ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 78, №2, 2025 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2025.78.2-3

СДВИГОВЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В СОСТАВНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ЭЛЕКТРОДАМИ НА ПЛОСКОСТИ КОНТАКТА

Агаян К.Л.

Ключевые слова: пьезоэлектрик, поверхностная волна, перемещение, амплитуда, волновое число.

Aghayan K.L.

Shear electro elastic waves in composite piezoelectric space with electrodes on the contact plane

Keywords: piezoelectric, surface wave, displacement, amplitude, wave number.

An exact solution of the problem of excitation and propagation of shear surface waves localized along the interface of two piezoelectric half-spaces connected to each other with two semi-infinite electrodes is constructed. Piezoelectric surface waves are caused by the presence of electrodes in the form of a thin metal or adhesive conductive layer with a given piecewise constant value of the electric field potential on the electrodes.

Աղայան Կ.Լ.

Կոնտակտի հարթության վրա էլեկտրոդներ պարունակող բաղադրյալ պիեզոէլեկտրիկ տարածության սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքներ

Հիմնաբառեր. Պիեզոէլեկտրիկ, մակերևույթային ալիք, տեղափոխություն, ամպլիտուդա, ալիքային թիվ:

Կառուցվել է, երկու պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածություններից կազմված բաղադրյալ տարածությունում, կոնտակտային մակերևույթի շուրջը տեղայնացված, սահքի մակերևույթային ալիքների գրգռման և տարածման խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Պիեզոէլեկտրական ալիքների գոյությունը պայմանավորված է բարակ մետաղական կամ սոսնձային էլեկտրահաղորդիչ շերտի վրա տրված էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի կտոր առ կտոր հաստատուն արժեքներով:

Построено точное решение задачи возбуждения и распространения сдвиговых, локализованных у границы раздела, поверхностных волн в пространстве, составленном из двух пьезоэлектрических полупространств и содержащим электроды на границе раздела. Пьезоэлектрические поверхностные волны обусловлены наличием электродов, в виде тонкого металлического или клеевого электропроводящего слоя, с заданным кусочно – постоянным значением потенциала электрического поля на электродах.

1. Введение

Исследование закономерностей и особенностей распространения волновых процессов в диэлектрических средах, обладающих свойством пьезоэффекта, при взаимодействии упругих и электрических полей, занимают ключевое место в современной теории механики деформируемого тела. Особое внимание среди этих исследований уделяется задачам о возникновении и распространении локализованных (поверхностных) волн, возникающих при взаимодействии различных физических полей. Пьезоэффект и конструктивные (механические, электрические) неоднородности существенно влияют на распределение волнового поля, особенно, в кусочно-однородных деформируемых твердых телах сложной структуры.

В современных электромеханических структурах часто используются тонкие электропроводящие металлические слои разной длины, а также обыкновенный клей разной структуры для соединения контактирующих тел. Возникает естественный вопрос об устранении или возникновении поверхностной волны около контактных поверхностей составной конструкции.

Проблеме возбуждения и распространения поверхностных сдвиговых волн по граничной поверхности в неоднородных пьезоэлектрических структурах с разными граничными и контактными условиями посвящено большое количество работ. Коротко остановимся на некоторых работах, тесно связанных с рассматриваемой здесь задачей. Отметим, в первую очередь, книги [1-4], посвященные исследованию и разработке основных вопросов, возникающих в рассматриваемой области.

В работах [5-20] изучаются волновые процессы, связанные, в основном, с появлением и распространением поверхностных сдвиговых волн в пьезоупругих средах. Исследуются контактные и смешанные задачи для составных пьезоэлектрических пространств и слоев с различными контактными и граничными условиями на контактных и свободных поверхностях, а также содержащих концентраторы напряжений в виде трещин, включений и электродов разных длин.

В работе [5] рассматривается распространение поверхностных электроупругих сдвиговых волн по границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств с разными кристаллическими структурами, склееных электропроводящим тонким слоем. Получены условия существования и особенности распространения электроупругих волн. В работах [6-16] и цитированных в них работах изучаются задачи дифракции электроупругой сдвиговой плоской волны в составном пьезоэлектрическом пространстве. При этом, предполагается, что на поверхностях раздела осуществляются различные смешанные механические и электрические условия, обусловленные наличием на контактных поверхностях заземленных электродов, трещин, металлических слоев, бесконечной или полубесконечной длины. В работах [17-20] рассмотрены аналогичные задачи для полупространств и слоя с конечным или полубесконечным электродом.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим, обладающее пьезоэффектом, составное упругое пространство в декартовой системе координат $Oxyz$. Пространство состоит из двух, соединенных между собой, пьезоэлектрических полупространств, занимающих области $\Omega_1\left(|x|<\infty,\ y>0,\ |z|<\infty\right)$ и $\Omega_2\left(|x|<\infty,\ y<0,\ |z|<\infty\right)$. Главная ось пьезоэлектрических полупространств (кристалл 6mm гексагональной симметрии) паралеллен оси Oz. На контактной плоскости $y=0$, разделяющей полупространства, приклеен электрод бесконечной, полубесконечной или конечной длины, в виде тонкого металлического или клеевого электропроводящего слоя. Предполагается, что электрод невесомый, абсолютно гибкий и идеально проводящий, так что механическими воздействиями электрода на полупространства можно пренебречь. На электродах, в виде электрических граничных условий, заданы амплитуды электрического потенциала $H(x)$.

