right)^{-1}. \quad (6.1)$$

Подставляя значения: $a_0 = 331$ м/сек, $\rho_0 = 1.29$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^{11}$ н/м², $M_{2\cos m} = 33.3$ и $V_{locdiv} D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (табл.4) в формулу (6.1), находим минимальную относительную толщину $\left(2hb^{-1}\right)_{\min}$ широкой стальной пластинки, начиная с которой при всех $2hb^{-1} \geq \left(2hb^{-1}\right)_{\min}$ невозмущенное состояние равновесия системы устойчиво на всём промежутке сверхзвуковых скоростей (1.4) при всех допустимых значениях остальных параметров (табл.6).

Таблица 6. Значения $\left(2hb^{-1}\right)_{\min}$ при $n = 1$, $v = 0.125; 0.3; 0.5$.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0.0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5
0.0	0.00978 0.01217 0.01384	0.00911 0.01121 0.01255	0.00876 0.01071 0.01187	0.00831 0.01011 0.01113	0.00807 0.00978 0.01063	0.00785 0.00946 0.01027	0.00757 0.00912 0.00981
0.1	0.01004 0.01250 0.01427	0.00634 0.01151 0.01287	0.00897 0.01097 0.01214	0.00852 0.01032 0.01133	0.00826 0.01001 0.01092	0.00803 0.00964 0.01052	0.00774 0.00931 0.01005
0.2	0.01330 0.01288 0.01477	0.00959 0.01182 0.01326	0.00921 0.01128 0.01275	0.00874 0.01063 0.01166	0.00848 0.01027 0.01121	0.00824 0.00995 0.01082	0.00794 0.00953 0.01032
0.3	0.01066 0.01332 —	0.00988 0.01221 0.01374	0.00949 0.01165 0.01295	0.00901 0.01096 0.01244	0.00873 0.01057 0.01156	0.00849 0.01025 0.01115	0.00818 0.00984 0.01063
0.4	0.01106 0.01383 —	0.01027 0.01285 0.01431	0.00983 0.01206 0.01304	0.00931 0.01135 0.01251	0.00903 0.01095 0.01198	0.00878 0.01061 0.01156	0.00845 0.01017 0.01101
0.5	0.01153 0.01447 —	0.01067 0.01321 —	0.01023 0.01257 0.01410	0.00969 0.01181 0.01309	0.00944 0.01143 0.01252	0.00913 0.01103 0.01205	0.00878 0.01057 0.01148
0.6	0.01213 — —	0.01122 0.01393 —	0.01075 0.01324 —	0.01017 0.01242 0.01380	0.00985 0.01201 0.01320	0.00957 0.01157 0.01274	0.00919 0.01108 0.01207
0.7	0.01294 — —	0.01280 0.01488 —	0.01144 0.01412 —	0.01082 0.01322 0.01483	0.01047 0.01273 0.01413	0.01016 0.01232 0.01354	0.00977 0.01178 0.01295

Из данных таблицы 6 следует, в частности, что, начиная с значения $\beta_x^2 = 0.8$, невозмущённое состояние равновесия системы устойчиво при всех $\beta_y^2 \in [0; 0.7]$.

Соответственно, цепочки переходов состояний системы будут вида [18, 19]:

$$\text{когда } 2hb^{-1} < (2hb^{-1})_{\min} \\ \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{loc, div}} \mathfrak{T}_{locdiv} \quad (6.2)$$

при всех $\beta_x^2 \in [0; 1.5]$ и $\beta_y^2 \in [0; 0.7]$;

$$\mathfrak{T}_0, \text{ когда } 2hb^{-1} \geq (2hb^{-1})_{\min}. \quad (6.3)$$

Тем самым, при $2hb^{-1} \geq (2hb^{-1})_{\min}$ невозмущённое состояние равновесия системы является устойчивым на всём промежутке сверхзвуковых скоростей (1.4) при всех допустимых значениях остальных «существенных» параметров системы.

7. Основные результаты и заключение.

В работе, на примере достаточно широких прямоугольных пластинок и полубесконечной пластины–полосы $\gamma \in [1.96, \infty]$, исследуется влияние первоначальных сил растяжения N_x и сжатия N_y , направленных, соответственно, по сверхзвуковому потоку газа и в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток», с целью управления им, в предположении наличия сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота на их свободном крае.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка–поток».

Получены явное выражение дисперсионного уравнения, характеризующего достаточные признаки потери устойчивости и формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа.

С помощью графоаналитических и численных методов анализа произведено разбиение многопараметрического пространства состояний системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Показано, что граница области устойчивости определяется только гиперповерхностью, характеризующей потерю «апериодической устойчивости» в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки, что свидетельствует о «безопасности» границы в смысле Баутина Н.Н. [12]. Отсюда, очевидно, следует, что в исходной задаче, как и в [15–17, 21], критическая скорость локализованной дивергенции не зависит от параметра отношения коэффициентов, характеризующих сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c . Сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота влияют только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба. Показано, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции

является монотонно возрастающей функцией от сил растяжения N_x , а от сил сжатия N_y и от коэффициента Пуассона ν – монотонно убывающей функцией. Соответственно, силы растяжения N_x приводят к существенному повышению устойчивости системы, а сжимающие силы N_y – наоборот, к понижению.

Определены взаимокompенсирующие значения коэффициентов напряжений, характеризующих усилия в срединной поверхности пластинки, при которых соответствующие первоначальные силы N_x и N_y не влияют на порог устойчивости системы.

Как и в работе [21], здесь так же, первоначальные силы N_x , направленные по потоку, существенно влияют не только на величину критической скорости, но и на границу области устойчивости, в отличие от сил N_y , направленных в перпендикулярном направлении к скорости потока газа, оказывающим влияние только на величину критической скорости.

Сравнительный анализ результатов данной работы и работ [15– 17, 21] позволяет установить границы применимости метода Эйлера, наряду с применением динамического метода. Сопоставление результатов решения задачи устойчивости динамических систем «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок и полубесконечной пластины–полосы, полученных применением обоих методов, указывает на их хорошее совпадение. Поэтому, при решении подобных задач применение метода Эйлера, как наиболее удобного и простого, вполне оправдано.

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для получения аналитического решения широкого класса задач устойчивости упругих систем, в частности, при комбинированном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6. . № 1. С. 124–126.
6. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38– 46.
7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
8. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
9. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
10. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
11. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.– Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.

12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
13. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34.
14. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели с свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов. // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74 (3), с. 19-36.
16. Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели со свободным краем, растянутой по сверхзвуковому потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (1), с. 37–55. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-37.
17. Martirosyan S.R. Supersonic divergence of a panel with a free edge initially loaded in two directions tensile and compressive forces // 2022. Journal of Physics: Conference Series 2231 012030. IP address 93.187.163.146. DOI: 10.1088/1742–6596/2231/1/012030.
18. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: растянутой по потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (4), с.27-47. DOI:10.54503/0002-3051-2024.77.4- .27.
19. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, нагруженной по двум направлениям: растянутой по потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2025. Т.78 (1), с.46-68. DOI:10.54503/0002-3051-2025.78.1-46
20. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concentrated inertial masses and moments // Изв. НАН Армении, Механика. 2020. Т.73 (4), с..58–74.
21. Мартиросян С.Р. О динамической устойчивости широкой панели с одним свободным краем, нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (3), с.42 –57. DOI:10.54503/0002-3051-2024.77.3 - 42.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 10) 524890.
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 16 мая 2025

АЭРО-ТЕРМО-МАГНИТО-УПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УДЛИНЕННОЙ
ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Микилян М., Тоноян В., Честино Э.

Ключевые слова: флаттер, нелинейность, температурное поле, магнитное поле, сверхзвуковой поток газа, аэро-термо-магнито-упругая устойчивость

Mikilyan M., Tonoyan V., Cestino E.

Aero-thermo-magneto-elastic stability of an elongated plate in a supersonic gas flow

KeyWords: flutter, nonlinearity, thermal field, magnetic field, supersonic gas flow, aero-thermo-magneto-elastic stability

The paper considers the problem of loss of stability of an isotropic elongated plate of constant thickness, which is flown by a supersonic gas flow and is subjected to the combined effect of a temperature varying along the thickness and magnetic field. Using the basic postulates of the theory of aero-thermo-magneto-elasticity of isotropic bodies, the theory of flexible plates and the linear law of the temperature change along the thickness of the plate, equations and corresponding boundary conditions are obtained that characterize the oscillations and stability of the considered aero-thermo-magneto-elastic system. Based on the derived equations, conditions are obtained and stability boundaries are calculated depending on the variables characterizing the flow velocity, magnetic field, the temperature of the median plane and the temperature gradient in the direction normal to the median plane.

Միկիլյան Մ., Տոնոյան Վ., Չեստինո Է.

Գերձայնային զագային հոսքում երկարացված թիթեղի աերո-թերմո-մագնիսական-առաձգական կայունությունը

Հիմնաբառեր՝ ֆլատեր, ոչ գծայնություն, ջերմային դաշտ, մագնիսական դաշտ, գերձայնային շրջհոսում, աերո-ջերմա-մագնիսա-առաձգական կայունություն

Աշխատանքում դիտարկվում է հաստատուն իզոտրոպ նյութից կառուցված և հաստություն ունեցող երկար սալի կայունության կորստի խնդիրը, երբ այն մի կողմից շրջհոսվում է զագի գերձայնային հոսանքով և ենթարկվում է ըստ հաստության փոփոխական ջերմային և մագնիսական դաշտերի համատեղ ազդեցությանը: Օգտագործելով իզոտրոպ մարմինների աերո-ջերմա-մագնիսա-առաձգականության, ձկուն սալերի և փոփոխական (սալի հաստության ուղղությամբ) ջերմային դաշտի տեսությունների հիմնական դրույթները, ստացվել են դիտարկվող աերո-ջերմա-մագնիսա-առաձգական համակարգի տատանումների ու կայունության հիմնական հավասարումները և համապատասխան մակերևութային պայմանները: Ստացված հավասարումների հիման վրա արտաձվել են կայունության պայմանները և որոշվել են կայունության սահմանները՝ կախված շրջհոսման արագությունից, մագնիսական դաշտի մեծությունից, սալի միջին հարթության ջերմաստիճանից և միջին հարթության նորմալի ուղղությամբ ջերմաստիճանի գրադիենտը բնութագրող փոփոխականներից:

В статье рассматривается вопрос потери устойчивости изотропной удлиненной пластинки постоянной толщины, которая с одной стороны обтекается сверхзвуковым потоком газа и подвергается совместному воздействию переменного по толщине температурного и магнитного полей. Используя основные положения теории аэро-термо-магнито-упругости изотропных тел, теории гибких панелей и линейного по толщине панели закона температурного поля, получены уравнения и соответствующие граничные условия, характеризующие колебания и устойчивость рассматриваемой аер-термо-магнито-упругой системы. На основе выведенных уравнений получены условия и вычислены границы устойчивости в зависимости от переменных, характеризующих скорость потока, значения магнитного поля, температуру срединной плоскости и градиента температуры в направлении, нормальном к срединной плоскости.

Введение. Панельный флаттер - потеря устойчивости и интенсивные колебания панелей обшивок летательных аппаратов, возбуждающихся при взаимодействии с потоком воздуха при больших скоростях полета. При математическом моделировании обтекания твердого тела газовым потоком обычно предполагается, что обтекаемая поверхность не деформируется. Если изгибная жесткость обтекаемого тела невелика, от этого предположения необходимо отказаться и рассмотреть совместные колебания тела и газового потока. Обычно колебания, инициированные некоторым начальным импульсом, быстро затухают за счет так называемой аэродинамической вязкости, но возможен случай, когда амплитуда колебаний со временем резко возрастает. Это явление, называемое флаттером, может вызвать разрушение обтекаемых элементов конструкции летательного аппарата — несущих поверхностей или обшивки. Возможно также ухудшение управляемости. Флаттер явился причиной многих авиакатастроф. Поэтому его изучение представляет собой одно из приоритетных направлений исследований механики.

Среди задач математического моделирования флаттера выделяют широкий класс задач - задачи панельного флаттера, при формулировке которых обтекаемое тело можно рассматривать как пластинку или пологую оболочку [13,18,19].

Сверхзвуковой флаттер характерен для элементов обшивки и несущих поверхностей малого удлинения. Его возникновение - это переход от затухающих колебаний к колебаниям с возрастающей амплитудой, который естественно трактовать как потерю устойчивости [4,13,23]. При анализе устойчивости в линейной постановке удастся определить границу устойчивого режима обтекания, т.е. критическое значение скорости набегающего потока [2,3,24].

Следует отметить, что флаттер панели может возникать на плоских или изогнутых панелях. Разные факторы могут по-разному влиять на характер границы флаттера. Эти факторы могут быть структурными или геометрическими, термодинамическими, магнитными, аэродинамическими, возникающими из характеристик потока и появляющимися в уравнениях состояния [5,9,12].

Устойчивость изотропных пластин постоянной толщины в сверхзвуковом потоке газа широко изучена [2-4,8,9,25], в то же время, насколько известно авторам, задача аэротермоупругой устойчивости панелей в переменном по толщине температурном поле была рассмотрена лишь в незначительной степени [5-7,21]. Нужно отметить, что вопросам аеро-магнито-упругой устойчивости посвящено очень малое количество работ [14,15,17,26]. В частности, в настоящей работе рассматривается вопрос потери устойчивости изотропной пластины-полосы постоянной толщины, погруженной в

сверхзвуковое поле обтекания и подвергающейся воздействию переменного по толщине температурного и продольного магнитного поля. Используя основные принципы теории аэро-термо-магнито-упругости изотропных тел [11,20,22], теории гибких пластин [28,29], теории магнитоупругости и линейного закона изменения по толщине пластины температурного поля [5,6], получены уравнения устойчивости и соответствующие граничные условия. Показано, что коэффициенты этих аэро-термо-магнито-упругих определяющих уравнений зависят от температуры и параметра магнитного поля, и, следовательно, критическая скорость флаттера панели зависит от совместного влияния этих явлений. Это явление обусловлено тем, что под воздействием температурного поля в невозмущенном состоянии пластина выпучивается из-за неоднородности температурного поля по ее толщине. Показано также, что приложенное магнитное поле оказывает существенное влияние на критическую скорость флаттерных колебаний.

Формулировка задачи. Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную удлиненную пластинку постоянной толщины h , находящуюся в стационарном температурном поле T и в продольном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}_0(H_{01}, 0, 0)$. Декартова система координат (x_1, x_2, x_3) выбрана так, чтобы срединная плоскость пластины совпадала с координатной плоскостью (x_1, x_2) . Сверхзвуковой поток газа с невозмущенной скоростью U направлен вдоль оси $0x_1$, с одной стороны панели, как показано на рис. 1.

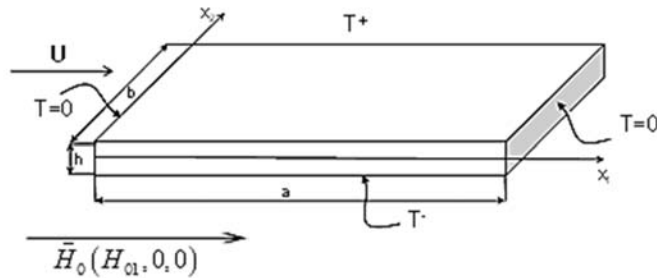


Рис.1. Геометрическая интерпретация задачи.

