

**АЭРО-ТЕРМО-МАГНИТО-УПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УДЛИНЕННОЙ  
ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОМ ПОТОКЕ ГАЗА**

**Микилян М., Тоноян В., Честино Э.**

**Ключевые слова:** флаттер, нелинейность, температурное поле, магнитное поле, сверхзвуковой поток газа, аэро-термо-магнито-упругая устойчивость

**Mikilyan M., Tonoyan V., Cestino E.**

**Aero-thermo-magneto-elastic stability of an elongated plate in a supersonic gas flow**

**KeyWords:** flutter, nonlinearity, thermal field, magnetic field, supersonic gas flow, aero-thermo-magneto-elastic stability

The paper considers the problem of loss of stability of an isotropic elongated plate of constant thickness, which is flown by a supersonic gas flow and is subjected to the combined effect of a temperature varying along the thickness and magnetic field. Using the basic postulates of the theory of aero-thermo-magneto-elasticity of isotropic bodies, the theory of flexible plates and the linear law of the temperature change along the thickness of the plate, equations and corresponding boundary conditions are obtained that characterize the oscillations and stability of the considered aero-thermo-magneto-elastic system. Based on the derived equations, conditions are obtained and stability boundaries are calculated depending on the variables characterizing the flow velocity, magnetic field, the temperature of the median plane and the temperature gradient in the direction normal to the median plane.

**Միկիլյան Մ., Տոնոյան Վ., Չեստինո Է.**

**Գերձայնային զագային հոսքում երկարացված թիթեղի աերո-թերմո-մագնիսական-առաձգական կայունությունը**

**Հիմնաբառեր՝** ֆլատեր, ոչ գծայնություն, ջերմային դաշտ, մագնիսական դաշտ, գերձայնային շրջհոսում, աերո-ջերմա-մագնիսա-առաձգական կայունություն

Աշխատանքում դիտարկվում է հաստատուն իզոտրոպ նյութից կառուցված և հաստություն ունեցող երկար սալի կայունության կորստի խնդիրը, երբ այն մի կողմից շրջհոսվում է զագի գերձայնային հոսանքով և ենթարկվում է ըստ հաստության փոփոխական ջերմային և մագնիսական դաշտերի համատեղ ազդեցությանը: Օգտագործելով իզոտրոպ մարմինների աերո-ջերմա-մագնիսա-առաձգականության, ձկուն սալերի և փոփոխական (սալի հաստության ուղղությամբ) ջերմային դաշտի տեսությունների հիմնական դրույթները, ստացվել են դիտարկվող աերո-ջերմա-մագնիսա-առաձգական համակարգի տատանումների ու կայունության հիմնական հավասարումները և համապատասխան մակերևութային պայմանները: Ստացված հավասարումների հիման վրա արտածվել են կայունության պայմանները և որոշվել են կայունության սահմանները՝ կախված շրջհոսման արագությունից, մագնիսական դաշտի մեծությունից, սալի միջին հարթության ջերմաստիճանից և միջին հարթության նորմալի ուղղությամբ ջերմաստիճանի գրադիենտը բնութագրող փոփոխականներից:

В статье рассматривается вопрос потери устойчивости изотропной удлиненной пластинки постоянной толщины, которая с одной стороны обтекается сверхзвуковым потоком газа и подвергается совместному воздействию переменного по толщине температурного и магнитного полей. Используя основные положения теории аэро-термо-магнито-упругости изотропных тел, теории гибких панелей и линейного по толщине панели закона температурного поля, получены уравнения и соответствующие граничные условия, характеризующие колебания и устойчивость рассматриваемой аер-термо-магнито-упругой системы. На основе выведенных уравнений получены условия и вычислены границы устойчивости в зависимости от переменных, характеризующих скорость потока, значения магнитного поля, температуру срединной плоскости и градиента температуры в направлении, нормальном к срединной плоскости.

**Введение.** Панельный флаттер - потеря устойчивости и интенсивные колебания панелей обшивок летательных аппаратов, возбуждающихся при взаимодействии с потоком воздуха при больших скоростях полета. При математическом моделировании обтекания твердого тела газовым потоком обычно предполагается, что обтекаемая поверхность не деформируется. Если изгибная жесткость обтекаемого тела невелика, от этого предположения необходимо отказаться и рассмотреть совместные колебания тела и газового потока. Обычно колебания, инициированные некоторым начальным импульсом, быстро затухают за счет так называемой аэродинамической вязкости, но возможен случай, когда амплитуда колебаний со временем резко возрастает. Это явление, называемое флаттером, может вызвать разрушение обтекаемых элементов конструкции летательного аппарата — несущих поверхностей или обшивки. Возможно также ухудшение управляемости. Флаттер явился причиной многих авиакатастроф. Поэтому его изучение представляет собой одно из приоритетных направлений исследований механики.

Среди задач математического моделирования флаттера выделяют широкий класс задач - задачи панельного флаттера, при формулировке которых обтекаемое тело можно рассматривать как пластинку или пологую оболочку [13,18,19].

Сверхзвуковой флаттер характерен для элементов обшивки и несущих поверхностей малого удлинения. Его возникновение - это переход от затухающих колебаний к колебаниям с возрастающей амплитудой, который естественно трактовать как потерю устойчивости [4,13,23]. При анализе устойчивости в линейной постановке удается определить границу устойчивого режима обтекания, т.е. критическое значение скорости набегающего потока [2,3,24].