Очевидно, что вид электрических граничных условий связан со способом подвода электрической энергии к пьезоэлементу. Если гармонические волны в пьезоэлементе возбуждаются генератором напряжения, то значение потенциала $H(x)$ на электродах считается известным. При этом предполагается, что $H(x)$ постоянная или кусочно – постоянная функция.

Введем некоторые обозначения, связанные с электромеханическими параметрами пьезоэлектрических полупространств индексами $j=1,2$. $k_j=\omega/c_j$ – волновое число, $c_j=\sqrt{\mu_j(1+\chi_j)/\rho_j}$ – фазовая скорость распространения сдвиговой упругой волны, μ_j и ρ_j – модуль сдвига и плотность, $\chi_j=e_j^2/\mu_j\varepsilon_j$ - коэффициент электромеханической связи, $e_j=e_{j5}$, $\varepsilon_j=\varepsilon_{jj}$ – диэлектрические и пьезоэлектрические постоянные соответствующих полупространств [1,17].

В пьезоэлектрическом пространстве Ω_1 распространяется заданная сдвиговая плоская упругая волна антиплоской деформации (SH - волна) $w_\infty(x,y)e^{-i\omega t}$ с сопутствующим потенциалом электрического поля $\varphi_\infty(x,y)e^{-i\omega t}$, падающая из бесконечности под углом $\beta(0<\beta<\pi/2)$ к плоскости xz и поляризованная вдоль оси симметрии.

Здесь

$$\begin{gathered} w_\infty(x,y)=A_0e^{ipx-iqy}, \qquad \varphi_\infty(x,y)=(e_1/\varepsilon_1)\,w_\infty(x,y), \\ (p=k_1\cos\beta, \qquad q=k_1\sin\beta) \end{gathered} \tag{2.1}$$

амплитуды упругого перемещения и электрического потенциала падающих волн, A_0 – постоянная, ω - частота колебаний падающей волны, t – время.

Рассматривается задача определения, обусловленного наличием в контактной зоне электродов, дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пространстве $\Omega_1\cup\Omega_2$ при дифракции сдвиговой электроупругой плоской волны (2.1) и электрического потенциала $H(x)$ на электроде.

Для определения амплитуд упругого перемещения $w_j(x,y)$ и электрического потенциала $\varphi_j(x,y)$ в соответствующих полупространствах имеем [1,12]

$$\begin{gathered} \Delta w_j(x,y)+k_j^2w_j(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Omega_j \\ \Delta\varphi_j(x,y)+k_j^2\frac{e_j}{\varepsilon_j}w_j(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Omega_js \end{gathered} \tag{2.2}$$

По постановке задачи решения уравнений (2.2) должны удовлетворять следующим контактным - граничным условиям на плоскости $y=0$ (непрерывность электроупругого поля):

$$
\begin{aligned}
&w_1(x,+0)=w_2(x,-0), \quad |x|<\infty \\
&\varphi_1(x,+0)=\varphi_2(x,-0)=H(x), \quad |x|<\infty \\
&\sigma_{yz}^{(1)}(x,+0)=\sigma_{yz}^{(2)}(x,-0), \quad |x|<\infty
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Здесь $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа, $H(x)$ – заданный потенциал электрического поля на линии $y=0$.

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений (2.2) при граничных условиях (2.3).

Отметим,что в зависимости от конкретно поставленной задачи, т.е. от конкретного распределения заданной функции $H(x)$, условия (2.3) могут изменяться. Исходя из этого, сначала построим общее решение задачи (2.2), (2.3) при заданной $H(x)$.

3. Решение задачи (2.2), (2.3). Введем функции

$$W_1(x,y)=w_1(x,y)-w_\infty(x,y); \quad \Phi_1(x,y)=\varphi_1(x,y)-\varphi_\infty(x,y) \tag{3.1}$$

Подставим (3.1) в (2.2) и применим к этим уравнениям и граничным условиям (2.3) преобразование Фурье (ПФ) по переменной x. В итоге придем к следующей краевой задаче

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\overline{W}_1}{dy^2}-\gamma_1^2\overline{W}_1(\sigma,y)=0; \quad \frac{d^2\overline{\Phi}_1}{dy^2}-\sigma^2\overline{\Phi}_1(\sigma,y)+\frac{e_1}{\varepsilon_1}k^2\overline{W}_1(\sigma,y)=0, \ y>0, \\
&\frac{d^2\overline{w}_2}{dy^2}-\gamma_2^2\overline{w}_2(\sigma,y)=0; \quad \frac{d^2\overline{\varphi}_2}{dy^2}-\sigma^2\overline{\varphi}_2(\sigma,y)+k_2^2\frac{e_2}{\varepsilon_2}\overline{w}_2(\sigma,y)=0, \ y<0,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$\left[\mu_1\left(\frac{d\overline{W}_1}{dy}-\frac{d\overline{w}_\infty}{dy}\right)+e_1\left(\frac{d\overline{\Phi}_1}{dy}-\frac{d\varphi_\infty}{dy}\right)\right]\Bigg|_{y=+0}=\left[\mu_2\frac{d\overline{w}_2}{dy}+e_2\frac{d\overline{\varphi}_2}{dy}\right]\Bigg|_{y=-0} \tag{3.3}$$

В (3.2) – (3.3)

$$\gamma_j(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_j^2}, \quad \overline{F}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{i\sigma x}dx \tag{3.4}$$

$$\overline{w}_\infty(\sigma,y)=2\pi A_0e^{iqy}\delta(\sigma+p); \quad \overline{\varphi}_\infty(\sigma,y)=(e_1/\varepsilon_1)\overline{w}_\infty(\sigma,y) \tag{3.5}$$

