

СВЕРХЗВУКОВАЯ ЛОКАЛИЗОВАННАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ ШИРОКОЙ ПАНЕЛИ, НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: РАСТЯНУТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА И СЖАТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мартirosян С. Р.

Ключевые слова: достаточно широкая прямоугольная пластинка, полубесконечная пластина–полоса, сверхзвуковое обтекание, первоначальные силы растяжения и сжатия, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, аэроупругая устойчивость, локализованная дивергенция, аналитическое решение

S. R. Martirosyan

Supersonic localized divergence of a wide panel loaded in two directions: stretched along the gas flow and compressed in the perpendicular direction

Keywords: sufficiently wide rectangular plate, semi-infinite plate-strip, initial tensile and compressive forces, concentrated inertial masses and moments of rotation, supersonic flow, aeroelastic stability, localized divergence, analytical solution method

In the article, in a linear formulation, we study the influence of the initial stressed state of a sufficiently wide rectangular elastic plate, loaded in two directions: stretched along the supersonic gas flow and compressed in the perpendicular direction, on the stability of the dynamic system “plate-flow” under the assumption that at the free edge plates there are concentrated inertial masses and moments of rotation. An analytical solution to the stability problem is found. The possibility of loss of stability of the unperturbed equilibrium state of the system only in the form of localized divergence is shown. An accurate assessment of the influence of the ratio of initial tensile and compressive forces on the stability threshold of the “plate-flow” system is given, with the aim of subsequent analysis of the possibility of controlling it.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային զազի հոսքի ուղղությամբ նախնական ձգված և միաժամանակ սեղմված ուղղահայած ուղղությամբ բավականին լայն սալի տեղայնացված դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ բավականին լայն ուղղանկյուն սալ, կիսաանվերջ սալ–շերտ, ձգող և սեղմող ուժեր, գերձայնային շրջհոսում, աերոառաձգական կայունություն, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, տեղայնացված դիվերգենցիա, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է նախնական ձգված գերձայնային զազի հոսքի ուղղությամբ և միաժամանակ սեղմված իրեն ուղղահայած ուղղությամբ լայն ուղղանկյուն սալի լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ – հոսք» գծային դինամիկ համակարգի կայունության շեմի վրա, սալի ազատ եզրին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայությանը: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ համակարգը կորցնում է միայն ստատիկ կայունությունը՝ տեղայնացված դիվերգենցիայի տեսքով: Գտնված են կրիտիկական արագությունները: Գնահատված է ազդող ուժերի հարաբերակցությունը համակարգի չխտորված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной упругой пластинки, нагруженной по двум направлениям: растянутой по сверхзвуковому потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости

динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что поток набегаёт на свободный край, на котором приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости. Показана возможность потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток» в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки. Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных растягивающих и сжимающих сил на порог устойчивости системы, с целью последующего анализа возможности управления им.

Введение. Теоретические исследования задач аэроупругой устойчивости позволяют выявить различные виды потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток», обусловленные характером деформаций. А также, позволяют дать оценку влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им [1–4].

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния упругой достаточно широкой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при предположениях. Пластика нагружена первоначально по двум направлениям статическими продольными силами – силами растяжения и сжатия, направленными, соответственно, по потоку газа и в перпендикулярном направлении. Сверхзвуковой поток набегаёт на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы «пластинка–поток». Получена формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа.

Исследована граница области устойчивости. Установлено, что при малых значениях относительной толщины достаточно широкой пластинки невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» теряет только статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции панели в окрестности её свободного края, подобно системе «полубесконечная пластина–полоса – поток». При больших значениях относительной толщины пластинки – оно является устойчивым на всём промежутке сверхзвуковых скоростей.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции в предположении, что в момент «выпучивания» в пластинке возникают только напряжения изгиба. Показана существенная зависимость критической скорости локализованной дивергенции от отношения первоначальных усилий и от коэффициента Пуассона.

Дана точная оценка влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости системы.

Данная статья является продолжением работ [18, 19].

