

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 60 № 2 2025

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

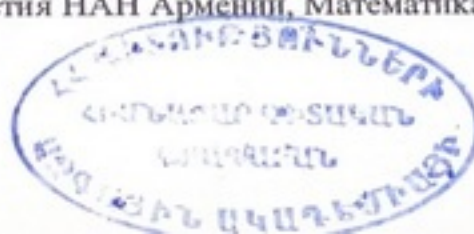
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ МАТЕМАТИКА

ТОМ 60 №2 2025



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

Известия НАН Армении. Математика.



ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Վ. Ս. Արաբեկյան	Գ. Ա. Կարազուլյան
Կ. Լ. Ավետիսյան	Յու. Ա. Կուտոյանց
Գ. Գ. Գևորգյան	Ռ. Վ. Համբարձումյան
Մ. Ս. Գինովյան	Ա. Հ. Հովհաննիսյան
Ա. Ս. Դալայան	Հ. Շահդուլյան
Ն. Բ. Ենգիբարյան	Ա. Շիրիկյան
Խ. Ա. Խաչատրյան	Բ. Ս. Նահապետյան
Վ. Կ. Օհանյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ)	Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Կ. Լ. Ավետիսյան	Բ. Ս. Նահապետյան
Ր. Վ. Ամբարձումյան	Դ. Ա. Կարազուլյան
Վ. Ս. Արաբեկյան	Ե. Ա. Կուտոյանց
Դ. Դ. Գևորգյան	Ռ. Վ. Համբարձումյան
Մ. Ս. Գինովյան	Ա. Հ. Հովհաննիսյան
Ա. Ս. Դալալյան	Հ. Շահդուլյան
Ն. Բ. Ենգիբարյան	Ա. Շիրիկյան
Վ. Կ. Օհանյան (зам. главного редактора)	Բ. Ս. Նահապետյան
	Բ. Մ. Պողոսյան

Ответственный секретарь՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 2, 2025, стр. 3 – 14.

О ТРАНЗИТИВНЫХ И ОДНОРОДНЫХ БИНАРНЫХ G -ПРОСТРАНСТВАХ

П. С. ГЕВОРКЯН, К. М. МЕЛЕНДЕС

Московский педагогический государственный университет, Россия
Universidad Pedagógica Nacional – Unidad 201 Oaxaca, Camino a la Zanjita S/N¹
E-mails: *pgev@yandex.ru; qmoralesme@conacyt.mx*

Аннотация. В данной статье изучаются понятия транзитивности и однородности в бинарных G -пространствах. Эти понятия совпадают в классе дистрибутивных бинарных G -пространств. Доказано, что в случае компактной группы G дистрибутивные транзитивные бинарные G -пространства являются пространствами смежных классов группы G с подходящим образом определённым бинарным G -действием. Однородные бинарные G -пространства топологически однородны и разбиваются на различные типы стабилизации. Для каждого из этих типов приведены соответствующие примеры.

MSC2020 number: 54H15.

Ключевые слова: однородные пространства; транзитивные действия; бинарные G -действия.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение однородных G -пространств связано с классификацией типов G -орбит. Исследование орбитных типов позволило подробно описать топологическую структуру однородных G -пространств как в общем случае, так и в важных частных случаях, например, в случаях свободных или собственных действий группы G . В частности, это позволило построить универсальные G -пространства для многих классов G -пространств.

Орбиты бинарных G -пространств изучались в работе [1], где было установлено, что многие понятия для G -пространств, такие как орбиты или пространство орбит, непосредственно не переносятся на бинарные G -пространства. Причина в том, что в бинарных G -пространствах орбиты могут пересекаться. Однако в работе [2] было доказано, что в специальном случае дистрибутивных бинарных G -пространств орбиты либо совпадают, либо имеют пустое пересечение. В общем случае орбиты могут быть как конечно, так и бесконечно порожденными. В случае дистрибутивных бинарных G -пространств орбиты конечно порождены.

¹Второй автор частично поддержан проектом Catedras CONACyT Project 1522

Вводятся понятия транзитивных и однородных бинарных G -пространств. Для дистрибутивных бинарных G -пространств эти понятия совпадают. Дана классификация транзитивных дистрибутивных бинарных G -пространств в случае компактной группы G . Эти пространства являются смежными классами группы G по замкнутым нормальным подгруппам с бинарным действием G посредством левого скрученного умножения. Как следствие, дана классификация свободных транзитивных дистрибутивных бинарных G -пространств при компактной группе G .

Однородные бинарные G -пространства являются топологически однородными пространствами. Свойства стабилизации однородных бинарных G -пространств играют важную роль для их исследования. Однородное бинарное G -пространство может иметь различные свойства стабилизации в различных точках. Эти свойства разделяют класс однородных бинарных G -пространств на типы, принимающие значения в натуральных числах или равные ∞ . Транзитивные бинарные G -пространства являются примерами первого типа. В работе [1] приведен пример бесконечно порожденного бинарного G -пространства. Подобные конструкции дают примеры дискретных бинарных G -пространств различных типов. Применение гиперсферических координат в вещественных евклидовых n -мерных пространствах дает примеры однородных бинарных G -пространств каждого конечного типа в случае недискретной абелевой топологической группы G .

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В дальнейшем G и H обозначают топологические группы, а X и Y — топологические пространства. Предполагается, что все отображения являются непрерывными.

Напомним, что *действие* группы G на пространстве X — это отображение

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X,$$

такое, что

$$\alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h, x)),$$

$$\alpha(e, x) = x$$

для любых $g, h \in G$ и $x \in X$, где e — нейтральный элемент группы G . Пространство X вместе с заданным действием α группы G называется G -пространством.

Обычно отображение α опускается и вместо $\alpha(g, x)$ используется запись gx . Тогда приведенные выше равенства принимают вид $g(hx) = (gh)x$ и $ex = x$.

Отображение $\varphi : X \longrightarrow Y$ между G -пространствами (G, X, α) и (G, Y, β) называется *эквивариантным*, если выполняется равенство $\varphi(\alpha(g, x)) = \beta(g, \varphi(x))$, или, в более простой записи, $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ для любых $g \in G$, $x \in X$.

Если X — G -пространство и $x \in X$, то подпространство $Gx = \{gx; g \in G, x \in X\} \subset X$ называется *орбитой* или *G -орбитой* точки $x \in X$.

G -пространство X называется *транзитивным*, если $Gx = X$ для любой точки $x \in X$. Известно, что если G — компактная группа, то любое транзитивное G -пространство эквивариантно гомеоморфно некоторому факторпространству G/H топологической группы G по замкнутой подгруппе H с действием G посредством левого умножения: $g(g'H) = (gg')H$ для любых $g, g' \in G$.

Отображение $\mu : G \times X^2 \longrightarrow X$ называется *бинарным действием* топологической группы G на пространстве X , если выполняются следующие равенства:

$$\mu(gh, x, y) = \mu(g, x, \mu(h, x, y)),$$

$$\mu(e, x, y) = y$$

для любых $g, h \in G$ и $x, y \in X$. В этом случае тройка (G, X, μ) называется *бинарным G -пространством*.

По аналогии с обычным действием группы G , вместо $\mu(g, x, y)$ применяется запись $g(x, y)$. В этих обозначениях равенства в определении бинарного действия принимают вид:

$$gh(x, y) = g(x, h(x, y)),$$

$$e(x, y) = y.$$

Отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ между бинарными G -пространствами (G, X, μ) и (G, Y, ν) называется *биэквивариантным*, если следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} G \times X \times X & \xrightarrow{1 \times \varphi \times \varphi} & G \times Y \times Y \\ \mu \downarrow & & \downarrow \nu \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

или, эквивалентно, если $\varphi(g(x, x')) = g(\varphi(x), \varphi(x'))$ для любых $g \in G$ и $x, x' \in X$.

Отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *биэквивморфизмом*, если оно является биэквивариантным гомеоморфизмом с биэквивариантным обратным отображением.

Для подмножества $K \subset G$ группы G и подмножества $A \subset X$ бинарного G -пространства X обозначим

$$K(A, A) = \{g(a_1, a_2); g \in K, a_1, a_2 \in A\}.$$

В частности, $g(A, A) = \{g\}(A, A)$ и $G(x, y) = G(\{x\}, \{y\})$.

Подмножество $A \subset X$ бинарного G -пространства X называется G -би-инвариантным или просто би-инвариантным, если выполняется равенство $G(A, A) = A$.

Если X — бинарное G -пространство и $x \in X$, то минимальное би-инвариантное подмножество X , содержащее x , называется *орбитой* точки x , и обозначается $[x]$.

Множество $G_{(x,x)} = \{g \in G; g(x, x) = x\}$ является подгруппой группы G , которую мы называем *стационарной подгруппой* или *подгруппой изотропии* точки $x \in X$.

Бинарное G -пространство называется *дистрибутивным*, если выполняется равенство

$$(1.1) \quad g(h(x, x'), h(x, x'')) = h(x, g(x', x''))$$

для любых точек $x, x', x'' \in X$ и любых элементов $g, h \in G$.

В работе [1] показано, что для дистрибутивных G -пространств справедливо равенство $[x] = G(x, x)$.

Эти и другие определения, понятия и результаты, использованные в данной статье без ссылок, можно найти в работах [3]–[10].

2. ТРАНЗИТИВНЫЕ БИНАРНЫЕ G -ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим топологическую группу G и топологическое пространство X .

Определение 2.1. Бинарное действие группы G на пространстве X называется *транзитивным*, если выполнено условие $G(x, x) = X$ для любой точки $x \in X$, то есть если существует ровно одна орбита, равная самому X . В этом случае X называется *транзитивным бинарным G -пространством*.

Определение 2.2. Бинарное действие группы G на пространстве X называется *свободным*, если для любой точки $x \in X$ стационарная группа $G_{(x,x)}$ является тривиальной. В этом случае пространство X называется *свободным бинарным G -пространством*.

Предложение 2.1. Пусть G — компактная группа, а $H \subset G$ — замкнутая нормальная подгруппа. Тогда факторпространство $G|H$ вместе с бинарным действием $\mu : G \times G|H \times G|H \rightarrow G|H$ группы G , заданным формулой

$$(2.1) \quad \mu(g, g_1H, g_2H) = g_1gg_1^{-1}g_2H, \quad \text{или} \quad g(g_1H, g_2H) = g_1gg_1^{-1}g_2H$$

для любых элементов $g, g_1, g_2 \in G$, является *транзитивным бинарным G -пространством*.

Доказательство. Поскольку H является нормальной подгруппой группы G , несложно доказать, что отображение μ определено корректно.

Заметим, что μ действительно является бинарным действием группы G на $G|H$: Действительно, $e(g_1H, g_2H) = g_2H$ и

$$\begin{aligned} gg'(g_1H, g_2H) &= g_1gg'g_1^{-1}g_2H = g_1gg_1^{-1}g_1g'g_1^{-1}g_2H = \\ &= g(g_1H, g_1g'g_1^{-1}g_2H) = g(g_1H, g'(g_1H, g_2H)). \end{aligned}$$

Очевидно, что бинарное действие μ является транзитивным.

Предложение 2.2. Пусть G — компактная группа, а H и K — замкнутые нормальные подгруппы группы G . Тогда между транзитивными бинарными G -пространствами $G|H$ и $G|K$ существует биеквивариантное отображение $G|H \rightarrow G|K$ тогда и только тогда, когда H является подгруппой K .

Доказательство. Пусть H является подгруппой K . Определим отображение $f : G|H \rightarrow G|K$ формулой $f(gH) = gK$. Заметим, что f корректно определено, то есть если $gH = g'H$, то $f(gH) = f(g'H)$. Действительно, из $gH = g'H$ следует, что $g^{-1}g' \in H \subset K$, $g^{-1}g'K = K$, $g'K = gK$, а значит $f(gH) = f(g'H)$.

Отображение f биеквивариантно:

$$\begin{aligned} f(g(g_1H, g_2H)) &= f(g_1gg_1^{-1}g_2H) = g_1gg_1^{-1}g_2K = \\ &= g(g_1K, g_2K) = g(f(g_1H), f(g_2H)). \end{aligned}$$

Обратно, пусть $f : G|H \rightarrow G|K$ — произвольное биеквивариантное отображение, и предположим, что $f(H) = aK$ для некоторого $a \in G$. Из биеквивариантности отображения f следует, что для любого $h \in H$ выполняется $f(h(H, H)) = h(f(H), f(H)) = h(aK, aK) = aha^{-1}aK = ahK$. С другой стороны, $f(h(H, H)) = f(hH) = f(H) = aK$. Таким образом, $ahK = aK$, $hK = K$. Следовательно, $h \in K$, а значит, $H \subset K$.

Теорема 2.1. Пусть G — компактная группа. Тогда любое транзитивное дистрибутивное бинарное G -пространство X биеквиморфно бинарному G -пространству $(G, G|H, \mu)$, где H — некоторая нормальная подгруппа группы G .

Доказательство. Выберем любую точку $x \in X$ и рассмотрим подгруппу изотропии $H = G_{(x,x)}$ точки x . Для любого $h \in H$ и $g \in G$ из дистрибутивности

бинарного действия следует, что

$$\begin{aligned} ghg^{-1}(x, x) &= gh(x, g^{-1}(x, x)) = g^{-1}(gh(x, x), gh(x, x)) = \\ &= g^{-1}(g(x, h(x, x)), g(x, h(x, x))) = g^{-1}(g(x, x), g(x, x)) = \\ &= g(x, g^{-1}(x, x)) = e(x, x) = x. \end{aligned}$$

Таким образом, $gHg^{-1} = H$, то есть H является нормальной подгруппой группы G .

Теперь определим $\varphi : G|H \rightarrow X$ формулой $\varphi(gH) = \varphi(gG_{(x,x)}) = g(x, x)$, где $g \in G$, $x \in X$.

Заметим, что отображение φ является биекцией. Оно также непрерывно по определению факторпространства $G|H$ и непрерывности отображения $g \mapsto g(x, x)$. Поскольку пространство $G|G_{(x,x)}$ компактно, отображение φ является гомеоморфизмом.

Остается показать, что φ биэквивариантно, то есть выполняется равенство

$$\varphi(g(g_1H, g_2H)) = g(\varphi(g_1H), \varphi(g_2H)).$$

Используя дистрибутивность бинарного действия группы G на X , получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(g(g_1H, g_2H)) &= \varphi(g_1gg_1^{-1}g_2H) = g_1gg_1^{-1}g_2(x, x) = \\ &= g_1(x, gg_1^{-1}g_2(x, x)) = g_1(x, g(x, g_1^{-1}g_2(x, x))) = g(g_1(x, x), g_1(x, g_1^{-1}g_2(x, x))) = \\ &= g(g_1(x, x), g_2(x, x)) = g(\varphi(g_1H), \varphi(g_2H)). \end{aligned}$$

для любых $g, g_1, g_2 \in G$, $x \in X$. Следовательно, φ — биэквивморфизм.

Следующая теорема является следствием теоремы 2.1 и предложения 2.1.

Теорема 2.2. Пусть G — компактная группа. Тогда любое свободное транзитивное дистрибутивное бинарное G -пространство биэквивморфно бинарному G -пространству (G, G, η) с бинарным действием

$$(2.2) \quad \eta(g, g_1, g_2) = g_1gg_1^{-1}g_2,$$

где $g, g_1, g_2 \in G$.

3. ОДНОРОДНЫЕ БИНАРНЫЕ G -ПРОСТРАНСТВА

Определение 3.1. Пусть X — бинарное G -пространство. Если существует точка $x \in X$ такая, что $[x] = X$, то пространство X называется однородным бинарным G -пространством. В этом случае x называется точкой стабилизации пространства X .

Следующий пример показывает, что если X является однородным бинарным G -пространством, то не обязательно каждая точка $x \in X$ является точкой стабилизации X .

Пример 3.1. Бинарное G -пространство (G, X, μ) , где $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{Z}$, а бинарное действие $\mu : G \times X \times X \rightarrow X$ задано правилом

$$(3.1) \quad \mu(n, x, x') = n(x, x') = nx + x',$$

является однородным. Заметим, что $x = 1$ — точка стабилизации: $[1] = G(1, 1) = X$. Однако $x = 0$ не является точкой стабилизации, так как $[0] = G(0, 0) = \{0\} \neq X$.

Заметим, что транзитивные бинарные G -пространства являются однородными. Обратное неверно. Однако для дистрибутивных бинарных G -пространств верно следующее.

Предложение 3.1. Любое однородное дистрибутивное бинарное G -пространство является транзитивным.

Доказательство. Рассмотрим однородное дистрибутивное бинарное G -пространство X . Согласно определению 3.1, существует точка $x_0 \in X$, такая что $[x_0] = X$. Так как X является дистрибутивным, то справедливо равенство $[x_0] = G(x_0, x_0)$, и для любой точки $x \in X$, согласно [2, предложение 2], выполняется $G(x, x) = [x] = [x_0] = G(x_0, x_0) = X$. Следовательно, X — транзитивное бинарное G -пространство.

Теорема 3.1. Однородные бинарные G -пространства являются топологически однородными пространствами.

Доказательство. Пусть X — однородное бинарное G -пространство. Согласно определению 3.1, существует точка $x_0 \in X$ такая, что $[x_0] = X$.