Общее решение системы (3.2), представляющее уходящие волны, имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\overline{W}_1(\sigma,y)=A_1e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,y}+\overline{w}_\infty(\sigma,y), \quad y>0 \\
&\overline{\Phi}_1(\sigma,y)=B_1e^{-|\sigma|y}+(e_1/\varepsilon_1)\overline{W}_1(\sigma,y), \quad y>0
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{w}_2(\sigma,y)=A_2e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}\,y}, \quad y<0 \\
&\overline{\varphi}_2(\sigma,y)=B_2e^{|\sigma|y}+(e_2/\varepsilon_2)\overline{w}_2(\sigma,y), \quad y<0
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

где A_i, B_i $(i=1,2)$ – подлежащие определению постоянные интегрирования.

Удовлетворяя, при помощи (3.6), (3.7), условиям (3.3) для неизвестных A_i, B_i получим:

$$A_1 = \frac{(e_1+e_2)|\sigma|\bar{H}(\sigma)}{\bar{K}(\sigma)} - 2\pi A_0\left[\frac{2\mu_1^* iq}{\bar{K}(-p)}+1\right]\delta(\sigma+p)$$

$$A_2 = A_1 + 2\pi A_0\delta(\sigma+p) \tag{3.8}$$

$$B_1 = B_2 = -(e_1/\varepsilon_1)A_1 - 2\pi A_0(e_1/\varepsilon_1)\delta(\sigma+p)+\bar{H}(\sigma)$$

Здесь

$$\bar{K}(\sigma) = \mu_1^*\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\mu_2^*\sqrt{\sigma^2-k_2^2}-|\sigma|\left(e_1^2/\varepsilon_1+e_2^2/\varepsilon_2\right) \tag{3.9}$$

где

$$\mu_j^* = \mu_j(1+\chi_j); \quad \chi_j = e_j^2/(\varepsilon_j\mu_j); \quad j=1,2, \tag{3.10}$$

а $\bar{K}(\sigma)$ представляет собой дисперсионную функцию задачи.

Теперь, с учетом (3.8), из (3.6) – (3.7), после обратного ПФ, для потенциалов $w_j(x,y)$ и $\varphi_j(x,y)$ получим:

$$\begin{aligned} w_1(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e_1+e_2}{\bar{K}(\sigma)}|\sigma|\bar{H}(\sigma)e^{-\gamma_1 y}e^{-i\sigma x}d\sigma - \\ &\quad -2A_0\left[\bar{K}(-p)\right]^{-1}\mu_1^* iqe^{ipx+iqy}+A_0\left[e^{-iqy}-e^{iqy}\right]e^{ipx}, \qquad y\ge 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$w_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e_1+e_2}{\bar{K}(\sigma)}|\sigma|\bar{H}(\sigma)e^{\gamma_2 y}e^{-i\sigma x}d\sigma - A_0\left[\bar{K}(\sigma)\right]^{-1}\mu_1^* iqe^{ipx-iqy}, \ y\le 0 \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) &= \frac{e_1}{2\pi\varepsilon_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e_1+e_2}{\bar{K}(\sigma)}|\sigma|\bar{H}(\sigma)\left[e^{-\gamma_1 y}-e^{-|\sigma|y}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma + \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{H}(\sigma)e^{-|\sigma|y}e^{-i\sigma x}d\sigma + A_0(e_1/\varepsilon_1)\left[e^{-iqy}-e^{iqy}\right]e^{ipx} - \\ &\quad -2A_0\left[\bar{K}(-p)\right]^{-1}(e_1/\varepsilon_1)\mu_1^* iq\left(e^{iqy}-e^{-|p|y}\right)e^{ipx}, \qquad y\ge 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x,y) &= \frac{e_2}{2\pi\varepsilon_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e_1+e_2}{\bar{K}(\sigma)}|\sigma|\bar{H}(\sigma)\left[e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}\,y}-e^{|\sigma|y}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma + \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{H}(\sigma)e^{|\sigma|y}e^{-i\sigma x}d\sigma - \\ &\quad -2A_0\left[\bar{K}(-p)\right]^{-1}(e_2/\varepsilon_2)\mu_1^* iq\left(e^{\sqrt{p^2-k_2^2}\,y}-e^{|p|y}\right)e^{ipx}, \quad y\le 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Не останавливаясь на общем исследовании полученных волновых составляющих из (3.11) - (3.14), это будет сделано в следующем пункте, заметим следующее.

Формулами (3.11) - (3.14) даются амплитудные выражения электроупругого поля в пьезоэлектрических полупространствах Ω_1 и Ω_2, в виде суммы отдельных составляющих от внешних воздействий $H(x)$ и $w_\infty(x,y)$. Потенциалы $w_j(x,y)$ и $\varphi_j(x,y)$ $j=1,2$ представляют собой точное решение поставленной задачи в квадратурах в виде интегралов Фурье. Нетрудно убедиться, что полученные выражения для $w_j(x,y)$, $\varphi_j(x,y)$ удовлетворяют всем контактным условиям (2.3), и условиям уходящей волны.