Следует отметить, что флаттер панели может возникать на плоских или изогнутых панелях. Разные факторы могут по-разному влиять на характер границы флаттера. Эти факторы могут быть структурными или геометрическими, термодинамическими, магнитными, аэродинамическими, возникающими из характеристик потока и появляющимися в уравнениях состояния [5,9,12].

Устойчивость изотропных пластин постоянной толщины в сверхзвуковом потоке газа широко изучена [2-4,8,9,25], в то же время, насколько известно авторам, задача аэротермоупругой устойчивости панелей в переменном по толщине температурном поле была рассмотрена лишь в незначительной степени [5-7,21]. Нужно отметить, что вопросам аеро-магнито-упругой устойчивости посвящено очень малое количество работ [14,15,17,26]. В частности, в настоящей работе рассматривается вопрос потери устойчивости изотропной пластины-полосы постоянной толщины, погруженной в

сверхзвуковое поле обтекания и подвергающейся воздействию переменного по толщине температурного и продольного магнитного поля. Используя основные принципы теории аэро-термо-магнито-упругости изотропных тел [11,20,22], теории гибких пластин [28,29], теории магнитоупругости и линейного закона изменения по толщине пластины температурного поля [5,6], получены уравнения устойчивости и соответствующие граничные условия. Показано, что коэффициенты этих аэро-термо-магнито-упругих определяющих уравнений зависят от температуры и параметра магнитного поля, и, следовательно, критическая скорость флаттера панели зависит от совместного влияния этих явлений. Это явление обусловлено тем, что под воздействием температурного поля в невозмущенном состоянии пластина выпучивается из-за неоднородности температурного поля по ее толщине. Показано также, что приложенное магнитное поле оказывает существенное влияние на критическую скорость флаттерных колебаний.

**Формулировка задачи.** Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную удлиненную пластинку постоянной толщины  $h$ , находящуюся в стационарном температурном поле  $T$  и в продольном магнитном поле с вектором напряженности  $\vec{H}_0(H_{01}, 0, 0)$ . Декартова система координат  $(x_1, x_2, x_3)$  выбрана так, чтобы срединная плоскость пластины совпадала с координатной плоскостью  $(x_1, x_2)$ . Сверхзвуковой поток газа с невозмущенной скоростью  $U$  направлен вдоль оси  $0x_1$ , с одной стороны панели, как показано на рис. 1.

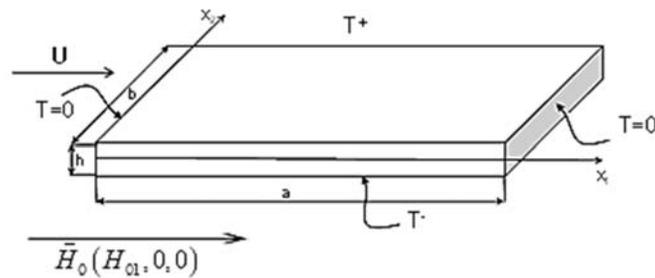


Рис.1. Геометрическая интерпретация задачи.

Принимается, что пластинка в направлении, перпендикулярном к скорости обтекающего потока, достаточно длинная и однородно закреплена по длинным сторонам. В этом случае срединная поверхность изогнутой пластинки будет близка к цилиндрической. Поэтому, направляя ось  $0x_2$  вдоль длинной стороны, считаем, что все величины (как возмущенного, так и невозмущенного состояний) не зависят от координаты  $x_2$ .

**Основные предположения.** Для исследования аэро-термо-магнито-упругой устойчивости панели используются следующие предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемой нормали [28,29];
- б) основные положения теории гибких пластин [28,29];
- в) при расчете аэродинамического давления используется модифицированная формула поршневой теории [1,2,12]:

$$q = -\alpha p_\infty \lambda^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \left( \frac{v_3}{a_0} \right) + \frac{5-\alpha+3\lambda^2}{4(1+\lambda^2)^2} \left( \frac{v_3}{a_0} \right)^2 + \frac{(2\alpha+3)\lambda^4 + (10-\alpha^2)\lambda^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 9}{12(1+\lambda^2)^3 \sqrt{1+\lambda^2}} \left( \frac{v_3}{a_0} \right)^3 + \dots \right\}, \quad (1)$$

где  $p$  - давление газа на поверхности пластинки,  $a_\infty^2 = \alpha p_\infty \rho_\infty^{-1}$  - скорость звука для невозмущенного газа,  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$  - давление и плотность газа в невозмущенном состоянии,  $\alpha$  - показатель политропы газа,  $v_3$  - нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки,

$$\lambda^2 = \frac{V_A^2}{a_0^2}, \quad V_A^2 = \frac{B_{01}^2}{\rho_0 \mu_0}, \quad \#$$

$V_A$  - величина, численно равная скорости распространения альфвеновских электромагнитных волн,  $B_{01} = \mu_0 \mu_r H_{01}$ ,  $\mu_r$  - относительная магнитная проницаемость,  $\mu_0$  ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^7 \text{ N/A}^2$ ) - магнитная постоянная;

- г) линейный закон температурного поля по толщине пластины [6,13]:  
 $T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + x_3 \Theta(x_1, x_2); \quad (2)$
- д) гипотеза Неймана об отсутствии касательных напряжений [29].