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка ($ab^{-1} \geq 1.96$), которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$ [19]. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённого равновесного состояния пластинки, а ось Oz перпендикулярна к

пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край пластинки $x=0$ – свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c , интенсивность которых намного превосходит интенсивность распределённой массы пластинки [9].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих $N_x = 2h\sigma_x$ и сжимающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, распределённых равномерно по краям пластинки $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ соответственно, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности пластинки и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y, t)$ [1].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории»: $\delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$, где

a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [7, 8]. Прогибы $w = w(x, y, t)$ предполагаются малыми относительно толщины пластинки $2h$ [1, 2].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками δp , растягивающими σ_x и сжимающими σ_y усилиями в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами I_c поворота, приложенными вдоль её свободного края $x=0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{pr.}$ и $(\sigma_y)_{cr.}$, где $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [10]; $(\sigma_y)_{cr.}$ – усилие, которые могут произвести «выпучивание» пластинки в отсутствии обтекания ($V=0$) при условии $\sigma_x=0$ [1, 15].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [7, 8] в предположении малости интенсивности $m \partial^2 w / \partial t^2$ распределённой массы

пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c \partial^2 w / \partial t^2$ и $I_c \partial^2 w / \partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1,2,18,19]:

$$D \Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1,2,9,14,18,19]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и} \quad y = b; \quad (1.3)$$

ν – коэффициент Пуассона.

Задача устойчивости динамической системы (1.1)–(1.3) состоит:

1) в нахождении критической скорости V_{cr} – наименьшей скорости потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m.} \approx 33.85; \quad (1.4)$$

приводящей к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.}, \quad \sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}, \quad (1.5)$$

когда все параметры системы заданы, кроме скорости потока V ;

2) в определении относительной толщины пластинки $(2hb^{-1})_{\min}$, которая обеспечивала бы её прочность по критерию устойчивости колебаний, когда форма, материал пластинки и все параметры потока известны.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) по Ляпунову [11] сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.3) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок [1, 2, 14 – 16]:

$$\gamma = ab^{-1} \in [1.96; \infty), \quad (1.6)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

Согласно обозначению (1.6) значению $\gamma = \infty$ соответствует полубесконечная пластина–полоса, как один из предельных случаев прямоугольной пластинки.

В работе [14] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.3) для всех значений $\gamma \in [0, \infty]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки ($\sigma_x = \sigma_y = 0$). В работе [15] исследована исходная задача устойчивости при условии $\sigma_x = 0, \sigma_y \neq 0$. Показано, что сжимающие усилия σ_y приводят к понижению устойчивости системы, в отличие от случая, когда $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0$ [16]: растягивающие усилия σ_x приводят к существенному повышению устойчивости системы. В работе [17] получено решение задачи (1.1) – (1.3) для всех $\gamma \in [0, \infty]$ в статической постановке по методу Эйлера. Показано, что возмущённое движение системы «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от её существенных параметров. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Показано, что на границу между областями статической неустойчивости влияют в основном растягивающие усилия σ_x и коэффициент Пуассона ν , а влияние сжимающих усилий σ_y исчезающе мало.

В работах [18] и [19] получено решение задачи (1.1) – (1.3) при всех $\gamma \in [0; 0.33]$ и $\gamma \in [0.33; 1.96]$ соответственно. Показано, что несмотря на наличие сжимающих усилий σ_y , растягивающие усилия σ_x приводят к существенному повышению устойчивости системы, возрастающей с ростом параметра γ .

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.3). Аналогично, как и в [18, 19], сведём задачу устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде суммы гармонических колебаний:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re} \lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re} \lambda > 0$) [11, 14]. Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re} \lambda = 0$) [1, 2, 11, 14].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [17– 19]:

$$r^4 - 2 \cdot (1 + \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1 - \beta_y^2) = 0, \quad (2.2)$$

где α_n^3 – параметр, определяющий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3}, a_0^2 \rho_0 M_{2\cos m} D^{-1} \mu_n^{-3}), \alpha_n^3 > 0; \quad (2.3)$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты, характеризующие усилия σ_x и σ_y соответственно, определяющие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{pr}, (\beta_x^2)_{pr} = h(\sigma_x)_{pr} D^{-1} \mu_n^{-2}; \quad (2.4)$$

$$\beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2 h \sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_y^2)_{cr}, (\beta_y^2)_{cr} = 2 h(\sigma_y)_{cr} D^{-1} \mu_n^{-2} \text{ (табл. 1);}$$

согласно условиям (1.4), (1.5).

В соответствии с известным методом решения алгебраического уравнения четвёртой степени – методом Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде группы двух квадратных уравнений [17–19]:

$$(r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}) = 0, \quad (2.5)$$

$$(r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}) = 0; \quad (2.6)$$

где параметр $q = q(V) \in R$, характеризующий скорость потока газа V , единственный действительный корень кубического уравнения:

$$8 \cdot (q+1+\beta_x^2)(q^2 - 1 + \beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0, \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} > 0; \quad (2.7)$$

в силу положительности его дискриминанта.