В подынтегральных выражениях (3.11) – (3.14) фигурирует дисперсионная функция $\bar{K}(\sigma)$ из (3.9). Очевидно, что для полного изучения характерных особенностей волнового поля в пьезоэлектрическом пространстве следует подробно исследовать функцию $\bar{K}(\sigma)$, которую, следуя [5,14,15], представим в следующем виде:

$$\bar{K}(\sigma)=\mu_1^*\bar{K}_1(\sigma)+\mu_2^*\bar{K}_2(\sigma) \tag{3.15}$$

где

$$\bar{K}_j(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_j^2}-\bar{\chi}_j|\sigma|;\quad \bar{\chi}_j=\chi_j\big/(1+\chi_j);\quad j=(1,2) \tag{3.16}$$

Функции $\bar{K}_1(\sigma)$ и $\bar{K}_2(\sigma)$ имеют нули только в точках $\pm\sigma_1$ и $\pm\sigma_2$, где

$$\sigma_j=\frac{1+\chi_j}{\sqrt{1+2\chi_j}}k_j>k_j>0 \tag{3.17}$$

Здесь ω/σ_1 и ω/σ_2 скорости сдвиговых поверхностных электроупругих волн Гуляева-Блюстейна в полупространствах Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Оказывается [5,14,15], дисперсионная функция $\bar{K}(\sigma)$ из (3.15) имеет нули в точках $\sigma=\pm\sigma_э$, где $\sigma_э$ – единственный положительный корень уравнения $\bar{K}(\sigma)=0$. При этом, $\omega/\sigma_э$ – скорость распространения поверхностной волны. Доказано, что

$$\begin{gathered}\sigma_э>k_2>k_1,\ \text{если}\ \sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_2^2}}<\frac{\chi_1}{1+\chi_1}\left(1+\frac{\mu_2\chi_2}{\mu_1\chi_1}\right)\\ \sigma_э>k_1>k_2,\ \text{если}\ \sqrt{1-\frac{k_2^2}{k_1^2}}<\frac{\chi_2}{1+\chi_2}\left(1+\frac{\mu_1\chi_1}{\mu_2\chi_2}\right)\end{gathered} \tag{3.18}$$

а также, что $\sigma_1<\sigma_э<\sigma_2$ или $\sigma_2<\sigma_э<\sigma_1$, т.е. значение скорости - $\omega/\sigma_э$ возникающей поверхностной волны находится между значениями скоростей волн Гуляева-Блюстейна в пространствах Ω_1 и Ω_2.

Используя эти результаты, при заданном $\bar{H}(\sigma)$, из интегральных составляющих, входящих в (3.11) – (3.14), можно определить обусловленные распределением потенциала $H(x)$ дополнительные компоненты волнового поля. В итоге получим, что наличие источника колебаний потенциала электрического поля в виде $H(x)$ приводит к распространению сдвиговой поверхностной волны, локализованной у плоскости контакта, а также дифрагированных затухающих объемных волн в соответствующих полупространствах. Этими вопросами займемся в следующем пункте.

4. Решение задачи при заданном $H(x)$.

Рассмотрим случай, когда функция $H(x)$ из (2.3) дается формулой

$$H(x) = V_{-}\vartheta(-x) + V_{+}\vartheta(+x) \tag{4.1}$$

где $\vartheta(x)$ – известная функция Хевисайда [22].

Тогда для $\bar{H}(\sigma)$ будем иметь:

$$\bar{H}(\sigma) = \pi(V_{+} + V_{-})\delta(\sigma) + i(V_{+} + V_{-})/\sigma \tag{4.2}$$

где $\delta(\sigma)$ – известная дельта функция Дирака.

Из (3.11) – (3.14) нетрудно убедиться, что для окончательного определения потенциалов $w_j(x, y)$ и $\varphi_j(x, y)$ следует вычислить следующий интеграл:

$$J(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sigma|}{\sigma\bar{K}(\sigma)} e^{-\gamma_1 y} e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{4.3}$$

где $\bar{K}(\sigma)$ – дается формулами (3.15) и (3.16), а $\gamma_1(\alpha)$ – формулой (3.4).

Не останавливаясь на вычислительных подробностях, отметим лишь, что для исследования и вычисления полученных несобственных интегралов из (3.11) – (3.14) использованы результаты из [23,24]. Функция $\bar{K}(\alpha)$, как отмечалось выше, имеет два действительных корня в точках $\sigma = \pm\sigma_э$. Для выбора однозначных ветвей функций $\gamma_j(\alpha) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2}$ $(j = 1, 2)$ и $|\alpha|$, входящих в подынтегральную функцию, в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ проведены соответствующие разрезы, обеспечивающие условие уходящей волны.

Принимая, для определенности, $k_2 > k_1$, тогда и $\sigma_э > k_2$, получены аналитические выражения для амплитуд всех компонентов электроупругого волнового поля – упругое перемещение и потенциал электрического поля во всех участках пьезоэлектрического пространства.

Полученные, в итоге, амплитудные выражения в полном объеме здесь не приводятся. Здесь, в основном, будем останавливаться на амплитудных выражениях дифрагированных поверхностных, неоднородных, отраженных и проходящих волн.