Для доказательства топологической однородности пространство X достаточно показать, что для любой точки $x^* \in X$ существует гомеоморфизм $\varphi : X \rightarrow X$ такой, что $\varphi(x_0) = x^*$.

Рассмотрим следующую последовательность подмножеств бинарного G -пространства X :

$$(3.2) \quad G^1(x_0) = G(x_0, x_0), \dots, G^n(x_0) = G(G^{n-1}(x_0), G^{n-1}(x_0)), \dots$$

где $n = 1, 2, \dots$

Из [1, предложение 7] следует, что

$$[x_0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} G^n(x_0),$$

а значит, по условию,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G^n(x_0).$$

Следовательно, для любой точки $x \in X$ существует натуральное число n такое, что $x \in G^n(x_0)$.

Предположим, что $x^* \in G^1(x_0) = G(x_0, x_0)$, то есть существует элемент $g_0 \in G$ такой, что $g_0(x_0, x_0) = x^*$. Тогда отображение $\varphi : X \rightarrow X$, определяемое как

$$\varphi(x) = g_0(x_0, x),$$

является гомеоморфизмом и переводит x_0 в x^* : $\varphi(x_0) = g_0(x_0, x_0) = x^*$.

Допустим, что для любой точки $x \in G^n(x_0)$ существует гомеоморфизм $\varphi : X \rightarrow X$ такой, что $\varphi(x_0) = x$, и рассмотрим точку $x^* \in G^{n+1}(x_0)$. Поскольку $G^{n+1}(x_0) = G(G^n(x_0), G^n(x_0))$, то существуют $x', x'' \in G^n(x_0)$ и $g' \in G$, такие что

$$x^* = g'(x', x'').$$

Так как $x'' \in G^n(x_0)$, существует гомеоморфизм $\varphi' : X \rightarrow X$ такой, что

$$\varphi'(x_0) = x''.$$

Рассмотрим отображение $\varphi'' : X \rightarrow X$, определяемое как

$$\varphi''(x) = g'(x', x),$$

для любого $x \in X$, которое является гомеоморфизмом. Тогда для гомеоморфизма $\varphi = \varphi'' \circ \varphi' : X \rightarrow X$ выполняется

$$\varphi(x_0) = \varphi''(\varphi'(x_0)) = \varphi''(x'') = g'(x', x'') = x^*,$$

что и требовалось доказать.

Определение 3.2. Однородное бинарное G -пространство X назовем стабилизирующимся на n -м шаге в точке x , если $G^n(x) = X$, но $G^{n-1}(x) \neq X$, где $G^n(x)$ определено как в (3.2).

Определение 3.2 делит конечно порожденные орбиты (см. [1, определение 4]) на типы стабилизации. Важной задачей в изучении однородных бинарных G -пространств является построение примеров бинарных G -пространств для каждого типа стабилизации.

Справедливо следующее простое утверждение.

Предложение 3.2. *Однородные дистрибутивные бинарные G -пространства стабилизируются на шаге 1 в любой точке.*

Доказательство. Так как однородное дистрибутивное бинарное G -пространство X транзитивно (согласно предложению 3.1), имеем $G^1(x) = G(x, x) = X$ для любой точки $x \in X$.

Однородные бинарные G -пространства могут содержать точки, орбиты которых не совпадают со всем пространством (см. пример 3.1). Также верно, что однородное бинарное G -пространство может иметь разные свойства стабилизации в различных точках.

Пример 3.2 (Стабилизация в различных точках на шагах 1 и 2). *Рассмотрим аддитивную циклическую группу $\mathbb{Z}_5$ из пяти элементов. Группа её обратных элементов $G = \{1, 2, 3, 4\}$ действует на себя умножением слева.*

Теперь рассмотрим пространство $X = G$ с бинарным G -действием, заданным формулой

$$(3.3) \quad g(x, x') = g^x x'.$$

Легко проверить, что $G^1(1) = G(1, 1) = X$. Следовательно, бинарное G -пространство X стабилизируется на шаге 1 в точке $x = 1$.

С другой стороны, прямым вычислением получаем $G^1(2) = G(2, 2) = \{2, 3\}$ и $G^2(2) = G(G^1(2), G^1(2)) = X$. Таким образом, бинарное G -пространство X стабилизируется в точке $x = 2$ на шаге 2.

Пример 3.3 (Стабилизация на шаге 3). *Рассмотрим симметрическую группу из шести элементов S_3 , заданную как*

$$(3.4) \quad S_3 = \langle h, x : h^2 = x^2 = (xh)^3 = e \rangle.$$

Очевидно, что

$$(3.5) \quad S_3 = \{e, x, h, xh, hx, xhx\}$$

и $xhx = hxx$.

Теперь рассмотрим подгруппу $G = \{e, h\} \subset S_3$ и определим бинарное действие $\mu : G \times X^2 \rightarrow X$ группы G на $X = S_3$ формулой

$$(3.6) \quad g(x, x') = x^{-1}gx'.$$

Прямым вычислением получаем:

$$G^1(x) = G(x, x) = \{x, xh\}, \quad G^2(x) = \{e, h, x, xh\}, \quad G^3(x) = X.$$

Таким образом, бинарное G -пространство X стабилизируется в точке x на шаге 3.

Бесконечные бинарные G -пространства могут стабилизироваться на шаге ∞ .

Пример 3.4 (Стабилизация на шаге ∞). Пусть G — бесконечная группа. Предположим, что существуют элементы $h, x \in G$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Элементы h и x имеют порядок 2: $h^2 = x^2 = e$, где e — нейтральный элемент группы G ;

2. Элемент $xh \in G$ имеет бесконечный порядок.

Подгруппа $H = \{e, h\}$ группы G бинарно действует на G по формуле (3.6).

Как показано в [1, теорема 3], орбита элемента $x \in G$ является бесконечно порожденной. Следовательно, орбита $[x]$, рассматриваемая как однородное бинарное H -пространство, стабилизируется в точке x на шаге ∞ .

Далее мы приведем примеры стабилизации на конечных шагах для бесконечных не дискретных бинарных G -пространств.

Пример 3.5. Пусть $G = \mathbb{R}$ — аддитивная группа действительных чисел, а $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость. Определим непрерывное отображение $\mu : G \times X^2 \rightarrow X$ по формуле

$$(3.7) \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (g \cdot \cos x_1 + x'_1, g \cdot \sin x_1 + x'_2),$$

где $g \in G$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2) \in X$, и было применено обозначение $\mu(g, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Легко проверить, что μ является бинарным действием группы G на пространстве X .

Докажем, что это бинарное G -пространство является однородным и стабилизируется на шаге 2 в точке $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, то есть $G^2(x_0) = X$.

Сначала вычислим $G^1(\mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$. Рассмотрим элемент $g \in G$. Тогда:

$$g(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = (g \cdot \cos 0 + 0, g \cdot \sin 0 + 0) = (g, 0).$$

Таким образом, $G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = \mathbb{R} \times \{0\} \neq X$.

Теперь рассмотрим любую точку $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in X$. Возьмем $g = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $x'_1 = \arctg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, если $x_1 \neq 0$, и $x'_1 = \pi/2$, если $x_1 = 0$. Тогда можно проверить, что

$$g((x'_1, 0), (0, 0)) = \mathbf{x}.$$

Следовательно, $G^2(x_0) = X$.

Этот пример можно обобщить следующим образом.

Пример 3.6. Пусть $G = \mathbb{R}$ — аддитивная группа действительных чисел, а $X = \mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство. Рассмотрим непрерывное отображение

$$\mu : G \times X^2 \rightarrow X, \quad \mu(g, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n),$$

заданное следующими формулами:

$$\begin{aligned} (3.8) \quad & z_1 = g \cdot \cos x_1 + y_1, \\ & z_2 = g \cdot \sin x_1 \cdot \cos x_2 + y_2, \\ & z_3 = g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \cos x_3 + y_3, \\ & \dots \\ & z_{n-1} = g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \dots \cdot \sin x_{n-2} \cdot \cos x_{n-1} + y_{n-1}, \\ & z_n = g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \dots \cdot \sin x_{n-2} \cdot \sin x_{n-1} + y_n \end{aligned}$$

для всех $g \in G$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство того, что отображение μ является бинарным действием группы G на X , оставим читателю.

Докажем, что это бинарное G -пространство является однородным и стабилизируется на n -м шаге в точке $\mathbf{x}_0 = (0, \dots, 0)$, то есть

$$(3.9) \quad G^n(\mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^n.$$

Доказательство будет проведено методом математической индукции с использованием гиперсферических координат в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Сначала вычислим $G^1(\mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$. Для любого элемента $g \in G$, согласно (3.8), имеем:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) &= (g \cdot \cos 0 + 0, g \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 + 0, g \cdot \sin 0 \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 + 0, \dots \\ &\dots, g \cdot \sin 0 \cdot \dots \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 + 0, g \cdot \sin 0 \cdot \dots \cdot \sin 0 + 0) = (g, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, $G^1(\mathbf{x}_0) = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$.

Теперь предположим, что $G^{k-1}(\mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^{k-1}$. Докажем, что тогда $G^k(\mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^k$. Для этого достаточно показать, что

$$G(G^{k-1}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^k.$$

Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k-1}$ и обозначим $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$. Из (3.8) получаем:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= g \cdot \cos x_1, \\
 z_2 &= g \cdot \sin x_1 \cdot \cos x_2, \\
 z_3 &= g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \cos x_3, \\
 &\dots \\
 z_{k-1} &= g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \dots \cdot \sin x_{k-2} \cdot \cos x_{k-1}, \\
 z_k &= g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \dots \cdot \sin x_{k-1}, \\
 z_{k+1} &= 0, \\
 &\dots \\
 z_n &= 0,
 \end{aligned}$$

что является представлением точки $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ в гиперсферических координатах $(g, x_1, \dots, x_{k-1})$. Следовательно, $G(G^{k-1}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^k$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ существует (недискретная, абелева) топологическая группа G и (недискретное) однородное бинарное G -пространство X , стабилизирующееся на n -м шаге.*

Abstract. In this paper, the notions of transitivity and homogeneity in binary G -spaces are studied. These notions coincide for distributive binary G -spaces. For compact G , it is shown that distributive transitive binary G -spaces are coset spaces with a suitably defined binary G -action. Homogeneous binary G -spaces are topologically homogeneous and are separated into distinct stabilization types. Examples of each type are constructed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. S. Gevorgyan, A. A. Nazaryan, “On Orbits and Bi-invariant Subsets of Binary G -Spaces”, Math Notes **109**, 38 – 45 (2021).
- [2] P. S. Gevorgyan, “On Orbit Spaces of Distributive Binary G -Spaces”, Mathematical Notes **112**(2), 177 – 182 (2022).
- [3] G. E. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, New York (1972).
- [4] P. S. Gevorgyan, “Groups of binary operations and binary G -spaces”, Topology Appl., **201**, 18 – 28 (2016).
- [5] P. S. Gevorgyan, “Groups of invertible binary operations of a topological space”, J. Contemp. Math. Anal. **53** (1), 16 – 20 (2018).
- [6] P. S. Gevorgyan, “On binary G -spaces”, Math Notes **96**, 600 – 602 (2014).
- [7] P. S. Gevorgyan, Q. Morales, Universal spaces for binary G -spaces, Topology Appl., accepted.
- [8] P. S. Gevorgyan, S. D. Iliadis, “Groups of generalized isotopies and generalized G -spaces”, Matematicki Vesnik **70.2**, 110 – 119 (2018).
- [9] R. Jimenez, Q. Morales Melendez, “On loop extensions satisfying one single identity and cohomology of loops”, Communications in Algebra, **45**(9), 3667 – 3690 (2017).
- [10] Yu. M. Movsisyan, “Hyperidentities in algebras and varieties”, Russian Math. Surveys, **53**:1, 57 – 108 (1998).

Поступила 20 сентября 2024

После доработки 20 сентября 2024

Принята к публикации 12 декабря 2024

ОБ УСЛОВНО УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

М. Г. ГРИГОРЯН, Л. Н. ГАЛОЯН

Ереванский государственный университет¹
E-mails: *gmarting@ysu.am*; *levongaloyan@ysu.am*

Аннотация. В работе доказано, что любую измеримую, почти всюду конечную функцию можно превратить в условно универсальную функцию относительно тригонометрической системы, изменяя её значения на множестве сколь угодно малой меры.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: ряд Фурье; универсальный тригонометрический ряд; универсальная функция; условно универсальная функция; сходимости почти всюду.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже условимся использовать следующие обозначения: $|E|$ – мера Лебега измеримого множества E , $\mathbf{N}$ – совокупность натуральных чисел, $L^p(E)$ ($p > 0$) – класс измеримых функций, суммируемых со степенью p на E , $L^0(E)$ – класс почти везде конечных измеримых функций на E и $M(E)$ – класс всех измеримых функций на E . Под сходимостью в $L^0(E)$ и в $M(E)$ будем понимать сходимости почти всюду на E .

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – ортонормированная система на $[a, b]$. Для коэффициентов Фурье функции $U \in L^1[a, b]$ по системе Φ мы будем использовать обозначение

$$c_k(U) = \int_a^b U(x) \varphi_k(x) dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

В частности, в случае тригонометрической системы положим

$$a_k(U) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos kx dx, \quad b_k(U) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \sin kx dx.$$

Пусть $S(E)$ – одно из пространств $L^p(E)$, $p \geq 0$ или $M(E)$.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА

Определение 1.1. *Ряд $\sum f_k$, где $f_k \in S(E)$, называется универсальным в $S(E)$, если для каждой функции $f \in S$ существует подпоследовательность натуральных чисел n_k такая, что подпоследовательность частичных сумм этого ряда с номерами n_k сходится к f в $S(E)$.*

Работа продолжает исследования авторов ([1]-[6]), связанных с существованием функций, ряды Фурье которых по тригонометрической системе универсальны в некоторых, определённых смыслах, в различных функциональных классах.

Существование функций и рядов, универсальных в том или ином смысле в различных классах функций, изучалось многими математиками, и публикации по этой тематике регулярно появляются в математической печати.

Понятие универсального ряда (как по классическим, так и по общим ортонормальным системам) восходит к работам Д. Меньшова [7], и А. Талаляна [8]. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками.

Первая работа, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду является работа [7] Д. Меньшова. Ряды вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ по любой полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, универсальные в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду были построены в работе [8] А. Талаляном. Гроссе-Эрдман [9] доказал существование универсального ряда Тейлора в классе всех непрерывных на $[-1, 1]$ функций с $f(0) = 0$.

Необходимо отметить, что первые примеры универсальных функций были построены Биркгофом [10] в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, Марцинкевичем [11] в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции (см. также [12]-[15]).

Определение 1.2. *Будем говорить, что функция $U \in L^1(E)$ для класса $S(E)$ относительно системы Φ :*

- а. универсальна**, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в $S(E)$,
- б. условно универсальна**, если существует последовательность $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, такая, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ универсален в $S(E)$.

Отметим, что в работах [16] – [19] были определены также и другие типы (почти универсальные, квази универсальные, универсальные в смысле знаков, универсальные в смысле перестановок) универсальных функций.

Замечание 1.1. *Поскольку по теореме А. Колмогорова ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится в $L^p[-\pi, \pi]$, где $p \in (0, 1)$, то не существует функции $U \in L^1[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой по тригонометрической системе был бы универсален в классе всех измеримых функций. Таким образом, не существует функции $U \in L^1[-\pi, \pi]$, универсальной для классов $L^0[-\pi, \pi]$ и $M[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы. Тем не менее, в работе доказывается следующая теорема:*

Теорема 1.1. *Существует интегрируемая функция U , которая является условно универсальной для класса $M[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы.*

Оказывается, что любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения её значений на некотором множестве сколь угодно малой меры можно превратить в условно универсальную функцию относительно тригонометрической системы.

Теорема 1.2. *Существует интегрируемая функция U , со свойствами:*

- (1) *U является условно универсальной для класса $L^0[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы.*
- (2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [-\pi, \pi]$, с мерой $|E| \geq 2\pi - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[-\pi, \pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[-\pi, \pi]$ такую, что*

$$g(x) = f(x), \quad x \in E, \quad |a_k(g)| = |a_k(U)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad |b_k(g)| = |b_k(U)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из последней теоремы следует, что

Теорема 1.3. *Для любого положительного числа ε существует измеримое множество $E \subset [-\pi, \pi]$ с мерой $|E| \geq 2\pi - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[-\pi, \pi]$ можно найти такую функцию $g(x) \in L^1[-\pi, \pi]$, что $g(x) = f(x)$, $x \in E$, и $g(x)$ является условно универсальной для класса $M[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы.*

Замечание 1.2. Нетрудно видеть, что, каковы бы ни были число $p \in [1, \infty)$ и ограниченная ортонормированная система Φ , не существует функции $U \in L^1[-\pi, \pi]$, которая для класса $L^p[-\pi, \pi]$, $p \geq 1$, относительно системы Φ была бы условно универсальной. Однако (как доказали авторы в [4]), для классов L^p , $p \in (0, 1)$ относительно тригонометрической системы существуют как условно универсальные функции, так и универсальные функции в смысле знаков.

Интересно было бы выяснить ответ на следующий вопрос:

Вопрос 1. Существует ли функция $U \in L^1[-\pi, \pi]$, которая для класса $L^p[-\pi, \pi]$, $p \geq 1$ относительно тригонометрической системы (соответственно, относительно системы Уолша) была бы универсальной в смысле перестановок?