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ( $\Theta \neq 0$ ) происходит выпучивание пластинки (с прогибом  $w_T(x_1)$ ) и вследствие этого появляется аэроупругое давление, которое, согласно предположению (в), определяется формулой (1). В линейном приближении для указанного давления получается выражение  $\alpha p_\infty \sqrt{1+\lambda^2} a_\infty^{-1} dw_T / dx_1$ .

На основе приведенных уравнений и соответствующих условий на кромках  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$  пластинки (граничные условия приводятся в ходе изложения) исследуется устойчивость указанного выпученного (невозмущенного) состояния, под действием температурного поля и давления обтекающего сверхзвукового потока газа. Для определения характеристик невозмущенного состояния кроме уже принятых предположений, принимаются также следующие:

- а) деформации невозмущенного состояния настолько малы, что можно воспользоваться линейной теорией аэро-термо-магнито-упругости;

б) с лицевых поверхностей ( $x_3 = \pm h/2$ ) пластинки происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями  $T^+$  и  $T^-$  соответственно), а боковые поверхности ( $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ ) теплоизолированы.

**Определение температурного поля и выпучивания пластинки.** Стационарное температурное поле в панели получается из решения следующего уравнения теплопроводности [13]

$$\Delta T = 0 \quad (3)$$

в среде, занимаемой панелью, со следующими поверхностными условиями:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = k(T - T^\pm) \quad \text{для } x_3 = \pm \frac{h}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{для } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a \quad (5)$$

Согласно предположению о линейном законе температуры по толщине пластины, сформулированная задача теплопроводности (3)–(5) дает следующие соотношения:

$$T = T_0(x_1) + x_3 \Theta(x_1),$$

$$T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta = \frac{k(T^+ - T^-)}{kh - 2\lambda}. \quad (6)$$

В уравнениях (4) и (5)  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $k$  - коэффициент теплопередачи,  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к поверхности пластины.

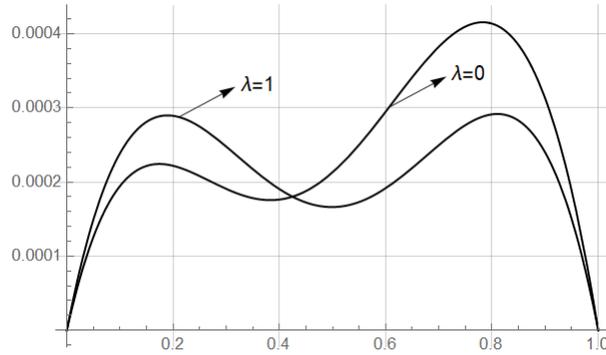


Рис.2. Графики функции  $w_T$  при разных значениях параметра магнитного поля  $\lambda$ .

Задача определения прогиба  $w_T$  решена приближенно методом Бубнова-Галеркина и получена следующая формула:

$$w_T(x_1) = -R\Theta \left\{ \frac{1}{2} x_1 (x_1 - a) + \frac{a^2 K v \sqrt{1 + \lambda^2}}{36 + (K v \sqrt{1 + \lambda^2})^2} \left[ \frac{3\sqrt{1 + \lambda^2}}{8\pi} K v \sin \frac{\pi x_1}{a} + \frac{9}{16\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right] \right\}. \quad (7)$$

На рис. 2 приведены графики функции  $w_T$ , построенные на основе формулы (7) при  $\alpha = 23.8 \cdot 10^{-6}$  град $^{-1}$ ;  $k = 1200$  Вт/(м $^2$  град);  $\lambda = 210$  Вт/(м град);  $\mu = 0.34$ ;  $a = 1$  м;  $h/a = 1/100$  [27].

На основе принятых предположений найдено следующее нелинейное дифференциальное уравнение аэро-термо-магнито-упругости:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - N_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( \rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty \sqrt{1 + \lambda^2}}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \\ + \alpha p_\infty M \sqrt{1 + \lambda^2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \alpha p_\infty M^2 \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 4)\lambda^2 + 3\lambda^4}{4(1 + \lambda^2)^2} \left[ 2 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x_1} + \\ + \alpha p_\infty M^3 \sqrt{1 + \lambda^2} \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 1)(\alpha + 3)\lambda^2 + (\alpha^2 - 3\alpha + 11)\lambda^4 + (2\alpha + 3)\lambda^6}{12(1 + \lambda^2)^4} \times \\ \times \left[ 3 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Решения уравнения (8) должны удовлетворять условиям закрепления краев пластинки  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ . Будут рассмотрены краевые условия следующих двух типов:

- края шарнирно оперты и свободно перемещаются вдоль оси  $Ox_1$ .
- края шарнирно оперты и неподвижны.

В (8) введены следующие обозначения:

$$N_1^T = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ -\frac{Eh}{1 - \mu} \alpha T_0, & \text{когда края пластинки неподвижны;} \end{cases}$$

$$N_1 = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ \frac{Eh}{2\alpha(1 - \mu^2)} \int_0^a \left( 2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right) dx_1, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases} \quad (9)$$

Решения уравнения (8) должны удовлетворять следующим условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a, \quad (10)$$

которые вытекают из условий шарнирного опирания краев пластинки.