Обозначим через $W_j^{(\pm)}(x,y)$ и $\Phi_j^{(\pm)}(x,y)$ суммарную амплитуду от внешних нагрузок, для упругого перемещения и электрического потенциала в отдельных квадрантах плоскости $z=0$. Тогда из (3.11) - (3.14) получим –

в квадранте $\omega_1^{(+)}\left(x>0, y>0\right)$:

$$\begin{aligned} W_1^{(+)}(x,y) &= w_{11}^{(+)}(x,y)+w_{12}^{(+)}(x,y)+w_{\infty}(x,y)+\widetilde{W}_1(x,y) \\ W_1^{(-)}(x,y) &= w_{11}^{(-)}(x,y)+w_{12}^{(-)}(x,y)+w_{\infty}(x,y)+\widetilde{W}_2(x,y) \end{aligned} \tag{4.4}$$

в квадранте $\omega_1^{(-)}\left(x<0, y>0\right)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(+)}(x,y) &= \varphi_{11}^{(+)}(x,y)+\varphi_{12}^{(+)}(x,y)+\varphi_{13}^{(+)}(x,y)+\varphi_{14}^{(+)}(x,y)+\widetilde{\Phi}_1(x,y) \\ \Phi_1^{(-)}(x,y) &= \varphi_{11}^{(-)}(x,y)+\varphi_{12}^{(-)}(x,y)+\varphi_{13}^{(-)}(x,y)+\varphi_{14}^{(-)}(x,y)+\widetilde{\Phi}_2(x,y) \end{aligned} \tag{4.5}$$

в квадранте $\omega_2^{(+)}\left(x>0, y<0\right)$:

$$\begin{aligned} W_2^{(+)}(x,y) &= w_{22}^{(+)}(x,y)+w_{21}^{(+)}(x,y)+\widetilde{W}_3(x,y) \\ W_2^{(-)}(x,y) &= w_{22}^{(-)}(x,y)+w_{21}^{(-)}(x,y)+\widetilde{W}_4(x,y) \end{aligned} \tag{4.6}$$

в квадранте $\omega_2^{(-)}\left(x<0, y<0\right)$:

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(+)}(x,y) &= \varphi_{22}^{(+)}(x,y)+\varphi_{21}^{(+)}(x,y)+\varphi_{24}^{(+)}(x,y)+\widetilde{\Phi}_3(x,y) \\ \Phi_2^{(-)}(x,y) &= \varphi_{22}^{(-)}(x,y)+\varphi_{21}^{(-)}(x,y)+\varphi_{24}^{(-)}(x,y)+\widetilde{\Phi}_4(x,y) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_{11}^{(\pm)}(x,y) &= A_1^{(\pm)} e^{-\sqrt{\sigma_э^2-k_1^2}\,y} e^{\pm i\sigma_э x}, \\ w_{12}^{(\pm)}(x,y) &= -A_0\left(1+2\left[\bar{K}(-p)\right]^{-1}\mu_1^* iq\right)e^{ipx+iqy}, \qquad y>0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} w_{21}^{(\pm)}(x,y) &= -2A_0\left[\bar{K}(-p)\right]^{-1}\mu_1^* iq\, e^{ipx} e^{-i\sqrt{k_2^2-p^2}\,y} \\ w_{22}^{(\pm)}(x,y) &= A_2^{(\pm)} e^{-\sqrt{\sigma_э^2-k_2^2}\,y} e^{\pm i\sigma_э x}, \qquad y<0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^{(\pm)}(x,y) &= A_1^{(\pm)}\left(e_1/\varepsilon_1\right)\left[e^{-\sqrt{\sigma_э^2-k_1^2}\,y}-e^{-|\sigma_э|y}\right]e^{\pm i\sigma_э x} \\ \varphi_{22}^{(\pm)}(x,y) &= A_2^{(\pm)}\left(e_2/\varepsilon_2\right)\left[e^{-\sqrt{\sigma_э^2-k_2^2}\,y}-e^{-|\sigma_э|y}\right]e^{\pm i\sigma_э x} \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12}^{(\pm)}(x,y) &= -A_0 2\pi i\mu_1^* q\left(e_1/\varepsilon_1\right)\bar{K}^{-1}(\sigma)\left[e^{-iqy}-e^{-|p|y}\right]e^{ipx} \\ \varphi_{21}^{(\pm)}(x,y) &= -A_0\frac{2i\mu_1^* qe_2}{\varepsilon_2\bar{K}(-p)}\left[e^{-i\sqrt{k_2^2-p^2}\,y}-e^{|p|y}\right]e^{ipx} \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\varphi_{13}(x,y)=\varphi_\infty(x,y)-A_0(e_1/\varepsilon_1)e^{ipx+iqy} \tag{4.12}$$

$$\varphi_{j4}^{(\pm)}(x,y)=\frac{V_+ + V_-}{2}-(-1)^j\frac{V_+ + V_-}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} \tag{4.13}$$

В вышеприведенных формулах (4.8) – (4.13) $\sigma_э$ - корень дисперсионного уравнения $\bar{K}(\sigma)=0$, где $\bar{K}(\sigma)$ дается формулой (3.15), а

$$\bar{K}'(\sigma_э)=\left.\frac{\partial\bar{K}(\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_э}=\mu_1^*\frac{\sigma_э}{\sqrt{\sigma_э^2-k_1^2}}+\mu_2^*\frac{\sigma_э}{\sqrt{\sigma_э^2-k_2^2}}-\left(\mu_1^*\tilde{\chi}_1+\mu_2^*\tilde{\chi}_2\right)\operatorname{sgn}\sigma_э$$

$$A_1^{(\pm)}=A_2^{(\pm)}=\left[(V_+ - V_-)(e_1+e_2)\right]\Big/\bar{K}'(\pm\sigma_э)$$

Волновое поле перемещений, связанных с $\widetilde{W}_j(x,y)$ $\left(j=\overline{1,4}\right)$, входящими в формулы (4.4)-(4.7), состоит из дифрагированных затухающих объемных волн, распространяющихся со скоростью ω/k_j. Для них, следуя работам [13,21], получены асимптотические формулы, представляющие волновое поле в дальних зонах, которые здесь не приводятся.