Принимается, что пластинка в направлении, перпендикулярном к скорости обтекающего потока, достаточно длинная и однородно закреплена по длинным сторонам. В этом случае срединная поверхность изогнутой пластинки будет близка к цилиндрической. Поэтому, направляя ось $0x_2$ вдоль длинной стороны, считаем, что все величины (как возмущенного, так и невозмущенного состояний) не зависят от координаты x_2 .

Основные предположения. Для исследования аэро-термо-магнито-упругой устойчивости панели используются следующие предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемой нормали [28,29];
- б) основные положения теории гибких пластин [28,29];
- в) при расчете аэродинамического давления используется модифицированная формула поршневой теории [1,2,12]:

$$q = -\alpha p_{\infty} \lambda^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{v_3}{a_0} \right) + \frac{5-\alpha+3\lambda^2}{4(1+\lambda^2)^2} \left(\frac{v_3}{a_0} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{(2\alpha+3)\lambda^4 + (10-\alpha^2)\lambda^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 9}{12(1+\lambda^2)^3 \sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{v_3}{a_0} \right)^3 + \dots \right\}, \quad (1)$$

где p - давление газа на поверхности пластинки, $a_{\infty}^2 = \alpha p_{\infty} \rho_{\infty}^{-1}$ - скорость звука для невозмущенного газа, p_{∞} и ρ_{∞} - давление и плотность газа в невозмущенном состоянии, α - показатель политропы газа, v_3 - нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки,

$$\lambda^2 = \frac{V_A^2}{a_0^2}, \quad V_A^2 = \frac{B_{01}^2}{\rho_0 \mu_0}, \quad \#$$

V_A - величина, численно равная скорости распространения альфвеновских электромагнитных волн, $B_{01} = \mu_0 \mu_r H_{01}$, μ_r - относительная магнитная проницаемость, μ_0 ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$) - магнитная постоянная;

- г) линейный закон температурного поля по толщине пластины [6,13]:
- $$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + x_3 \Theta(x_1, x_2); \quad (2)$$
- д) гипотеза Неймана об отсутствии касательных напряжений [29].

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ($\Theta \neq 0$) происходит выпучивание пластинки (с прогибом $w_T(x_1)$) и вследствие этого появляется аэроупругое давление, которое, согласно предположению (в), определяется формулой (1). В линейном приближении для указанного давления получается выражение $\alpha p_{\infty} \sqrt{1+\lambda^2} a_{\infty}^{-1} dw_T / dx_1$.

На основе приведенных уравнений и соответствующих условий на краях $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ пластинки (граничные условия приводятся в ходе изложения) исследуется устойчивость указанного выпученного (невозмущенного) состояния, под действием температурного поля и давления обтекающего сверхзвукового потока газа. Для определения характеристик невозмущенного состояния кроме уже принятых предположений, принимаются также следующие:

- а) деформации невозмущенного состояния настолько малы, что можно воспользоваться линейной теорией аэро-термо-магнито-упругости;

- б) с лицевых поверхностей ($x_3 = \pm h/2$) пластинки происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^+ и T^- соответственно), а боковые поверхности ($x_1 = 0$ и $x_1 = a$) теплоизолированы.

Определение температурного поля и выпучивания пластинки. Стационарное температурное поле в панели получается из решения следующего уравнения теплопроводности [13]

$$\Delta T = 0 \quad (3)$$

в среде, занимаемой панелью, со следующими поверхностными условиями:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = k(T - T^\pm) \quad \text{для } x_3 = \pm \frac{h}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{для } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a \quad (5)$$

Согласно предположению о линейном законе температуры по толщине пластины, сформулированная задача теплопроводности (3)–(5) дает следующие соотношения:

$$T = T_0(x_1) + x_3 \Theta(x_1),$$

$$T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta = \frac{k(T^+ - T^-)}{kh - 2\lambda}. \quad (6)$$

В уравнениях (4) и (5) λ - коэффициент теплопроводности, k - коэффициент теплопередачи, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности пластины.

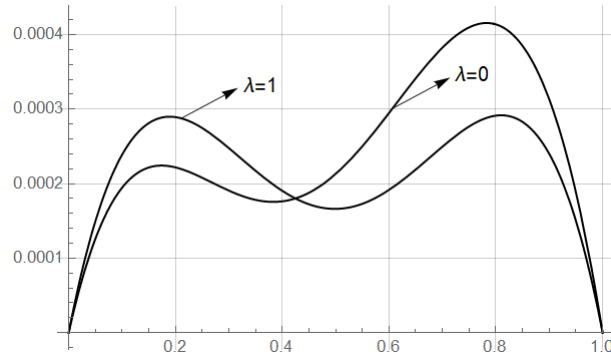


Рис.2. Графики функции w_T при разных значениях параметра магнитного поля λ .

Задача определения прогиба w_T решена приближенно методом Бубнова-Галеркина и получена следующая формула:

$$w_T(x_1) = -R\Theta \left\{ \frac{1}{2} x_1 (x_1 - a) + \right. \\ \left. + \frac{a^2 K v \sqrt{1 + \lambda^2}}{36 + (K v \sqrt{1 + \lambda^2})^2} \left[\frac{3 \sqrt{1 + \lambda^2}}{8\pi} K v \sin \frac{\pi x_1}{a} + \frac{9}{16\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right] \right\}. \quad (7)$$

На рис. 2 приведены графики функции w_T , построенные на основе формулы (7) при $\alpha = 23.8 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; $k = 1200$ Вт/(м 2 град); $\lambda = 210$ Вт/(м град); $\mu = 0.34$; $a = 1$ м; $h/a = 1/100$ [27].

На основе принятых предположений найдено следующее нелинейное дифференциальное уравнение аэро-термо-магнито-упругости:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - N_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty \sqrt{1 + \lambda^2}}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \\ + \alpha p_\infty M \sqrt{1 + \lambda^2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \alpha p_\infty M^2 \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 4)\lambda^2 + 3\lambda^4}{4(1 + \lambda^2)^2} \left[2 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x_1} + \\ + \alpha p_\infty M^3 \sqrt{1 + \lambda^2} \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 1)(\alpha + 3)\lambda^2 + (\alpha^2 - 3\alpha + 11)\lambda^4 + (2\alpha + 3)\lambda^6}{12(1 + \lambda^2)^4} \times \\ \times \left[3 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = 0 \quad (8)$$

Решения уравнения (8) должны удовлетворять условиям закрепления краев пластинки $x_1 = 0$ и $x_1 = a$. Будут рассмотрены краевые условия следующих двух типов:

- края шарнирно оперты и свободно перемещаются вдоль оси $0x_1$.
- края шарнирно оперты и неподвижны.

В (8) введены следующие обозначения:

$$N_1^T = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ -\frac{Eh}{1 - \mu} \alpha T_0, & \text{когда края пластинки неподвижны;} \end{cases} \\ N_1 = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ \frac{Eh}{2\alpha(1 - \mu^2)} \int_0^a \left(2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right) dx_1, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases} \quad (9)$$

Решения уравнения (8) должны удовлетворять следующим условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a, \quad (10)$$

которые вытекают из условий шарнирного опирания краев пластинки.

Метод решения. Полученную нелинейную задачу (8)–(10) решаем приближенно, представляя решение в виде [10]

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i x_1, \quad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right), \quad (11)$$

где $f_i(t)$ являются функциями времени t , которые необходимо определить.

Представление (11) удовлетворяет граничным условиям, перечисленным в уравнении (10). Подставляя формулу (11) в уравнение (8) и используя метод Бубнова-Галёркина, получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $f_i(t)$.

В работе будем использовать биномиальное приближение [2,30]:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x.$$

Затем с помощью безразмерных функций $x_i = f_i(t)/h$ выводится нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которое в линейной постановке принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + (1 - \bar{T}\delta) x_1 - \frac{2}{3} K v x_2 + \bar{\Theta} [\delta_{11}^\lambda x_1 + \delta_{12}^\lambda x_2] + \\ + \bar{\Theta}^2 \delta [\gamma_{11}^\Theta x_1 + \gamma_{12}^\Theta x_2] = 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + (\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) x_2 + \frac{2}{3} K v x_1 + \bar{\Theta} [\delta_{21}^\lambda x_1 + \delta_{22}^\lambda x_2] + \\ + \bar{\Theta}^2 \delta [\gamma_{21}^\Theta x_1 + \gamma_{22}^\Theta x_2] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где вместе с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$ вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{T} = RT_0 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{12}{\pi^2} \right), \quad \bar{\Theta} = R\Theta h \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 v^2}, \\ K = \frac{4\alpha p_\infty}{\rho \omega_1^2 h^2}, \quad \bar{v} = M \sqrt{1 + \lambda^2} \frac{h}{a}, \\ \omega_i = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 \quad (i=1,2), \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{a_\infty \rho_\infty \sqrt{1 + \lambda^2}}{\rho h} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты δ_{ij}^λ , учитывающие магнито-аэро-динамическое влияние:

$$\begin{aligned}\delta_{11}^{\lambda} &= -\frac{9}{4} \frac{1+\mathfrak{x}+\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} K \bar{v}^2, \quad \delta_{12}^{\ominus} = \frac{21}{40} \frac{1+\mathfrak{x}+\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} K^2 \bar{v}^3, \\ \delta_{21}^{\lambda} &= \frac{3}{40} \frac{1+\mathfrak{x}+3\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} K^2 \bar{v}^3, \quad \delta_{22}^{\lambda} = -\frac{1}{80} \frac{1+\mathfrak{x}+3\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} K \bar{v}^2 (180 + K^2 \bar{v}^2),\end{aligned}\tag{14}$$

коэффициенты $\gamma_{ij}^{\ominus}$, которые учитывают магнитное и температурное влияние отмеченных процессов:

$$\begin{aligned}\gamma_{11}^{\ominus} &= \frac{3(1152 + (32 - 3\pi^2) K^2 \bar{v}^2)^2}{32\pi^6}, \quad \gamma_{22}^{\ominus} = \frac{243}{8\pi^2} K^2 \bar{v}^2 \\ \gamma_{12}^{\ominus} = \gamma_{21}^{\ominus} &= -\frac{27(1152 + (32 - 3\pi^2) K^2 \bar{v}^2)}{16\pi^4} K \bar{v}.\end{aligned}\tag{15}$$

В уравнениях (12), (13) χ , v , λ , $\bar{T}$, $\bar{\Theta}$ - параметры, характеризующие процесс затухания, скорость потока и температурное поле соответственно, тогда как

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases}$$

Таким образом, задача устойчивости данной аэроупругой системы в первом приближении получается из решений системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (12), зависящей от скорости потока v , температуры ($\bar{T}$, $\bar{\Theta}$) и магнитного поля (λ).

Границы и условия устойчивости. Представив решение системы (12) в виде

$$x_1 = y_1 e^{r\tau},$$

$$x_2 = y_2 e^{r\tau},$$

получим следующее характеристическое уравнение относительно r :

$$a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 = 0\tag{16}$$

где

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 2\chi,$$

$$a_2 = 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{\lambda} + \delta_{22}^{\lambda}) + \bar{\Theta}^2\delta(\gamma_{11}^{\ominus} + \gamma_{22}^{\ominus}) + \chi^2,$$

$$a_3 = [1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{\lambda} + \delta_{22}^{\lambda}) + \bar{\Theta}^2\delta(\gamma_{11}^{\ominus} + \gamma_{22}^{\ominus})]\chi,$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2v^2 - \bar{T}\bar{\Theta}\delta[4\delta_{11}^\lambda + \delta_{22}^\lambda + \bar{\Theta}\delta(\gamma_{11}^\Theta + \gamma_{22}^\Theta)] + \\
& + \bar{\Theta}\left\{\gamma^2\delta_{11}^\lambda + \delta_{22}^\lambda + \bar{\Theta}\delta(\gamma^2\gamma_{11}^\Theta + \gamma_{22}^\Theta) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^\lambda - \delta_{21}^\lambda)\right\} + \\
& + \bar{\Theta}^2\left\{\delta_{11}^\lambda\delta_{22}^\lambda - \delta_{12}^\lambda\delta_{21}^\lambda + \bar{\Theta}\delta[\gamma_{22}^\Theta\delta_{11}^\lambda + \gamma_{11}^\Theta\delta_{22}^\lambda - (\gamma_{21}^\Theta\delta_{12}^\lambda + \gamma_{12}^\Theta\delta_{21}^\lambda)]\right\} + \\
& + \bar{\Theta}^4\delta^4\left[\gamma_{11}^\Theta\gamma_{22}^\Theta - (\gamma_{12}^\Theta)^2\right].
\end{aligned}$$

Невозмущенная форма пластины устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Рауса -Гурвица, можно записать в виде [16]:

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 4),$$

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_3a_0 > 0 \quad (17)$$

$$\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2a_0 > 0$$

Первые два неравенства, требующие, чтобы демпфирование (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из оставшихся условий неравенства, определяющих область устойчивости рассматриваемой термоупругой системы параметров, v , λ , $\bar{T}$, $\bar{\Theta}$ следующие :

$$1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta) > 0$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2\bar{v}^2 + \\
& + \left(\gamma^2(\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta) - \frac{2}{3}K\bar{v}(\delta_{12}^\Theta - \delta_{21}^\Theta) - (4\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta)\bar{T}\delta\right)\bar{\Theta} + \\
& + (\delta_{11}^\Theta\delta_{22}^\Theta - \delta_{12}^\Theta\delta_{21}^\Theta)\bar{\Theta}^2 > 0
\end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2\bar{v}^2 + 2\chi^2(\gamma^2 + 1) - (6(\delta_{22}^\Theta - \delta_{11}^\Theta)\bar{\Theta} + 10\chi^2)\bar{T}\delta + \\
& + 2\left((\gamma^2 - 1)(\delta_{22}^\Theta - \delta_{11}^\Theta) + \frac{4}{3}K\bar{v}(\delta_{12}^\Theta - \delta_{21}^\Theta) + (\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta)^2\chi^2\right)\bar{\Theta} + \\
& + (4\delta_{12}^\Theta\delta_{21}^\Theta + (\delta_{22}^\Theta - \delta_{11}^\Theta)^2)\bar{\Theta}^2 > 0.
\end{aligned}$$

Если эффектом затухания пренебречь, то вместо (17) можно получить биквадратное уравнение, и, следовательно, условия устойчивости будут такими:

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_2^2 - 4a_4 > 0. \quad (19)$$

Далее поэтапно приводится исследование области устойчивости:

$$1) \bar{T} \neq 0, \quad \bar{\Theta} = 0;$$

- 2) $\bar{T} = 0, \bar{\Theta} \neq 0$;
 3) общий случай $\bar{T} \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0$.

1) Постоянное температурное поле ($\bar{T} \neq 0, \bar{\Theta} = 0$). В этом случае, когда $\delta = 1$, т.е. когда края пластинки закреплены, условия (18) существенно упрощаются и принимают вид:

$$1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta > 0$$

$$(1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2\bar{v}^2 > 0 \quad (20)$$

$$(\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2\bar{v}^2 + 2\chi^2(\gamma^2 + 1) - 10\chi^2\bar{T}\delta > 0.$$

С другой стороны, если $\delta = 0$, т.е. когда края пластины могут свободно перемещаться, то первые два условия из (20) выполняются во всех случаях, а из третьего условия получается нижний критический флаттер пластины:

$$\bar{v}_* = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{K} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}} \quad (21)$$

или

$$v_* = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{K\sqrt{1 + \lambda^2}} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}} \quad (22)$$

Отметим, что формула (21) совпадает с известной формулой, полученной в [1,13], показывающей, что постоянное температурное поле не влияет на область устойчивости, если края пластины движутся свободно. Формула (22) показывает, что значение критической скорости флаттера обратно пропорциональна значению магнитного поля.