Учитывая условие (1.4), имеем

$$q = q(V) \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})) \subseteq (q(a_0 M_0), q(a_0 M_{2\cos m})). \quad (2.8)$$

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), переписанного в виде (2.5) и (2.6), можно показать, что [17–19]

$$q_0 = \left(- (1 + \beta_x^2) + 2 \sqrt{(1 + \beta_x^2)^2 + 3(1 - \beta_y^2)} \right) / 3 \text{ (табл.2)} \quad (2.9)$$

$$\text{при } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr} \text{ и } \beta_y^2 \in \left[0; \left(0.25(1 + \beta_x^2)^2 + 1 \right) \right) \cap \left[0; (\beta_y^2)_{cr} \right), \quad (2.10)$$

в силу очевидного условия $q > 0$ и известного требования к корням r_i уравнения (2.2) [1, 2, 14]:

$$r_1 < 0, r_2 < 0, r_{3,4} = \alpha \pm i\beta \in W, \alpha > 0. \quad (2.11)$$

Корни r_i характеристического уравнения (2.2), как решения квадратных уравнений (2.5) и (2.6), легко находятся и определяются выражениями [17–19]:

$$r_{1,2} = -0.5 \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}, r_1 < 0, r_2 < 0; \quad (2.12)$$

$$r_{3,4} = 0.5 \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}, r_{3,4} \in W. \quad (2.13)$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента β_y напряжения σ_y :
 $(\beta_y^2)_{cr} = (\beta_y^2)_{cr}(n, \gamma, v)$ – решения дисперсионных уравнений исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания ($V = 0$) при $n = 1$, $\beta_x^2 = 0$ и $m_c = 0, I_c = 0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} [1, 15]:
 для $\gamma < 80$

$$F_1(n, \gamma, v, \beta_y^2) = \left(\sqrt{1 + \beta_y} (1 - \beta_y - v)^2 + \sqrt{1 - \beta_y} (1 + \beta_y - v)^2 \right) sh \left(\pi n \gamma (\sqrt{1 + \beta_y} - \sqrt{1 - \beta_y}) \right) - \left(\sqrt{1 + \beta_y} (1 - \beta_y - v)^2 - \sqrt{1 - \beta_y} (1 + \beta_y - v)^2 \right) sh \left(\pi n \gamma (\sqrt{1 + \beta_y} + \sqrt{1 - \beta_y}) \right) = 0$$

когда $\beta_y^2 < 1$;

$$F_2(n, \gamma, v) = (2 - v^2) sh(\sqrt{2} \pi n \gamma) - v^2 \sqrt{2} \pi n \gamma \cdot ch(\sqrt{2} \pi n \gamma) = 0,$$

когда $\beta_y^2 = 1$;

$$F_3(n, \gamma, v, \beta_y^2) = \sqrt{\beta_y - 1} (\beta_y + 1 - v)^2 sh(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y + 1}) \cos(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y - 1}) - \sqrt{\beta_y + 1} (\beta_y - 1 + v)^2 ch(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y + 1}) \sin(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y - 1}) = 0, \text{ когда } \beta_y^2 > 1;$$

для $\gamma \geq \gamma_{cr.} \approx 80$

$$F_4 = F_4(v, \beta_y^2) = \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2} \right)^2 - 2v \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2} \right) - (1 - v)^2 = 0, \text{ когда } \beta_y^2 < 1.$$

Заметим, что $\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{cr}} F_1(n, \gamma, v, \beta_y^2) = F_4(v, \beta_y^2)$ при всех n , когда $\gamma \geq \gamma_{cr.} \approx 80$.

Иными словами, начиная с значения $\gamma = \gamma_{cr.} \approx 80$, возмущённое состояние равновесия пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$) теряет устойчивость в виде локализованной неустойчивости в окрестности её свободного края при всех допустимых значениях остальных параметров.

Из данных таблицы 2 следует, что $q_0 = q_0(\beta_x^2, \beta_y^2)$ – монотонно возрастающая функция от коэффициента напряжения β_x^2 , а от коэффициента β_y^2 – монотонно убывающая функция, определяемых выражениями (2.4) соответственно.

В работе [19] показано, что при всех $\gamma \in [1.96, \infty)$ и при всех допустимых значениях остальных параметров возмущённое состояние равновесия динамической системы «пластинка–поток» при скоростях потока $V \geq V_{locdiv}$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки,

подобно системе с полубесконечной пластиной–полосой ($\gamma = \infty$): эйлерова и неэйлерова дивергенция панели, а также, панельный флаттер отсутствуют.