Формулами (4.4) – (4.7) дается распределение электроупругого волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах Ω_1 и Ω_2. Оно состоит из падающей, отраженной и проходящих волн, дифрагированных затухающих объемных, а также локализованной у контактной плоскости поверхностной волны, распространяющейся со скоростью $\omega/\sigma_э$ ($\sigma_э$ – волновое число поверхностной волны).

$w_{11}^{(\pm)}(x,y)$ из (4.8) – отраженные поверхностные волны, локализованные у электрода, распространяются в Ω_1 по противоположным направлениям к оси Ox с волновым числом $\sigma_э$ и затухают при $y\to+\infty$ по закону $\exp\left(-\sqrt{\sigma_э^2-k_1^2}\,y\right)$. Появление этих составляющих целиком обусловлено наличием электрода, на двух полубесконечных частях которого заданы постоянные, но разные по величине, значения потенциала электрического поля, а также свойством пьезоэффекта.

При этом, нетрудно заметить, что если $V_+ = V_- = const$ или $V_+ = V_- = 0$ поверхностная волна не появляется.

Примерно то же самое можно сказать относительно проходящих поверхностных волн $w_{22}^{(\pm)}(x,y)$ из (4.8), распространяющихся в Ω_2 в противоположных направлениях к оси Ox со скоростью $\omega/\sigma_э$ и убывающих при $y\to-\infty$ по закону $\exp\left(\sqrt{\sigma_э^2-k_2^2}\,y\right)$.

$w_{12}^{(\pm)}(x,y)$ и $w_{21}^{(\pm)}(x,y)$, из (4.9), амплитуды отраженной и проходящей волн, распространяющихся в полупространствах $y>0$ и $y<0$ соответственно.

$w_{12}^{(\pm)}(x,y)$ как отраженная волна в Ω_1 распространяется со скоростью ω/k_1, а $w_{21}^{(\pm)}(x,y)$, как проходящая из Ω_1 в Ω_2, распространяется со скоростью ω/k_2.

Потенциал электрического поля $\varphi(x,y)$, не обладает волновым характером. Однако, присваивание ему волновых свойств, имеет смысл как в теоретическом, так и в практическом аспекте, чтобы исследовать характерные особенности потенциала электрического поля, как неотъемлемой части электроупругого волнового поля. Это особенно важно в рассматриваемой здесь задаче, в которой в роли внешнего воздействия (нагрузки) выступает ненулевое значение потенциала электрического поля на электроде.

Обратимся теперь к выражениям $\varphi_{11}^{(\pm)}(x,y)$ и $\varphi_{22}^{(\pm)}(x,y)$ из (4.10), представляющим часть электрических потенциалов $\Phi_1^{(\pm)}(x,y)$ и $\Phi_2^{(\pm)}(x,y)$.

Первые составляющие этих выражений представляют собой потенциалы, сопутствующие поверхностным волнам $w_{11}^{(\pm)}(x,y)$ и $w_{22}^{(\pm)}(x,y)$, и обладают аналогичными волновыми характеристиками. Вторые составляющие представляют собой отраженную (проходящую) поверхностную волну, распространяющуюся в $\Omega_1(\Omega_2)$ по противоположным направлениям к оси Ox с волновым числом $\sigma_э$ и затухающую по закону $\exp(\pm|\sigma_э|y)$ при $y \to \pm\infty$. Появление этих слагаемых опять обусловлено наличием электрода с заданным значением потенциала на нем. $\varphi_{11}^{(\pm)}(x,y)$, $\varphi_{22}^{(\pm)}(x,y)$ обращаются в ноль при $y \to \pm 0$, обеспечивая, совместно с $\varphi_{j4}^{(\pm)}(x,y)$ из (4.13), выполнение граничных условий (2.4).

Аналогично, $\varphi_{12}^{(\pm)}(x,y)$ и $\varphi_{21}^{(\pm)}(x,y)$ из (4.11) представляют собой потенциалы, сопутствующие поверхностным волнам перемещений $w_{12}^{(\pm)}(x,y)$ и $w_{21}^{(\pm)}(x,y)$, и обладают волновыми свойствами.

5. Частные случаи. Рассмотрим два частных случая рассмотренной задачи при заданном распределении электрического потенциала $H(x)$, предполагая при этом, что падающая волна из бесконечности отсутствует $(A_0 = 0)$. Иными словами, примем, что гармонические электроупругие волны в пьезоэлектрическом пространстве возбуждаются под воздействием заданных на электродах потенциалов электрического поля в виде кусочно–постоянной функции $H(x)$. Отметим, что будем останавливаться только на амплитудах перемещений и потенциала электрического поля поверхностных волн в области Ω_1, так как в такой постановке задачи, полупространства Ω_1 и Ω_2 находятся, качественно, в одинаковом состоянии.

1) Пусть

$$H(x) = V_1\delta(x+a) + V_2\delta(x-a),\ (V_1, V_2) \sim const \tag{5.1}$$

т.е. предполагается, что потенциал на линии $y = 0$ сосредоточен в точках $\pm a$.