**Метод решения.** Полученную нелинейную задачу (8)–(10) решаем приближенно, представляя решение в виде [10]

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i x_1, \quad \left( \lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right), \quad (11)$$

где  $f_i(t)$  являются функциями времени  $t$ , которые необходимо определить.

Представление (11) удовлетворяет граничным условиям, перечисленным в уравнении (10). Подставляя формулу (11) в уравнение (8) и используя метод Бубнова-Галёркина, получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $f_i(t)$ .

В работе будем использовать биномиальное приближение [2,30]:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x.$$

Затем с помощью безразмерных функций  $x_i = f_i(t)/h$  выводится нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которое в линейной постановке принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + (1 - \bar{T}\delta) x_1 - \frac{2}{3} K v x_2 + \bar{\Theta} [\delta_{11}^\lambda x_1 + \delta_{12}^\lambda x_2] + \\ + \bar{\Theta}^2 \delta [\gamma_{11}^\ominus x_1 + \gamma_{12}^\ominus x_2] = 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + (\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) x_2 + \frac{2}{3} K v x_1 + \bar{\Theta} [\delta_{21}^\lambda x_1 + \delta_{22}^\lambda x_2] + \\ + \bar{\Theta}^2 \delta [\gamma_{21}^\ominus x_1 + \gamma_{22}^\ominus x_2] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где вместе с безразмерным временем  $\tau = \omega_1 t$  вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{T} = RT_0 \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left( \frac{12}{\pi^2} \right), \quad \bar{\Theta} = R\Theta h \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 v^2}, \\ K = \frac{4\alpha p_\infty}{\rho \omega_1^2 h^2}, \quad \bar{v} = M \sqrt{1 + \lambda^2} \frac{h}{a}, \\ \omega_i = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left( \frac{i\pi}{a} \right)^2 \quad (i = 1, 2), \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} \left( \varepsilon + \frac{a_\infty \rho_\infty \sqrt{1 + \lambda^2}}{\rho h} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты  $\delta_{ij}^\lambda$ , учитывающие магнито-аэро-динамическое влияние:

$$\begin{aligned}\delta_{11}^\lambda &= -\frac{9}{4} \frac{1+\alpha+\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} K\bar{v}^2, \quad \delta_{12}^\ominus = \frac{21}{40} \frac{1+\alpha+\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} K^2\bar{v}^3, \\ \delta_{21}^\lambda &= \frac{3}{40} \frac{1+\alpha+3\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} K^2\bar{v}^3, \quad \delta_{22}^\lambda = -\frac{1}{80} \frac{1+\alpha+3\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} K\bar{v}^2 (180 + K^2\bar{v}^2),\end{aligned}\tag{14}$$

коэффициенты  $\gamma_{ij}^\ominus$ , которые учитывают магнитное и температурное влияние отмеченных процессов:

$$\begin{aligned}\gamma_{11}^\ominus &= \frac{3(1152 + (32 - 3\pi^2)K^2\bar{v}^2)^2}{32\pi^6}, \quad \gamma_{22}^\ominus = \frac{243}{8\pi^2} K^2\bar{v}^2 \\ \gamma_{12}^\ominus = \gamma_{21}^\ominus &= -\frac{27(1152 + (32 - 3\pi^2)K^2\bar{v}^2)}{16\pi^4} K\bar{v}.\end{aligned}\tag{15}$$

В уравнениях (12), (13)  $\chi$ ,  $v$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{\Theta}$  - параметры, характеризующие процесс затухания, скорость потока и температурное поле соответственно, тогда как

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases}$$

Таким образом, задача устойчивости данной аэроупругой системы в первом приближении получается из решений системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (12), зависящей от скорости потока  $v$ , температуры ( $\bar{T}$ ,  $\bar{\Theta}$ ) и магнитного поля ( $\lambda$ ).

**Границы и условия устойчивости.** Представив решение системы (12) в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 e^{r\tau}, \\ x_2 &= y_2 e^{r\tau},\end{aligned}$$

получим следующее характеристическое уравнение относительно  $r$ :

$$a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 = 0\tag{16}$$

где

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 2\chi,$$

$$a_2 = 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\lambda + \delta_{22}^\lambda) + \bar{\Theta}^2\delta(\gamma_{11}^\ominus + \gamma_{22}^\ominus) + \chi^2,$$

$$a_3 = [1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\lambda + \delta_{22}^\lambda) + \bar{\Theta}^2\delta(\gamma_{11}^\ominus + \gamma_{22}^\ominus)]\chi,$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2v^2 - \bar{T}\bar{\Theta}\delta[4\delta_{11}^\lambda + \delta_{22}^\lambda + \bar{\Theta}\delta(\gamma_{11}^\ominus + \gamma_{22}^\ominus)] + \\
& + \bar{\Theta}\left\{\gamma^2\delta_{11}^\lambda + \delta_{22}^\lambda + \bar{\Theta}\delta(\gamma^2\gamma_{11}^\ominus + \gamma_{22}^\ominus) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^\lambda - \delta_{21}^\lambda)\right\} + \\
& + \bar{\Theta}^2\left\{\delta_{11}^\lambda\delta_{22}^\lambda - \delta_{12}^\lambda\delta_{21}^\lambda + \bar{\Theta}\delta[\gamma_{22}^\ominus\delta_{11}^\lambda + \gamma_{11}^\ominus\delta_{22}^\lambda - (\gamma_{21}^\ominus\delta_{12}^\lambda + \gamma_{12}^\ominus\delta_{21}^\lambda)]\right\} + \\
& + \bar{\Theta}^4\delta^4\left[\gamma_{11}^\ominus\gamma_{22}^\ominus - (\gamma_{12}^\ominus)^2\right].
\end{aligned}$$