Неравенства (20) используются для построения области устойчивости на плоскости (v, λ) . Рис.3 показывает эту область, когда $T_0 > 0$, а рис.4 соответствует случаю $T_0 < 0$. Из рис. 3 и 4 можно сделать вывод, что:

Таблица 1. Влияние магнитного поля на критическую скорость при постоянном температурном поле.

$T_0, ^\circ C$	-100	-50	0	5	10
Λ					
0	0.9904	0.5558	0.1211	0.0777	0.0342
1	0.7003	0.3929	0.0857	0.0549	0.0242
5	0.1942	0.1089	0.0238	0.0152	0.0067
10	0.0985	0.0553	0.0121	0.0077	0.0034

а) при $T_0 < 0$ присутствие магнитного поля существенно сужает область устойчивости рассматриваемой пластинки,

б) при $T_0 > 0$ присутствие магнитного поля приводит к явлению бифуркации. А именно, неустойчивое положение превращает в устойчивое и наоборот.

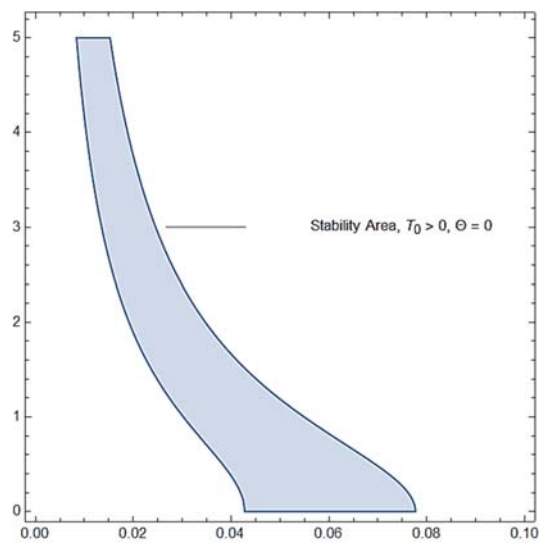


Рис.3. Явление бифуркации при $T_0 > 0$.

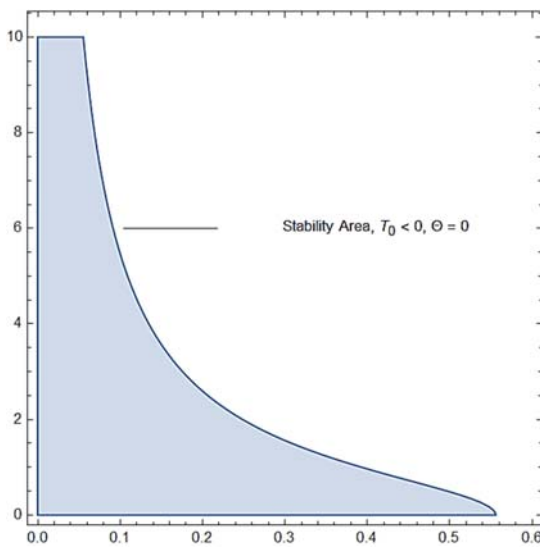


Рис.4. Область устойчивости при $T_0 < 0$.

Используются следующие значения параметров, взятые из литературы, см., например, [27]: $\alpha=23,8 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$; $k=1200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ C})$; $\lambda=210 \text{ Вт}/(\text{м} \text{ C})$; $\mu=0,34$; $a=1 \text{ м}$; $h/a=1/100$. На основе приведенных данных в Таблице 1 приведены значения критической скорости набегающего потока, при которых рассматриваемая система теряет устойчивость.

2) Переменное температурное поле ($\bar{T} = 0$, $\bar{\Theta} \neq 0$). В этом случае рассматриваются условия устойчивости (19) при $T_0 = 0$. Отметим, что условия не зависят от граничных условий.

$$\begin{aligned}
 &1 + \gamma^2 + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{\Theta} + \delta_{22}^{\Theta}) > 0 \\
 &\gamma^2 + \frac{4}{9} K^2 \bar{v}^2 + \left(\gamma^2 (\delta_{11}^{\Theta} + \delta_{22}^{\Theta}) - \frac{2}{3} K \bar{v} (\delta_{12}^{\Theta} - \delta_{21}^{\Theta}) \right) \bar{\Theta} + \\
 &\quad + (\delta_{11}^{\Theta} \delta_{22}^{\Theta} - \delta_{12}^{\Theta} \delta_{21}^{\Theta}) \bar{\Theta}^2 > 0 \\
 &(\gamma^2 - 1)^2 - \frac{16}{9} K^2 \bar{v}^2 + 2\chi^2 (\gamma^2 + 1) + (4\delta_{12}^{\Theta} \delta_{21}^{\Theta} + (\delta_{22}^{\Theta} - \delta_{11}^{\Theta})^2) \bar{\Theta}^2 + \\
 &\quad + 2 \left((\gamma^2 - 1)(\delta_{22}^{\Theta} - \delta_{11}^{\Theta}) + \frac{4}{3} K \bar{v} (\delta_{12}^{\Theta} - \delta_{21}^{\Theta}) + (\delta_{11}^{\Theta} + \delta_{22}^{\Theta})^2 \chi^2 \right) \bar{\Theta} > 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

На основе уравнения (19) область устойчивости представлена на плоскости (v, λ) для тех же начальных данных предыдущего случая. Область устойчивости изображена на рис.5 при определенном $\bar{\Theta} < 0$, а рис.6 соответствует случаю $\bar{\Theta} > 0$.

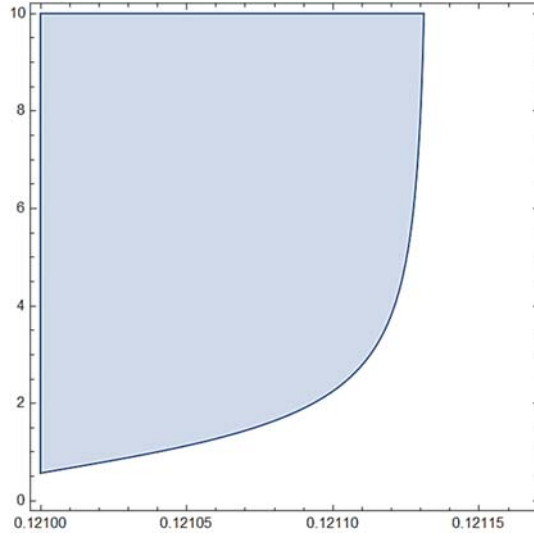


Рис.5. Область устойчивости при $\bar{\Theta} < 0$.

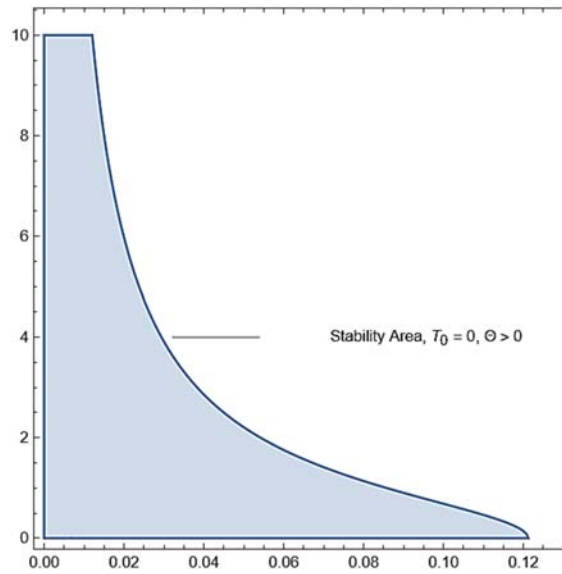


Рис.6. Область устойчивости при $\Theta > 0$.

Из рис.5 и 6 видно, что:

- а) если $\Theta > 0$, то магнитное поле заметно сужает область устойчивости;
- б) существует определенное отрицательное значение Θ_* , при котором магнитное поле приводит к заметному увеличению области устойчивости;
- с) с уменьшением $|\Theta|$ область устойчивости значительно уменьшается.

Критические значения скорости v_* для выбранных λ приведены в Таблице 2 для приведенных выше физикомеханических данных.

Таблица 2. Влияние магнитного поля на критическую скорость при переменном температурном поле

$\lambda \backslash \Theta, ^\circ C / m$	-500	-50	0	50	500
0	0.1204	0.1211	0.1211	0.1212	0.1221
1	0.0854	0.0856	0.0857	0.0857	0.0861
5	0.0238	0.02375	0.0238	0.0238	0.0238
10	0.0121	0.0121	0.0121	0.0121	0.0121

Таблица 2 показывает, что при переменном температурном поле эффект магнитного поля на критическую скорость значителен при малых значениях λ .

3) Общий случай ($\bar{T} \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0$) Численный анализ для уравнения (19) также выполняется для данных случаев 1 и 2. Результаты изображены на рис.7 и показаны в таблице 3.

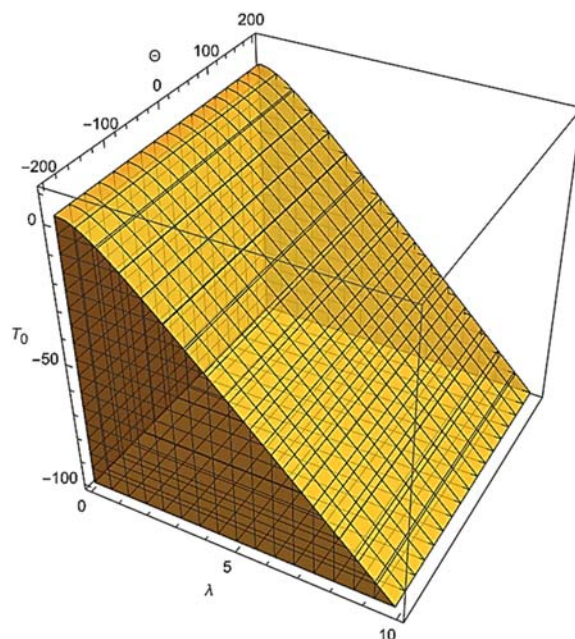


Рис.7. Область устойчивости при $T_0 \neq 0$, $\Theta \neq 0$.

Рис.7 и таблица 3 демонстрируют обобщение результатов рассмотренных выше частных случаев и показывают, что если обе компоненты температурного поля отличны от нуля, то наблюдается более выраженное влияние магнитного поля на область устойчивости.

Таблица 3. Общий случай для $h/a=1/100$.

λ	$T_0 = -50,$ $\Theta = -500^\circ C / м$	$T_0 = -50,$ $\Theta = -100^\circ C / м$	$T_0 = -10,$ $\Theta = -100^\circ C / м$	$T_0 = 5,$ $\Theta = 100^\circ C / м$
0	0.5589	0.5564	0.2078	0.0778
1	0.3942	0.3932	0.1470	0.0550
5	0.1090	0.1090	0.0408	0.0152
10	0.0553	0.0553	0.0207	0.0077

Выводы. В данной работе показано, что под воздействием температурного поля в невозмущенном состоянии пластинка выпучивается вследствие неоднородности по толщине пластинки температурного поля. Выведена формула определения переменного температурного поля и вычислена функция, определяющая выпучивание пластинки. Выведены условия устойчивости рассмотренной аеро-термо-магнито-упругой системы и вычислены границы устойчивости. Показано, что присутствие магнитного поля оказывает существенное влияние на критическую скорость флаттерных колебаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-2С257.

ЛІТЕРАТУРА

#

1. Ashley H. and Zartarian C. Piston Theory—A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, *J. Aeronaut. Sci.*, 1956, vol. 23, no. 6, pp. 1109–1118.
2. Bagdasaryan G.Y. An asymptotic method to study magnetoelastic oscillations of rectangular plates. *Mat. methods and phys.-mech. fields*, 1986, N24, p.72-75.
3. Bagdasaryan G.Y. Nonlinear flutter equations for thin plates in a magnetic field. *Interuniversity collection of scientific papers, Mechanics*, Yerevan: YSU Publishing House, 1982, issue 2, p.22-30.
4. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E. Frulla G., Marzocca P. Nonlinear LCO “amplitude–frequency” characteristics for plates fluttering at supersonic speeds. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 77, December 2015, Pages 51–60.
5. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Danoyan E.H., Melikyan K. Influence of boundary conditions on the aero-thermo-elastic stability of a closed cylindrical shell. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 1474 (2020) 012008; doi:10.1088/1742-6596/1474/1/012008
6. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Melikyan K.V., Marzocca P. Thermoelastic non-linear flutter oscillations of rectangular plate. *Journal of Thermal stresses*, 2021, vol.44(6), pp. 731-754.
7. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Panteleev A., Severina N.S. Nonlinear flutter response of cylindrical shell in thermal field and supersonic gas flow. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020, 927(1), 012022; doi:10.1088/1757-899X/927/1/012022.
8. Baghdasaryan G., Panteleev A.V., Mikilyan M.A. Mathematical Modeling of the Problem of Magneto-Aero-Elastic Stability of Rectangular Plate. *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics*, Springer Singapore, 2022, pp 13–27. https://doi.org/10.1007/978-981-16-8926-0_2
9. Baghdasaryan G.Y., Belubekyan M.V. Vibrations and stability of cylindrical shell in conductive gas flow, magnetic field is being present. 1966, p.120-125.
10. Bagdasaryan G., Mikilyan M. *Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells*. Springer, 2016, -286p.
11. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Marzocca, P. Supersonic flutter characteristics of dielectric rectangular plate: The effects of magneto-aero-hydrodynamic interactions. *Journal of Fluids and Structures*, 2023, 118, 103856, <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2023.103856>
12. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. *Magnetoelastic Vibrations and Stability of Magnetically Active Plates and Shells*. Springer, 2024.
13. Bolotin V.V. *Non-conservative problems of the theory of elastic stability*. – Moscow, Fizmatgiz, 1961. -339 p.
14. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Analysis of Magnetoplasmdynamic Interaction in the Boundary Layer of a Hypersonic Vehicle”, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 41, No. 4, 2004.
15. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Magnetohydrodynamics Interaction in the Shock Layer of a Wedge in a Hypersonic Flow”, *IEEE Transaction on Plasma Science*, vol. 34, no. 5, October 2006.
16. Chebotaryev N.V., Meyman N.S. Gauss-Hurwitz problem for polynomials and integer-valued functions. *Proc. AN SSSR*, 1949.