Для ПФ $H(x)$ будем иметь:

$$\bar{H}(\sigma) = V_1 e^{-i\sigma a} + V_2 e^{i\sigma a} \tag{5.2}$$

Подстановкой (5.2) в (3.12) и (3.13) и вычислением интегралов для поверхностных компонентов упругих перемещений $w_1^{(n)}(x, y)$ и потенциала электрического поля $\varphi_1^{(n)}(x, y)$ в Ω_1 получим:

$$w_1^{(n)}(x, y) = iN_1\left[V_1 e^{\pm i\sigma_э a} + V_2 e^{\mp i\sigma_э a}\right] e^{-\sqrt{\sigma_э^2 - k_1^2}\,y} e^{\pm i\sigma_э x} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(n)}(x, y) = i\frac{e_1}{\varepsilon_1} N_1\left[V_1 e^{\pm i\sigma_э a} + V_2 e^{\mp i\sigma_э a}\right]\left[e^{-\sqrt{\sigma_э^2 - k_1^2}\,y} - e^{-|\sigma_э| y}\right] e^{\pm i\sigma_э x} + \\ + \pi^{-1}\left[V_1 y\left((x+a)^2 + y^2\right)^{-1} - V_2 y\left((x-a)^2 + y^2\right)^{-1}\right]\end{aligned} \tag{5.4}$$

где $N_1 = (e_1 + e_2)\sigma_э\left(2\pi\bar{K}'(\sigma_э)\right)^{-1}$ (5.5)

Из (5.3) и (5.4) следует, что вследствие дифракции, в полупространстве $y > 0$ возникают поверхностные волны, обусловленные сугубо наличием точек разрыва потенциала электрического поля на электроде $H(x)$ в точках $\pm a$. Эти волны, локализованные у электрода, распространяются в Ω_1 по противоположным направлениям к оси Ox, исходя из точек разрывов $\pm a$. Скорость распространения, по направлению оси Ox, а также порядок убывания поверхностных волн по направлению Oy, как и следовало ожидать, совпадают с соответствующими значениями $w_{11}^{(\pm)}(x, y)$ и $\varphi_{11}^{(\pm)}(x, y)$ из (4.8) и (4.10), соответственно.

Второе составляющее из (5.4) не имеет волновой характер, но обеспечивает выполнение граничного условия (5.1) при $y \to +0$.

2) Распределение $H(x)$ задано формулой:

$$H(x) = V_1\vartheta(-x-a) + V_0\left[\vartheta(x+a) - \vartheta(x-b)\right] + V_2\vartheta(x-b)$$

где $\vartheta(x)$ – функция Хевисайда.

Теперь для ПФ $H(x)$ получим

$$\bar{H}(\sigma)=\left[i\frac{V_0-V_1}{\sigma}+\pi(V_0+V_1)\delta(\sigma)\right]e^{-ia\sigma}+ \\ +\left[i\frac{V_2-V_0}{\sigma}+\pi(V_2-V_0)\delta(\sigma)\right]e^{ib\sigma} \tag{5.6}$$

Аналогичным образом, как и в случае 1), подставляя (5.6) в (3.12), (3.15) и учитывая, что $A_0=0$, для поверхностных компонентов $w_1^n(x,y)$ и $\varphi_1^n(x,y)$ волнового поля в пьезоэлектрическом полупространстве Ω_1 получим:

$$w_1^n(x,y)=-\frac{N_1}{\sigma_э}W_0(x)e^{-\sqrt{\sigma_э^2-k_1^2}y} \tag{5.7}$$

$$\varphi_2^n(x,y)=-\frac{N_1}{\sigma_э}\frac{e_1}{\varepsilon_1}W_0(x)\left[e^{-\sqrt{\sigma_э^2-k_1^2}y}-e^{-|\sigma_э|y}\right]+\frac{V_0-V_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x+a}{y}+ \\ +\frac{V_2-V_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-b}{y}+\frac{V_1+V_2}{2} \tag{5.8}$$

$$W_0(x)=\begin{cases}(V_0-V_1)e^{i\sigma_э(x+a)}+(V_2-V_0)\vartheta(x-b)e^{i\sigma_э(x-b)}; & x>-a\\ (V_0-V_1)\vartheta(-x-a)e^{-i\sigma_э(x+a)}+(V_2-V_0)e^{-i\sigma_э(x-b)}; & x<b\end{cases} \tag{5.9}$$

Полученные формулы (5.7), (5.8) указывают на полное качественное сходство распределений дифрагированного поверхностного волнового поля с рассмотренным выше случаем 1). Из этих формул также следует, что:

а) при $V_0=V_1\left(V_0=V_2\right)$ поверхностные волны возникают только из точки $b(-a)$.

б) при $V_0=V_1=V_2=const$, волновое поле в пьезоэлектрическом пространстве не возбуждается.

г) при $V_0=0\left(V_1,V_2\neq 0\right)$ или $V_1=V_2=0\left(V_0\neq 0\right)$ поверхностные волны возникают из точек $-a$ и b.

Заключение. В рамках антиплоской деформации исследуется динамическая контактная задача о возбуждении и распространении сдвиговых поверхностных и объемных волн в составном электроупругом пространстве, состоящем из двух жестко соединенных между собой пьезоэлектрических полупространств.

На граничной плоскости, где расположен электрод бесконечной длины, заряженный кусочно – постоянным значением потенциала электрического поля, осуществляется полный электромеханический контакт.