Замечание 1.3. Метод доказательства теоремы 1.3 позволяет получить новый подход для построения универсальных рядов: любую измеримую почти всюду конечную функцию, путем изменения ее значений на некотором множестве сколь угодно малой меры, можно превратить в такую функцию, что после выбора соответствующих знаков для членов ряда Фурье (как для тригонометрической, так и для системы Уолша) измененной функции можно достичь того, что полученный ряд уже будет универсальным в $M[-\pi, \pi]$.

При доказательстве теоремы 1.3 мы воспользуемся следующей леммой, доказанной авторами в работе [1].

Лемма 1.1. Пусть даны числа $n_0 \in \mathbf{N}$, $\varepsilon, \theta, \mu \in (0, 1)$ и ступенчатая функция $f(x)$. Тогда можно найти измеримое множество $E \subset [-\pi, \pi]$, функцию $g(x) \in L^1[-\pi, \pi]$ и полиномы по тригонометрической системе вида:

$$U(x) = \sum_{k=n_0}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad Q(x) = \sum_{k=n_0}^n \delta_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

удовлетворяющие условиям:

(1)

$$\delta_k = \pm 1, \quad k \in [n_0, n), \quad |E| > 2\pi - \varepsilon;$$

(2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U(x)| dx = \|U\|_{L^1} < \theta, \quad \|g(x)\|_{L^1} < 4\|f\|_{L^1};$$

(3)

$$g(x) = f(x), \quad x \in E, \quad \|g(x) - Q(x)\|_{L^1} < \mu.$$

Замечание 1.4. Нетрудно видеть, что в формулировке леммы 1.1 вместо ступенчатой функции можно взять любой тригонометрический полином $f(x)$.

Замечание 1.5. Из условия 3 леммы вытекает, что выполняется также следующее условие:

$$\int_E |f(x) - Q(x)| dx < \mu.$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть F — множество всех полиномов по тригонометрической системе с рациональными коэффициентами. Перенумеруем элементы F и представим их в виде последовательности

$$(2.1) \quad F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Применим Лемму 1.1 (и замечания к ней), полагая в ее формулировке

$$n_0 = 1, \quad \varepsilon = 2^{-2}, \quad \theta = \eta = 2^{-3}, \quad f(x) = f_1(x).$$

Тогда определяются измеримое множество $E_1^{(1)} \subset [-\pi, \pi]$ с мерой $|E_1^{(1)}| > 2\pi - 2^{-2}$, функция $g_1(x)$ и полиномы по тригонометрической системе вида:

$$U_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_2-1} a_k^{(1)} \cos kx + b_k^{(1)} \sin kx, \quad Q_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_2-1} \delta_k^{(1)} (a_k^{(1)} \cos kx + b_k^{(1)} \sin kx),$$

где $\delta_k^{(1)} = \pm 1$, $k \in [M_1, M_2)$, ($M_1 = 1$), удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \|U_1^{(1)}\|_{L^1} &< 2^{-3}, \quad \|g_1^{(1)}\|_{L^1} < 4 \|f_1\|_{L^1}, \\ g_1^{(1)}(x) &= f_1(x), \quad x \in E_1, \quad \|g_1^{(1)} - Q_1^{(1)}\|_{L^1} < 2^{-3}. \end{aligned}$$

Снова применим Лемму 1.1 с замечанием 1.4, полагая в ее формулировке

$$n_0 = M_2, \quad \varepsilon = 2^{-3}, \quad \theta = \eta = 2^{-3}, \quad f(x) = f_1(x) - U_1^{(1)}(x).$$

Тогда определяются измеримое множество $E_1^{(2)} \subset [-\pi, \pi]$ с мерой $|E_1^{(2)}| > 2\pi - 2^{-3}$ и полиномы по тригонометрической системе вида:

$$U_1^{(2)}(x) = \sum_{k=M_2}^{M_3-1} a_k^{(1)} \cos kx + b_k^{(1)} \sin kx, \quad Q_1^{(2)}(x) = \sum_{k=M_2}^{M_3-1} \delta_k^{(1)} (a_k^{(1)} \cos kx + b_k^{(1)} \sin kx),$$

где $\delta_k^{(1)} = \pm 1$, $k \in [M_2, M_3)$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \|U_1^{(2)}\|_{L^1} &< 2^{-3}, \\ \int_{E_1^{(2)}} |(f_1(x) - U_1^{(1)}(x)) - Q_1^{(2)}(x)| dx &< 2^{-3}. \end{aligned}$$

Продолжая эти рассуждения, мы можем по индукции определить последовательности множеств $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)} \subset [-\pi, \pi]$, функций $\{g_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, и полиномов $\{U_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{U_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^\infty$ по тригонометрической системе вида:

$$(2.2) \quad U_n^{(1)}(x) = \sum_{k=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1} a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx, \quad U_n^{(2)}(x) = \sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx,$$

$$(2.3) \quad Q_n^{(1)}(x) = \sum_{k=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1} \delta_k^{(n)} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx),$$

$$Q_n^{(2)}(x) = \sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} \delta_k^{(n)} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx),$$

которые для каждого $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяют условиям:

$$(2.4) \quad \delta_k^{(n)} = \pm 1, \quad k \in [M_{2n-1}, M_{2n+1}),$$

$$(2.5) \quad \|U_n^{(1)}\|_{L^1} < 2^{-3(n+1)}, \quad \|g_n^{(1)}\|_{L^1} < 4 \|f_n\|_{L^1},$$

$$(2.6) \quad g_n^{(1)}(x) = f_n(x), \quad x \in E_n^{(1)}, \quad |E_n^{(1)}| > 2\pi - 2^{-2n},$$

$$(2.7) \quad \|g_n^{(1)} - Q_n^{(1)}\|_{L^1} < 2^{-3(n+1)},$$

$$(2.8) \quad \|U_n^{(2)}\|_{L^1} < 2^{-4n}, \quad |E_n^{(2)}| > 2\pi - 2^{-2n-1},$$

$$(2.9) \quad \int_{E_n^{(2)}} \left| f_n(x) - \sum_{j=1}^n (U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x)) \right| dx < 2^{-4n}.$$

Положим

$$(2.10) \quad a_0 = 1, \quad a_k = a_k^{(n)}, \quad b_k = b_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2n-1}, M_{2n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из (2.5) и (2.8) следует

$$(2.11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n^{(1)} + U_n^{(2)}\|_{L^1} < \infty.$$

Определим функцию $U(x)$ следующим образом:

$$(2.12) \quad U(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^2 U_n^{(j)}(x) \right).$$

Из (2.11) следует, что $U(x) \in L^1[-\pi, \pi]$. Далее рассмотрим ряд

$$(2.13) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Из (2.2), (2.10) и (2.11) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| 1 + \sum_{k=1}^{M_{2n+1}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - U(x) \right\|_{L^1} \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \|U_m^{(1)} + U_m^{(2)}\|_{L^1} = 0.$$

Следовательно (2.13) является рядом Фурье функции U :

$$a_0(U) = 1, \quad a_k = a_k(U), \quad b_k = b_k(U), \quad k \geq 1.$$

Положим:

$$(2.14) \quad \delta_k = 1, \quad k \in \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [M_{2n-1}, M_{2n}),$$

и

$$(2.15) \quad \delta_k = \delta_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2n}, M_{2n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ясно, что (см. (2.14), (2.15)) $\delta_k = \pm 1$, $k \geq 1$. Докажем, что ряд

$$(2.16) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k (a_k(U) \cos kx + b_k(U) \sin kx)$$

универсален в пространстве $L^0[-\pi, \pi]$.

Пусть $f(x)$ произвольная функция из $L^0[-\pi, \pi]$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности (2.1) такую, что

$$(2.17) \quad |\{x \in [-\pi, \pi) : |f(x) - 1 - f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k-1}\}| \geq 2\pi - 2^{-k-2}, \quad k \geq 1.$$

Положим

$$(2.18) \quad H_k = \{x \in [-\pi, \pi) : |f(x) - 1 - f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k-1}\}.$$

$$(2.19) \quad G_k = \left\{ x \in E_{n_k}^{(2)} : \left| f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right| \leq 2^{-k-1} \right\}.$$

Имеем (см. (2.17) и (2.18))

$$(2.20) \quad |H_k| \geq 2\pi - 2^{-k-2}, \quad k \geq 1.$$

Далее, из (2.9) и (2.19) следует

$$2^{-k-1} \left| E_{n_k}^{(2)} \setminus G_k \right| \leq \int_{E_{n_k}^{(2)} \setminus G_k} \left| f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right| dx \leq$$

$$\int_{E_{n_k}^{(2)}} \left| f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right| dx \leq 2^{-4k}.$$

Отсюда и из (2.8) вытекает

$$(2.21) \quad |G_k| \geq |E_{n_k}^{(2)}| - 2^{-2k-1} \geq 2\pi - 4^{-k}, \quad k \geq 1.$$

Положим

$$(2.22) \quad G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} H_k \cap G_k \right)$$

Ясно, (см. (2.20)-(2.22))

$$(2.23) \quad |G| = 2\pi.$$

Учитывая соотношения (2.17), (2.19) и (2.22) находим, что на множестве G (т.е почти всюду) имеет место:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) - 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right) = 0.$$

Отсюда и из (2.2), (2.3), (2.14) – (2.16) почти всюду на $[-\pi, \pi]$ будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{m=1}^{M_{2n_k+1}-1} \delta_m(a_m(U) \cos mx + b_m(U) \sin mx) \right) = f(x), \quad x \in G.$$

Первая часть теоремы 1.2 доказана.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Пусть ε – любое положительное число.

Положим

$$(2.24) \quad E = \bigcap_{k=k_0}^{\infty} E_k^{(1)}, \quad k_0 = [-\log_2 \varepsilon] + 1.$$

Ясно, что (см. (2.6))

$$(2.25) \quad |E| > 2\pi - \varepsilon.$$

Пусть $f(x)$ произвольная функция из $L^1[-\pi, \pi]$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ($k_1 > k_0$) из последовательности

(2.1) такую, что

$$(2.26) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - 1 - \sum_{n=1}^N f_{k_n} \right\|_{L^1} = 0,$$

где

$$(2.27) \quad \|f_{k_n}\|_{L^1} < 2^{-8n}, \quad n \geq 2.$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, функции $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$ и $g_0(x), g_1(x), \dots, g_{q-1}(x)$ удовлетворяющие для всех $1 \leq l < q$ условиям:

$$(2.28) \quad \begin{aligned} g_l(x) &= f_{k_l}(x), \quad x \in E, \\ \|g_l\|_{L^1} &< 2^{-2(l+1)}, \\ \left\| \sum_{j=1}^l \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(1)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\|_{L^1} &< 2^{-2(l+1)}, \end{aligned}$$

где

$$U_n(x) = U_n^{(1)}(x) + U_n^{(2)}(x).$$

Натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ выберем таким образом, чтобы элемент f_{ν_q} из последовательности (2.1) удовлетворял условию:

$$(2.29) \quad \left\| \left\{ \sum_{j=1}^{q-1} \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(1)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\} - f_{\nu_q} \right\|_{L^1} \leq 2^{-4(q+3)}.$$

В силу (2.28) и (2.29) имеем

$$(2.30) \quad \|f_{\nu_q}\|_{L^1} \leq 2^{-3(q+1)}.$$

Положим

$$(2.31) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x) + [g_{\nu_q}^{(1)}(x) - f_{\nu_q}(x)],$$

Из (2.6), (2.24) и (2.31) вытекает

$$(2.32) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E, \quad q \geq 1.$$

Учитывая соотношения (2.5), (2.7) – (2.9), (2.11), (2.29), (2.30) для всех $q \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^q \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(1)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\|_{L^1} \leq \\ & \leq \left\| \left\{ f_{k_q} - \sum_{j=1}^{q-1} \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(1)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\} - f_{\nu_q} \right\|_{L^1} + \end{aligned}$$

$$+ \|Q_{\nu_q}^{(1)}\|_{L^1} + \left(\sum_{n=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q} (\|U_n^{(1)}\|_{L^1} + \|U_n^{(2)}\|_{L^1}) \right) < 2^{-2q-2}.$$

Из (2.27), (2.30) и (2.31) для каждого $q \geq 1$ следует

$$(2.33) \quad \|g_q\|_{L^1} \leq \|f_{k_q}\|_{L^1} + \|g_{\nu_q}^{(1)}\|_{L^1} + \|f_{\nu_q}\|_{L^1} \leq 2^{-2q-2}.$$

Ясно, что по индукции определяются функции $\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ ($g_1(x) = f_{k_1}(x)$) и полиномы $\{H_{\nu_q}(x)\}$, удовлетворяющие условиям (2.29)-(2.33) для всех $q \geq 1$. Из (2.33) вытекает, что

$$\sum_{q=0}^{\infty} \|g_q\|_{L^1} < \infty.$$

Определим функцию $g(x)$ и последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}$ следующим образом

$$(2.34) \quad g(x) = \sum_{q=0}^{\infty} g_q(x), \quad g_0(x) = 1$$

$$(2.35) \quad \varepsilon_k = \delta_k^{(\nu_q)}, \quad k \in [M_{2\nu_{q-1}}, M_{2\nu_q}), \quad \varepsilon_k = 1, \quad k \notin [M_{2\nu_{q-1}}, M_{2\nu_q}), \quad q = 1, 2, \dots$$

Из (2.26)-(2.28), (2.31), (2.32), (2.34) вытекает $g(x) \in L^1[0, 1]$, $g(x) = f(x)$, $x \in E$.

В силу (2.4), (2.5), (2.14), (2.15), (2.28), (2.34), (2.35) для всех $q > k_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=0}^{M_{2\nu_q}-1} \varepsilon_k (a_k(U) \cos kx + b_k(U) \sin kx) - g \right\|_{L^1} \leq \sum_{j=q}^{\infty} \|g_j(x)\|_{L^1} + \\ & + \left\| \sum_{j=1}^{q-1} \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(2)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\|_{L^1} < 2^{-q-1}, \end{aligned}$$

и, следовательно, $\varepsilon_k a_k(U) = a_k(g)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\varepsilon_k b_k(U) = b_k(g)$, $k = 1, 2$. Обозначая через $\beta_k = \varepsilon_k \delta_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ и используя соотношения (2.14) и (2.15) заключаем

$$\delta_k a_k(U) = \beta_k a_k(g), \quad \delta_k b_k(U) = \beta_k b_k(g), \quad \beta_k = \pm 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда и из того, что ряд (2.16) универсален в пространстве $L^0[-\pi, \pi]$ приходим к выводу, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (a_k(g) \cos kx + b_k(g) \sin kx)$$

универсален в пространстве $L^0[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы, следовательно функция g является условно универсальной для класса $L^0[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы. Теорема 1.2 доказана.

Abstract. The paper proves that any measurable, almost everywhere finite function can be transformed into a conditionally universal function with respect to the trigonometric system by changing its values on a set of arbitrarily small measure.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On the universal functions”, *Journal of Approximation Theory*, **225**, 191 – 208 (2018).
- [2] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On Fourier series that are universal modulo signs”, *Studia Mathematica*, **249**, no. 2 (2019).
- [3] M. G. Grigoryan, “Functions universal with respect to the classical systems”, *Advances in Operator Theory*, **5**, no. 4, 1414 – 1433 (2020).
- [4] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы,” *Известия РАН Сер. матем.*, **85**:2, 73 – 94 (2021).
- [5] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, почти универсальные в смысле знаков относительно тригонометрической системы и системы Уолша,” *Матем. заметки*, **115**:6, 395 – 400 (2024).
- [6] M. G. Grigorian, “On Universal Fourier series in the Walsh system”, *Siberian Mathematical Journal*, **63**:3, 868 – 882 (2022).
- [7] Д. Е. Меньшов, “О частичных суммах тригонометрических рядов”, *Мат. Сборник*, **20**:2, 197 – 238 (1947).
- [8] А. А. Талалаян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частичных сумм общих ортогональных рядов”, *Известия АН СССР. Математика*, **10**:3, 17 – 34 (1957).
- [9] K. G. Grosse-Erdmann, “Holomorphe Monster und Universelle Funktionen”, *Mitteilungen des Mathematischen Seminars G.*, **176**, 1 – 84 (1987).
- [10] G. D. Birkhoff, “Démonstration d’un théorème élémentaire sur les fonctions entières”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **189**, 473 – 475 (1929).
- [11] J. Marcinkiewicz, “Sur les nombres dérivés,” *Fundamenta Mathematicae*, **24**, 305 – 308 (1935).
- [12] V. G. Krotov, “Smoothness of the universal Marcinkiewicz functions and universal trigonometric series”, *Izvestiya VUZov. Matematika*, no. 8, 26 – 33 (1991).
- [13] G. R. MacLane, “Sequences of derivatives and normal families”, *Journal of Analysis and Mathematics*, **2**, 72 – 87 (1952).
- [14] W. Luh, “Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets”, *Analysis*, **6**, 191 – 207 (1986).
- [15] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:1, 41 – 60 (1999).
- [16] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, “On the universal function for the class $L^p[0, 1]$, $p \in (0, 1)$ ”, *Journal of Functional Analysis*, **270**, no. 8, 3111 – 3133 (2016).
- [17] M. G. Grigoryan, “On the universal and strong property related to Fourier-Walsh series”, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, **11**, no. 3, 698 – 712 (2017).
- [18] М. Г. Григорян, “Функции, с универсальными рядами Фурье-Уолша”, *Матем. Сб.*, **211**:6, 107 – 131 (2020).
- [19] М. Г. Григорян, “Об универсальных (в смысле знаков) рядах Фурье по системе Уолша”, *Матем. Сб.*, **215**:6, 717 – 742 (2024).