17. Cristofolini A. et al., "Experimental Investigation on the MHD Interaction around a Sharp Cone in an Ionized Argon Flow", AIAA-2006-3075, 37th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference, San Francisco, California, June 2006
18. Dowell. E.H. "Nonlinear oscillations of a fluttering plate." AIAA Journal, Vol. 4, No. 7, 1966, pp. 1267-1275. DOI: 10.2514/3.3658.
19. Dowell. E.H. "Nonlinear oscillations of a fluttering plate. II." AIAA Journal, Vol. 5, No. 10, 1967, pp. 1856-1862. doi:10.2514/3.4316.
20. Mikilyan M.A. Nature of Supersonic Flutter of Aero-Magneto-Elastic System at Pre-Critical Flowing Speeds. IEEE Aerospace Conference Proceedings, 2024, p.529-537, DOI:10.1109/aero58975.2024.10521224
21. Mikilyan M.A. Thermoelastic Response of Closed Cylindrical Shells in a Supersonic Gas Flow. Aerospace 2020, 7(8), 103; <https://doi.org/10.3390/aerospace7080103>
22. Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. The effects of magnetic field on supersonic flutter characteristics of dielectric plate: Dependence amplitude-speed. Journal of Fluids and Structures, 2024, vol. 128, 104140, DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2024.104140.
23. Miles J. W., Supersonic flutter of a cylindrical shell, Journal of Aeronautical Science Vol. 24, No. 2, 1957; Vol. 25, No. 5, 1958, pp.107-118.
24. Микилян М.А., Амбарцумян А.Г., Варданян И.А. Влияние магнитного поля на критическую скорость сверхзвукового флаттера диэлектрической пластины. Известия НАН РА, Механика, т.77 (2), 2024, стр.47-67, DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.2-47
25. Panteleev A.V., Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. Stability of a dielectric rectangular plate in a longitudinal magnetic field in the presence of a supersonic flow field. Aerospace Systems, 2023, 6, 605–611. DOI:10.1007/s42401-023-00217-6
26. Resler, R. L., and Sears, W. R., "The Prospects for Magneto-Aerodynamics," Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 4, 1958, pp. 235-245, 258.
27. Russell R. Zerodur. OPTI521, 2011.
28. Vlasov V. Z. The General Theory of Shells, Gostekhizdat, Moscow, 1949.
29. Volmir S. Non-linear Dynamics of Plates and Shells, Nauka, Moscow, 1972.

Сведения об авторах:

Микилян Марине Александровна – кандидат физ.-мат. наук., доцент, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА
Phone: (+374 91) 191129; E-mail: mikilyan@sci.am

Тоноян Ваграм Умршатович – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник научного проекта № 21Т-2С257 Института механики НАН РА
Phone: (+374 95) 555076; E-mail: var10email@gmail.com

Cestino Enrico – Associate Professor (L.240), Department of Mechanical and Aerospace Engineering (DIMEAS), POLITO, Turin, Italy
Phone: +39 0110906818 / 6818; E-mail: enrico.cestino@polito.it

Поступила в редакцию 07.06.2025

**FLEXURAL VIBRATIONS OF A BEAM ON PERIODICALLY
ARRANGED EXTERNAL SUPPORTS AND PARTIALLY COATED BY
PIEZOELECTRIC PATCH**

Ara S. Avetisyan, Karen B. Ghazaryan, Pier Marzocca

Keywords: free vibrations, piezoelectric patch, matrix method, harvesting energy, electrical voltage generating, localization.

Аветисян Ара С., Казарян Карен Б., Марзокка Пьер

**Изгибные колебания частично покрытой пьезоэлектрической накладкой балки,
опирающейся на периодически расположенные внешние опоры**

Ключевые слова: свободные колебания, пьезоэлектрический накладной элемент, матричный метод, накопление энергии, генерация электрического напряжения, локализация.

Рассматриваются свободные колебания балки, часть балки опирается на периодически расположенные внешние опоры и частично покрыта идеально приклеенной пьезоэлектрической накладкой. На основе теории балок Эйлера–Бернулли и метода матрицы переноса получены общие решения в периодической части балки. Показано, что при совпадении собственных частот свободных колебаний балки с полосой запретных частот соответственной бесконечной балки, происходит сильная локализация наклонов и моментов балки на первом интерфейсе периодической части балки. Электрическое напряжение, генерируемое пьезоэлектрической накладкой, пропорционально наклонам периодической структуры балки. Максимальное накопление энергии происходит на собственных частотах в полосе частот задерживания, при которых происходит сильная локализация наклона балки.

Արա Ս. Ավետիսյան, Կարեն Բ. Ղազարյան, Պիեր Մարզոկա

**Պարբերաբար դասավորված արտաքին հենարանների վրա հենվող մասնակիորեն
ծածկված պիեզոէլեկտրական վերդիրով հեծանի ծոման տատանումները**

Հիմնաբառեր ազատ տատանումներ, պիեզոէլեկտրական վերադիր, մատրիցային մեթոդ, էներգիայի կուտակում, էլեկտրական լարման առաջացում, տեղայնացում:

Դիտարկվում է հեծանի ազատ տատանումները: Հեծանը մի մասով հենվում է պարբերաբար տեղակայված արտաքին հենարանների վրա և մասամբ ծածկված է կատարյալ սոսնձված պիեզոէլեկտրական վերդիրով: Հեծանի պարբերական հենարաններով մասում ընդհանուր լուծումները ստացվում են Էյլերի-Բեռնուլլիի ճառագայթի տեսության և փոխանցման մատրիցի մեթոդի հիման վրա: Ցույց է տրվում, որ երբ հեծանի ազատ տատանումների սեփական հաճախականությունները համընկնում են համապատասխան անվերջ հեծանի արգելված հաճախականությունների գոտու հետ, հեծանի պարբերական մասի առաջին միջերեսում տեղի է ունենում հեծանի ծոման թեքությունների և մոմենտների ուժեղ տեղայնացում: Պիեզոէլեկտրական ծածկույթում առաջացած էլեկտրական լարումը համեմատական է հեծանի պարբերական կառուցվածքում առաջացող թեքություններին: Էներգիայի առավելագույն կուտակումը տեղի է ունենում արգելման գոտում՝ սեփական հաճախականություններում, որոնց դեպքում տեղի է ունենում հեծանի ծոման թեքության ուժեղ տեղայնացում:

A beam flexural vibrations are considered, part of the beam rests on periodically located external supports and is partially covered with a perfectly glued piezoelectric patch. Based on the Euler–Bernoulli beam theory and the transfer matrix method, general solutions in the periodic part of beam are obtained. It is shown that when the eigenfrequencies of the beam free vibrations coincide with the stopband frequencies of counterpart infinite beam, a strong localization of beam slopes and moments occur at the first interface of the periodic part of beam. The electrical voltage generating by the piezoelectric patch is proportional to the slopes of the beam periodic structure. The maximal harvesting energy occurs at stopband eigenfrequencies, at which the beam slope strong localization takes place.

Introduction. Vibration-based energy harvesting is a growing modern area for generating low-power electricity to use in wireless electronic devices, such as portable electronics and wireless sensors. In recent years efficient electrical energy generation and harvesting have become one of the most practical topics in engineering research. Energy storage devices come in many designs, with piezoelectric energy storage being especially common. These devices utilize the property of piezoelectric materials to generate an electric field when mechanical force is applied. Vibration-based energy harvesting is a modern method for generating low-power electricity for portable electronics and wireless sensors. The fundamental research [1] provides a comprehensive study of electromechanical modeling for piezoelectric energy harvesting, including extensive case studies with experimental validations. It covers various applied models of beams with piezoelectric patch, forms of excitation in piezoelectric energy harvesting, ranging from airflow excitation to moving loads. The paper [2] provides an extensive review of contemporary piezoelectric energy harvesting techniques. It examines methods for optimizing the energy harvested from piezoelectric materials [2-8] and emphasizes successful applications [9-12]. A new type of arch beam piezoelectric stack energy harvester for railway systems is studied in paper [13]. Through simulation analyses and experimental verification of the energy harvester, the influences of external resistance, load, pre-stress, and load frequency on the energy harvesting performance of the piezoelectric energy harvester are discussed. In [14], the proposed energy harvesting device is designed as a piezoelectric cantilever beam utilizing various piezoelectric materials in both bimorph and unimorph configurations. The analytical model is derived from Euler-Bernoulli beam theory and its performance is validated against existing experimental results of piezoelectric energy harvesters in different configurations.

In work [15], an electromechanical coupled distributed-parameter model of the cantilever energy harvester is established based on Hamilton’s principle, linear constitutive equations of magneto strictive material, and Faraday’s law of electromagnetic induction. In [16], a piezoelectric energy harvester composed of a buckled beam and an extended beam with a tip mass is proposed. This study develops a mathematical model and a prototype of the energy harvester. A comprehensive overview of the application of metamaterials and phononic crystals in energy harvesting is provided in [17]. Energy harvesting from structural vibrations using multifunctional resonators based on locally resonant materials is demonstrated in [18]. These structures exhibit a stop band for elastic wave propagation, with the band gap frequency determined by the microstructure’s local resonance frequency.

Paper [19] presents a multifunctional structural combining superior mechanical wave filtering properties and energy harvesting capabilities. It is based on the ability of periodic structures to block elastic waves within phononic bandgaps. Energy is harvested by converting localized kinetic energy into electrical energy through the piezoelectric effect. The study presented in reference [20] employs the generalized Bloch theorem to model piezo-embedded negative mass metamaterials, demonstrating their dual functionality. It estimates power harvested by internal resonating units using resistive and shunted inductor energy harvesting circuits for a finite number of these units. The study in [21] examines the energy input/output of a composite plate with piezoelectric patches used as sensors, actuators, or energy harvesters. It concludes that there is always an optimal patch location for maximum energy transfer, regardless of frequency. For vibrational loading, energy transfer is highly sensitive to whether the operating frequency is below or above the system's resonance frequency.

This paper addresses the free vibrations of cantilever or clamped beams with periodically arranged external supports, partially covered by bonded piezoelectric patches. The periodic supports turn the multi-span beam into a collector of piezoelectric energy. Significant localization of beam slopes and moments occurs when eigenfrequencies fall within the bandgaps of a counterpart infinite beam. Energy harvested by the piezoelectric patch is highly dependent on the operating frequency, with "stopband" eigenfrequencies yielding much greater energy than "passband" frequencies.

The dynamics and stability of finite or infinite beams, supported by periodically arranged external supports analyzed by using the Euler-Bernoulli beam theory, are explored in several works by the authors of this article [22-26].

Statement of the problem

Consider a Euler- Bernoulli homogeneous beam of L length in $x \in (0, L)$. The beam in the region $x \in (a; L)$, $L = a + Nd$ is rested on N intermediate external supports periodically arranged at points $x = a + (n-1)d$, $n = 1; 2; \dots; N$. In the region $x \in (a; a + nd)$ the beam on its traction free surface is partially covered by the perfectly bonded piezoelectric patch of nd length. The beam end $x = 0$ is clamped or free, the end $x = L$ is clamped, Fig. (1)

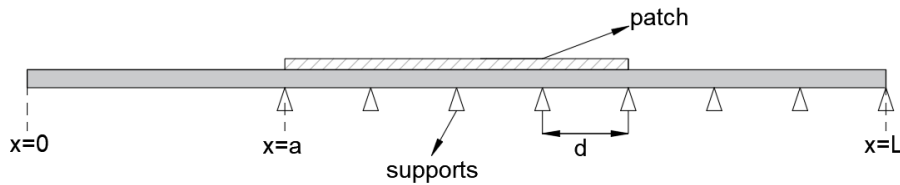


Fig 1. Beam with periodically arranged N intermediate external supports and piezoelectric patch

The equation of motion of Euler- Bernoulli beam can be cast as

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^4} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 W_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

where $W_j(x, t)$ is the deflection of the beam, E is the elastic modulus, I is the moment of inertia, ρ is the bulk density and A is the cross-sectional area of the beam, ε is the internal dumping coefficient, subscript $j=1$ denotes the region $x \in (0, a)$, subscript $j=2$ denotes the region $x \in (a, L)$.

For the beam clamped at $x = L$

$$W_2(L, t) = 0, \quad \frac{\partial W_2(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

two alternative boundary conditions at $x = 0$ will be considered

$$W_1(0, t) = 0, \quad \frac{\partial W_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 W_1(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W_1(0, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (4)$$

Assuming $W_j(x, t) = U_j(x) \cdot \exp(-\varepsilon t) \cdot \cos(t\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2})$, where $U_j(x)$ is the amplitude function, ω is the vibration frequency we get

$$\frac{d^4 U_j}{dx^4} - p^4 U_j = 0, \quad p^4 = \frac{A\rho\omega^2}{EI}, \quad (5)$$

$$U_j(x) = C_{j1} \sin(px) + C_{j2} \sinh(px) + C_{j3} \cos(px) + C_{j4} \cosh(px)$$

At the beam interfaces where the external supports are placed the beam deflections are equal to zero, the moments and slopes are continuous.

At the beam interface $x = a$ we have the following conditions

$$W_1(a, t) = 0, \quad W_2(a, t) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 W_1(a, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W_2(a, t)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial W_1(a, t)}{\partial x} = \frac{\partial W_2(a, t)}{\partial x} \quad (7)$$

The solutions (5) in region $x \in (0, a)$ satisfying (6) and (3), (4) for clamped or cantilever beams, can be written as follows

$$U_1(x) = C_{11} (\sinh(ap) \sin(px) - \sin(ap) \sinh(px)) + \\ + C_{12} (\sinh(ap) (\cos(px) + \gamma \cosh(px)) - \sinh(px) (\cos(ap) + \gamma \cosh(ap))) \quad (8)$$

Here and hereinafter, $\gamma = 1$ corresponds to the cantilever beam, $\gamma = -1$ to the clamped beam.

Solutions in the periodic structure, transfer matrix approach

In the periodically arranged structure we consider solutions in the basic unit cell $x \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$; $\beta_n = a + nd$, $n = 1; 2; \dots N$.

interface conditions at points where the supports are located can be cast as

$$U_2(\beta_n) = 0, \quad \left[\frac{dU_2(\beta_n)}{dx} \right] = 0, \quad \left[\frac{d^2U_2(\beta_n)}{dx^2} \right] = 0 \quad (10)$$

Here $[*]$ is a jump of a function across the interfaces.

In the basic unit cell, the solutions for the amplitude functions (5) that satisfy the conditions (10) can be determined as follows:

$$U_2(x) = C_{21} \left[\sin(p(\beta_{n-1} - x)) + \sin(dp) \cdot \cosh(p(\beta_n - x)) - \cosh(dp) \cdot \sin(p(\beta_n - x)) \right] + C_{22} \left[\sinh(dp) \sin(p(\beta_n - x)) - \sin(dp) \sinh(p(\beta_n - x)) \right] \quad (11)$$

Since the interface contact conditions are imposed on the beam slope $\psi(x)$ and moment $\mu(x)$

$$\psi(x) = \frac{dU_2(x)}{dx}, \quad \mu(x) = \frac{d^2U_2(x)}{dx^2} \quad (12)$$

it is appropriate to introduce the following column vector.

$$\mathbf{U}_2(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Considering vector $\mathbf{U}_2(x)$ at points $x = \beta_n$; $x = \beta_{n-1}$ the following conditions are valid

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2(\beta_n - d) &= \mathbf{QC}, & \mathbf{U}_2(\beta_n) &= \mathbf{PC}; \\ \mathbf{U}_2(\beta_n - d) &= \mathbf{QC}, & \mathbf{U}_2(\beta_n) &= \mathbf{PC}; \end{aligned} \quad (14)$$

where

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q[\cos(dq)\cosh(dq) - \sin(dq)\sinh(dq) - 1] & q[\sin(dq)\cosh(dq) - \cos(dq)\sinh(dq)] \\ 2q^2 \sin(dq)\cosh(dq) & -2q^2 \sin(dq)\sinh(dq) \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q[\cos(dq)\cosh(dq) - \sin(dq)\sinh(dq) + 1] & q[\sin(dq)\cosh(dq) - \cos(dq)\sinh(dq)] \\ 2q^2 \sin(dq)\cosh(dq) & -2q^2 \sin(dq)\sinh(dq) \end{pmatrix}$$

Eliminating the vector $\mathbf{C}$ from (14), the relation linking vector field values within the unit cell can be found as follows:

$$\mathbf{U}_2(\beta_n) = \mathbf{M}\mathbf{U}_2(\beta_{n-1}); \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}(\beta_n)\mathbf{P}^{-1}(\beta_{n-1}). \quad (16)$$

The unimodal propagator matrix $\mathbf{M}$ herein connects the field vectors at the end points of the n -th cell.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(dp)\cosh(dp) - \cos(dp)\sinh(dp)}{\sin(dp) - \sinh(dp)} & \frac{1 - \cos(dp)\cosh(dp)}{p(\sin(dp) - \sinh(dp))} \\ \frac{2p\sin(dp)\sinh(dp)}{\sin(dp) - \sinh(dp)} & \frac{\sin(dp)\cosh(dp) - \cos(dp)\sinh(dp)}{\sin(dp) - \sinh(dp)} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Repeating this procedure n times determines the propagator unimodal matrix $\mathbf{M}^n$.