Построено замкнутое решение задачи в виде интегралов Фурье. Получены аналитические представления для амплитуд компонентов электроупругого поля (3.11) – (3.14). Для поверхностных, отраженных и проходящих волн вычислены и приведены конечные выражения амплитудных формул для упругих перемещений и потенциала электрического поля в каждом квадранте пьезоэлектрического пространства. Эти формулы в явном виде содержат основные волновые особенности, присущие возбужденным электроупругим волнам, о которых было сказано выше. Из этих формул, в частности, для последних двух случаев, следует, что наличие в распределении $H(x)$ точек разрыва приводит к существенному перераспределению общего электроупругого волнового поля, обусловленному появлением новых поверхностных волн. Имеет место и обратный процесс, сокращая точки разрыва в нагрузке потенциала электрического поля на электроде, можно устранить поверхностную волну.

Следует отметить, что из (3.11) – (3.14), непосредственно получится решение соответствующей задачи для пьезоэлектрического полупространства Ω_1, на свободной от напряжений граничной поверхности которого расположен электрод с потенциалом $H(x)$. С этой точки зрения, интересна выше рассмотренная задача 2) при $V_1 = V_2 = 0,\ V_0 \neq 0$.

Полученные результаты позволяют в дальнейшем поставить и решить аналогичные задачи, со смешанными электромеханическими условиями для составных областей, более приближенных к реальным конструкциям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Balakirev M.K. and Gilinski I. A. Waves in Piezocrystals (Novosibirsk: Nauka 1982) p. 239.
2. Parton V.Z., Kudravcev B.A. Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. – M. Nauka, 1988, p. 472.
3. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulcha N.A. Electroelasticity. /#Mechanics of related fields in structural elements. V.5/ - Kiev., Nauka. Dumka., 1989., p. 230.
4. Фильштинский Л.А., Бардзокас Д.И. Метод граничных интегральных уравнений в проблемах дифракции электроупругих волн. Сумы: Изд-во Сумского Ун-та, 1999, 194 с.
5. Avetisyan A.S., Margaryan J.M. Electroelastic surface shear waves on a division surface of two piezoelectric half-spaces. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 1994. T.47. №3-4. p.31-36.
6. Jin F., Wang Z., Wang Tiejun, The Bluestein-Gulyaev (B-G) wave in a piezoelectric layered half-space. Int. J. Eng. Sci. 39, 1271-1285 (2001).
7. Li P., Jin. F., Qian Z. Propagation of the Bluestein-Gulyaev waves in a functionally graded transversely isotropic electro-magneto-elastic half-space. //European Journal of Mechanics A/Solids. 37, 2013, pp. 17-23.
8. Фильштинский Л.А., Хворост В.А. Возбуждение составного пьезоэлектрического пространства сосредоточенными гармоническими источниками. Теоретическая и прикладная механика. №34. с. 121-125.
9. Grigoryan E.Kh., Melkumyan A.S. Diffraction of a shear plane wave in piezoelectric space at the edge of a semi-infinite metal layer. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2004. T.57. №4. p. 43-52.
10. Grigoryan E.Kh., Jilavyan S.H. Diffraction of a plane shear wave in a piezoelectric space with two parallel semi-infinite cracks., Proceedings of V International Conference "Topical problems of continuum mechanics". Goris 2005 pp. 163-168.

11. Белубекян М.В. Локализованные электроупругие волны при движении слоя вдоль полупространствf. Докл. НАН Армении 2009, Т. 109, №4. с. 297-303.
12. Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Terzyan S.A. Dispersion of shear surface waves in an elastic substrate imperfectly bonded with an elastic layer. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2023. T.76. №1. p.p 75-82.
13. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. Diffraction of a plane electro elastic wave on a semi-infinite electrode in a piezoelectric space with a slit. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2010. T.63. №1. p. 50-69.
14. Grigoryan E.Kh., Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of a shear plane wave on a semi-infinite crack in piezoelectric-dielectric space. Proceedings of VII Int. Conf. "Topical problems of continuum mechanics". Goris-Stepanakert 2011. pp. 137-143.
15. Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of Plane Shear Wave in Piezoelectric Semi-Space at a Semi-Infinite Metallic Layer in the Dielectric Medium. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2015. T.68. №1. P.45-56.
16. Aghayan K.L. Diffraction of electroelastic shear plane waves at the edges of semi-infinite electrodes in piezoelectric space with a slit. / Environmental herald of the scientific centers of the Black Sea economic cooperation./ 2011. №1. p.3-18.
17. Bardzokas D.I., Kudryavcev B.A., Senik N.A. Wave propagation in electromagneto-elastic environments. M. Editorial URSS. 2003. p. 336.
18. Aghayan K.L. Plane shear wave in a piezoelectric layer with mixed boundary conditions. NASA, Reports, 2023. V.123, №3-4. p.61-73.
19. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. Amplitude-phase distortion of the normal high-frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces – Proc. of NAS RA Mechanics. 2017. V70, №2. p. 28-42.
20. Aghayan K.L., Zakaryan V.G. Surface Electro-Elastic Shear Waves in Piezo-Electrical Half-Space with Semi-Infinite Electrode. Springer Nature Switzerland AG 2025 H. Altenbach. Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials. 2025. V.223, pp.1-16.
21. Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L. On a new method for determining asymptotic formulas in wave diffraction problems. NASA, Reports, 2010. V.110, №3. p.261-271.
22. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Вып.1. м. Физматанализ. 1958. 440 с.
23. Brichkov Yu. A., Prudnikov A.P. Integral transformations of generalized functions. M-Nauka., 1977., p. 287.
24. Reference mathematical library. /Functional analysis./ M. 1972., p. 544.

Сведения об авторе:
Агаян Каро Леренцович–д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник,
Институт Механики НАН Армении
Тел.: (37491) 485566
E–mail: karo.aghayan@gmail.com

Поступила в редакцию 12 июня 2025