Поступила 20 ноября 2024

После доработки 23 декабря 2024

Принята к публикации 28 декабря 2024

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 2, 2025, стр. 26 – 42.

ТЕОРЕМЫ ТИПА НЕВАНЛИННЫ ДЛЯ НОВЫХ “ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ” ЗНАЧЕНИЙ

В. Г. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: Volodya.petrosyan.1957@mail.ru

Аннотация. Получены теоремы типа соотношения дефектов Р. Неванлинны для новых “исключительных” значений.

MSC2020 number: 30D30; 30D35; 30C15.

Ключевые слова: теория Неванлинны; теория Альфорса; свойство близости a -точек.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных характеристик в классической теории распределения значений Р. Неванлинны является функция приближения (см. [1])

$$m(r, a) = m(r, a, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |w(re^{i\varphi}) - a|^{-1} d\varphi, \quad a \in \mathbb{C},$$

которая показывает, насколько близки значения мероморфной функции $w(z)$ к заданному значению $a \in \mathbb{C}$ на дугах $\Delta(r, a) = \Delta(r, a, w) = \{z: |z| = r; |w(z) - a| \leq 1\}$ окружности $|z| = r$.

Функция $m(r, a)$ есть норма $\|\ln^+ |w(z) - a|^{-1}\|$ в метрике $L_1[0, 2\pi]$.

С конца 60-х годов двадцатого столетия активно изучается более тонкая характеристика близости $w(z)$ к a , величина (см. [2]-[7])

$$L(r, a) = L(r, a, w) = \max_{|z|=r} \ln^+ |w(z) - a|^{-1}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что функция $L(r, a)$ характеризует скорость приближения $w(z)$ к числу a в более сильной метрике, чем $L_1[0, 2\pi]$.

Установлены многочисленные аналоги в поведении функций $m(r, a)$ и $L(r, a)$ составляющие сегодня “предмет” теории роста В. Петренко (см. [2]).

В работах [8], [9] вводятся новые характеристики близости, которые учитывают поведение производных высшего порядка функций $w(z)$ на тех дугах окружности $|z| = r$, на которых $w(z)$ близка к значению a .

Мы имеем в виду следующие величины ($z = re^{i\varphi}$)

$$P_k(r, a) = r \cdot \int_{\Delta(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi, \quad k \in N.$$

Оказывается, что величины $P_k(r, a)$ обнаруживают свойства, аналогичные свойствам функций приближения $m(r, a)$, т.е. для них выполняется аналог второй основной теоремы Р. Неванлинны и соответственно аналог соотношения дефектов, характеризующих уже новые “исключительные” значения.

Доказано, что для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $w(z)$ конечного нижнего порядка λ множество значений a , в которых

$$D_k(a) = D_k(a, w) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} (P_k(r, a)/T(r)) > 0,$$

не более чем счетно, и имеет место неравенство

$$(1.1) \quad \sum_{(a)} D_k(a) \leq K_0,$$

где $T(r)$ – неванлинновская характеристика, K_0 – постоянная зависящая от k и λ .

Ясно, что оценки величин $P_k(r, a)$ являются одновременно оценками k -тых производных функции $\ln |w(z) - a|^{-1}$, являющейся мерой близости $w(z)$ к a . Укажем также другие точки зрения, с которых изучение величин $P_k(r, a)$ представляет интерес.

На актуальность изучения таких объектов указывает следующее простое предположение, связывающее $P_1(r, a) = P(r, a)$ с классическими характеристиками: если мероморфная в $\mathbb{C}$ функция имеет по крайней мере два дефектных значения в смысле В. П. Петренко, т.е. существуют значения a_1, a_2 для которых $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} (L(r, a)/T(r)) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} \left(\max_{|z|=r} \ln^+ |w(z) - a|^{-1} / T(r) \right)$$

то для любого $a \in \mathbb{C}$ и r справедливы неравенства

$$(1.2) \quad m(r, a) \leq L(r, a) \leq P(r, a) + O(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

Таким образом, оценки сверху величин $P(r, a)$ одновременно являются оценками дефектов $\delta(a) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} (m(r, a)/T(r))$ и $\beta(a)$. Получение окончательных результатов в теории мероморфных функций зачастую упирается в оценки логарифмических производных функций $w(z)$, которые, однако, рассматривались как вспомогательные технические средства (см. [1], [2], [10]–[12]).

Поскольку величины $P(r, a)$ определяются посредством логарифмической производной функций $w(z)$ и для них устанавливаются соотношения дефектов, то эти величины становятся объектом самостоятельного изучения.

Для величин $P_k(r, a)$ устанавливается аналог известного тождества Картана, эквивалентного следующему соотношению (см. [13]–[15])

$$(1.3) \quad \int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty.$$

Из соотношений (1.2) и (1.3) следует соотношение типа тождества Картана в теории роста мероморфных функций:

$$\int_0^{2\pi} L(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty.$$

Отметим, что этот результат отсутствовал в этой теории. А из соотношений (1.1) и (1.2) вытекает известный результат В. Фукса о $\sum \delta^{1/2}(a)$ (см. [10]).

В работах [16] и [17] получены оценки типа $\sum \delta^\alpha$ для мер “исключительности” $D_1(a) = D(a)$.

В данной работе устанавливаются следующие результаты:

Теорема 1.1. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция конечного нижнего порядка λ ; $a_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, \dots, q$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$; $\rho, c_\nu \in (0, 1)$ фиксированные числа. Тогда для некоторой неограниченной последовательности $r = r_n \rightarrow \infty$, выполняется неравенство:

$$(1.4) \quad \sum_{\nu=1}^q \frac{P_k(r, a_\nu)}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(r),$$

где $\Delta_\rho(r, a_\nu) = \{z: |z| = r; |w(z) - a_\nu| \leq \rho\}$, $|\Delta_\rho(r, a_\nu)|$ – угловая мера множества $\Delta_\rho(r, a_\nu)$, $T(r)$ – неванлинновская характеристика, $K(k, \lambda)$ – постоянная зависящая от k и λ .

Теорема 1.2. При условиях теоремы 1.1 выполняется следующее соотношение

$$(1.5) \quad \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{D_k(a_\nu)}{\ln \frac{eK_0}{D_k(a_\nu)}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq K_1(k, \lambda),$$

где K_0 – постоянная фигурирующая в неравенстве (1.1).

Теорема 1.3. При условиях теоремы 1.1 имеет место неравенство

$$(1.6) \quad \sum_{\nu=1}^q D_k^{\frac{1}{2}}(a_\nu) \leq K_2(k, \lambda) \ln^{\frac{1}{2}} q.$$

Следствие 1.1. При условиях теоремы 1.1 выполняется

$$(1.7) \quad \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{\delta(a_\nu)}{\ln \frac{e}{\delta(a_\nu)}} \right]^{\frac{1}{3}} \leq K_3(k, \lambda).$$

Из соотношения (1.7) вытекает известный результат В. Петренко о $\sum \delta^\alpha(a)$ (см. [21]).

Следствие 1.2. При условиях теоремы 1.1 имеет место неравенство

$$(1.8) \quad \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{\beta(a_\nu)}{\ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq K_4(k, \lambda),$$

$$\text{где } c_\nu = \begin{cases} \beta(a_\nu)/2, & \text{если } 0 \leq \lambda \leq 0,5 \\ \beta(a_\nu)/\pi\lambda, & \text{если } \lambda > 0,5. \end{cases}$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $w(z)$ обозначим через $F_k(z) = \ln^{(k)}(w(z) - a)$, $a \in \mathbb{C}$, а через $D(R) = \{z: |z| \leq R\}$.

Лемма 2.1. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда имеет место неравенство

$$(2.1) \quad \iint_{D(R)} \left| \frac{F_{k+1}(z)}{F_k(z)} \right| d\sigma \leq K(k, \beta) T(\beta R, w) \cdot R, \quad R > R_0,$$

где $d\sigma$ – элемент площади, $K(k, \beta)$ – постоянная, зависящая от k и β ($\beta > 1$).

Доказательство. Используя лемму 2 работы [18], получим

$$(2.2) \quad \iint_{D(R)} \left| \frac{F_{k+1}(z)}{F_k(z)} \right| d\sigma \leq K(k, \beta) \cdot T(R_1, F_k) R,$$

где $R_1 = ((\beta - 1)/2 + 1)R$.

Поскольку $T(r, \sum_{\nu} w_{\nu}) \leq \sum_{\nu} T(r, w_{\nu}) + O(1)$, $T(r, \prod_{\nu} w_{\nu}) \leq \sum_{\nu} T(r, w_{\nu})$, то используя формулу Лейбница $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$, имеем

$$(2.3) \quad T(R_1, F_k) \leq K(k) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ T(R_1, w^{(k-1)}) + T \left[R_1, \left(\frac{1}{w-a} \right)^{(i)} \right] \right\} + O(1).$$

Учитывая теперь известное неравенство (см. [19], теорема 2.3, гл. III)

$$T(r, w^{(\ell)}) \leq (\ell + 1) T(r, w) + Q(r, w),$$

где $Q(r, w) = O(\ln r)$, $r \rightarrow \infty$, если $w(z)$ имеет конечный нижний порядок, и $Q(r, w) = O[\ln T(r) + \ln r]$, если $w(z)$ бесконечного порядка, и $r \rightarrow \infty$, пропуская, возможно, некоторое множество сегментов, имеющих конечную меру.

Согласно теореме 1.3 (лемма о логарифмической производной) и теореме 2.3 главы III из [19], для величин $Q(r, w)$ имеет место оценка $Q(r, w) = o[T(r, w)]$, $r_1 > r$, $r \rightarrow \infty$. Теперь из неравенства (2.3) получим, при R больше некоторого фиксированного R_0 , оценку $T(R_1, F_k) \leq K(k, \beta) T(\beta R, w)$, отсюда и из (2.2) следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $a, b \in \mathbb{C}$ – комплексные числа, такие, что $|a - b| > 2$. Тогда имеют место следующие соотношения ($z = re^{i\varphi}$)

$$(2.4) \quad \int_0^R \int_{\Delta_{\rho}^*(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{k}} r dr d\varphi = o[T(\beta R, w)] \cdot R$$

$$(2.4') \quad \int_0^R \int_{\Delta(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b) \right|^{\frac{1}{k}} r dr d\varphi = o[T(\beta R, w)] \cdot R,$$

где $\Delta_{\rho}^*(r, a) = \{z: |z| = r, \rho \leq |w(z) - a| \leq 1\}$, $\beta > 1$, $\rho \in (0, 1)$ – фиксированные числа.

Доказательство. Используем метод математической индукции. Покажем, что лемма верна при $k = 1$. Учитывая, что $|w(z)| \leq k(a)$, $|w(z) - a| \geq \rho$, когда $z \in \Delta_{\rho}^*(r, a)$, получим

$$(2.5) \quad \int_0^R \int_{\Delta_{\rho}^*(r, a)} |\ln'(w(z) - a)| r dr d\varphi \leq K(a, \rho) \int_0^R \int_{\Delta_{\rho}^*(r, a)} \frac{|w'(z)| r}{1 + |w(z)|^2} dr d\varphi$$

Используя неравенство Коши-Буняковского имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \frac{|w'(z)| r dr d\varphi}{1 + |w(z)|^2} \leq \\ & \leq \left(\int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \frac{|w'(z)|^2 r dr d\varphi}{(1 + |w(z)|^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} r dr d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\pi} R \cdot A^{\frac{1}{2}}(R) \end{aligned}$$

где $A(z)$ – сферическая характеристика Л. Альфорса.

Отсюда, учитывая очевидное соотношение $A(R) < T(\beta R)/\ln \beta$ и неравенство (2.5), получим утверждение леммы при $k = 1$.

Предположим, что лемма верна при $k = n$, докажем при $k = n + 1$.

Пользуясь неравенством Гельдера, при $p = n + 1$, $q = (n + 1)/n$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \left| \ln^{(n+1)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{n+1}} r dr d\varphi \leq \\ & \leq \left(\int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \left| \frac{\ln^{(n+1)}(w(z) - a)}{\ln^{(n)}(w(z) - a)} \right| r dr d\varphi \right)^{\frac{1}{n+1}} \times \\ & \times \left(\int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \left| \ln^{(n)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{n}} r dr d\varphi \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя лемму 2.1 и предложения, получим неравенство (2.4). Поскольку $|w(z) - b| > 1$, $|w(z)| < K(a)$, когда $z \in \Delta(r, a)$, то соотношение (2.4') доказывается аналогично доказательству соотношения (2.4). Лемма доказана. $\square$

В дальнейшем, будем помнить, что в силу пункта I теоремы 2 работы [20], все рассматриваемые далее a -точки и b -точки являются простыми (не кратными).

Обозначим соответственно через $n(r, a)$ и $n(r, b)$ – количество a -точек и b -точек функции $w(z)$ в круге $|z| < r$, а через $n(r, a, b)$ – количество тех a -точек $z_k(a) \in \tilde{E}_k(r) \subset \bigcup_{i=1}^{\tilde{\Phi}(r)} \tilde{E}_i(r)$, для каждой из которых найдется b -точка $z_k(b)$ из области $\tilde{E}_k(r) \subset \{|z| < r\}$, $k = 1, 2, \dots, \tilde{\Phi}(r)$ ($\tilde{E}_k(r)$ и $\tilde{\Phi}(r)$ определены в [20]). Нетрудно видеть, что

$$(2.6) \quad n(r, a, b) \leq \tilde{\Phi}(r)$$

В процессе доказательства теоремы 2 работы [20] для $\tilde{\Phi}(r)$ получено следующее неравенство

$$(2.7) \quad \tilde{\Phi}(r) \leq A(r) + \frac{8A(r)}{\varphi(r)} + h\varphi^2(r) L(r),$$

где $A(r)$ и $L(r)$ – сферические характеристики Л. Альфорса, $\varphi(r)$ – произвольная монотонная функция, стремящаяся к бесконечности, h – постоянная.

Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$, $\rho, c \in (0, 1)$ – фиксированные числа. Обозначим через $(z = re^{i\varphi})$

$$E_\alpha(R) = E_{\alpha_1}^{\alpha_2}(R) = \{r: \alpha_1 R < r < \alpha_2 R\}$$

$$P_k^*(r, a) = r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi,$$

где $\Delta_\rho(r, a) = \{z: |z| = r; |w(z) - a| \leq \rho\}$.

Лемма 2.3. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, $a, b \in \mathbb{C}$ комплексные числа, такие, что $|a - b| > 2$, $c \in (0, 1)$, $\beta > 1$ – фиксированные числа. Тогда выполняется следующее соотношение ($R' = \alpha_3 R$)

$$(2.8) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^*(r, a) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K\{[m(R', a) + m(R', b) + O(1)] +$$

$$+ [n(R', a) + n(R', b) - 2n(R', a, b)] + \frac{1}{c} A^{\frac{1}{8}}(R') L(R') + o[A(R')] + o[T(\beta R')]\} R \ln \frac{e}{c},$$

где $|\Delta_\rho(r, a)|$ – угловая мера множества $\Delta_\rho(r, a)$, K – постоянная зависящая от α_1 , α_2 и k .

Доказательство. Индексом i будем отмечать те a -точки $z_i(a)$ и b -точки $z_i(b)$, которые фигурируют в определении $n(R', a, b)$; остальные a -точки (b -точки) из круга $|z| < R'$ будем отмечать индексом $\ell(j) - z_\ell(a)$ ($z_j(b)$). Используя формулу Неванлинны и следующее неравенство

$$(2.9) \quad \left(\sum_\nu d_\nu \right)^\alpha \leq \sum_\nu d_\nu^\alpha, \quad d_\nu > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

получим ($z = ze^{i\varphi}$)

$$P_k^*(r, a) \leq r \cdot \int_{\Delta_\rho(r, a)} \left\{ \frac{k!}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \ln \left| \frac{w(R'e^{i\theta}) - a}{w(R'e^{i\theta}) - b} \right| \right| \times \frac{R' d\theta}{|R'e^{i\theta} - z|^{k+1}} \right\}^{\frac{1}{k}} d\varphi +$$

$$+ K \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{1}{(z_i(b) - z)^k} - \frac{1}{(z_i(a) - z)^k} \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi +$$

$$\begin{aligned}
 & +K \sum_{j=1}^{n(R',b)-n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{d\varphi}{|z-z_j(b)|} + K \sum_{\ell=1}^{n(R',a)-n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{d\varphi}{|z-z_\ell(a)|} + \\
 & +K \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \left| \frac{[\overline{z_i}(a)]^k}{[(R')^2 - \overline{z_i}(a)z]^k} - \frac{[\overline{z_i}(b)]^k}{[(R')^2 - \overline{z_i}(b)z]^k} \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi + \\
 & +K \sum_{\ell=1}^{n(R',a)-n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{|\overline{z_\ell}(a)|}{|(R')^2 - \overline{z_\ell}(a)z|} d\varphi + \\
 & +K \sum_{j=1}^{n(R',b)-n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{|\overline{z_j}(b)|}{|(R')^2 - \overline{z_j}(b)z|} d\varphi + r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi = \\
 (2.10) \quad & = J_1^{(k)}(r) + \dots + J_8^{(k)}(r),
 \end{aligned}$$

где K постоянная зависящая от k .