The matrix $\mathbf{M}^n$ for any $n = 1; 2; \dots N$ links the vectors at points of the beam

$$\mathbf{U}_2(a + nd) = \mathbf{M}^n \mathbf{U}_2(a). \quad (18)$$

Taking into account that $\mathbf{M}^{N-n} \mathbf{U}_2(a + nd) = \mathbf{U}_2(a + Nd) = \mathbf{U}_2(L)$ we can link the vectors at beam $x = L$ and $x = a + d(n-1)$ points in the following way

$$\mathbf{U}_2(L) = \mathbf{M}^{N-n+1} \mathbf{U}_2(a + d(n-1)). \quad (19)$$

At the clamped edge $x = L$ we have

$$\mathbf{U}_2(L) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(L) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Here $\mu(L)$ is uncertain value of the beam moment at the clamped end.

According to Sylvester's matrix polynomial theorem [27] for 2×2 matrices the elements of the n -th power of an unimodal matrix $\mathbf{M}^n$ can be cast as

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} M_{11}(n) & M_{12}(n) \\ M_{21}(n) & M_{22}(n) \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$M_{11}(n) = m_{11}S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta), M_{12}(n) = m_{12}S_{n-1}(\eta),$$

$$M_{21}(n) = m_{21}S_{n-1}(\eta), M_{22}(n) = m_{22}S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta)$$

where $S_n(\eta)$ are the Chebyshev polynomials of second kind, namely

$$S_n(\eta) = \frac{\sin((n+1)\arccos(\eta))}{\sin(\arccos(\eta))}; \quad \eta = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{M})$$

On the other hand, according to Bloch equation

$$\cos(kd) = \eta(\omega) \quad (22)$$

the function $\eta(\omega)$ defines the frequencies of bandgaps of the counterpart infinite beam,

k is the Bloch wave number [26].

From (22) it follows that conditions $|\eta(\omega)| < 1$, $|\eta(\omega)| > 1$ define passband" and stopband frequencies in the counterpart infinite beam, respectively.

In vector notations we can write the interface condition at point $x = a$ as

$$\mathbf{U}_2(a) = \mathbf{U}_1(a) \quad (23)$$

Using (8), we can find

$$\mathbf{U}_2(a) = \begin{pmatrix} pC_{11}(\cos(ap)\sinh(ap) - \sin(ap)\cosh(ap)) - \\ -pC_{12}(\sin(ap)\sinh(ap) + \cos(ap)\cosh(ap) + \gamma) \\ -2p^2\sinh(ap)(C_{11}\sin(ap) + C_{12}\cos(ap)) \end{pmatrix} \quad (24)$$

Considering equations (16) and (23), we obtain the following matrix equation that determines the unknown constants C_{11}, C_{12}

$$\begin{pmatrix} M_{11}(N) & M_{12}(N) \\ M_{21}(N) & M_{22}(N) \end{pmatrix} \mathbf{U}_2(a) = \mathbf{U}_2(L) \quad (25)$$

Taking into account (18) and solving this matrix equation we find constants C_{11}, C_{12}

$$C_{11} = -\frac{\mu(L) \cdot M_{11}(N) \cdot [\sin(ap) + \gamma \csc h(ap) + \cos(ap) \coth(ap)]}{2p^2(\gamma \sin(ap) + \text{sh}(ap))} - \frac{2p\mu(L) \cdot M_{12}(N) \cos(ap)}{2p^2(\gamma \sin(ap) + \text{sh}(ap))}, \quad (26)$$

$$C_{12} = \frac{\mu(L)(-M_{11}(N)(\cos(ap) - \sin(ap) \coth(ap)) + 2pM_{12}(N)\sin(ap))}{2p^2(\gamma \sin(ap) + \text{sh}(ap))}$$

Here $\mu(L)$ is an uncertain moment constant.

Substituting (26) into (24) gives us the beam slope and moment at a point $x = a$ clamped and cantilever beams

Substituting (26) into (24) gives the beam slope and moment at a point $x = a$

$$\begin{aligned}\psi(a) &= \mu(L)M_{12}(N), \\ \mu(a) &= \mu(L)M_{22}(N)\end{aligned}\quad (27)$$

On the other hand, as It follows from (19) that for any $n = 1; 2; \dots N$

$$\begin{pmatrix} \psi(\beta_m) \\ \mu(\beta_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{12}(m)\mu(L) \\ M_{22}(m)\mu(L) \end{pmatrix}; \quad m = N - 1 + n \quad (28)$$

Based on (25) and (26), the relative slope and moments at any unit cell of the periodic part of the beam can be defined as follows.

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_n &= \frac{\psi(a + d(N - n + 1))}{\psi(a)} = \frac{M_{12}(N - n + 1)}{M_{12}(N)} = \frac{S_{N-n}(\eta)}{S_{N-1}(\eta)} \\ \tilde{\mu}_n &= \frac{\mu(a + d(N - n + 1))}{\mu(a)} = \frac{M_{22}(N - n + 1)}{M_{22}(N)} = \frac{T_{N-n+1}(\eta)}{T_N(\eta)}\end{aligned}\quad (29)$$

where $T_n(\eta)$ is the Chebyshev polynomials of first kind.

From non-triviality condition of eigenfunctions ($\mu(L) \neq 0$) and boundary conditions (2)

and (3) at $x = 0$ that have not yet been used, we derive the following the following different equations defining eigenfrequencies for clamped and cantilever beams

$$\begin{aligned}\Delta(\omega) &= M_{11}(N)(\gamma \operatorname{csch}(ap) + \cos(ap) \coth(ap)) + \\ &+ pM_{12}(N)(\cos(ap) - \sin(ap) \coth(ap))\end{aligned}\quad (30)$$

Here, as previously indicated $\gamma = 1$ corresponds to the cantilever beam, whereas $\gamma = -1$ to the clamped beam,

For a of beam without periodic supports ($d \rightarrow 0$) of length a , the eigenfrequency equations for clamped and cantilever beams can be derived from the following equation

$$\Delta_0(\omega) = (\gamma \operatorname{csch}(ap) + \cos(ap) \coth(ap)) \quad (31)$$

Piezoelectric patch under flexural vibration of the beam

The equations and relationships for a piezoelectric patch perfectly bonded with elastic beam provided here are based on [1].

A uniform composite Euler–Bernoulli covered in the region $x \in (a, a + nd)$ by a perfectly bonded uniform piezoelectric patch, which the top and bottom surfaces are metalized by thin electrodes of negligible thicknesses. The electrodes bracketing the piezoelectric layers are connected to a resistive electrical circuit.

The piezoelectric patch is operating in (31) mode which means that the poling direction of the piezoelectric material of patch is perpendicular to the beam centerline, “1” and “3”

directions are coincident with x and z directions, respectively “1” is the direction of axial strain and “3” is the direction of polarization.

The constitutive relations for piezoelectric patch in (31) mode are

$$\xi_1(x, z, t) = Y^{-1}\sigma_1(x, z, t) + d_{31}E_3(x, z, t) \quad (32)$$

$$D_3(x, z, t) = d_{31}\sigma_1(x, z, t) + \epsilon_{33}^T E_3(x, z, t) \quad (33)$$

Here $\xi_1(x, z, t)$, $\sigma_1(x, z, t)$ are the axial strain and stress arising in the patch due to bending of beam, $E_3(x, z, t)$ the electric field, $D_3(x, z, t)$ the electric displacement, d_{31} is the piezoelectric coefficient, ϵ_{33}^T is permittivity in direction of the polarization axis measured at constant mechanical stress, Y is the Young's moduli of patch material.

From (36) the expression for the stress $\sigma_1(x, z, t)$ can be written as

$$\sigma_1(x, z, t) = Y(\xi_1(x, z, t) - d_{31}E_3(x, z, t)) \quad (34)$$

Substituting (34) in (33) yields

$$D_3(x, z, t) = e_{31}\xi_1(x, z, t) + \epsilon_{33}^S E_3 \quad (35)$$

where $e_{31} = Yd_{31}$, $\epsilon_{33}^S = (\epsilon_{33}^T - d_{31}e_{31})$, ϵ_{33}^S is the permittivity of piezoelectric material measured at constant strain.

The average bending strain in the in uniform piezoelectric patch can be expressed as

$$\xi_1(x, z, t) = -h_c \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}, \quad (36)$$

where $W(x, t)$ is transverse displacement of the beam's centerline, h_c is the distance of the center of the piezo layer in thickness direction to the beam centerline.

Taking into account that the uniform electric field in terms of the electric potential difference is

$$E_3 = v(t)/h_p, \quad (37)$$

where $v(t)$ is voltage across the resistive load r , h_p is the thickness of patch the and using (35) the following equation can be obtained

$$D_3(x, z, t) = -e_{31}h_c \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\epsilon_{33}^S}{h_p} v(t). \quad (38)$$

Assuming that the electrodes of the piezoceramic patch are connected to a resistive electrical load r , the integral form of Gauss's law can be applying as

$$\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{D} \mathbf{n} dA \right) = \frac{v(t)}{r}. \quad (39)$$

Here, $\mathbf{D}$ is the vector of electric displacement, $\mathbf{n}$ is the unit outward normal, and the integration is performed over the electrode area A of the piezoceramic patch.

Since in our case contribution to the inner product of the integrand in equation (39) is $D_3(x, z, t)$ we can rewrite (39) as

$$\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{D} \mathbf{n} dA \right) = b \int_a^{a+nd} \frac{d}{dt} (D_3(x, z, t)) dx = \frac{v(t)}{r}, \quad (40)$$

where $a + nd$ is the length and b is the width of the patch.

From (37) and (40) we get the following equation for voltage function $v(t)$

$$\begin{aligned} v(t) + f \frac{dv(t)}{dx} &= -g \left(\frac{\partial W(a + nd, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial W(a, t)}{\partial x \partial t} \right) = \\ &= g F_0 e^{-t\epsilon} \left(\sqrt{\omega^2 - \epsilon} \sin(t\sqrt{\omega^2 - \epsilon}) + \epsilon \cos(t\sqrt{\omega^2 - \epsilon}) \right) \end{aligned} \quad (41)$$

$$F_0 = \psi(a + nd) - \psi(a); \quad f = \frac{dn b \epsilon_{33}^s r}{h_p}; \quad g = e_{31} h_c b r$$

The solution for function $v(t)$ under condition $v(0) = 0$ can be find as

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{F_0 g \left(f \sqrt{\omega^2 - \epsilon^2} \sin(t\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}) + (f\epsilon - \omega^2) \cos(t\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}) \right) e^{-\epsilon t}}{f^2 - 2f\epsilon + \omega^2} - \\ &- \frac{F_0 g (f\epsilon - \omega^2) e^{-ft}}{f^2 - 2f\epsilon + \omega^2} \end{aligned} \quad (42)$$

From (42) it follows that the electrical voltage generated by the piezoelectric patch is proportional to the function F_0 that depends of the slopes of the beam's periodic part.

Analysis and conclusions.

From (22) it follows that condition $|\eta| > 1$ defines the bandgaps of counterpart infinite beam.

The Fig.2 shows the deviation function $|\eta(\Omega)|$ versus non-dimensional frequency

$$\Omega = \omega d^2 \sqrt{(EI)^{-1} \rho A} \quad \text{in the region } |\eta(\Omega)| \geq 1, 0 < \Omega < 160$$

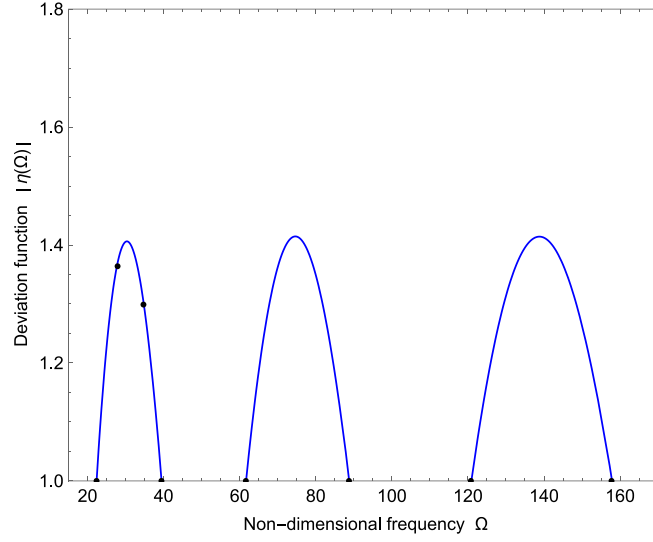


Fig 2. The graphs of the deviation function versus of non-dimensional frequency

The curves define first gap $\Omega \in (22.37, 39.43)$, the second and third gaps $\Omega \in (61.62, 88.73)$ and $\Omega \in (120.78, 157.75)$, respectively. Black points on the axes $|\eta(\Omega)| = 1$ mark the boundaries of the gaps. Points on the first bandgap curve correspond to minimal eigenfrequencies in the first gap $(\Omega_c = 34.9; \eta(\Omega_c) = 1.37)$, $(\Omega_f = 27.9; \eta(\Omega_f) = 1.32)$ of clamped and cantilever beams when $a = 5d$, respectively.

The relative slope is given by the formula $\tilde{\psi}_n = S_{N-n}(\eta)/S_{N-1}(\eta)$;

In Fig. 3 the graphs of relative discrete slope function $\tilde{\psi}_n$ versus of the number of supports are presented in the case $a = 5d$; $N = 5$; $N = 10$. The blue plots are calculated for clamped beam at eigenfrequency Ω_c , while the red plot is calculated for clamped beam at beam at eigenfrequency Ω_f (see Fig.2).

Evidently, similar graphs can be plotted for relative slopes and moment functions at any stopband eigenfrequency.