Невозмущенная форма пластины устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Рауса - Гурвица, можно записать в виде [16]:

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 4),$$

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_3a_0 > 0 \quad (17)$$

$$\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2a_0 > 0$$

Первые два неравенства, требующие, чтобы демпфирование (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из оставшихся условий неравенства, определяющих область устойчивости рассматриваемой термоупругой системы параметров,  $v$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{\Theta}$  следующие :

$$1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) > 0$$

$$\begin{aligned}
(1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2\bar{v}^2 + \\
+ \left(\gamma^2(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) - \frac{2}{3}K\bar{v}(\delta_{12}^\ominus - \delta_{21}^\ominus) - (4\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus)\bar{T}\delta\right)\bar{\Theta} + \\
+ (\delta_{11}^\ominus\delta_{22}^\ominus - \delta_{12}^\ominus\delta_{21}^\ominus)\bar{\Theta}^2 > 0 \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2\bar{v}^2 + 2\chi^2(\gamma^2 + 1) - (6(\delta_{22}^\ominus - \delta_{11}^\ominus)\bar{\Theta} + 10\chi^2)\bar{T}\delta + \\
+ 2\left((\gamma^2 - 1)(\delta_{22}^\ominus - \delta_{11}^\ominus) + \frac{4}{3}K\bar{v}(\delta_{12}^\ominus - \delta_{21}^\ominus) + (\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus)^2\chi^2\right)\bar{\Theta} + \\
+ (4\delta_{12}^\ominus\delta_{21}^\ominus + (\delta_{22}^\ominus - \delta_{11}^\ominus)^2)\bar{\Theta}^2 > 0.
\end{aligned}$$

Если эффектом затухания пренебречь, то вместо (17) можно получить биквадратное уравнение, и, следовательно, условия устойчивости будут такими:

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_2^2 - 4a_4 > 0. \quad (19)$$

Далее поэтапно приводится исследование области устойчивости:

$$1) \bar{T} \neq 0, \quad \bar{\Theta} = 0;$$

- 2)  $\bar{T} = 0, \bar{\Theta} \neq 0$ ;  
 3) общий случай  $\bar{T} \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0$ .

**1) Постоянное температурное поле ( $\bar{T} \neq 0, \bar{\Theta} = 0$ ).** В этом случае, когда  $\delta = 1$ ,

т.е. когда края пластинки закреплены, условия (18) существенно упрощаются и принимают вид:

$$1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta > 0$$

$$(1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2\bar{v}^2 > 0 \quad (20)$$

$$(\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2\bar{v}^2 + 2\chi^2(\gamma^2 + 1) - 10\chi^2\bar{T}\delta > 0.$$

С другой стороны, если  $\delta = 0$ , т.е. когда края пластины могут свободно перемещаться, то первые два условия из (20) выполняются во всех случаях, а из третьего условия получается нижний критический флаттер пластины:

$$\bar{v}_* = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{K} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}} \quad (21)$$

или

$$v_* = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{K\sqrt{1 + \lambda^2}} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}} \quad (22)$$

Отметим, что формула (21) совпадает с известной формулой, полученной в [1,13], показывающей, что постоянное температурное поле не влияет на область устойчивости, если края пластины движутся свободно. Формула (22) показывает, что значение критической скорости флаттера обратно пропорциональна значению магнитного поля.

Неравенства (20) используются для построения области устойчивости на плоскости  $(v, \lambda)$ . Рис.3 показывает эту область, когда  $T_0 > 0$ , а рис.4 соответствует случаю  $T_0 < 0$ . Из рис. 3 и 4 можно сделать вывод, что:

**Таблица 1.** Влияние магнитного поля на критическую скорость при постоянном температурном поле.

$T_0, ^\circ C$	-100	-50	0	5	10
$\Lambda$					
0	0.9904	0.5558	0.1211	0.0777	0.0342
1	0.7003	0.3929	0.0857	0.0549	0.0242
5	0.1942	0.1089	0.0238	0.0152	0.0067
10	0.0985	0.0553	0.0121	0.0077	0.0034

а) при  $T_0 < 0$  присутствие магнитного поля существенно сужает область устойчивости рассматриваемой пластинки,

б) при  $T_0 > 0$  присутствие магнитного поля приводит к явлению бифуркации. А именно, неустойчивое положение превращает в устойчивое и наоборот.

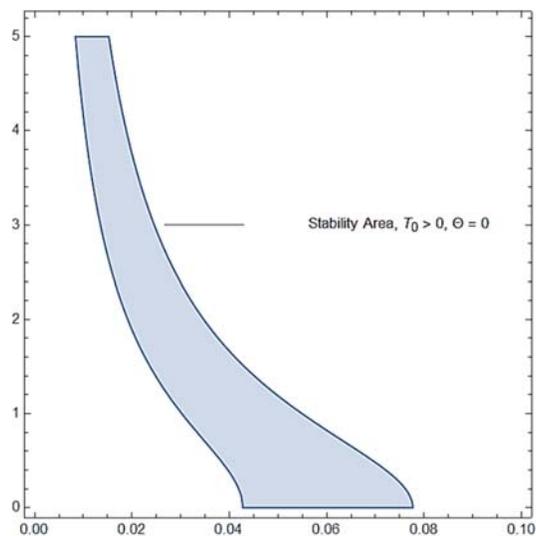


Рис.3. Явление бифуркации при  $T_0 > 0$ .