Нетрудно видеть, что

$$(2.11) \quad J_1^{(k)}(r) \leq K_1 \{m(R', a) + m(R', b) + O(1)\} |\Delta_\rho(r, a)|^1$$

Отсюда получим

$$(2.12) \quad \int_{E_\alpha} \frac{J_1^{(k)}(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_1 \{m(R', a) + m(R', b) + O(1)\} R.$$

Обозначим соответственно через

$$\begin{aligned}
 D_{z_0}(r) &= \{z: |z - z_0| \leq r\}, \quad D_{z_0}^{z_1}(r) = \left\{z: \left|z - \frac{z_0 + z_1}{2}\right| \leq r\right\}, \quad z_0, z_1 \in \mathbb{C} \\
 \bar{D}_{z_0}^{z_1}(r) &= D_{z_0}^{z_1}(r) \setminus \{D_{z_0}(r/2) \cup D_{z_1}(r/2)\}, \\
 \rho_i &= |z_i(a) - z_i(b)|, \quad i = 1, 2, \dots, n(R', a, b).
 \end{aligned}$$

Используя неравенство (2.9), имеем

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad & \int_{E_2(R)} J_2^{(k)}(r) dr \leq \\
 & \leq K_2 \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} \rho_i^{\frac{1}{k}} \left\{ \sum_{p=1}^k \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_i(a)|^{\frac{p}{k}} \cdot |z - z_i(b)|^{\frac{k-p+1}{k}}} \right\}.
 \end{aligned}$$

¹В дальнейшем обозначим через K_i , $i = 1, 2, \dots$ постоянные, не обязательно одинаковые, даже на протяжении одной цепочки неравенств.

Обозначим через

$$J_{p,k}(R) = \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{r \, dr \, d\varphi}{|z - z_i(a)|^{\frac{p}{k}} \cdot |z - z_i(b)|^{\frac{k-p+1}{k}}}, \quad p = 1, 2, \dots, k$$

Исходя из геометрических соображений нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} J_{p,k}(R) &\leq \iint_{D_{z_i(a)}(\rho_i/2)} + \iint_{D_{z_i(b)}(\rho_i/2)} + \iint_{D_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)} + \\ &+ \iint_{D_{z_i(a)}^{z_i(b)}(2R) \setminus D_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)} \frac{r \, dr \, d\varphi}{|z - z_i(a)|^{\frac{p}{k}} \cdot |z - z_i(b)|^{\frac{k-p+1}{k}}} = \\ &:= J_{p,k}^{(1)}(R) + J_{p,k}^{(2)}(R) + J_{p,k}^{(3)}(R) + J_{p,k}^{(4)}(R). \end{aligned}$$

Оценим эти интегралы. Пока мы предположим, что $k > 1$.

Поскольку при $z \in D_{z_i(a)}(\rho_i/2)$ выполняется неравенство $|z - z_i(b)| > \rho_i/2$, то

$$J_{p,k}^{(1)}(R) \leq 2\pi \left(\frac{2}{\rho_i} \right)^{\frac{k-p+1}{k}} \int_0^{\rho_i/2} \frac{r \, dr}{r^{p/k}} \leq 4\pi \rho_i^{1-\frac{1}{k}}.$$

Аналогично получим, что

$$J_{p,k}^{(2)}(R) \leq 4\pi \rho_i^{1-\frac{1}{k}} \quad \text{и} \quad J_{p,k}^{(3)}(R) \leq 4\pi \rho_i^{1-\frac{1}{k}}$$

Исходя из геометрических соображений нетрудно видеть, что $J_{p,k}^{(4)}(R) \leq K \cdot R^{1-\frac{1}{k}}$.

При $k = 1$, имеем $p = 1$. Очевидно, что $J_{1,1}^{(1)}(R) \leq 2\pi$, $J_{1,1}^{(2)}(R) \leq 2\pi$, $J_{1,1}^{(3)}(R) \leq 4\pi$.

Из геометрических соображений следует, что $J_{1,1}^{(4)}(R) \leq K(\ln R - \ln \rho_i)$. Учитывая эти оценки, для $k \geq 1$ получаем

$$J_{p,k}(R) \leq K \left(\rho_i^{1-\frac{1}{k}} + R^{1-\frac{1}{k}} + \ln R - \ln \rho_i \right).$$

Следовательно, из неравенства (2.13) имеем

$$(2.14) \quad \int_{E_\alpha(R)} J_2^{(k)}(r) \, dr \leq K_2 \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} \rho_i^{\frac{1}{k}} \left(\rho_i^{1-\frac{1}{k}} + R^{1-\frac{1}{k}} + \ln R - \ln \rho_i \right).$$

В работе [20] для ρ_i устанавливается следующая оценка

$$(2.15) \quad \rho_i < d(E_i(R')) < K R \varphi^8(R') A^{-\frac{1}{2}}(R'), \quad i = 1, 2, \dots, n(R', a, b),$$

где $d(x)$ – диаметр множества X , $\varphi(r)$ – произвольная монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \rightarrow +\infty$.

Учитывая это, оценка из неравенства (2.14) получит вид

$$\int_{E_\alpha(R)} J_2^{(k)}(r) dr \leq K_2 \cdot \left\{ \varphi(R') A^{-\frac{1}{2}}(R') + \varphi^{\frac{1}{k}}(R') \cdot A^{-\frac{1}{2k}} \right\} n(R', a, b) R$$

Отсюда, используя неравенства (2.6) и (2.7), и взяв $\varphi^{18}(r) < A(r)$, получим

$$(2.16) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_2^{(k)}(r) dr}{\max\{\Delta_\rho(r, a), c\}} \leq \frac{K_2}{c} \left\{ A^{-\frac{1}{2k}}(R') + A^{\frac{3}{5}}(R') + L(R') \right\} R.$$

Для оценки $J_3^{(k)}(r)$ и $J_4^{(k)}(r)$ введём следующие обозначения.

$$\delta(z_0, c) = \{z: |z| = r, |\arg(z/z_0)| \leq c\}, \text{ где } z_0 \in \{|z| < R'\};$$

$$D_{\alpha_1, \alpha_2}^c(R) = \{z: \alpha_1 R < |z| < \alpha_2 R, |\arg(z/z_0)| \leq c\};$$

$$D^c(R) = \{z: 0 < |z| \leq R', |\arg(z/z_0)| \leq c\};$$

$$E_{z_0}^c(R) = \{z: |z - z_0| \leq c \cdot R\};$$

$$D_{z_0}^c(R) = \{z: |z - z_0| \leq \bar{R}\}, \text{ где } \bar{R} = 2|z_0| \cdot c.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_\rho(z, a)} \frac{r d\varphi}{|z - z_0|} &= \int_{\Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} + \int_{\Delta_\rho(z, a) \cap \delta(z_0, c)} \frac{r d\varphi}{|z - z_0|} \leq \\ &\leq \int_{\delta(z_0, c)} \frac{r d\varphi}{|z - z_0|} + |\Delta_\rho(z, a)| \cdot \max_{z \in \Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} \frac{r}{|z - z_0|} \end{aligned}$$

Ясно, что когда $|z_0| \leq \alpha_1 R/2$, то

$$\int_{E_\alpha(R)} \int_{\delta(z_0, c)} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} \leq KcR.$$

Предположим, что $\alpha_1 R/2 < |z_0| \leq \alpha_1 R$, тогда

$$\int_{E_\alpha(R)} \int_{\delta(z_0, c)} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} \leq \iint_{D_{z_0}^c(\bar{R})} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} + \iint_{D_{\alpha_1, \alpha_2}^c(R) \setminus D_{z_0}^c(\bar{R})} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} = J_1(R) + J_2(R).$$

Нетрудно видеть, что

$$J_1(R) = \iint_{D_{z_0}^c(\bar{R})} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} \leq Kc|z_0| < KcR.$$

Оценим интеграл $J_2(R)$. Пусть $\gamma(\tau)$ — дуга из множества $\{|z - z_0| = \tau\} \cap D^c(2R)$, $\bar{R} < \tau < 2R$, которая близко расположена к области $D_{\alpha_1, \alpha_2}^c(R)$ или пересекается с ней. Обозначим через $\ell(\tau)$ длину дуги $\gamma(\tau)$, а через $c_1(\tau)$ — величину

того угла, под которым видна дуга $\gamma(\tau)$ из точки z_0 . Исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что $\ell(\tau) \leq KcR$.

Следовательно,

$$J_2(R) \leq \int_{\bar{R}}^{2R} \int_0^{c_1(\tau)} d\tau d\theta = \int_{\bar{R}}^{2R} \frac{\ell(\tau)}{\tau} d\tau \leq KcR \ln \frac{1}{c}.$$

Суммируя полученные оценки для $J_1(R)$ и $J_2(R)$, получим

$$(2.17) \quad \int_{E_\alpha(R)} \int_{\delta(z_0, c)} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} \leq KcR \ln \frac{e}{c}.$$

При $\alpha_1 R < |z_0| < \alpha_3 R$ доказательство неравенства (2.17) приводится аналогично доказанным выше случаям.

Очевидно, что

$$\max_{z \in \Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} \frac{r}{|z - z_0|} \leq \begin{cases} \frac{r}{|z - z_0|}, & r \notin E_{z_0}^c(R) \\ \frac{1}{c}, & r \in E_{z_0}^c(R). \end{cases}$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \int_{E_\alpha(R)} \frac{|\Delta_\rho(r, a)| \max_{z \in \Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} \frac{r}{|z - z_0|}}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} dr \leq \\ & \leq \int_{E_\alpha(R)} \max_{z \in \Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} \frac{r}{|z - z_0|} dr \leq KR \ln \frac{e}{c}. \end{aligned}$$

Отсюда используя неравенство (2.17), получим

$$\int_{E_\alpha(R)} \frac{\int \frac{\Delta_\rho(r, a)}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \frac{r}{|z - z_0|} d\varphi}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} dr \leq KR \ln \frac{e}{c}.$$

Учитывая это неравенство имеем

$$(2.18) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_3^{(k)}(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_3 \{n(R', b) - n(R', a, b)\} R \ln \frac{e}{c},$$

$$(2.19) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_4^{(k)}(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_4 \{n(R', a) - n(R', a, b)\} R \ln \frac{e}{c}.$$

Используя неравенство (2.9) получим

$$\int_{E_\alpha(R)} J_5(r) dr \leq$$

$$\leq K_5 \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} \rho_i^{\frac{1}{k}} \left\{ \sum_{\rho=1}^k \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{R^{\frac{r}{k}} |\overline{z_i}(a)|^{\frac{k-p}{k}} |\overline{z_i}(b)|^{\frac{p-1}{k}} r dr d\varphi}{|(R')^2 - \overline{z_i}(a)z|^{\frac{p}{k}} \cdot |(R')^2 - \overline{z_i}(b)z|^{\frac{k-p+1}{k}}} \right\}$$

Очевидно, что

$$\int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{R^{\frac{r}{k}} |\overline{z_i}(a)|^{\frac{k-p}{k}} |\overline{z_i}(b)|^{\frac{p-1}{k}} r dr d\varphi}{|(R')^2 - \overline{z_i}(a)z|^{\frac{p}{k}} \cdot |(R')^2 - \overline{z_i}(b)z|^{\frac{k-p+1}{k}}} \leq K_5 \cdot R^{1-\frac{1}{k}}, \quad p = 1, 2, \dots, k$$

Следовательно

$$\int_{E_\alpha(R)} J_5(r) dr \leq K_5 R^{1-\frac{1}{k}} \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} \rho_i^{\frac{1}{k}}.$$

Отсюда, как и при выводе неравенства (2.16), получим

$$(2.20) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_5(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_5 \{A^{\frac{1}{8}}(R')L(R') + o(A(R'))\}R.$$

Нетрудно видеть, что

$$r \cdot \int_{E_\alpha(R)} \frac{|z_\ell(a) d\varphi}{|(R')^2 - \overline{z_\ell}(a)z|} \leq K_6 \frac{r}{R' - r} |\Delta_\rho(r, a)|,$$

Следовательно,

$$(2.21) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_6(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_6 \{n(R', a) - n(R', a, b)\}R.$$

Аналогично

$$(2.22) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_7(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_7 \{n(R', b) - n(R', a, b)\}R.$$

Из леммы 2.2 получим, что

$$(2.23) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{\int \frac{\Delta_\rho(r, a)}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} dr = o[T(\beta R, w)].$$

Окончательно, из неравенств (2.10)-(2.12), (2.16), (2.18)-(2.23), получим соотношение (2.8). Лемма доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C}$, $|a_\nu - b_\nu| > 2$, $c_\nu \in (0, 1)$, $\nu = 1, 2, \dots, q$ – фиксированные числа.

Записав для каждой тройки $\{a_\nu, b_\nu, c_\nu\}$ неравенство (2.8) леммы 2.3 и просуммировав, получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^*(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq \\
 & \leq K_1 R \cdot \sum_{\nu=1}^q [m(R', a_\nu) + m(R', b_\nu) + O(1)] + \\
 & + K_2 R \cdot \sum_{\nu=1}^q [n(R', a_\nu) + n(R', b_\nu) - 2n(R', a_\nu, b_\nu)] + \\
 (3.1) \quad & + K_3 R \cdot \left\{ A^{\frac{1}{8}}(R') L(R') \sum_{\nu=1}^q \frac{1}{c_\nu} + o(A(R')) + o[T(\beta R')] \right\}, \quad R > R_0.
 \end{aligned}$$

По второй основной теореме Р. Неваллины (с учётом леммы о логарифмической производной) при $R > R_0^*$, имеем

$$(3.2) \quad \sum_{\nu=1}^q [m(R', a_\nu) + m(R', b_\nu) - 2n(R', a_\nu, b_\nu)] \leq 3T(R')$$

Положим теперь $\alpha_1 = 1/(\lambda + 2)$, $\alpha_2 = 1/(\lambda + 1)$. Из оценки $L_2 \leq [A(r)^{2/3}]$, $r \notin E$, $\int_E d \ln t < \infty$ (см. [1], п. 326) вытекает, что при $R > R_1^*$ в каждом интервале $(\frac{1+\alpha_2}{2} R, \frac{3+\alpha_2}{4} R)$ найдётся такая точка $R' = \alpha_3(R)R = \alpha_3 R$, в которой верно неравенство $L(R') = L(\alpha_3 R) \leq [A(\alpha_3 R)]^{\frac{2}{3}}$ (здесь мы учли, что множество E имеет конечную логарифмическую меру). Отсюда учитывая очевидное неравенство

$$(3.3) \quad A(r) < T(\beta r) / \ln \beta \quad (\beta > 1)$$

имеем

$$(3.4) \quad L(R') \leq \left[\left(\ln \frac{1}{\alpha_3} \right)^{-1} T(R) \right]^{\frac{2}{3}},$$

Далее положим $\beta = (\lambda + 2)/(\lambda + 1)$ и, используя лемму 2.2 работы [17], получим

$$(3.5) \quad \sum_{\nu=1}^q [n(R', a_\nu) + n(R', b_\nu) - 2n(R', a_\nu, b_\nu)] \leq K(\lambda) T(\beta R).$$

Из неравенств (3.1)-(3.5) следует, что

$$(3.6) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^*(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(\beta R) R.$$

С другой стороны, ясно, что

$$P_k(r, a_\nu) = P_k^*(r, a_\nu) + P_k^{**}(r, a_\nu),$$

где $P_k^{**}(r, a_\nu) = r \cdot \int_{\Delta_\rho^*(r, a_\nu)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a_\nu) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} &= \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^*(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} + \\ &+ \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^{**}(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношение (2.4) леммы 2.2 и неравенство (3.6) получим

$$(3.7) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(\beta R).$$

Применяя теорему о среднем значении, в некоторой точке $R^* \in E_\alpha(R)$, получим

$$(3.8) \quad \sum_{\nu=1}^q \frac{P_k(R^*, a_\nu)}{\max\{|\Delta_\rho(R^*, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(\beta R).$$

Выберем множество $R_n = R_n(\alpha_1, \beta)$ значений R , зависящих только от α_1 и β , для которых выполняется неравенство

$$(3.9) \quad T(\beta R_n) = T\left(\frac{\beta}{\alpha_1} \cdot \alpha_1 R_n\right) \leq \left(\frac{\beta}{\alpha_1}\right)^{\lambda+1} T(\alpha_1 R_n).$$

Возможность такого выбора обеспечивается леммой 1.3.1. из работы [2]. Ясно, что для таких R_n существует множество $R_n^* = R_n^*(\alpha_1, \beta)$ значений R^* , что выполняется неравенство (3.8). Из неравенств (3.8) и (3.9) получим

$$\sum_{\nu=1}^q \frac{P_k(R_n^*, a_\nu)}{\max\{|\Delta_\rho(R_n^*, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(\beta R_n^*).$$

Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\rho = \min \left\{ \min_{i \neq j} \frac{|a_i - a_j|}{2}, 1 \right\}$, тогда ясно что $\Delta_\rho(r, a_i) \cap \Delta_\rho(r, a_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, следовательно

$$(3.10) \quad \sum_{\nu=1}^q |\Delta_\rho(r, a_\nu)| \leq 2\pi.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, при $r = r_n > r(\varepsilon)$, где ε – произвольное число большее нуля, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{D_k(a_\nu) - \varepsilon}{\ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \left[\sum_{\nu=1}^q \frac{D_k(a_\nu) - \varepsilon}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[\sum_{\nu=1}^q \max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{\nu=1}^q \frac{P_k(r, a_\nu)}{T(r) \max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \end{aligned}$$

$$(3.11) \quad \times \left[\sum_{\nu=1}^q \max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Выберем в качестве значений c_ν , $\nu = 1, 2, \dots, q$ следующие числа $c_\nu = D_k(a_\nu)/K_0$, где K_0 – постоянная фигурирующая в неравенстве (1.1). Ясно, что $\sum_{\nu=1}^q c_\nu \leq 1$.