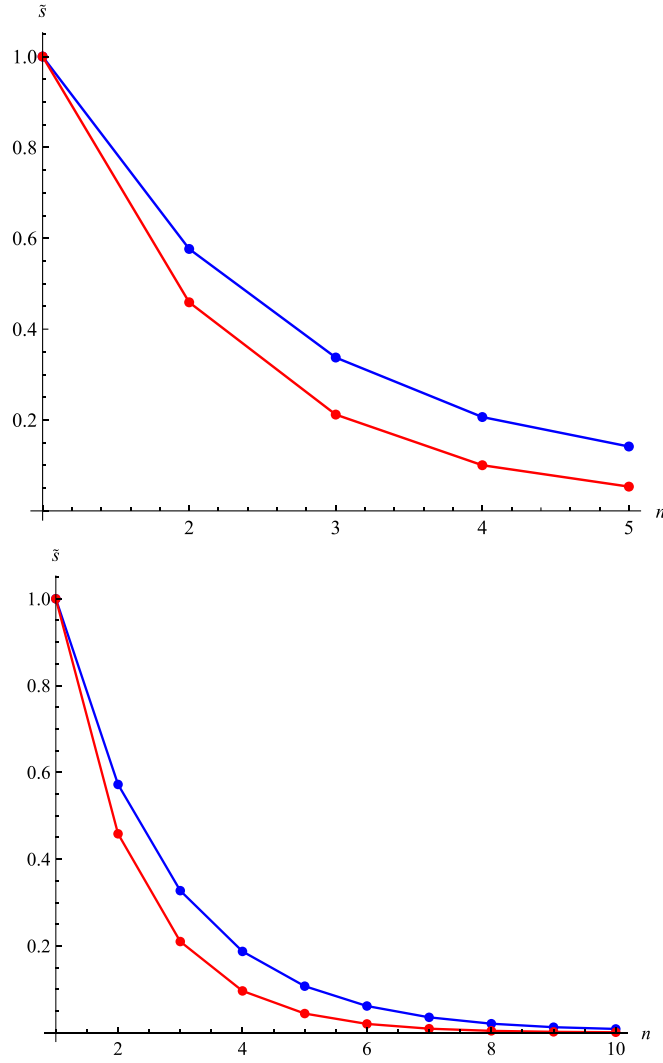


Fig.3 The graphs of discrete slope functions $\tilde{S}_n$ within first band gap versus support numbers

Analysis of these curves reveals that the localization of beam slope significantly increases with increasing number of supports. The results demonstrate that flexible waves, defined by beam slopes and moments, are unable to propagate through periodic structures at frequencies within the bandgaps of a counterpart infinite beam. Instead, they localize near the first periodic cell, reaching a maximum value at $x = a$. This effect is noticeable at $N = 5$.

Fig. 4. confirms that localization of the slope and moments does not occur at the eigenfrequencies outside of the bandgaps.

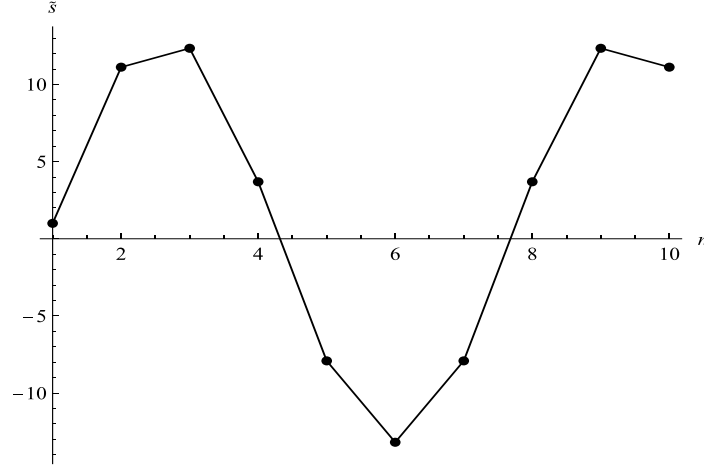


Fig 4. The graph of discrete slope function $\tilde{s}_n$ outside of bandgaps

Figures 5 and 6 display the graphs of the function $\Delta(\Omega)$ whose zeros determine the eigenfrequencies. The black markers on the axis Ω represent the boundaries of the gaps. The graphs of the function $\Delta(\Omega)$ are presented within the range $0 < \Omega < 200$ for $N = 10$ and $N = 30$ for clamped (blue curves) and cantilever (red curves) beams when $a = 5d$. Figures 5 and 6 demonstrate that adding more supports increases eigenfrequencies outside bandgaps but does not affect the zero locations within bandgaps. Few eigenfrequencies exist within these gaps. When $a < 5d$, there are no zeroes of the function $\Delta(\Omega)$ in bandgaps, the eigenfrequencies remain outside the bandgaps.

In Fig.7 the graphs of function $\Delta(\Omega)$ of the clamped and cantilever beams are presented within the range of first bandgap, when $a = 5d$; $N = 10$.

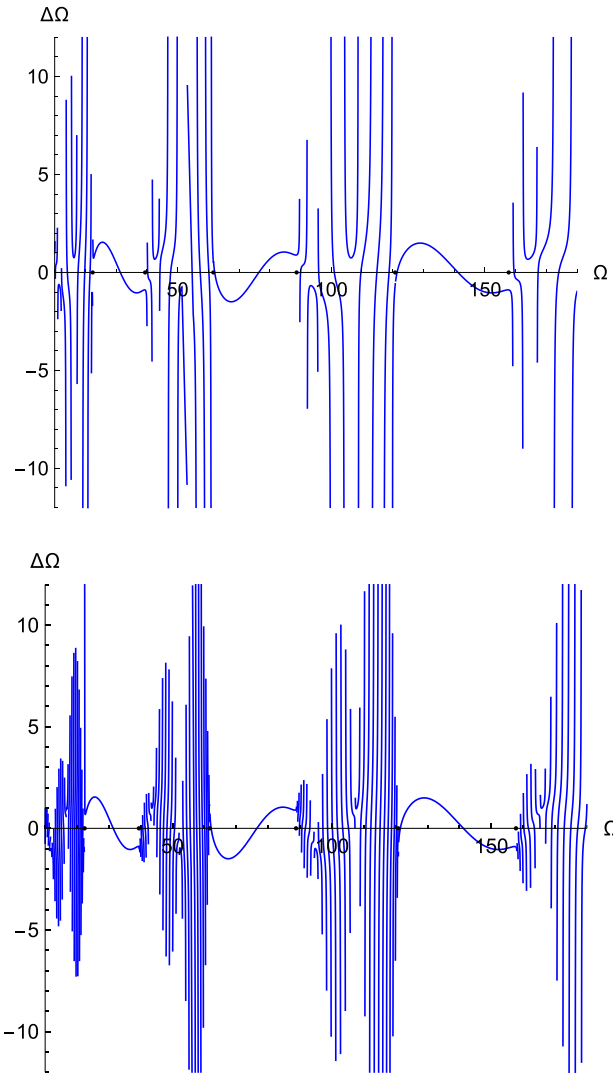


Fig.5 The graphs of function $\Delta(\Omega)$ of the clamped beam presented within the range $0 < \Omega < 200$, $a = 5d$; $N = 10$; $N = 30$.

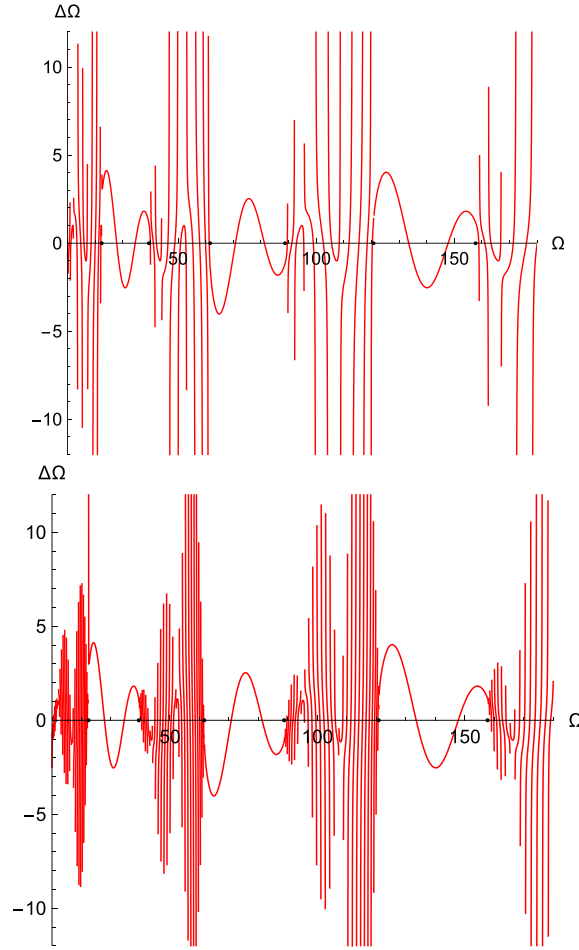
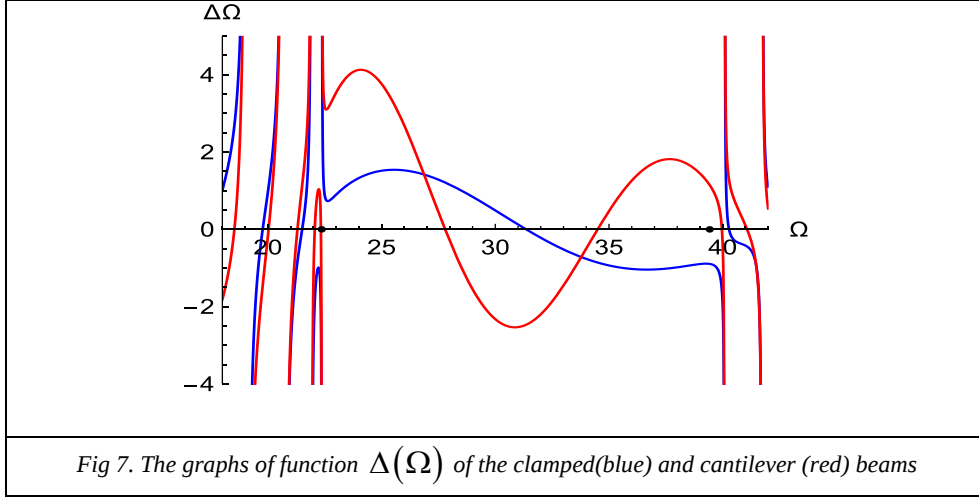


Fig.6 The graphs of function $\Delta(\Omega)$ of the cantilever beam, presented within the range $0 < \Omega < 200$, $a = 5d$; $N = 10$; $N = 30$,

According (42) the electrical voltage generated by the piezoelectric patch of nd length due to beam vibration is proportional to function $F_{0n} = (\psi(a) - \psi(a + nd))$.

When the beam eigenfrequencies are within the bandgaps, the function $\psi(a + nd)$ at these frequencies approaches zero monotonously at $n \rightarrow N$ (See Fig.3). Therefore, the function $F_{0n} = (\psi(a) - \psi(a + nd))$ is maximal when $n = N$.



This indicates that the maximum impact of the piezoelectric patch occurs when a patch of length L covers the entire periodic part of the beam.

Considering (27), the function F_{0n} versus beam flexural frequency can be expressed as

$$F_{01}(\Omega_j) = \frac{\mu(L)(1 - \cos(\sqrt{\Omega_j}) \cosh(\sqrt{\Omega_j}))}{\sqrt{\Omega_j}(\sin(\sqrt{\Omega_j}) - \sinh(\sqrt{\Omega_j}))} (S_{N-1}(\eta(\Omega_j)) - S_{N-2}(\eta(\Omega_j)))$$

where Ω_j are the beam eigenfrequencies.

For estimation of the effect of the beam slope on harvesting energy, consider the following relative function

$$F_{*N}(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{F_{01}(\Omega_1)}{F_{01}(\Omega_2)}$$

Here $\Omega_1 = 27.9$ is the “stopband” eigenfrequency of cantilever beam in the first gap,

$\Omega_2 = 21.5$ is the nearest to Ω_1 the “passband” eigenfrequency.

At these eigenfrequencies when $a = 5d$, $N = 5$, $N = 10$, $N = 20$ we have respectively

$$F_{*5} \approx 22.2, F_{*10} \approx 440.5, F_{*20} \approx 1410.8.$$

The same estimation applies to any stopband and passband eigenfrequencies. The generated harvesting energy depends heavily on the operating frequency, with greater effects at stopband frequencies than at passband. More supports significantly increase the harvesting energy values.

The main results can be summarized as follows:

1. In the case of free vibration of a beam with periodically arranged supports, significant localization (maximization) of the beam slopes and moments occurs when the eigenfrequencies of the beam are within the bandgaps of the counterpart infinite beam.
2. Localization occurs even with a few periodically arranged supports.
3. The flexible wave of supported beam cannot travel freely through a periodic structure at frequencies within bandgaps of counterpart infinite beam and are practically localized at the neighborhood of the first periodic cell interface.
4. The number of periodically arranged supports significantly increases the number of eigenfrequencies outside of the bandgaps without changing this number within the gaps.
5. The electric voltage output of a piezo patch under beam bending is significantly influenced by the dynamic behavior of the beam's periodic structure and is proportional to the beam slopes at the locations of the periodic supports.
6. The energy harvested by a piezoelectric patch strongly depends on the operating frequency. The harvesting energy at stopband eigenfrequencies incomparable greater than at passband eigenfrequencies.

Acknowledgments

The work was supported by the State Committee of Science of RA, in the framework of the research projects 25RG-2C066, 25RG-2C136.