Таблица 1. Значения $(\beta_y^2)_{cr} = (\beta_y^2)_{cr}(n, \gamma, \nu)$ при $n = 1, \beta_x^2 = 0, m_c = 0; I_c = 0$.

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
1.96	1.125	1.105	1.092	1.067	1.004
2.00	1.120	1.101	1.089	1.064	1.0015
2.87	1.057	1.045	1.037	1.020	1.0
4.226	1.026	1.018	1.0123	1.0	0.9605
5.00	1.018	1.0115	1.0067	0.9956	0.9586
7.20	1.0084	1.0036	1.0	0.9910	0.9573
11.08	1.0032	1.0	0.9971	0.9892	0.9571
20.0	1.0008	0.99860	0.9962	0.9892	0.9571
50.7	1.0	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571
≥ 80.0	0.99992	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571

Таблица 2. Значения $q_0 = q_0(\beta_x^2, \beta_y^2)$ при $n = 1$.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0.0	0.3	0.5	0.8	1.0	1,5.
0.0	1.000	1.010	1.027	1.065	1.097	1.194
0.1	0.949	0.963	0.983	1.025	1.059	1.161
0.3	0.840	0.864	0.890	0.940	0.980	1.093
0.5	0.721	0.757	0.791	0.851	0.897	1.022
0.7	0.586	0.640	0.683	0.756	0.809	0.949

А тогда, в соответствии с условием затухания колебаний на краю $x = a$ общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда [5, 6, 13]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \gamma \in [1.96; \infty); \quad (2.14)$$

где $r_k, k = 1, 2$ определены выражениями (2.12).

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 D(a_0 \rho_0 b^3)^{-1}, \quad \gamma \in [1.96; \infty]; \quad (2.15)$$

позволяющую по известному значению параметра $q = q(n, \beta_x^2, \beta_y^2, \nu)$ определить приведённую скорость потока газа $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$.

Так как невозмущённое состояние равновесия системы в случае достаточно широких пластинок $\gamma \in [1.96; \infty]$ устойчиво вблизи $a_0 \sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) [19], то очевидно, что

$$V(q) \in (V(q_0), a_0 M_{2\cos m}) \subset (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}). \quad (2.16)$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 / (12(1 - \nu^2))$ отсюда следует [15–17]:

$$V(q) D^{-1} (a_0 \rho_0 b^3) \in (V(q_0) D^{-1} (a_0 \rho_0 b^3), a_0 M_{2\cos m} \Psi) \subset (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi, \\ \Psi = 12(1 - \nu^2) a_0 \rho_0 E^{-1} (2hb^{-1})^{-3}, \gamma \in [1.96; \infty]. \quad (2.17)$$

Подставляя значения коэффициента Пуассона ν и относительной толщины пластинки $2hb^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в выражения (2.17), получаем интервалы $d(\nu, 2hb^{-1}) = (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi$ допустимых значений приведённой скорости потока $V(q) D^{-1} (a_0 \rho_0 b^3)$, представленные для стальных пластинок в таблице 3.

Таблица 3.

$\nu \backslash 2hb^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.8, 1311.7)	(52.0, 1245.2)	(50.5, 1209.0)	(47.7, 1141.6)	(41.6, 996.3)
0.007	(34.5, 811.1)	(32.7, 769.4)	(32.0, 753.4)	(30.0, 705.3)	(26.2, 615.5)
0.008	(23.1, 544.3)	(22.0, 516.4)	(21.5, 505.6)	(20.1, 473.3)	(17.6, 413.1)
0.009	(16.2, 381.8)	(15.4, 362.1)	(15.1, 354.6)	(14.1, 332.0)	(12.3, 289.7)
0.010	(11.8, 283.5)	(11.2, 269.1)	(10.9, 261.3)	(10.3, 246.7)	(9.0, 215.3)
0.011	(8.9, 209.4)	(8.4, 198.7)	(8.1, 190.4)	(7.74, 182.1)	(6.75, 158.9)
0.012	(6.85, 164.0)	(6.5, 155.7)	(6.3, 151.2)	(5.96, 142.7)	(5.2, 124.6)
0.013	(5.39, 126.9)	(5.11, 120.34)	(5.0, 117.84)	(4.69, 110.32)	(4.09, 96.3)
0.014	(4.3, 101.5)	(4.09, 96.24)	(4.0, 94.24)	(3.75, 88.22)	(3.27, 77.0)
0.015	(3.5, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

3. Достаточный признак потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) для $\gamma \in [1.96; \infty]$.