Отсюда, используя теорему 1.1, неравенства (3.10) и (3.11), получим

$$\sum_{\nu=1}^q \left[\frac{D_k(a_\nu) - \varepsilon}{\ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq K(k, \lambda).$$

Так как ε произвольное число, то получим утверждение теоремы 1.2. $\square$

Доказательство теоремы 1.3 получим подставив в неравенстве (3.11) значения $c_\nu = 1/q$, $\nu = 1, 2, \dots, q$ и применив к полученному неравенству последние рассуждения.

Доказательство следствия 1.1. Нетрудно видеть, что

$$(3.12) \quad \frac{m(r, a_\nu)}{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|} \leq P(r, a_\nu) + O(1).$$

Поскольку $\delta(a, w) = \delta(\ell a, \ell w)$ для любого $\ell \in R$, то мы предполагаем, что $|a_i - a_j| > 2$ ($1 \leq i < j \leq n$). Отсюда следует, что $\Delta(r, a_i) \cap \Delta(r, a_j) = \Phi$, при $i \neq j$. Ясно, что $|\Delta_\rho(r, a_\nu)| \geq |\Delta_\rho(r, a_\nu)|$.

Следовательно, используя неравенство Гельдера и неравенство (3.12), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{m(r, a_\nu)}{\ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{3}} &\leq \left(\sum_{\nu=1}^q \frac{\rho(r, a_\nu) + O(1)}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \right)^{\frac{1}{3}} \times \\ &\times \left(\sum_{\nu=1}^q \{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|^{\frac{1}{2}} \cdot \max^{\frac{1}{2}}\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|\}, c_\nu\} \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Взяв в качестве значений $c_\nu = \delta(a_\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots, q$ и применяя теорему 1.1 и неравенство Коши-Буняковского, получим соотношение (1.7).

Доказательство следствия 1.2. В работах [22] и [2] соответственно, доказано, что для каждой мероморфной функции $w(z)$ конечного и нижнего порядка λ и любого числа $a \in \mathbb{C}$ имеем

$$\beta(a) = \beta(a, w) \leq \begin{cases} \frac{\pi \lambda}{\sin \pi \lambda}, & \text{если } 0 \leq \lambda \leq 0,5 \\ \pi, \lambda, & \text{если } \lambda > 0,5. \end{cases}$$

$$(3.13) \quad \sum_{\nu=1}^q \beta(a_\nu) \leq K(\lambda + 1), \quad a_\nu \in \mathbb{C}, \quad \nu = 1, \dots, q.$$

Выберем в качестве значений c_ν , $\nu = 1, 2, \dots, q$ следующие числа

$$c_\nu = \begin{cases} \frac{\beta(a_\lambda)}{2}, & \text{если } 0 \leq \lambda \leq 0,5 \\ \frac{\beta(a_\lambda)}{\pi\lambda}, & \text{если } \lambda > 0,5. \end{cases}$$

Так как $\beta(a_\lambda) \leq D(a_\nu)$, то, используя неравенства (3.11), (3.13) и теорему 1.1, получаем утверждение следствия 1.2. $\square$

Автор выражает благодарность Г. А. Барсегяну за ценные обсуждения результатов.

Abstract. Some R. Nevanlinna defect-relation-type theorems for new “exclusive” values are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ (1941).
- [2] В. П. Петренко, Рост мероморфных функций, Харьков, Вища школа (1978).
- [3] Н. В. Говоров, “О проблеме Пэyli”, Функц. анализ и его приложения, **3**, вып. 2, 38 – 43 (1969).
- [4] А. А. Гольдберг, “К вопросу о связи между дефектом и отклонением мероморфной функции”, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, вып. 29, 31 — 35 (1978).
- [5] А. А. Гольдберг, В. И. Островский, “Некоторые теоремы о росте мероморфных функций”, Записки мат. отделения Харьковского гос. универ-та и Харьковского мат. общества, Серия 4, **27**, 3 — 37 (1961).
- [6] А. Э. Еременко, “Об отклонениях мероморфных функций конечного порядка”, Теория функций, анализ и их приложения, Харьков: Вища школа, вып. 40, 56 — 64 (1983).
- [7] Г. А. Барсегян, Докторская диссертация, Тбилиси (1984).
- [8] Г. А. Барсегян, “Исключительные значения, ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций”, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **16**, no. 5, 408 – 423 (1981).
- [9] Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, “Исключительные значения мероморфных функций, определяемые посредством производных высшего порядка”, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **28**, no. 3, 89 – 91 (1993).
- [10] W. H. J. Fuchs, “A theorem on the Nevanlinna Deficiencies of Meromorphic Functions of Finite Order”, Annals of Mathematics Second Series, **68**, no. 2, 203 – 209 (1958).
- [11] W. H. J. Fuchs, “Proof of a conjecture of G. Pólya concerning gap series”, Illinois J. Math., **7**, N 4, 661 – 667 (1963).
- [12] E. Mues, “Über eine Vermutung von Hayman”, Math. Z., **119**, 11 – 20 (1971).
- [13] У. К. Хейман, Мероморфные функции, М., Мир (1966).
- [14] Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, “Соотношения типа тождества Картана для величин, ассоциированных с логарифмическими производными мероморфных функций”, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **XXV**, N 5, 474 – 488 (1990).
- [15] В. Г. Петросян, “Соотношения типа тождества Картана”, ДАН Арм. ССР, **93**, N 5, 200 – 206 (1992).
- [16] В. Г. Петросян, “Некоторые оценки мер исключительности исключительных значений мероморфных функций конечного нижнего порядка”, Арм. НИИТИ, N 73 AP-89, деп., 20с.
- [17] В. Г. Петросян, “Оценки мер исключительности исключительных значений ассоциированных с логарифмическими производными мероморфных функций”, **48**, N 6 (2013).

- [18] Г. А. Барсегян, “О геометрии мероморфных функций”, Математический сборник, **114** (156), N 2, 179 – 225 (1981).
- [19] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, М., Наука (1970).
- [20] Г. А. Барсегян, “Свойство близости α -точек мероморфных функций”, Матем. сб., **120** (162):1, 42 – 67 (1983).
- [21] В. П. Петренко, “Некоторые оценки для величин дефектов мероморфной функции”, Сиб. матем. журн., **7**, N 6, 1319 – 1336 (1966).
- [22] В. П. Петренко, “Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **33**, N 2, 414 – 454 (1969).

Поступила 28 сентября 2023

После доработки 27 ноября 2023

Принята к публикации 15 июня 2024

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ-УОЛША

А. А. САРГСЯН

Ереванский государственный университет¹

E-mail: *asargsyan@ysu.am*

Аннотация. В работе обсуждается вопрос существования универсальных функций, ряды Фурье которых по системе Уолша условно универсальны в смысле перестановок во всех весовых пространствах $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: ряд Фурье; система Уолша; коэффициенты Фурье; весовое пространство; сходимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mu(x)$, $x \in [0, 1]$ – весовая функция (т.е. измеримая на $[0, 1]$, положительная функция) и пусть $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$ – будет классом всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых $\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx < \infty$. Пусть $\|f\|_{L_\mu^p} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$ – норма весового пространства $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$. В случае $\mu(x) = 1$ весовое пространство $L_\mu^p[0, 1]$ превращается в классическое пространство $L^p[0, 1]$.

Говорят, что ряд $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$; $f_k(x) \in L_\mu^p[0, 1]$ к сходится $f(x)$ в $L_\mu^p[0, 1]$, если частичные суммы $\sum_{k=0}^n f_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, этого ряда сходятся к $f(x)$ по $L_\mu^p[0, 1]$ норме т.е.

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right\|_{L_\mu^p} = 0.$$

Пусть $L^0[0, 1]$ – класс всех измеримых на $[0, 1]$ функций. Под сходимостью в $L^0[0, 1]$ мы будем подразумевать сходимость почти всюду.

Напомним определение системы Уолша-Пэли $\{W_k(x)\}$ (см.[1]).

$$W_0(x) = 1, W_n(x) = \prod_{s=1}^k r_{m_s}(x), n = \sum_{s=1}^k 2^{m_s}, m_1 > m_2 > \dots > m_s \geq 0,$$

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066.

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), r_k(x) = r_0(2^k x), k = 1, 2, \dots$$

Система Уолша-Пэли является одной из популярных систем функций, ее изучению было посвящено много работ. Одно из главных свойств этой системы состоит в том, что она образует базис во всех пространствах $L^p[0, 1]$, $p > 1$ (ортонормальный базис в $L^2[0, 1]$) (см. [2]).

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная в $L^2[0, 1]$ ортонормированная система и пусть

$$(1.2) \quad c_k(U) = \int_0^1 U(x) \varphi_k(x) dx, \quad k \in \mathbf{N}$$

– коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0, 1]$, ($\mathbf{N}$ – совокупность всех натуральных чисел). Пусть S – одно из пространств $L_\mu^p[0, 1]$, $p > 0$ или $L^0[0, 1]$.

Говорят, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$; $f_k(x) \in S$ – универсален в S в смысле перестановок, если для каждой функции $f(x) \in S$ члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$ сходил к функции $f(x)$ в S .

Необходимо отметить, что понятие универсального ряда восходит к работам Меньшова [3] и Талаляна [4]. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками. В работах [5] – [7] М. Григорян ввел следующее

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $U \in L^1[0, 1]$ для класса S относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется

а) универсальной в смысле перестановок, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ универсален в S в смысле перестановок,

б) условно универсальной в смысле перестановок, если можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ универсален в S в смысле перестановок,

с) универсальной в смысле знаков, если для каждой функции $f(x) \in S$ можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ сходится к $f(x)$ в S .

В работе [7] построена функция $U \in L^1[0, 1]$, которая универсальна для класса $L^0[0, 1]$ относительно системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в смысле знаков.

Следует отметить, что первые примеры универсальных функций были построены Биркгофом [8] в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, Марцинкевичем [9] в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции (см. также [10] – [13]).

Отметим, что в работах [5] – [7] и [14] – [22] были получены некоторые результаты, связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых (по системе Уолша либо по тригонометрической системе) универсальны в том или ином смысле в различных функциональных классах.

Отметим, что нам не известно, существует ли универсальная функция $U \in L^1[0, 1]$ для классов $L^p[0, 1]$, $p \in [0, 1]$ и $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$ относительно системы Уолша **в смысле перестановок**?

В этой статье доказывается, что для любых $p \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество Θ с мерой $|\Theta| > 1 - \varepsilon$ и функция $U \in L^1[0, 1]$, такие что функция U условно универсальна для класса $L^p(\Theta)$, $p \geq 1$ относительно системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k,s=0}^\infty$ в смысле перестановок.

Более того, мы строим весовую функцию $\mu(x)$ и интегрируемую функцию $U(x)$ так, чтобы после выбора подходящих знаков $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ для коэффициентов Фурье-Уолша $\{c_k(U)\}_{k=0}^\infty$ можно достичь того, что вновь полученный ряд $\sum_{k=0}^\infty \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ – будет универсальным в $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$ в смысле перестановок. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Существуют весовая функция $\mu(x)$ и интегрируемая функция $U(x)$, такие что*

a) $0 < \mu(x) \leq 1$ и $\text{mes}\{x \in [0, 1], \mu(x) = 1\} > 1 - \theta$, где θ произвольное наперед заданное положительное число,

b) функция $U(x)$ имеет монотонно убывающие коэффициенты Фурье по системе Уолша и ее ряд Фурье-Уолша сходится в метрике $L^1[0, 1]$,

c) $U(x)$ условно универсальна в смысле перестановок для каждого пространства $L_\mu^p[0, 1]$, $p > 1$ относительно системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ в смысле перестановок,

d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\#\{k \leq n; \delta_k = 1\}}{n} = 1,$$

где $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^\infty$, - последовательность знаков входящих в определение, а $\{A\}$ - число элементов конечного множества A .

Замечание 1.1. Отметим, что сформулированная выше теорема в определенном смысле окончательна, ибо каковы бы не были число $p \geq 1$ и ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, не существует функция $U \in L^1[0, 1]$, которая была бы условно универсальной (универсальной) для класса $L^p[0, 1]$, $p \geq 1$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ в смысле перестановок.

Было бы интересно узнать ответы на следующие вопросы:

Вопрос 1. Верна ли эта теорема для тригонометрической системы?

Вопрос 2. Существуют ли весовая функция $\mu(x)$ и интегрируемая функция $U(x)$, такие что $U(x)$ была бы универсальной в смысле перестановок для некоторого пространства $L_\mu^p[0, 1]$, $p > 1$ относительно системы Уолша в смысле перестановок?

Вопрос 3. Существует ли интегрируемая функция, ряд Фурье которой по системе Уолша или по тригонометрической системе $\{e^{2\pi kix}\}_{k=0}^\infty$ был бы универсальным в $L^p[0, 1)$ относительно перестановок при некотором $p \in (0, 1)$?

При доказательстве теоремы мы будем использовать следующую лемму, доказанную в [21] (см. Лемма 2.4).

Лемма 1.1. Для любого $\theta \in (0, 1)$ существует весовая функция $0 < \mu(x) \leq 1$, с $\text{mes}\{x \in [0, 1], \mu(x) = 1\} > 1 - \theta$, так что для любых чисел $p_0 > 1$, $n_0 \geq 1$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и полинома $f(x)$ по системе Уолша можно найти полиномы

$$H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x), \quad Q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1, 0$$

по системе Уолша, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\|_{L^1} < \varepsilon, \quad 0 < a_{k+1} < a_k < \varepsilon, \quad k \in [2^{n_0}, 2^n - 1),$$

$$\|f - Q\|_{L_\mu^{p_0}} < \varepsilon, \quad \max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M \delta_k a_k W_k(x) \right\|_{L_\mu^{p_0}} < 2 \|f\|_{L_\mu^p} + \varepsilon, \quad p \in [1, p_0].$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Пусть $p_n \nearrow \infty$ и пусть

$$(2.1) \quad F = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty.$$

– последовательность всех полиномов по системе Уолша с рациональными коэффициентами. Последовательно применяя лемму, мы можем (по индукции) определить последовательности полиномов $\{U_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{U_n^*(x)\}_{n=1}^\infty$ вида

$$(2.2) \quad U_0(x) = 2W_0(x) + W_1(x), \quad U_n(x) = \sum_{k=M_n}^{M_n^*-1} a_k^{(n)} W_k(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad M_1 = 2,$$

$$(2.3) \quad Q_0(x) = 2W_0(x), \quad Q_n(x) = \sum_{k=M_n}^{M_n^*-1} \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x), \quad \delta_k^{(n)} = \pm 1, 0,$$

$$(2.4) \quad U_n^*(x) = \sum_{k=M_n^*}^{M_{n+1}-1} b_k^{(n)} W_k(x),$$

которые для каждого $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяют условиям:

$$(2.5) \quad M_n < M_n^* < M_{n+1} = 2^{2n} M_n^*, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(2.6) \quad 2^{-4(n+1)} > a_{M_n}^{(n)} > \dots > a_j^{(n)} > a_{j+1}^{(n)} > \dots > a_{M_n^*-1}^{(n)} > b_{M_n^*}^{(n)} > \dots > b_{k-1}^{(n)} > b_k^{(n)} > \dots > b_{M_{n+1}-1}^{(n)} > a_{M_{n+1}}^{(n+1)} > \dots > a_s^{(n+1)} > a_{s+1}^{(n+1)} > \dots > a_{M_{n+1}^*-1}^{(n+1)} > 0,$$

где $j \in [M_n, M_n^* - 2)$, $k \in [M_n^*, M_{n+1} - 2)$, $s \in [M_{n+1}, M_{n+1}^* - 2)$.

$$(2.7) \quad \sum_{k=M_n^*}^{M_{n+1}-1} b_k^{(n)} < 2^{-5(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(2.8) \quad \|U_n\|_{L^1} \leq \max_{m \in [M_n, M_n^*)} \left\| \sum_{k=M_n}^m a_k^{(n)} W_k \right\|_{L^1} < 2^{-4(n+1)}.$$

$$(2.9) \quad \|f_n - Q_n\|_{L_\mu^{p_n}} < 2^{-4(n+4)},$$

$$(2.10) \quad \max_{m \in [M_n, M_n^*)} \left\| \sum_{k=M_n}^m \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k \right\|_{L_\mu^p} < 2 \|f_n\|_{L_\mu^p} + 2^{-4(n+1)}, \quad p \in [1, p_n].$$