References

1. Erturk, A. and Inman, D.J., 2011. *Piezoelectric energy harvesting*, John Wiley & Sons, p.539, <http://dx.doi.org/10.1002/9781119991151.ch10>
2. Covaci C.; Gontean A., Piezoelectric Energy Harvesting Solutions: A Review, *Sensors*, (2020), vol.20, 3512. <https://doi.org/10.3390/s20123512>,
3. Liu, H.; Hua, R.; Lu, Y.; Wang, Y.; Salman, E.; Liang, J. Boosting the efficiency of a footstep piezoelectric-stack energy harvester using the synchronized switch technology. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. **2019**, 30, 813–822, <https://doi.org/10.1177/1045389X19828512>,
4. Briscoe, J.; Dunn, S. 3.2.6 Applications. In *Nanostructured Piezoelectric Energy Harvesters*, 1st ed.; Springer International Publishing: Berlin/Heidelberg, Germany, 2014; pp. 39–42,
5. Erturk, A.; Inman, D.J. 11.1 AC-DC Rectification and Analysis of the Rectified Output. In *Piezoelectric Energy Harvesting*, 1st ed.; John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, USA, 2011; pp. 325–331,
6. Shu, Y.C.; Lien, I.C. Analysis of power output for piezoelectric energy harvesting systems. *Smart Mater. Struct.* **2006**, 15, 1499–1512, <https://doi.org/10.1088/0964-1726/15/6/001>

7. Guan, M.J.; Liao, W.H. On the efficiencies of piezoelectric energy harvesting circuits towards storage device voltages. *Smart Mater. Struct.* 2007, *16*, 498–505, <https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/2/031> ,
8. Liang, J.; Liao, W. Piezoelectric Energy Harvesting and Dissipation on Structural Damping. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2008, *20*, 515–527, <https://doi.org/10.1177/1045389X08098194>,
9. Lallart, M.; Guyomar, D. An optimized self-powered switching circuit for non-linear energy harvesting with low voltage output. *Smart Mater. Struct.* 2008, *17*, 035030, <https://doi.org/10.1088/0964-1726/17/3/035030>,
10. Edlund, C.; Ramakrishnan, S. An analytic study of vibrational energy harvesting using piezoelectric tiles in stairways subjected to human traffic. *Eur. J. Appl. Math.* 2019, *30*(5), 968–985, <https://doi.org/10.1017/S095679251800058X> ,
11. Ali A., Shaukat H., Kouritem S.A., Bibi S., Altabey W. A., Recent progress in energy harvesting systems for wearable technology, *Energy Strategy Reviews* (2023), vol. 49, 101124, <https://doi.org/10.1016/j.esr.2023.101124>,
12. Man D, Hu Q, Xu Q, Tang L, Chen D, Yuan Z, Han T. Numerical Analysis of Dynamic Characteristics of an Asymmetric Tri-Stable Piezoelectric Energy Harvester under Random Vibrations in Building Structures. *Buildings*. 2024; *14*(7):2210. <https://doi.org/10.3390/buildings14072210> .
13. Min Zh., Hou Ch., Sui G., Shan X., Xie T., Simulation and Experimental Study of a Piezoelectric Stack Energy Harvester for Railway Track Vibrations, *Micromachines*, (2023), vol.14, 892. <https://doi.org/10.3390/mi14040892>
14. Machu, Z., Rubes, O., Sevecek, O. and Hadas, Z., 2021. Experimentally verified analytical models of piezoelectric cantilevers in different design configurations. *Sensors*, *21*(20), p.6759. <http://dx.doi.org/10.3390/s21206759>
15. Wang L., Lian Ch., Shu D., Yan Z., Nie X., Analytical solution and optimal design for the output performance of Galfenol cantilever energy harvester considering electromechanical coupling effect, *Scientific Reports*, (2023), vol.13:12857 | <https://doi.org/10.1038/s41598-023-40111-x>,
16. Wen-Po Sun, Wei-Jiun Su., Design and analysis of an extended buckled beam piezoelectric energy harvester subjected to different axial preload, *Smart Mater. Struct.* **33** (2024) 055007 (14pp), <https://doi.org/10.1088/1361-665X/ad38a4>,
17. Hu, G., Tang, L., Liang, J., Lan, C. and Das, R., 2021. Acoustic-elastic meta-materials and phononic crystals for energy harvesting: A review. *Smart Materials and Structures*, *30*(8), p.085025. <https://doi.org/10.1088/1361-665x/ac0cbc/>
18. Mikoshiba, K., Manimala, J.M. and Sun, C.T., 2013. Energy harvesting using an array of multifunctional resonators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, *24*(2), pp.168-179. <http://dx.doi.org/10.1177/1045389X12460335>
19. Gonella, S., To, A.C. and Liu, W.K., Interplay between phononic bandgaps and piezoelectric microstructures for energy harvesting. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, (2009), *57*(3), pp.621-633. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.11.002>

20. Dwivedi, A., Banerjee, A., Adhikari, S. and Bhattacharya, B., 2021. Optimal electromechanical bandgaps in piezo-embedded mechanical metamaterials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 17(2), pp.419-439. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10999-021-09534-0>
21. Piliposian G ,A. Hasanyan .A, Piliposyan G. Jilavyan H, (2020), On the Sensing, Actuating and Energy Harvesting Properties of a Composite Plate with Piezoelectric Patches, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*, Vol.7, pp. 657–668. [DOI 10.1007/s40684-020-00219-1](https://doi.org/10.1007/s40684-020-00219-1)
22. Avetisyan A.S., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B., Stability of a beam with periodic supports, *Proc. of NAS of Armenia, Mechanics*. (2015), vol. 68, № 3, pp. 16-21, <http://doi.org/10.33018/68.3.2>,
23. Avetisyan A.S., Khurshudyan As.Zh., (2021), Benchmarking the difference of moving follower and normal loads on linear and nonlinear Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, *ZAMM- Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, <https://doi.org/10.1002/zamm.202000350>,
24. Avetisyan A.S., Ghazaryan K., Marzocca P., Stability of a finite length multi-span beam resting on periodic rigid and elastic supports, *Int. Journal of Solids and Structures* (2023), vol. 281, 112410, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112410>,
25. Avetisyan A.S., Ghazaryan K., Marzocca P., Stability of a Multi-Span Current-Carrying Beam Resting on Periodic Supports and Exposed to an External Magnetic Field, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, (2024), Vol. 91/061009-2, <https://doi.org/10.1115/1.4>,
26. Ghazaryan, K., Piliposyan, G., Jilavyan, S. and Piliposian, G., 2024. Forced vibrations of a finite length metabeam with periodically arranged internal hinges and external supports. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 103, p.105194, <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105194>
27. Tovar, A.A. and Casperson, L.W., 1995. Generalized Sylvester theorems for periodic applications in matrix optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 12(3), pp.578-590. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.12.000578>

Information about the authors:

Avetisyan Ara S. - Chief Researcher of the Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia, ara_avetisyan@sci.am

Kazaryan Karen B. - Chief Researcher of the Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia, ghkarren@gmail.com

Pier Marzocca - Sir Lawrence Wackett Centre, RMIT University, 124 La Trobe St, Melbourne VIC 3000, Australia, pier.marzocca@rmit.edu.au

Received 20 June 2025

**SURFACE SH WAVES ON AN INTERFACE OF HOMOGENEOUS
PIEZOELECTRIC AND BI-MATERIAL MULTILAYERED
ELASTIC HALF- SPACES**

Ghazaryan K., Ghazaryan R., Terzyan S.

Key words: Multilayered periodic structure, surface wave, Bleustein wave.

This paper investigates the existence of elastic SH wave surface modes near the interface between a bi-material periodic multilayer elastic half-space in perfect elastic contact with a homogeneous piezoelectric half-space. The results demonstrate that surface wave modes are present when the shear wave velocities of the elastic materials are lower than that of the piezoelectric material.

Казарян К., Казарян Р., Терзян С.

**Поверхностные SH волны на границе раздела однородного пьезоэлектрического
полупространства и двухкомпонентного многослойного упругого полупространства**

Ключевые слова: Многослойная периодическая структура, поверхностная волна, волна Блюштейна.

Изучается проблема существования поверхностной SH волны на границе двухслойного упругого полупространства, находящегося в идеальном упругом контакте с однородным пьезоэлектрическим полупространством. Показано, что поверхностная волна существует только тогда, когда скорости сдвиговых волн упругих материалов меньше скорости сдвиговой волны пьезоэлектрического материала.

Ղազարյան Կ., Ղազարյան Ռ., Թերջյան Ս.

**Մակերևութային SH ալիքները համասեռ իեզոէլեկտրական կիսատարածության և երկբաղադրիչ
բազմաշերտ առաձգական կիսատարածության բաժանման եզրին**

Հիմնաբանք. բազմաշերտ պարբերական կառուցվածք, մակերևութային ալիք, Բլյուստեյնի ալիք:

Ուսումնասիրվում է մակերևութային SH ալիքի գոյության խնդիրը երկշերտ առաձգական կիսատարածության և համասեռ պիեզոէլեկտրական կիսատարածության իդեալական առաձգական կոնտակտի եզրում: Ցույց է տրված, որ մակերևութային ալիքը գոյություն ունի միայն այն դեպքում, երբ առաձգական նյութերի սահմանի ալիքների արագությունը փոքր է պիեզոէլեկտրական նյութի սահմանի ալիքի արագությունից:

Introduction

Surface acoustic waves in phononic structures have garnered significant scholarly interest over the past several decades. The existence and properties of one-dimensional transverse acoustic waves in semi-infinite, periodic bi-material media has investigated in [1,2].

The propagation of surface waves was examined [3] in a semi-infinite superlattice composed of periodic bi-material piezoelectric-metallic layers, topped with a piezoelectric layer.

The paper [4] discusses surface acoustic waves propagating in half-infinite one-dimensional piezoelectric phononic crystals with general anisotropy.

The propagation of shear horizontal polarization acoustic waves in infinite and semi-infinite superlattices composed of two piezoelectric media is examined using a Green's function method [5].

In [6] an analytical method is presented for studying shear horizontal surface acoustic waves in semi-infinite piezoelectric/metal superlattices.

The existence of surface acoustic waves is discussed semi-infinite one-dimensional piezoelectric phononic structure consisting of perfectly bonded generally anisotropic layers, which are arranged in a symmetric unit cell.

The surface wave modes on traction-free or clamped surfaces have been identified in a cubic symmetry piezoelectric homogeneous half-space with periodically arranged, non-equidistant electrodes, as reported in [8]. In [9] shear elastic surface wave modes are investigated in a semi-infinite medium with periodically oriented stacks of interfaces of elastic imperfect bonded contact. It has been shown that this periodic structure supports the propagation of surface waves.

The studies in [10] examine various aspects of surface wave propagation in piezoelectric composites with both perfect and imperfect electro-elastic interfaces.

Various methods and models of imperfectly bonded interfaces in elastic and electro-magneto-elastic composite structures, as well as problems based on these models, are discussed in [11-15].

This paper presents an analytical and numerical investigation of surface shear waves at the interface between a homogeneous elastic bi-metal half-space with periodic elastic sublayers and a homogeneous half-space composed from hexagonal piezoelectric crystals.

Statement of the problem

In Cartesian coordinate system (x, y, z) we consider bi-material layered elastic half-space in contact with homogeneous piezoelectric half-space. Layered elastic half-space $(x \in (0, \infty), |y| < \infty, |z| < \infty)$ is constituted by an infinite number of repeated two alternative sub-layers of widths d_1, d_2 made from different elastic metal materials A_1, A_2 .

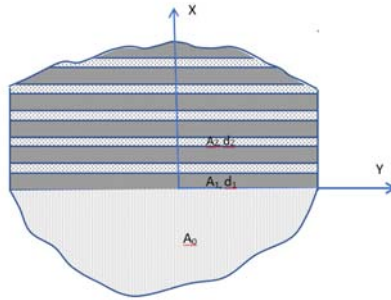


Fig.1. Bi-material layered elastic half-space in contact with homogeneous piezoelectric half-space.

We consider also the semi-space $(x \in (-\infty, 0), |y| < \infty, |z| < \infty)$ from the homogeneous piezoelectric material A_0 of hexagonal $6mm$ symmetry, the polling axis of the piezoelectric crystals is aligned along. At the interface $x = 0$, the semi-spaces are perfectly bonded, ensuring continuity of both elastic displacements and stresses.

Multi-layered bi-material elastic half-space

Consider SH wave propagation in a multi-layered elastic bi-material half-space constituted by an infinite number of repeated two sub-layers consisting from different elastic materials. Each of these sub-layers of widths d_1, d_2 and materials are labelled by the index $(s) = 1, (s) = 2$ within the elementary unit cell labelled by the index $n(n = 1, 2, 3, \dots)$, $x \in ((n-1)d, nd)$, $d = d_1 + d_2$. Each of the two sub-layers is assumed to be perfectly bonded to the adjoining sub-layers.

The elastic displacements and stresses obey to the anti-plane equations of motion and Hooke's law.

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{xz} = G \frac{\partial U_z}{\partial x}, \sigma_{yz} = G \frac{\partial U_z}{\partial y} \quad (1)$$

Here $U_z(x, y, t)$ is the displacement in z - direction, $\sigma_{xz}(x, y, t), \sigma_{yz}(x, y, t)$ are the shear stresses.

We consider harmonic wave travelling along the y direction,

$$U_z(x, y, t) = U(x) \exp[i(ky - \omega t)], \quad (2)$$

where ω is the wave angular frequency, k is the wave number.

The solutions of (1) for functions $U_n^{(s)}(x)$ within each material A_1, A_2 domains of the sub-layer material can be found as

$$U_n^{(s)}(x) = \alpha_{ni}^{(s)} \exp(iq_s x) + \alpha_{nr}^{(s)} \exp(-iq_s x) \quad (3)$$

Here materials are labelled by the index $(s) = 1, (s) = 2$ within the elementary unit cell are labelled by the index $n(n = 1, 2, 3, \dots)$, $x \in ((n-1)d, nd)$, $d = d_1 + d_2$,

$q_s = k \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2 c_s^2} - 1}$, $c_s = \sqrt{\frac{G_s}{\rho_s}}$ is the material shear wave velocity, G_s is the shear modulus, ρ_s is the bulk density of materials, $\alpha_{ni}^{(s)}, \alpha_{nr}^{(s)}$ are the complex amplitudes of plane waves.

Introducing field vector

$$\mathbf{U}_n^{(s)}(x) = \begin{pmatrix} U_n^{(s)}(x) \\ \sigma_{xzn}^{(s)}(x) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

we can establish the link between $U_n^{(s)}((n-1)d), U_n^{(s)}(nd)$ at the elementary unit cell edges as [16],

$$U_n^{(2)}(nd) = \mathbf{M} U_n^{(1)}((n-1)d) \quad (5)$$

Herein $\mathbf{M}$ is the unimodal propagator matrix for SH wave field, which links the field vectors at the at edges of elementary unit cell n -th cell.

The explicit expressions of the unimodal propagator matrix $\mathbf{M}$ elements be derived as [16]

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos(d_1 q_1) \cos(d_2 q_2) - \frac{q_1 G_1}{q_2 G_2} \sin(d_1 q_1) \sin(d_2 q_2), \\ m_{12} &= \frac{\cos(d_1 q_1) \sin(d_2 q_2)}{q_2 G_2} + \frac{\cos(d_2 q_2) \sin(d_1 q_1)}{q_1 G_1}, \\ m_{21} &= -q_2 G_2 \cos(d_1 q_1) \sin(d_2 q_2) - q_1 G_1 \cos(d_2 q_2) \sin(d_1 q_1) \\ m_{22} &= \cos(d_1 q_1) \cos(d_2 q_2) - \frac{q_2 G_2}{q_1 G_1} \sin(d_1 q_1) \sin(d_2 q_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Using formality of the Floquet theory [16] we have

$$\begin{aligned} U_n^{(2)}(nd) &= \lambda U_n^{(1)}((n-1)d) \\ U_n^{(2)}(nd) &= \lambda^n U_n^{(1)}(0) \end{aligned} \quad (7)$$

where $\lambda = \exp(ipd)$, p is the Bloch-Floquet wave number.

In the case of the real λ (complex p) if $|\lambda| < 1$ according to (7) we have the exponentially damped solution corresponding to the surface waves.

Taking into account (7) the following matrix equation can be obtained

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) U_n^{(1)}((n-1)d) = 0 \quad (8)$$

Where $\mathbf{I}$ is the identity matrix.

Using this equation for the $n = 1$ unit cell, we come to the matrix equation

$$\begin{pmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{(1)}(0) \\ \sigma_{xzn}^{(1)}(0) \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

In the case of the traction free surface $\sigma_{xzn}^{(s)}(0) = 0$, from the non-trivial solutions of

(9) $U_1^{(1)}(0) \neq 0$ one can find

$$m_{21} = 0; \quad m_{11} - \lambda = 0 \quad (10)$$

The equation

$$m_{21}(\omega, k) = 0 \quad (11)$$

for a given wave number k defines the countable set solutions of $\omega_{j0}(k)$, $j = 1, 2, \dots$, determining the surface wave frequencies if

$$\lambda = |m_{11}(\omega(k))| < 1 \quad (12)$$

Considering (11) we can obtain that

$$\lambda = \frac{\cos(d_1 q_1)}{\cos(d_2 q_2)}$$

in full accordance with results of [2].