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.14) в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к характеристическому определителю – биквадратному уравнению относительно собственного значения λ :

$$\tilde{F}(\lambda) = \chi_n \delta_n \tilde{A}_0 \lambda^4 + (\chi_n \tilde{A}_1 + \delta_n \tilde{A}_2) \lambda^2 + \tilde{A}_3 = 0, \gamma \in [1.96; \infty], \quad (3.1)$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \delta_n > 0, \chi_n > 0; \quad (3.2)$$

δ_n и χ_n – приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края пластинки;

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 &= 1, \quad \tilde{A}_1 = \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot (q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}), \quad \tilde{A}_2 = \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}, \\ \tilde{A}_3 &= (q+1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2})^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 + 2\beta_x^2(q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Отсюда очевидно, что

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 > 0, \tilde{A}_1 > 0, \tilde{A}_2 > 0 \text{ при всех } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}, \\ \beta_y^2 \in \left[0; \left(0.25(1+\beta_x^2) + 1\right)\right) \cap \left[0; (\beta_y^2)_{cr.}\right) \text{ и } q \in (q_0, q(a_0 M_{2 \cos m})).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n)^2 \cdot (m_c b^2)^{-1}, \quad k_n > 0, \quad (3.5)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2), (3.4) и (3.5), переписывается в виде

$$\lambda^4 + (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) \chi_n^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \tilde{A}_3 = 0, \quad (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) > 0. \quad (3.6)$$

Легко показать, что дискриминант уравнения (3.6)

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(q, n, v, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n) = (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)^2 - 4k_n \tilde{A}_0 \tilde{A}_3 > 0 \quad (3.7)$$

при всех допустимых значениях параметров системы.

В самом деле, подставляя в формулу (3.7) выражения (3.3), после несложных преобразований получаем

$$\tilde{\Delta} = 2(q+1+\beta_x^2) \left(k_n (q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}) - 1 \right)^2 + 4k_n (2(q+1)v + (1-v)^2) > 0.$$

Соответственно, для всех $\gamma \in [1.96; \infty]$ анализ устойчивости возмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» будет сводиться к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.6) при условиях $(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) > 0$ и $\tilde{\Delta} > 0$, определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров $\mathfrak{V} = \{q(V), n, v, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n\}$. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Здесь, также, как и в работах [18 и 19], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\mathfrak{V}$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\mathfrak{V}_0(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0, \tilde{A}_3 > 0, \tilde{\Delta} > 0)$ и области неустойчивости: $\mathfrak{V}_1(\tilde{A}_3 < 0, \tilde{\Delta} > 0)$, $\mathfrak{V}_2(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0, \tilde{A}_3 > 0, \tilde{\Delta} > 0)$ и $\mathfrak{V}_3(\tilde{A}_3 > 0, \tilde{\Delta} < 0)$.

где $\tilde{A}_i, i=1,2,3, k_n$ и $\tilde{\Delta}$ – определены выражениями (3.3), (3.5) и (3.7).

Учитывая условия $(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) > 0$ и $\tilde{\Delta} > 0$, отсюда очевидно, что границей области устойчивости $\mathfrak{T}_0$ системы для всех $\gamma \in [1.96; \infty]$ является гиперповерхность $\tilde{A}_3 = 0$, которая, в соответствии с выражением (3.3), описывается соотношением

$$\left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 + 2\beta_x^2 \left(q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) = 0. \quad (4.1)$$

На гиперповерхности (4.1) определитель (3.6) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2: уравнение (4.1), определяет границу «апериодической устойчивости», при переходе через которую невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) при скоростях потока газа $V \geq V_{locdiv} = V(q_{locdiv})$ для всех $\gamma \in [1.96; \infty]$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

Критические скорости $V_{locdiv} = V_{locdiv}(n, v, \beta_x^2, \beta_y^2)$ потока газа разграничивают область устойчивости $\mathfrak{T}_0$ и область локализованной дивергенции $\mathfrak{T}_{locdiv}$ [19]. При скоростях потока $V \geq V_{locdiv}$ происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k , вызывающий плавное изменение характера невозмущённого состояния равновесия системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции: прогибы пластинки локализованы в окрестности её свободного края $x = 0$. Граница «апериодической устойчивости» (4.1) является «безопасной» в смысле Н.Н. Баутина [12]: малое превышение критической скорости локализованной дивергенции соответствует малым дивергентным деформациям, локализованным в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