Положим

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_k = a_k^{(n)}, \quad k \in [M_n, M_n^*),$$

$$(2.11) \quad a_k = b_k^{(n)}, \quad k \in [M_n^*, M_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad U_0(x) = 2W_0(x) + W_1(x).$$

Из (2.4), (2.7) и (2.8) следует

$$(2.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n + U_n^{(*)}\|_{L^1} < \infty.$$

Определим функцию $U(x)$ следующим образом:

$$(2.13) \quad U(x) = U_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n(x) + U_n^{(*)}(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x).$$

Из (2.12) и (2.13) вытекает, что $U(x) \in L^1[0, 1]$. Учитывая соотношения (2.2), (2.4), (2.8) и (2.11) - (2.13) получим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x)$ сходится к $U(x)$ по $L^1[0, 1]$ норме, и следовательно

$$(2.14) \quad a_k = c_k(U) = \int_0^1 U(x) W_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В силу (2.11) - (2.13), (2.6) и (2.14) будем иметь $\{c_k(U)\}_{k=0}^{\infty} \searrow$. Положим

$$(2.15) \quad \Omega_n = \{k \in [M_n, M_n^*]; \delta_k^{(n)} = 0\}, \quad Q_n^{(0)}(x) = \sum_{k \in \Omega_n} a_k^{(n)} W_k(x).$$

Очевидно, что

$$(2.16) \quad \text{spec}(Q_n) = [M_n, M_n^*] \setminus \Omega_n = \{k_s \nearrow; k_s \in [M_n, M_n^*]; \delta_{k_s}^{(n)} = \pm 1\}.$$

Следовательно

$$(2.17) \quad Q_n(x) = \sum_{k=M_n}^{M_n^*-1} \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x) = \sum_{M_n \leq k_s < M_n^*} \delta_{k_s}^{(n)} a_{k_s}^{(n)} W_{k_s}(x), \quad \delta_{k_s}^{(n)} = \pm 1.$$

Определим последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ знаков следующим образом:

$$(2.18) \quad \varepsilon_k = \delta_k^{(n)}, \quad k \in \text{spec}(Q_n); \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_k = 1, \quad k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega_n \cup [M_n^*, M_{n+1})).$$

Из (2.5), (2.8) и (2.18) следует

$$\frac{\#\{k \in \mathbf{N}, k \leq M_{n+1}; \varepsilon_k = 1\}}{M_{n+1}} \geq \frac{M_{n+1} - M_n^*}{M_{n+1}} = \frac{2^{2n} M_n^* - M_n^*}{2^{2n} M_n^*} = 1 - \frac{1}{2^{2n}}.$$

Отсюда и из (2.18) имеем

$$(2.19) \quad \varepsilon_k = \pm 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\#\{k \in \mathbf{N}, k \leq n; \varepsilon_k = 1\}}{n} = 1.$$

Покажем, что ряд (см. (2.4), (2.11), (2.14) - (2.18))

$$(2.20) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x) = U_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (Q_j(x) + Q_j^{(0)}(x) + U_j^{(*)}(x)),$$

универсален во всех пространствах $L_{\mu}^p[0, 1]$, $p \geq 1$ относительно перестановок.

Пусть $p \geq 1$ и пусть $f(x) \in L_{\mu}^p[0, 1]$. Возьмем функцию $f_{\nu_1}(x)$ из последовательности (2.1) таким образом, чтобы

$$\|f(x) - Q_{\nu_0}(x) - \varepsilon_{l(1)} c_{l(1)}(U) W_{l(1)}(x) - f_{\nu_1 \nu_1}(x)\|_{L_{\mu}^p} \leq 2^{-6}, \quad p_{\nu_1} \geq p, \quad \nu_1 \geq 2,$$

где

$$\nu_0 = 0, \quad Q_{\nu_0}(x) = 2W_0(x), \quad \varepsilon_{l(1)}c_{l(1)}(U)W_{l(1)}(x) = W_1(x), \quad l(1) = 1$$

Отсюда и из (2.9) следует

$$\left\| f(x) - Q_{\nu_0}(x) - \varepsilon_{l(1)}c_{l(1)}(U)W_{l(1)}(x) - Q_{\nu_1}(x) \right\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-6},$$

Положим

$$l(2) = \min \{n \in N, \quad n > 2, \quad n \notin \text{spec}(Q_{\nu_1})\}, \quad l(0) = 0, \quad l(1) = 1.$$

Предположим, что уже определены числа $\nu_0 = 0 < \nu_1 < \dots < \nu_r \dots < \nu_{q-1}$, $l(1) = 1, l(2), l(3), \dots, l(q)$, функции $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$ и полиномы $\{Q_{\nu_j}(x)\}_{j=1}^{q-1}$ удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \left\{ \sum_{j=0}^r [Q_{\nu_j}(x) + \varepsilon_{l(j+1)}c_{l(j+1)}(U)W_{l(j+1)}] \right\} \right\|_{L_\mu^p} &\leq \\ (2.21) \quad &\leq 2^{-4(r+4)} + |c_{l(r+1)}(U)|, \end{aligned}$$

$$(2.22) \quad \max_{m \in [M_{\nu_r}, M_{\nu_r}^*]} \left\| \sum_{M_{\nu_r} \leq k_s \leq m} \varepsilon_{k_s} c_{k_s}(U) W_{k_s} \right\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-2(r+1)} + |c_{s(r)}(U)|, \quad r \in [0, q].$$

Легко видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1} + q + 1$ (функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (2.1)) таким образом, чтобы

$$(2.23) \quad \left\| f - \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} [Q_{\nu_j} + \varepsilon_{l(j+1)}c_{l(j+1)}(U)W_{l(j+1)}] \right\} - f_{\nu_q} \right\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-4(q+5)}.$$

Из (2.9), (2.21) и (2.23) следует

$$(2.24) \quad \left\| f - \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} [Q_{\nu_j} + \varepsilon_{l(j+1)}c_{l(j+1)}(U)W_{l(j+1)}] \right\} - Q_{\nu_q} \right\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-4(q+4)},$$

$$(2.25) \quad \|f_{\nu_q}\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-4(q+5)} + 2^{-4(q+3)} + |c_{l(q)}(U)| \leq 2^{-4q-2} + |c_{l(q)}(U)|.$$

Положим

$$(2.26) \quad l(q+1) = \min \{n; \quad n \notin \left\{ \bigcup_{i=0}^q \text{spec}(Q_{\nu_j}) \right\} \cup \{l(n)\}_{n=1}^q\}$$

Учитывая соотношения (2.10), (2.15) – (2.19) и (2.24) – (2.26), получим

$$\left\| f(x) - \left\{ \sum_{j=0}^q [Q_{\nu_j} + \varepsilon_{l(j+1)}c_{l(j+1)}(U)W_{l(j+1)}] \right\} \right\|_{L_\mu^p} \leq$$

$$(2.27) \quad \leq 2^{-4(q+4)} + \left\| \varepsilon_{l(q+1)} c_{l(q+1)}(U) W_{l(q+1)} \right\|_{L_\mu^p} = 2^{-4(q+4)} + |c_{l(q+1)}(U)|,$$

$$(2.28) \quad \begin{aligned} & \max_{m \in [M_{\nu_q}, M_{\nu_q}^*)} \left\| \sum_{M_{\nu_q} \leq k_s \leq m} \varepsilon_{k_s} c_{k_s}(U) W_{k_s}(x) \right\|_{L_\mu^p} = \max_{m \in [M_{\nu_q}, M_{\nu_q}^*)} \left\| \sum_{k=M_{\nu_q}}^m \delta_k^{(\nu_q)} a_k^{(\nu_q)} W_k \right\| \leq \\ & \leq 2 \left\| f_{\nu_q} \right\|_{L_\mu^p} + 2^{-4(\nu_q+1)} \leq 2^{-3q-1} + 2 |c_{l(q)}(U)|. \end{aligned}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности чисел $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$, $\{l(q)\}_{q=1}^\infty$, $(l(1) = 0, l(2) = 1)$, и полиномов $\{Q_{\nu_q}(x)\}_{q=1}^\infty$, удовлетворяющие условиям (2.26) - (2.28) для всех $q \geq 1$.

Учитывая выбор натуральных чисел $\{M_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$, и $\{l(q)\}_{q=1}^\infty$ (см. (2.5), (2.23), (2.26)) получим, что последовательность чисел

$$(2.29) \quad 0, l(1) = 1, \text{spec}(Q_{\nu_1}), l(2), \text{spec}(Q_{\nu_2}), l(3), \dots, l(j), \text{spec}(Q_{\nu_j}), l(j+1) \dots$$

есть некоторая перестановка последовательности $0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Последовательность (2.29) запишем в виде

$$\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k), \dots$$

Отсюда, учитывая выбор полиномов $\{Q_{\nu_q}(x)\}_{q=1}^\infty$ и чисел $\{l(q)\}_{q=1}^\infty$, в силу (2.15) - (2.18), (2.20), (2.26) и (2.29) имеем

$$(2.30) \quad \begin{aligned} & \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_{\sigma(k)} c_{\sigma(k)}(U) W_{\sigma(k)}(x) = \\ & = 2W_0(x) + W_1(x) + \sum_{q=1}^\infty \left[Q_{\nu_q}(x) + \varepsilon_{l(q+1)} c_{l(q+1)}(U) W_{l(q+1)}(x) \right]. \end{aligned}$$

Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_{\sigma(k)} c_{\sigma(k)}(U) W_{\sigma(k)}(x)$ сходится к $f(x)$ по $L_\mu^p[0, 1]$ норме. Положим

$$(2.31) \quad K_q = 2 + \sum_{j=1}^{q-1} (\#\text{spec}(Q_{\nu_j}) + j).$$

Учитывая соотношения (2.5), (2.16) и (2.26) - (2.31) для каждого $N \in (K_q, K_{q+1}]$, $q \geq 2$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{k=1}^N \varepsilon_{\sigma(k)} c_{\sigma(k)}(U) W_{\sigma(k)} \right\|_{L_\mu^p} \leq \left\| f - \left\{ \sum_{j=1}^{q-1} [Q_{\nu_j} + \varepsilon_{l(j+1)} c_{l(j+1)}(U) W_{l(j+1)}] \right\} \right\|_{L_\mu^p} \\ & + \max_{m \in [M_{\nu_q}, M_{\nu_q}^*)} \left\| \sum_{M_{\nu_q} \leq k_s \leq m} \varepsilon_{k_s} c_{k_s}(U) W_{k_s}(x) \right\|_{L_\mu^p} + |c_{l(q+1)}(U)| \end{aligned}$$

$$\leq 2^{-2(q+1)} + 2 |c_{l(q)}(U)| + 2 |c_{l(q+1)}(U)|.$$

Отсюда, из того, что $l(q) \rightarrow \infty$ следовательно и $c_{l(q)}(U) \rightarrow 0$ (см. (15)) при $N \rightarrow \infty$ следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{\sigma(k)} c_{\sigma(k)}(U)_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x)$ сходится к $f(x)$ по $L^p_\mu[0, 1]$ норме. Теорема доказана.

Abstract. The paper discusses the question of the existence of universal functions whose Fourier series in the Walsh system are conditionally universal in the sense of permutations in all weighted spaces $L^p_\mu[0, 1]$, $p \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. E. A. C. Paley, “A remarkable set of orthogonal functions”, I, Proc. Lond. Math. Soc. **34**, 241 – 264 (1932).
- [2] C. J. Watari, “Mean convergence of Fourier - Walsh series”, Tohoku Math. J., **16**:2, 183 – 188 (1964).
- [3] Д. Е. Меньшов, “О частичных суммах тригонометрических рядов”, Мат. Сборник, **20**:2, 197 – 238 (1947).
- [4] А. А. Талалян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов”, Изв. АН Арм. ССР, **10**:3, 17 – 34 (1957).
- [5] М. Г. Григорян, “Функции с универсальными рядами Фурье–Уолша”, Матем. Сб. **211**:6, 107 – 131 (2020).
- [6] M. G. Grigoryan, “On Universal Fourier series in the Walsh system”, Siberian Mathematical Journal, **63**:3, 868 – 882 (2022).
- [7] М. Г. Григорян, “Об универсальных (в смысле знаков) рядах Фурье по системе Уолша”, Матем. Сб., **215**:6, 717 – 742 (2024).
- [8] G. D. Birkhoff, “Démonstration d’un théorème élémentaire sur les fonctions entières”, C. R. Acad. Sci. Paris, **189**, 473 – 475 (1929).
- [9] J. Marcinkiewicz, “Sur les nombres derives”, Fund. Math. **24**, 305 – 308 (1935).
- [10] V.G. Krotov, “Smoothness of the universal Marcinkiewicz functions and universal trigonometric series”, Izv. universities. Mat., **8**, 26 – 35 (1991).
- [11] G. R. MacLane, “Sequences of derivatives and normal families”, J. Anal. Math. **2**, 72 – 87 (1952).
- [12] K. G. Grosse-Erdmann, “Holomorphe Monster und Universelle Funktionen”, Mitt. Math., Semin. Giessen., **176**, 1 – 84 (1987).
- [13] W. Luh, “Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets”, Analysis, **6**, 191 – 207 (1986).
- [14] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. АН. Росс., **632**:1, 41 – 60 (1999).
- [15] А. А. Саргсян, “Квазиуниверсальные ряды Фурье–Уолша в классах $L^p[0, 1]$, $p > 1$ ”, Матем. заметки, **104**:2, 273 – 288 (2018).
- [16] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, “On the universal function for the class $L^p[0, 1]$, $p \in (0, 1)$ ”, Journal of Func. Anal., **270**:8, 3111 – 3133 (2016).
- [17] A. A. Sargsyan, M. G. Grigorian, “Universal function for a weighted space”, Positivity, **21**, 1457 – 1482 (2017).
- [18] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On Fourier series that are universal modulo signs”, Studia Mathematica, **249**:2, 215 – 231 (2019).
- [19] A. A. Sargsyan, “On the structure of functions, universal for weighted spaces $L^p_\mu[0, 1]$, $p > 1$ ”, Journal of Contemp. Math. Anal., **54**:3, 163 – 175 (2019).
- [20] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы”, Изв. РАН. Сер. матем., **85**:2, 73 – 94 (2021).

- [21] M. G. Grigorian, T. M. Grigorian, A. A. Sargsyan, “On the universal function for weighted spaces $L^p_\mu[0, 1], p \geq 1$ ”, Banach J. Math. Anal. **12**:1, 104 – 125 (2018).
- [22] A. A. Sargsyan, “On the existence of universal functions with respect to the double Walsh system for classes of integrable functions”, Colloq. Math., **161**, 111 – 129 (2020).

Поступила 20 октября 2024

После доработки 24 ноября 2024

Принята к публикации 28 декабря 2024

**О КОНСТРУКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ
НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ГАММЕРШТЕЙНА-ВОЛЬТЕРРА НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ
ПОЛУПРЯМОЙ**

Х. А. ХАЧАТРЯН, А. С. ПЕТРОСЯН, Т. Р. ВАРДАНЫАН

Ереванский государственный университет¹
Национальный Аграрный Университет Армении
Институт математики НАН Республики Армения
E-mails: *khachatur.khachatryan@ysu.am; Haykuhi25@mail.ru*
tamar.vardanyan2000@gmail.com

Аннотация. Исследуется система нелинейных интегральных уравнений с матричным оператором Гаммерштейна - Вольтерра. Указанная система уравнений, кроме чисто математического интереса, представляет определенный интерес в различных областях естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в гидроаэродинамике, в моделях популяционной генетики и в теории переноса тепла излучением. Доказывается конструктивная теорема существования неотрицательного ограниченного и непрерывного решения указанной системы уравнений. При одном дополнительном ограничении на нелинейность получается равномерная сходимость специально выбранных последовательных приближений со скоростью убывающей геометрической прогрессии. Исследуется также асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности. Более того, доказывается теорема единственности решения в классе ограниченных вектор-функций, координаты которых неотрицательны. В конце работы приводятся конкретные примеры указанных систем, удовлетворяющие всем условиям доказанных утверждений.

MSC2020 number: 45G05; 45G15.

Ключевые слова: ядро; спектральный радиус; итерации, монотонность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию вопросов конструктивной разрешимости, единственности и изучению асимптотического поведения построенного решения на

¹Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027. Исследование третьего автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 24RL-1A028.

бесконечности для следующей системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна-Вольтерра на полуоси:

$$(1.1) \quad f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j(f_j(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$$

относительно искомой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))^T \in \mathfrak{M}$, где T знак транспонирования, а $\mathfrak{M}$ следующий класс вектор-функций

$$(1.2) \quad \mathfrak{M} = \{\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x))^T : \varphi_i(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi_i \in M(\mathbb{R}^+), \\ i = 1, 2, \dots, N\}.$$

В (1.2) через $M(\mathbb{R}^+)$ обозначено пространство ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}^+$.