Homogeneous semi-infinite piezoelectric half space

We consider the anti-plane problem for hexagonal $6mm$ symmetry piezoelectric material. In quasi-static set of Maxwell equations [10,17] we have the following equations and constitutive relations

$$\begin{aligned} V_z &= V_z(x, y); \quad \varphi = \varphi(x, y) \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 V_z}{\partial t^2} \\ \sigma_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x}(c_{44}V_z + e_{15}\varphi), \quad \sigma_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}(c_{44}V_z + e_{15}\varphi) \\ D_x &= \frac{\partial}{\partial x}(-\varepsilon_{11}\varphi + e_{15}V_z), \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}(-\varepsilon_{11}\varphi + e_{15}V_z) \end{aligned} \quad (13)$$

In (13) $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, D_x, D_y, V_z, \varphi$ are shear stresses, electric displacements, elastic displacement and electric potential, respectively and $c_{44}, e_{15}, \varepsilon_{11}$ and ρ are the shear modulus, piezoelectric constant, permittivity and bulk density of the material, respectively.

Taking solutions (13) in the form of harmonic wave travelling along the y direction (2), for the displacement and the electric field potential decaying at $x \rightarrow -\infty$

$$V_0(x) \rightarrow 0, \quad \varphi_0(x) \rightarrow 0 \quad (14)$$

we get solutions for $V_0(x), \varphi_0(x), \sigma_0(x)$ as

$$V_0(x) = C_1 \exp(rx),$$

$$\varphi_0(x) = C_2 \exp(kx) + C_1 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \exp(rx) \quad (15)$$

$$\sigma_{xz0}(0) = \sigma_0(x) = C_2 k e_{15} e^{kx} + C_1 G_0 r e^{rx}$$

Here C_1, C_2 are arbitrary constants, $r = k\sqrt{1-\eta^2}$; $G_0 = c_{44} + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}$, $c_0 = \sqrt{G_0 / \rho}$;
 $\eta = \omega / kc_0$, η is the dimensionless phase velocity of electro-elastic vibrations.

Applying condition $\varphi_0(0) = 0$ at metalized surface we get $C_2 = -C_1 e_{15} / \varepsilon_{11}$

Finally, for the field vector at $x = 0$ we have

$$V_0(0) = \begin{pmatrix} V_0(0) \\ \sigma_0(0) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ kG_0(\sqrt{1-\eta^2} - \chi^2) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Here $\chi = \frac{e_{15}}{\sqrt{G_0 \varepsilon_{11}}}$ is the electromechanical coupling constant.

In the case of the traction free surface $\sigma_{xz0}(0) = 0$ we get from (16) the equation defining the dimensionless phase velocity of the Bluestein wave [17]

$$\eta_0 = \sqrt{1-\chi^4}$$

Bi- material layered elastic half- space in contact with homogeneous piezoelectric half- space.

On the interface of bi-material layered elastic and homogeneous piezoelectric half-spaces $x = 0$ we have continuity condition for displacements and elastic stresses

$$\begin{pmatrix} U_1^{(1)}(0) \\ \sigma_{xz1}^{(1)}(x0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0(0) \\ \sigma_0(0) \end{pmatrix} \quad (17)$$

Considering (16) we obtain the following matrix equation

$$\begin{pmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ G_0 k(\sqrt{1-\eta^2} - \chi^2) \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

From (18) the set of equations determining phase velocity η and localization parameter λ can be cast as

$$\lambda = m_{11} + km_{12}(\sqrt{1-\eta^2} - \chi^2)G_0 \quad (19)$$

$$m_{21} - k(m_{11} - m_{22})(\sqrt{1 - \eta^2} - \chi^2)G_0 + k^2 m_{12}(-1 + \eta^2 + 2\chi^2 \sqrt{1 - \eta^2} - \chi^4)G_0^2 = 0$$

The matrix elements (6) $m_{11}(q_s), m_{12}(q_s), m_{21}(q_s), m_{22}(q_s)$, are functions from η , since

$$q_s = k \sqrt{\frac{c_0^2 \eta^2}{c_s^2} - 1}; \quad (20)$$

If solutions of (19) exist, such as $\eta < 1, |\lambda| < 1$, these solutions describe coupled electro-elastic surface waves that decay exponentially at $x \rightarrow \pm\infty$ from the interface $x = 0$.

The positive $\lambda < 1$ corresponds to the Bloch-Floquet wave numbers

$$pd = ip_0 + 2\pi m, p_0 > 0, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

the negative $\lambda > -1$ corresponds to the wave numbers

$$pd = ip_0 + \pi(2m + 1), p_0 > 0, m = 0, 1, 2. \quad (22)$$

Numerical results, discussions and results

Numerical analysis of equations (19) shows that this equation have solutions corresponding to surface wave if the shear velocities of elastic materials are less than the shear velocity of piezoelectric material, $c_s < c_0$. This condition for the existence of surface waves is, in certain respects, analogous to the criteria for surface wave propagation described in the classic Love problem.

The numerical calculations have been carried out for piezoelectric material PZT-4

($G_0 = 51 \text{ GPa}, c = 2600 \text{ m/sec}$) and metals: copper

($G_1 = 45 \text{ GPa}, c_1 = 2240 \text{ m/sec}$), platinum ($G_2 = 61 \text{ GPa}, c_2 = 1640 \text{ m/sec}$)

where the shear velocities are lower than those of the piezoelectric material.

Numerical analysis of equations (19) shows that when $K < 4$ the surface wave does not exist. For fixed value β and K there exist only one surface wave in range $\eta \in (0.94, 0.98)$ at $K = 5$ and $\eta \in (0.82, 0.98)$ at $K = 10$.

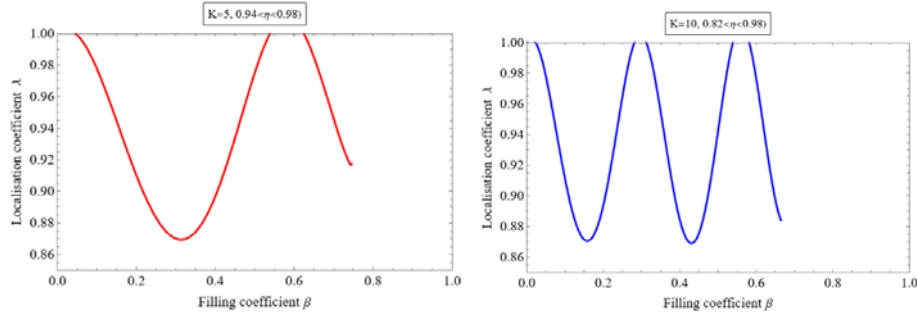


Fig.2 Plots of the localisation coefficients versus the filling coefficient

On Fig.2 the plots of localisation coefficients are presented versus filling coefficient $\beta = d_1 / d$. As it follows from plots of Fig.2 surface wave does not exist for some values of β .

For the PZT-4 material the dimensionless phase velocity of the Bleustein wave velocity is equal $\eta_0 = 0.86$.

The main results can be formulated as follows:

The phononic structure including a two-component, layered periodic bi-material elastic half-space and a homogeneous piezoelectric half-space, which are perfectly bonded at their interface, can support a coupled surface wave whose amplitudes attenuate with increasing distance from the interface. The existence of this wave is due to the condition that the shear velocities of elastic materials are less than the shear velocity of piezoelectric material.

Acknowledgment

The research was supported by the Higher Education and Science Committee of MESCS RA Research Project No 1-7/25RG-2C136.

References

1. Camley, R. E., Djafari-Rouhani, B., Dobrzynski, L., & Maradudin, A. A. (1983). Transverse elastic waves in periodically layered infinite and semi-infinite media. *Physical Review B*, 27(12), 7318.
2. Djafari-Rouhani, B., Dobrzynski, L., Duparc, O. H., Camley, R. E., & Maradudin, A. A. (1983). Sagittal elastic waves in infinite and semi-infinite superlattices. *Physical Review B*, 28(4), 1711.
3. Alami, M., El Boudouti, E. H., Djafari-Rouhani, B., El Hassouani, Y., & Talbi, A. (2018). Surface acoustic waves in one-dimensional piezoelectric-metallic phononic crystal: Effect of a cap layer. *Ultrasonics*, 90, 80-97.
4. Darinskii, A. N., & Shuvalov, A. L. (2019). Existence of surface acoustic waves in one-dimensional piezoelectric phononic crystals of general anisotropy. *Physical Review B*, 99(17), 174305.
5. Bousfia, A., El Boudouti, E. H., Bria, D., Nougouai, A., Djafari-Rouhani, B., & Velasco, V. R. (2000). Surface and interface shear horizontal acoustic waves in piezoelectric superlattices. *Journal of Applied Physics*, 87(9), 4507-4513.

6. Chen, S., Lin, S., & Wang, Z. (2009). Shear horizontal surface acoustic waves in semi-infinite piezoelectrics/metal superlattices. *Ultrasonics*, 49(4-5), 446-451.
7. Darinskii, A.N. , Shuvalov, A.L. (2019). Surface acoustic waves in one-dimensional piezoelectric phononic crystals with symmetric unit cell, *Physical review B* ,100, 184303\
8. Ghazaryan, K., Piliposyan, D., Jilavyan, S., & Piliposian, G. (2025). Localization of shear waves in cubic piezoelectric structure stratified with periodically arranged metallized interfaces. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 105448.
9. Ghazaryan, K., Ghazaryan, R., Terzyan, S. (2025). Surface shear horizontally wave propagation in a half-space periodically stratified with interfaces of imperfect elastic contact. In: Altenbach, H. (eds) *Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials*, vol 223. Springer, Cham. 233-242.
10. Avetisyan, A., (2023). *Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites*. Springer International Publishing, p. 215.
11. Avetisyan, A., Khachatryan V, (2025) Finite-amplitude surface wave in linear electro-acoustic (piezoelectric) waveguide, In: Altenbach, H. (eds) *Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials*, vol 223. Springer, Cham.,17-29.
12. Avetisyan, A., Khachatryan V, Mkrtchyan M (2022). Formation of a hybrid of electroacoustic waves in piezoelectric layered composites. *Journal of Physics: Conference Series* 2231,012025(1-11).
13. Avetisyan, A.S. On formulating problems of contact-less surface control of electroacoustic wave propagation. *Acoustical Physics*, (2022)., 68(3), 227-234.
14. Agayan K., 2020, Diffraction of shear flat waves on a semi-infinite crack in a compound elastic half-space. *Proceedings of NAS RA, Mechanics*, 73(2), 22-34.
15. Aghayan K, Zakaryan G, (2025) Surface electro-elastic shear wave in piezo-electrical half-space with semi-infinite electrodes. Altenbach, H. (eds) *Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials*, vol 223, Chapter 1, Springer, Cham, 2-16.
16. Ghazaryan K., Ghazaryan R., Terzyan S., (2021) Localization of shear waves in inhomogeneous periodically stratified waveguide / *Mechanics - Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 74 (4), 56-67.
17. Bleustein, J.L. (1968). A new surface wave in piezoelectric materials. *Applied Physics Letters*, 13(12), 412-413.

Information about the authors:

Ghazaryan K. Institute of mechanics NAS of Armenia,
ghkarren@gmail.com, Phone 374 99 227395

Ghazaryan R. Institute of mechanics NAS of Armenia,
rafaelghazaryan52@gmail.com, Phone 374 99 396344

Terzyan S., Institute of mechanics NAS of Armenia,
sat_and_21@yahoo.com, Phone 374 91 340432

Received 26 June 2025

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԳԻԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

78, №2, 2025

Механика

СОДЕРЖАНИЕ 2025 г., том 78 №2

Ագայն Կ.Լ. Сдвиговые электроупругие волны в составном пьезоэлектрическом пространстве с электродами на плоскости контакта.....	3
Ագայն Կ.Լ., Ատյան Լ.Ա., Տաակյան Շ.Լ. Отражение упругой волны от поверхности соприкосновения ферромагнитной полосы и диэлектрического полупространства ..	17
Մարտիրոսյան Շ. Ր. Сверхзвуковая локализованная дивергенция широкой панели, нагруженной по двум направлениям: растянутой по потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении	26
Միկիլյան Մ., Տոնոյան Վ., Շեստինո Յ. Аэро-термо-магнито-упругая устойчивость удлиненной пластинки в сверхзвуком потоке газа	43
Ավետիսյան Արա Շ., Կազարյան Կարեն Բ., Մարզոկա Քյեր Изгибные колебания частично покрытой пьезоэлектрической накладкой балки, опирающейся на периодически расположенные внешние опоры	59
Կազարյան Կ., Կազարյան Ր., Դերջյան Շ. Поверхностные SH волны на границе раздела однородного пьезоэлектрического полупространства и двухкомпонентного многослойного упругого полупространства.....	78

CONTENTS 2025, v. 78 №2

Aghayan K.L. Shear electro elastic waves in composite piezoelectric space with electrodes on the contact plane.....	3
Aghayan K.L., Atoyan L.A., Sahakyan S.L. Reflection of an elastic wave from the contact surface of a ferromagnetic layer and a dielectric half-space	17
Martirosyan S. R. Supersonic localized divergence of a wide panel loaded in two directions: stretched along the gas flow and compressed in the perpendicular direction.....	26
Mikilyan M., Tonoyan V., Cestino E. Aero-thermo-magneto-elastic stability of an elongated plate in a supersonic gas flow	43
Ara S. Avetisyan, Karen B. Ghazaryan, Pier Marzocca Flexural vibrations of a beam on periodically arranged external supports and partially coated by piezoelectric patch.....	59
Ghazaryan K., Ghazaryan R., Terzyan S. Surface SH waves on an interface of homogeneous piezoelectric and bi- material multilayered elastic half- spaces	78

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2025, հ.78, №2

Աղայան Կ.Լ. Կոնտակտի հարթության վրա էլեկտրոդներ պարունակող բաղադրյալ պիեզոէլեկտրիկ տարածության սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքներ	3
Աղայան Կ.Լ., Աթոյան Լ.Հ., Սահակյան Ս.Լ. Դիէլեկտրիկ կիսատարածության և ֆերոմագնիսական շերտի շփման մակերևույթից առաձգական ալիքի անդրադարձումը	17
Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ նախնական ձգված և միաժամանակ սեղմված ուղղահայած ուղղությամբ բավականի լայն սալի տեղայնացված դիվեոգենցիայի մի խնդրի մասին	26
Միկիկյան Մ., Տոնոյան Վ., Չեստինո Է. Գերձայնային գազային հոսքում երկարացված թիթեղի աերո-թերմո-մագնիսական-առաձգական կայունությունը	43
Արա Ս. Ավետիսյան, Կարեն Բ. Ղազարյան, Պիեռ Մարգոկա Պարբերաբար դասավորված արտաքին հենարանների վրա հենվող մասնակիորեն ծածկված պիեզոէլեկտրական վերդիրով հեծանի ծռման տատանումները	59
Ղազարյան Կ., Ղազարյան Ռ., Թերզյան Ս. Մակերևութային SH ալիքները համասեռ պիեզոէլեկտրական կիսատարածության և երկբաղադրիչ բազմաշերտ առաձգական կիսատարածության բաժանման եզրին	78

Сдано в производство 27.06.2025 г.

Формат 70 x 100¹/₁₆ . Печ. лист –5.5

Заказ № 1386. Тираж 150.

Цена договорная.

Типография Издательства НАН РА

Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24