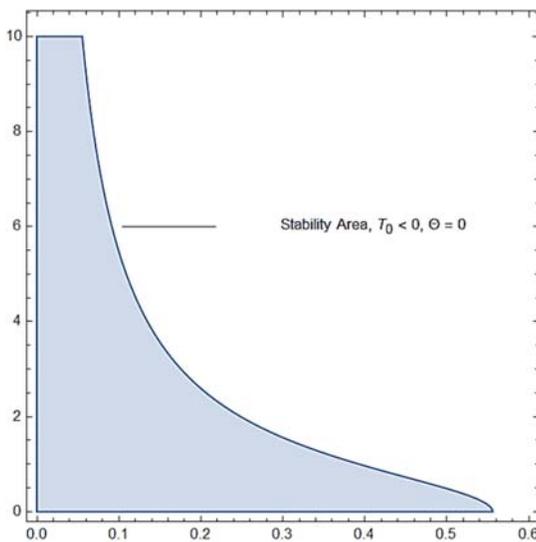


Рис.4. Область устойчивости при  $T_0 < 0$ .

Используются следующие значения параметров, взятые из литературы, см., например, [27]:  $\alpha=23,8 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ ;  $k=1200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ C})$ ;  $\lambda=210 \text{ Вт}/(\text{м} \text{ C})$ ;  $\mu=0,34$ ;  $a=1 \text{ м}$ ;  $h/a=1/100$ . На основе приведенных данных в Таблице 1 приведены значения критической скорости набегающего потока, при которых рассматриваемая система теряет устойчивость.

**2) Переменное температурное поле** ( $\bar{T} = 0$ ,  $\bar{\Theta} \neq 0$ ). В этом случае рассматриваются условия устойчивости (19) при  $T_0 = 0$ . Отметим, что условия не зависят от граничных условий.

$$\begin{aligned}
 & 1 + \gamma^2 + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus}) > 0 \\
 & \gamma^2 + \frac{4}{9} K^2 \bar{v}^2 + \left( \gamma^2 (\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus}) - \frac{2}{3} K \bar{v} (\delta_{12}^{\ominus} - \delta_{21}^{\ominus}) \right) \bar{\Theta} + \\
 & \quad + (\delta_{11}^{\ominus} \delta_{22}^{\ominus} - \delta_{12}^{\ominus} \delta_{21}^{\ominus}) \bar{\Theta}^2 > 0 \\
 & (\gamma^2 - 1)^2 - \frac{16}{9} K^2 \bar{v}^2 + 2\chi^2 (\gamma^2 + 1) + (4\delta_{12}^{\ominus} \delta_{21}^{\ominus} + (\delta_{22}^{\ominus} - \delta_{11}^{\ominus})^2) \bar{\Theta}^2 + \\
 & \quad + 2 \left( (\gamma^2 - 1)(\delta_{22}^{\ominus} - \delta_{11}^{\ominus}) + \frac{4}{3} K \bar{v} (\delta_{12}^{\ominus} - \delta_{21}^{\ominus}) + (\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus})^2 \chi^2 \right) \bar{\Theta} > 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

На основе уравнения (19) область устойчивости представлена на плоскости  $(v, \lambda)$  для тех же начальных данных предыдущего случая. Область устойчивости изображена на рис.5 при определенном  $\bar{\Theta} < 0$ , а рис.6 соответствует случаю  $\bar{\Theta} > 0$ .

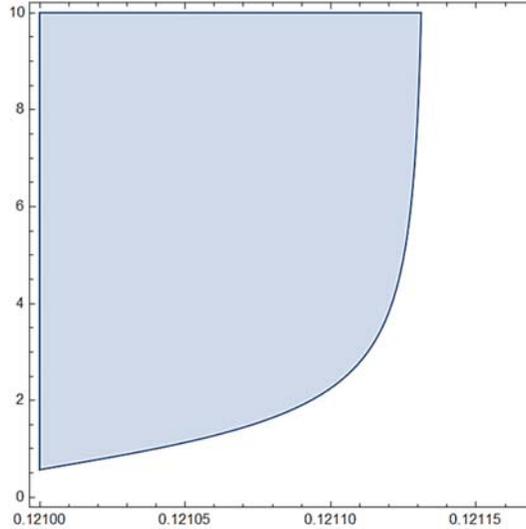


Рис.5. Область устойчивости при  $\bar{\Theta} < 0$ .

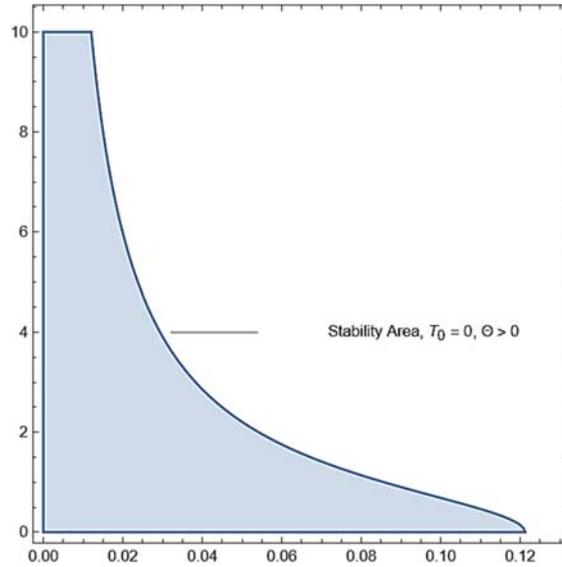


Рис.6. Область устойчивости при  $\Theta > 0$ .