А также, из уравнения (4.1) очевидно, что его решение $q_{locdiv} \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm}))$ не зависит от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$. Соответственно, приведённые значения критической скорости локализованной дивергенции $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$, определяемые подстановкой единственного корня $q_{locdiv} \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm}))$ уравнения (4.1) в формулу (2.15), также не зависят от $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, а зависят лишь от параметров n, v, β_x^2 и β_y^2 . Из независимости функции $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$ следует, что коэффициенты χ_n и δ_n , характеризующие сосредоточенные инерционные моменты поворота I_c и массы m_c соответственно, влияют лишь только на показатель экспоненты

собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$ [13, 14].

Следует отметить, что уравнение (4.1) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании исходной задачи в статической постановке по методу Эйлера.

Таким образом, невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) в случае достаточно широких прямоугольных пластинок $\gamma \in [1.96; \infty)$ и полубесконечной пластины–полосы $\gamma = \infty$ теряет только лишь статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$, в отличие от удлинённых прямоугольных пластинок [18] и пластинок умеренных размеров [19].

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2)\} \in \mathfrak{I}$, параметризованных в пространстве $\mathfrak{I}$ надлежащим образом.

Таблица 4. Значения $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ при $n = 1$, $\nu = 0.125; 0.3; 0.5$.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0.0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5
0.0	296.222 143.905 79.668	367.225 184.005 107.391	413.345 210.785 126.692	483.020 250.895 153.467	528.651 276.964 176.110	574.074 303.485 195.321	641.382 343.018 223.981
0.1	274.189 132.801 72.771	341.179 170.236 99.259	384.762 195.945 118.186	449.573 233.386 145.277	492.573 257.806 163.292	535.338 288.671 181.591	598.480 320.360 208.492
0.2	252.075 121.059 65.578	314.376 156.899 90.589	355.330 180.426 107.914	415.362 215.322 133.529	455.910 238.871 150.057	495.409 262.700 167.308	554.396 296.830 192.684
0.3	229.370 109.651 58.233	296.760 142.591 81.521	324.512 164.150 97.252	380.458 195.920 121.041	417.283 219.786 136.653	453.433 240.358 152.484	507.385 272.213 175.944
0.4	205.655 97.886 50.535	257.897 127.919 72.237	296.581 145.717 83.375	343.492 177.246 108.090	376.583 197.140 122.766	410.738 217.069 137.075	460.344 246.490 158.649
0.5	181.210 85.407 42.625	228.296 112.287 61.782	259.040 130.397 75.525	304.794 157.201 94.452	334.477 174.810 107.819	365.136 192.807 120.803	409.839 219.385 140.222
0.6	155.448 72.305 34.249	196.328 96.046 51.756	223.615 111.232 62.725	263.831 135.225 75.487	296.289 144.496 80.067	316.744 166.941 103.334	355.950 190.328 120.654
0.7	127.687 58.411 26.703	132.212 78.558 40.375	185.496 92.078 50.241	219.357 112.112 60.958	241.842 125.367 67.958	264.804 134.303 72.521	296.268 143.481 79.359

В этом случае так же, как и в работах [13– 17], критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является возрастающей функцией от числа полуволн n : её наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Подставляя решение $q_{loc.div.} \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm}))$ уравнения (4.1) в формулу (2.15), получаем значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$, представленные в таблице 4 для некоторых допустимых значений параметров системы β_x^2 , β_y^2 и ν при $n = 1$.

Из данных таблицы 4 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ является монотонно возрастающей функцией от коэффициента напряжения β_x^2 , а от β_y^2 и коэффициента Пуассона ν – убывающей функцией: на промежутке $\beta_x^2 \in [0; 1.5]$ возрастает, примерно, в 2 – 4 раза; на промежутке $\beta_y^2 \in [0; 0.7]$ убывает, примерно, в 2 – 3 раза; а в пластинах из материалов с большим значением ν меньше в 2.86 – 4.8 раз.

Из сопоставления данных таблиц 1, 3 и 3, 4 очевидно, что при обтекании происходит «падение» критического значения $(\beta_y^2)_{cr}$ коэффициента напряжения β_y^2 , примерно, в 1.33 – 1.56 раз, существенно зависящим от коэффициента Пуассона ν : с ростом ν «падение» уменьшается; невозмущённое состояние равновесия системы является устойчивым вблизи $a_0 \sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) при всех допустимых значениях её «существенных» параметров, в частности, для стальных пластинок относительной толщины $2h^{-1}b \in (0.006, 0.015]$.