Из рис.5 и 6 видно, что:

- а) если  $\Theta > 0$ , то магнитное поле заметно сужает область устойчивости;
- б) существует определенное отрицательное значение  $\Theta_*$ , при котором магнитное поле приводит к заметному увеличению области устойчивости;
- с) с уменьшением  $|\Theta|$  область устойчивости значительно уменьшается.

Критические значения скорости  $v_*$  для выбранных  $\lambda$  приведены в Таблице 2 для приведенных выше физикомеханических данных.

**Таблица 2.** Влияние магнитного поля на критическую скорость при переменном температурном поле

$\lambda \backslash \Theta, ^\circ C/m$	-500	-50	0	50	500
0	0.1204	0.1211	0.1211	0.1212	0.1221
1	0.0854	0.0856	0.0857	0.0857	0.0861
5	0.0238	0.02375	0.0238	0.0238	0.0238
10	0.0121	0.0121	0.0121	0.0121	0.0121

Таблица 2 показывает, что при переменном температурном поле эффект магнитного поля на критическую скорость значителен при малых значениях  $\lambda$ .

3) **Общий случай** ( $\bar{T} \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0$ ) Численный анализ для уравнения (19) также выполняется для данных случаев 1 и 2. Результаты изображены на рис.7 и показаны в таблице 3.

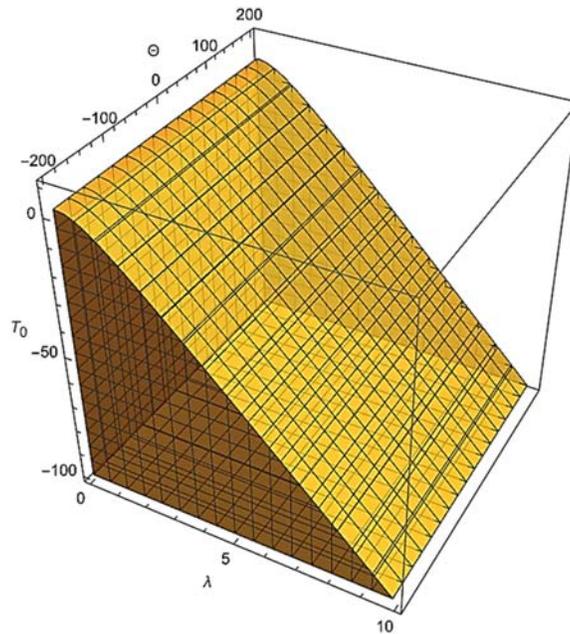


Рис.7. Область устойчивости при  $T_0 \neq 0$ ,  $\Theta \neq 0$ .

Рис.7 и таблица 3 демонстрируют обобщение результатов рассмотренных выше частных случаев и показывают, что если обе компоненты температурного поля отличны от нуля, то наблюдается более выраженное влияние магнитного поля на область устойчивости.

**Таблица 3.** Общий случай для  $h/a=1/100$ .

$\lambda$	$T_0 = -50,$ $\Theta = -500^0 C / м$	$T_0 = -50,$ $\Theta = -100^0 C / м$	$T_0 = -10,$ $\Theta = -100^0 C / м$	$T_0 = 5,$ $\Theta = 100^0 C / м$
0	0.5589	0.5564	0.2078	0.0778
1	0.3942	0.3932	0.1470	0.0550
5	0.1090	0.1090	0.0408	0.0152
10	0.0553	0.0553	0.0207	0.0077

**Выводы.** В данной работе показано, что под воздействием температурного поля в невозмущенном состоянии пластинка выпучивается вследствие неоднородности по толщине пластинки температурного поля. Выведена формула определения переменного температурного поля и вычислена функция, определяющая выпучивание пластинки. Выведены условия устойчивости рассмотренной аеро-термо-магнито-упругой системы и вычислены границы устойчивости. Показано, что присутствие магнитного поля оказывает существенное влияние на критическую скорость флаттерных колебаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-2С257.

## ЛИТЕРАТУРА

#

1. Ashley H. and Zartarian C. Piston Theory—A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, *J. Aeronaut. Sci.*, 1956, vol. 23, no. 6, pp. 1109–1118.
2. Bagdasaryan G.Y. An asymptotic method to study magnetoelastic oscillations of rectangular plates. *Mat. methods and phys.-mech. fields*, 1986, N24, p.72-75.
3. Bagdasaryan G.Y. Nonlinear flutter equations for thin plates in a magnetic field. *Interuniversity collection of scientific papers, Mechanics*, Yerevan: YSU Publishing House, 1982, issue 2, p.22-30.
4. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E. Frulla G., Marzocca P. Nonlinear LCO “amplitude–frequency” characteristics for plates fluttering at supersonic speeds. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 77, December 2015, Pages 51–60.
5. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Danoyan E.H., Melikyan K. Influence of boundary conditions on the aero-thermo-elastic stability of a closed cylindrical shell. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 1474 (2020) 012008; doi:10.1088/1742-6596/1474/1/012008
6. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Melikyan K.V., Marzocca P. Thermoelastic non-linear flutter oscillations of rectangular plate. *Journal of Thermal stresses*, 2021, vol.44(6), pp. 731-754.
7. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Panteleev A., Severina N.S. Nonlinear flutter response of cylindrical shell in thermal field and supersonic gas flow. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020, 927(1), 012022; doi:10.1088/1757-899X/927/1/012022.
8. Baghdasaryan G., Panteleev A.V., Mikilyan M.A. Mathematical Modeling of the Problem of Magneto-Aero-Elastic Stability of Rectangular Plate. *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics*, Springer Singapore, 2022, pp 13–27. [https://doi.org/10.1007/978-981-16-8926-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-981-16-8926-0_2)
9. Baghdasaryan G.Y., Belubekyan M.V. Vibrations and stability of cylindrical shell in conductive gas flow, magnetic field is being present. 1966, p.120-125.
10. Baghdasaryan G., Mikilyan M. *Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells*. Springer, 2016, -286p.
11. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Marzocca, P. Supersonic flutter characteristics of dielectric rectangular plate: The effects of magneto-aero-hydrodynamic interactions. *Journal of Fluids and Structures*, 2023, 118, 103856, <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2023.103856>
12. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. *Magnetoelastic Vibrations and Stability of Magnetically Active Plates and Shells*. Springer, 2024.
13. Bolotin V.V. *Non-conservative problems of the theory of elastic stability*. – Moscow, Fizmatgiz, 1961. -339 p.
14. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Analysis of Magnetoplasmdynamic Interaction in the Boundary Layer of a Hypersonic Vehicle”, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 41, No. 4, 2004.
15. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Magnetohydrodynamics Interaction in the Shock Layer of a Wedge in a Hypersonic Flow”, *IEEE Transaction on Plasma Science*, vol. 34, no. 5, October 2006.
16. Chebotaryev N.V., Meyman N.S. Gauss-Hurwitz problem for polynomials and integer-valued functions. *Proc. AN SSSR*, 1949.

17. Cristofolini A. et al., "Experimental Investigation on the MHD Interaction around a Sharp Cone in an Ionized Argon Flow", AIAA-2006-3075, 37th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference, San Francisco, California, June 2006
18. Dowell. E.H. "Nonlinear oscillations of a fluttering plate." AIAA Journal, Vol. 4, No. 7, 1966, pp. 1267-1275. DOI: 10.2514/3.3658.
19. Dowell. E.H. "Nonlinear oscillations of a fluttering plate. II." AIAA Journal, Vol. 5, No. 10, 1967, pp. 1856-1862. doi:10.2514/3.4316.
20. Mikilyan M.A. Nature of Supersonic Flutter of Aero-Magneto-Elastic System at Pre-Critical Flowing Speeds. IEEE Aerospace Conference Proceedings, 2024, p.529-537, DOI:10.1109/aero58975.2024.10521224
21. Mikilyan M.A. Thermoelastic Response of Closed Cylindrical Shells in a Supersonic Gas Flow. Aerospace 2020, 7(8), 103; <https://doi.org/10.3390/aerospace7080103>
22. Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. The effects of magnetic field on supersonic flutter characteristics of dielectric plate: Dependence amplitude-speed. Journal of Fluids and Structures, 2024, vol. 128, 104140, DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2024.104140.
23. Miles J. W., Supersonic flutter of a cylindrical shell, Journal of Aeronautical Science Vol. 24, No. 2, 1957; Vol. 25, No. 5, 1958, pp.107-118.
24. Микилян М.А., Амбарцумян А.Г., Варданян И.А. Влияние магнитного поля на критическую скорость сверхзвукового флаттера диэлектрической пластины. Известия НАН РА, Механика, т.77 (2), 2024, стр.47-67, DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.2-47
25. Panteleev A.V., Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. Stability of a dielectric rectangular plate in a longitudinal magnetic field in the presence of a supersonic flow field. Aerospace Systems, 2023, 6, 605–611. DOI:10.1007/s42401-023-00217-6
26. Resler, R. L., and Sears, W. R., "The Prospects for Magneto-Aerodynamics," Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 4, 1958, pp. 235-245, 258.
27. Russell R. Zerodur. OPTI521, 2011.
28. Vlasov V. Z. The General Theory of Shells, Gostekhizdat, Moscow, 1949.
29. Volmir S. Non-linear Dynamics of Plates and Shells, Nauka, Moscow, 1972.

**Сведения об авторах:**

**Микилян Марине Александровна** – кандидат физ.-мат. наук., доцент, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА  
Phone: (+374 91) 191129; E-mail: mikilyan@sci.am

**Тоноян Ваграм Умршатович** – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник научного проекта № 21Т-2С257 Института механики НАН РА  
Phone: (+374 95) 555076; E-mail: var10email@gmail.com

**Cestino Enrico** – Associate Professor (L.240), Department of Mechanical and Aerospace Engineering (DIMEAS), POLITO, Turin, Italy  
Phone: +39 0110906818 / 6818; E-mail: enrico.cestino@polito.it

Поступила в редакцию 07.06.2025