Для всех $\gamma \geq 1.96$ при определённом соотношении растягивающих сил N_x и сил сжатия N_y , имеет место эффект их «взаимной компенсации»: критическая скорость $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ одна и та же, что и при их отсутствии ($N_x = N_y = 0$) (табл.5).

Таблица 5.

β_{xc}^2	0.1	0.2	0.3	0.5	0.65	1.0	1.5
β_{yc}^2	0.1	0.134	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\varphi_c = \beta_{xc}^2 \cdot (\beta_{yc}^2)^{-1}$	1	1	1	1.25	1.3	1.6	2.14

При $\varphi \geq \varphi_c$ на порог устойчивости системы оказывают влияние преимущественно растягивающие силы N_x , с ростом которых устойчивость системы

повышается, и, наоборот, при $\varphi < \varphi_c$ – сжимающие силы N_y , приводящие в основном к понижению устойчивости системы.

6. Влияние относительной толщины пластинки на порог устойчивости системы «пластинка–поток».

Из соотношения (2.17) легко можно получить формулу, связывающую относительную толщину пластинки $2hb^{-1}$ с приведенной скоростью потока газа. В частности, имеем [20]:

$$\left(2hb^{-1}\right)_{\min}^3 = a_0 M_{2\cos m} \cdot \left(12(1-v^2)a_0\rho_0 E^{-1}\right) \cdot \left(V_{locdiv} D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)\right)^{-1}. \quad (6.1)$$

Подставляя значения: $a_0 = 331$ м/сек, $\rho_0 = 1.29$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^{11}$ н/м², $M_{2\cos m} = 33.3$ и $V_{locdiv} D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (табл.4) в формулу (6.1), находим минимальную относительную толщину $\left(2hb^{-1}\right)_{\min}$ широкой стальной пластинки, начиная с которой при всех $2hb^{-1} \geq \left(2hb^{-1}\right)_{\min}$ невозмущенное состояние равновесия системы устойчиво на всём промежутке сверхзвуковых скоростей (1.4) при всех допустимых значениях остальных параметров (табл.6).

Таблица 6. Значения $\left(2hb^{-1}\right)_{\min}$ при $n = 1$, $v = 0.125; 0.3; 0.5$.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0.0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5
0.0	0.00978 0.01217 0.01384	0.00911 0.01121 0.01255	0.00876 0.01071 0.01187	0.00831 0.01011 0.01113	0.00807 0.00978 0.01063	0.00785 0.00946 0.01027	0.00757 0.00912 0.00981
0.1	0.01004 0.01250 0.01427	0.00634 0.01151 0.01287	0.00897 0.01097 0.01214	0.00852 0.01032 0.01133	0.00826 0.01001 0.01092	0.00803 0.00964 0.01052	0.00774 0.00931 0.01005
0.2	0.01330 0.01288 0.01477	0.00959 0.01182 0.01326	0.00921 0.01128 0.01275	0.00874 0.01063 0.01166	0.00848 0.01027 0.01121	0.00824 0.00995 0.01082	0.00794 0.00953 0.01032
0.3	0.01066 0.01332 —	0.00988 0.01221 0.01374	0.00949 0.01165 0.01295	0.00901 0.01096 0.01244	0.00873 0.01057 0.01156	0.00849 0.01025 0.01115	0.00818 0.00984 0.01063
0.4	0.01106 0.01383 —	0.01027 0.01285 0.01431	0.00983 0.01206 0.01304	0.00931 0.01135 0.01251	0.00903 0.01095 0.01198	0.00878 0.01061 0.01156	0.00845 0.01017 0.01101
0.5	0.01153 0.01447 —	0.01067 0.01321 —	0.01023 0.01257 0.01410	0.00969 0.01181 0.01309	0.00944 0.01143 0.01252	0.00913 0.01103 0.01205	0.00878 0.01057 0.01148
0.6	0.01213 — —	0.01122 0.01393 —	0.01075 0.01324 —	0.01017 0.01242 0.01380	0.00985 0.01201 0.01320	0.00957 0.01157 0.01274	0.00919 0.01108 0.01207
0.7	0.01294 — —	0.01280 0.01488 —	0.01144 0.01412 —	0.01082 0.01322 0.01483	0.01047 0.01273 0.01413	0.01016 0.01232 0.01354	0.00977 0.01178 0.01295

Из данных таблицы 6 следует, в частности, что, начиная с значения $\beta_x^2 = 0.8$, невозмущённое состояние равновесия системы устойчиво при всех $\beta_y^2 \in [0; 0.7]$.

Соответственно, цепочки переходов состояний системы будут вида [18, 19]:

$$\text{когда } 2hb^{-1} < (2hb^{-1})_{\min} \\ \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{loc, div}} \mathfrak{T}_{locdiv} \quad (6.2)$$

при всех $\beta_x^2 \in [0; 1.5]$ и $\beta_y^2 \in [0; 0.7]$;

$$\mathfrak{T}_0, \text{ когда } 2hb^{-1} \geq (2hb^{-1})_{\min}. \quad (6.3)$$

Тем самым, при $2hb^{-1} \geq (2hb^{-1})_{\min}$ невозмущённое состояние равновесия системы является устойчивым на всём промежутке сверхзвуковых скоростей (1.4) при всех допустимых значениях остальных «существенных» параметров системы.

7. Основные результаты и заключение.

В работе, на примере достаточно широких прямоугольных пластинок и полубесконечной пластины–полосы $\gamma \in [1.96, \infty]$, исследуется влияние первоначальных сил растяжения N_x и сжатия N_y , направленных, соответственно, по сверхзвуковому потоку газа и в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток», с целью управления им, в предположении наличия сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота на их свободном крае.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка–поток».

Получены явное выражение дисперсионного уравнения, характеризующего достаточные признаки потери устойчивости и формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа.

С помощью графоаналитических и численных методов анализа произведено разбиение многопараметрического пространства состояний системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Показано, что граница области устойчивости определяется только гиперповерхностью, характеризующей потерю «апериодической устойчивости» в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки, что свидетельствует о «безопасности» границы в смысле Баутина Н.Н. [12]. Отсюда, очевидно, следует, что в исходной задаче, как и в [15–17, 21], критическая скорость локализованной дивергенции не зависит от параметра отношения коэффициентов, характеризующих сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c . Сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота влияют только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба. Показано, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции

является монотонно возрастающей функцией от сил растяжения N_x , а от сил сжатия N_y и от коэффициента Пуассона ν – монотонно убывающей функцией. Соответственно, силы растяжения N_x приводят к существенному повышению устойчивости системы, а сжимающие силы N_y – наоборот, к понижению.

Определены взаимокомпенсирующие значения коэффициентов напряжений, характеризующих усилия в срединной поверхности пластинки, при которых соответствующие первоначальные силы N_x и N_y не влияют на порог устойчивости системы.

Как и в работе [21], здесь так же, первоначальные силы N_x , направленные по потоку, существенно влияют не только на величину критической скорости, но и на границу области устойчивости, в отличие от сил N_y , направленных в перпендикулярном направлении к скорости потока газа, оказывающим влияние только на величину критической скорости.

Сравнительный анализ результатов данной работы и работ [15– 17, 21] позволяет установить границы применимости метода Эйлера, наряду с применением динамического метода. Сопоставление результатов решения задачи устойчивости динамических систем «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок и полубесконечной пластины–полосы, полученных применением обоих методов, указывает на их хорошее совпадение. Поэтому, при решении подобных задач применение метода Эйлера, как наиболее удобного и простого, вполне оправдано.

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для получения аналитического решения широкого класса задач устойчивости упругих систем, в частности, при комбинированном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6. . № 1. С. 124–126.
6. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38– 46.
7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
8. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
9. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
10. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
11. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.– Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.

12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
13. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34.
14. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели с свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов. // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74 (3), с. 19-36.
16. Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели со свободным краем, растянутой по сверхзвуковому потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (1), с. 37–55. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-37.
17. Martirosyan S.R. Supersonic divergence of a panel with a free edge initially loaded in two directions tensile and compressive forces // 2022. Journal of Physics: Conference Series 2231 012030. IP address 93.187.163.146. DOI: 10.1088/1742–6596/2231/1/012030.
18. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: растянутой по потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (4), с.27-47. DOI:10.54503/0002-3051-2024.77.4- .27.
19. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, нагруженной по двум направлениям: растянутой по потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2025. Т.78 (1), с.46-68. DOI:10.54503/0002-3051-2025.78.1-46
20. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concentrated inertial masses and moments // Изв. НАН Армении, Механика. 2020. Т.73 (4), с..58–74.
21. Мартиросян С.Р. О динамической устойчивости широкой панели с одним свободным краем, нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (3), с.42 –57. DOI:10.54503/0002-3051-2024.77.3 - 42.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 10) 524890.
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 16 мая 2025