В системе (1.1) матричное ядро $V(x, t) = (V_{ij}(x, t))_{i,j=1}^{N \times N}$ определено на множестве

$$\Pi = \{(x, t) : 0 \leq t \leq x\}$$

и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $V_{ij}(x, t) > 0$, $(x, t) \in \Pi$, $i, j = 1, \dots, N$ и $V \in C(\Pi)$,
- 2) если $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi$ и $x_1 \geq x_2$, то
$$V_{ij}(x_1, t) \leq V_{ij}(x_2, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$
- 3) функции $\int_0^x V_{ij}(x, t) dt$, $i, j = 1, \dots, N$ монотонно возрастают по x на $\mathbb{R}^+$,
- 4) существуют $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left(\int_0^x V_{ij}(x, t) dt \right) =: a_{ij} = a_{ji} < +\infty$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Функции $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$ обладают следующими свойствами:

- а) $g_i(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $g_i(0) > 0$, $g_i \in C(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, N$,
- б) существуют $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} (g_i(x)) =: \beta_i < +\infty$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Обозначим через λ спектральный радиус матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N \times N}$. Согласно теореме Перрона (см. [1]) существует вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)^T$ с положительными координатами η_i , $i = 1, 2, \dots, N$ такой, что

$$(1.3) \quad \sum_{i=1}^N a_{ij} \eta_j = \lambda \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=1}^N$ в системе (1.1) определены на множестве $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяют условиям

- А) $G_j \in C(\mathbb{R}^+)$, $G_j(0) = 0$, $G_j(\eta_j) = \eta_j$, $j = 1, 2, \dots, N$,
- В) $G_j(u)$ монотонно возрастают, строго вогнуты на множестве $\mathbb{R}^+$ и
$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{G_j(u)}{u} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Система (1.1) имеет важное прикладное значение в различных отраслях естествознания. В частности система (1.1) и его скалярный аналог встречаются в моделях, популяционной генетики, в гидроаэродинамике, в теории переноса тепла излучением и в теории марковских процессов (см. [2-6]).

С прикладной точки зрения особый интерес представляют положительные решения из класса $\mathfrak{M}$.

В скалярном случае когда $N = 1$ и ядро V зависит от разности своих аргументов, удовлетворяет некоторым условиям технического характера, а нелинейность G допускает представление $G(u) = u^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, уравнение (1.1), при различных условиях на “свободного члена” g было исследовано в работах [7-14]. В случае когда $G(u) = u^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ в работе [15] доказаны теоремы существования и единственности решения в определенном конусном отрезке пространства непрерывных функций для скалярного аналога системы (1.1), при достаточно сильных ограничениях на ядро V и на функцию g (условия гладкости, монотонности, сжимаемости в конкретно выбранном конусном отрезке).

Следует отметить, что системы вида (1.1) в линейном случае $G_i(u) = u$, $i = 1, 2, \dots, N$ достаточно подробно исследовались в работах [16-18]. В настоящей работе мы будем заниматься вопросами существования единственности и изучения асимптотического поведения на бесконечности непрерывного решения системы (1.1) в классе $\mathfrak{M}$. В частности, при условиях 1), 4), а), б), А) и В) будет доказано, существование непрерывного решения системы (1.1) в $\mathfrak{M}$. При условиях 1)-4), а), б), А), В) и выполнении следующего дополнительного условия:

- С) существует непрерывное монотонно возрастающее и вогнутое отображение $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, со свойствами $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ такое, что

$$G_i(\sigma u) \geq \varphi(\sigma) G_i(u), \quad \sigma \in (0, 1) \quad u \in [0, \xi_i], \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

(где числа ξ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ единственным образом определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений вида $\xi_i = \beta_i + \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j(\xi_j)$, $i = 1, 2, \dots, N$),

мы получим равномерную оценку для разности соседних элементов соответствующих последовательных приближений системы (1.1). При этом правая часть этой оценки будет представлять из себя элемент бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Во второй части работы мы займемся доказательством

следующей интегральной асимптотики:

$$(1.4) \quad \xi_i - f_i \in L_1(0, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Наконец в третьей части, при условиях 1)-4), а), б), А)-С), мы докажем также единственность решения в классе вектор-функций $\mathfrak{M}$. В конце работы приведем конкретные примеры матричного ядра V , "свободного члена" $g(x) = (g_1(x), \dots, g_N(x))^T$ и нелинейностей $\{G_i(u)\}_{i=1}^N$, удовлетворяющие всем ограничениям доказанных теорем.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ (1.1)

2.1. Об одной вспомогательной системе нелинейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим следующую систему алгебраических уравнений с нелинейностями $G_j(u), j = 1, 2, \dots, N$:

$$(2.1) \quad \xi_i = \beta_i + \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j(\xi_j), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

относительно неизвестного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T, \xi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$, где числа β_i и $a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N$ определяются из условий б) и 4) соответственно. Для системы (2.1) рассмотрим следующие простые итерации:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \xi_i^{(p+1)} &= \beta_i + \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j(\xi_j^{(p)}), \\ \xi_i^{(0)} &= \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Индукцией по p несложно проверить, что

$$(2.3) \quad \beta_i^{(p)} \uparrow \text{ по } p, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Из свойств А) и В) следует существование обратной функции к функции $G_i(u)$. Обозначим через $Q_i(u)$ обратную функцию к функции $G_i(u)$. Учитывая свойства А) и В) можно утверждать, что

$$A') \quad Q_j \in C(\mathbb{R}^+), \quad Q_j(0) = 0, \quad Q_j(\eta_j) = \eta_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$B') \quad Q_j(u), \quad j = 1, 2, \dots, N \text{ монотонно возрастают и строго выпуклы (вниз) на множестве } \mathbb{R}^+.$$

Рассмотрим теперь функции на множестве $[1, +\infty)$:

$$(2.4) \quad \Gamma_i(u) := \min \{1; \lambda\} \cdot \frac{Q_i(u\eta_i)}{u\eta_i} - \lambda - \frac{\beta_i}{\eta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Принимая во внимание A' и B' можно утверждать, что

$$(2.5) \quad \Gamma_i \in C[1, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$(2.6) \quad \Gamma_i(1) = \min\{1; \lambda\} - \lambda - \frac{\beta_i}{\eta_i} \leq -\frac{\beta_i}{\eta_i} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$(2.7) \quad \Gamma_i(+\infty) = +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$(2.8) \quad \Gamma_i(u) \uparrow \text{ по } u \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Из свойств (2.5)-(2.8) сразу следует, что для любого индекса $i = \{1, 2, \dots, N\}$ существует единственное $c_i > 1$ такое, что

$$(2.9) \quad \Gamma_i(c_i) = 0.$$

Положим

$$(2.10) \quad c = \max\{c_1, c_2, \dots, c_N\}.$$

С учетом (2.8)-(2.10) имеем

$$\Gamma_i(c) \geq \Gamma_i(c_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

т.е.

$$(2.11) \quad \min\{1; \lambda\} \cdot \frac{Q_i(c\eta_i)}{c\eta_i} \geq \lambda + \frac{\beta_i}{\eta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Докажем теперь, что

$$(2.12) \quad \xi_i^{(p)} \leq Q_i(c\eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Сперва проверим справедливость неравенства (2.12) для номера $p = 0$. Действительно, учитывая (2.11) будем иметь

$$\begin{aligned} \xi_i^{(0)} = \beta_i &\leq \min\{1, \lambda\} \cdot \frac{Q_i(c\eta_i)}{c} - \lambda\eta_i \leq \frac{Q_i(c\eta_i)}{c} - \lambda\eta_i < Q_i(c\eta_i) - \lambda\eta_i < Q_i(c\eta_i), \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что (2.12) выполняется для некоторого номера $p \in \mathbb{N}$.

Тогда снова используя (2.11), а также (1.3), из (2.2) получим

$$\begin{aligned} \xi_i^{(p+1)} &\leq \beta_i + \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j(Q_j(c\eta_j)) = \beta_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \eta_j = \beta_i + c\lambda\eta_i \leq \beta_i + \\ &+ \min\{1, \lambda\} \cdot Q_i(c\eta_i) - \beta_i c < \min\{1, \lambda\} \cdot Q_i(c\eta_i) \leq Q_i(c\eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Следовательно из (2.3) и (2.12) заключаем, что последовательность векторов $\xi^{(p)} = (\xi_1^{(p)}, \dots, \xi_N^{(p)})^T$, $p = 0, 1, 2, \dots$ имеет предел: $\lim_{p \rightarrow \infty} \xi_i^{(p)} = \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, при-

чем в силу непрерывности функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^N$ предельный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$

удовлетворяет системе (2.1). Из (2.3) и (2.12) следует также, что

$$(2.13) \quad \beta_i < \xi_i \leq Q_i(c\eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Совершая аналогичные рассуждения как при доказательстве леммы из работы [19] можно убедиться, что система (2.1) не может иметь более одного решения в следующем классе векторов:

$$(2.14) \quad \mathcal{P} = \{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T : \xi_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \}.$$

2.2. Последовательные приближения для системы (1.1). Основные свойства итерационной последовательности.

Рассмотрим следующие последовательные приближения для системы нелинейных интегральных уравнений (1.1):

$$(2.15) \quad f_i^{(p+1)}(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j(f_j^{(p)}(t)) dt,$$

$$f_i^{(0)}(x) = \xi_i - \beta_i + g_i(x), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Обозначим через

$$(2.16) \quad \psi_i^{(p)}(x) = f_i^{(p)}(x) - g_i(x), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда итерации (2.15) примут следующий вид:

$$(2.17) \quad \psi_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j(\psi_j^{(p)}(t) + g_j(t)) dt,$$

$$\psi_i^{(0)}(x) = \xi_i - \beta_i, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Используя условия 1), а), А) и В) индукцией по p несложно убедиться в достоверности следующих фактов:

$$(2.18) \quad \psi_i^{(p)} \in C(\mathbb{R}^+), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$(2.19) \quad \psi_i^{(p)}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Докажем теперь, что

$$(2.20) \quad \psi_i^{(p)}(x) \downarrow \text{ по } p, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Сперва проверим, что

$$(2.21) \quad \psi_i^{(1)}(x) \leq \psi_i^{(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Учитывая условия 1), 4), А), В), а), в) и формулу (2.1), из (2.17) будем иметь

$$\begin{aligned}\psi_i^{(1)}(x) &= \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j(\xi_j - \beta_j + g_j(t)) dt \leq \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) \int_0^x V_{ij}(x, t) dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j(\xi_j) = \xi_i - \beta_i = \psi_i^{(0)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Предполагая, что $\psi_i^{(p)}(x) \leq \psi_i^{(p-1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, N$ при некотором натуральном p и при этом учитывая условия А), 1), а) и В), из (2.17) получаем, что $\psi_i^{(p+1)}(x) \leq \psi_i^{(p)}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Итак на основе (2.18)-(2.20) заключаем, что последовательность непрерывных вектор функций $\psi^{(p)}(x) = (\psi_1^{(p)}(x), \psi_2^{(p)}(x), \dots, \psi_N^{(p)}(x))^T$, $p = 0, 1, 2, \dots$ имеет точечный предел когда $p \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \psi_i^{(p)}(x) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

причем координаты предельной вектор-функции $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_N(x))^T$ удовлетворяют неравенствам:

$$(2.22) \quad 0 \leq \psi_i(x) \leq \xi_i - \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Используя непрерывность функций V и $\{G_j(u)\}_{j=1}^N$ в силу предельной теоремы Б. Леви (см. [20]) заключаем, что $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_N(x))^T$ удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений:

$$(2.23) \quad \psi_i(x) = \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j(\psi_j(t) + g_j(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Из условия 1) немедленно следует, что $\psi_i \in C(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

2.3. Равномерная сходимость последовательных приближений (2.17).

Основная оценка.

Доказательство. Предположим теперь, что помимо условий 1), 4), а), б), А), В) выполняются также условия 2), 3) и С). Из условия а) немедленно следует, что существует число $r_0 > 0$ такое, что

$$(2.24) \quad \alpha_j := \inf_{x \in [0, r_0)} (g_j(t)) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

В силу условий а), 1), А), В) из (2.17) с учетом (2.24) имеем для $x \in [0, r_0)$

$$\psi_i^{(1)}(x) \geq \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j - \beta_j + \alpha_j) \int_0^x V_{ij}(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

а для $x \in [r_0, +\infty)$

$$\psi_i^{(1)}(x) \geq \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j - \beta_j) \int_0^x V_{ij}(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно, если $x \in [0, r_0)$, то

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \psi_i^{(2)}(x) &\geq \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j \left(\sum_{m=1}^N G_m(\xi_m - \beta_m + \alpha_m) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \int_0^t V_{jm}(t, \tau) d\tau + \alpha_j \right) dt \geq \sum_{j=1}^N G_j(\alpha_j) \int_0^x V_{ij}(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

если же $x \in [r_0, +\infty)$, то

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \psi_i^{(2)}(x) &\geq \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j \left(\sum_{m=1}^N G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^t V_{jm}(t, \tau) d\tau \right) dt, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь следующие вспомогательные функции, определенные на множестве $[0, +\infty)$:

$$(2.27) \quad \chi_i(x) := \sum_{j=1}^N \xi_j \int_0^x V_{ij}(x, t) dt - \lambda \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Из непрерывности функций V_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$ на множестве Π немедленно следует, что $\chi_i \in C(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Так как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \int_0^x V_{ij}(x, t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x V_{ij}(x, t) dt = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

то в силу соотношения (1.3) имеем

$$(2.28) \quad \chi_i(0) = -\lambda \xi_i < 0, \quad \chi_i(+\infty) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$(2.29) \quad \chi_i(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно для каждого $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ существуют $\sigma_i, \delta_i : 0 < \sigma_i < \delta_i$ такие, что

$$(2.30) \quad \chi_i(\sigma_i) = -\frac{\lambda \xi_i}{2}, \quad \chi_i(\delta_i) = -\frac{\lambda \xi_i}{3}.$$

Пусть

$$x > \max \{r_0, \delta_1, \dots, \delta_N\} + 1 = r_1.$$

Тогда используя b), 1), A), B), (2.30) и (2.26) при $x > r_1$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 \psi_i^{(2)}(x) &\geq \sum_{j=1}^N \int_{\sigma_j}^x V_{ij}(x, t) G_j \left(\sum_{m=1}^N G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^t V_{jm}(t, \tau) d\tau \right) dt \geq \\
 &\geq \sum_{j=1}^N G_j \left(\sum_{m=1}^N G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^{\sigma_j} V_{jm}(\sigma_j, \tau) d\tau \right) \int_{\sigma_j}^x V_{ij}(x, t) dt \geq \\
 &\geq \sum_{j=1}^N G_j \left(\min_{1 \leq m \leq N} \left(\frac{G_m(\xi_m - \beta_m)}{\xi_m} \right) \cdot \sum_{m=1}^N \xi_m \int_0^{\sigma_j} V_{jm}(\sigma_j, \tau) d\tau \right) \cdot \int_{\sigma_j}^x V_{ij}(x, t) dt = \\
 &= \sum_{j=1}^N G_j \left(\min_{1 \leq m \leq N} \left(\frac{G_m(\xi_m - \beta_m)}{\xi_m} \right) \cdot \frac{\lambda \xi_j}{2} \right) \cdot \int_{\sigma_j}^x V_{ij}(x, t) dt \geq \\
 &\geq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^N \xi_j \left(\int_0^x V_{ij}(x, t) dt - \int_0^{\sigma_j} V_{ij}(x, t) dt \right) := I_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned}$$

где

$$(2.31) \quad \varepsilon := \min_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{G_j \left(\min_{1 \leq m \leq N} \left(\frac{G_m(\xi_m - \beta_m)}{\xi_m} \right) \cdot \frac{\lambda \xi_j}{2} \right)}{\xi_j} \right).$$

Учитывая условие 2) получим

$$\begin{aligned}
 I_i &\geq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^N \xi_j \left(\int_0^x V_{ij}(x, t) dt - \int_0^{\sigma_j} V_{ij}(\sigma_j, t) dt \right) = \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^N \xi_j \int_0^x V_{ij}(x, t) dt - \varepsilon \cdot \frac{\lambda \xi_i}{2} \geq \\
 &\geq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^N \xi_j \int_0^{\delta_i} V_{ij}(\delta_i, t) dt - \varepsilon \cdot \frac{\lambda \xi_i}{2} = \varepsilon \left(\frac{2\lambda \xi_i}{3} - \frac{\lambda \xi_i}{2} \right) = \varepsilon \cdot \frac{\lambda \xi_i}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Итак для $x > r_1$ приходим к оценке

$$(2.32) \quad \psi_i^{(2)}(x) \geq \varepsilon \cdot \frac{\lambda \xi_i}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Пусть теперь $x \in [r_0, r_1]$. Тогда снова используя условия 1), 3), A), B) согласно теореме Вейерштрасса приходим к неравенствам:

$$\begin{aligned}
 \psi_i^{(2)}(x) &\geq \sum_{j=1}^N \int_0^{r_0} V_{ij}(x, t) G_j \left(\sum_{m=1}^N G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^t V_{jm}(t, \tau) d\tau \right) dt \geq \\
 &\geq \sum_{j=1}^N \int_{r_0/2}^{r_0} V_{ij}(x, t) dt \cdot G_j \left(\sum_{m=1}^N G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^{r_0/2} V_{jm}(r_0/2, \tau) d\tau \right) \geq \\
 &\geq \min_{x \in [r_0, r_1]} \left(\sum_{j=1}^N q_j \int_{r_0/2}^{r_0} V_{ij}(x, t) dt \right) := d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned}$$

где

$$(2.33) \quad q_j = G_j \left(\sum_{m=1}^N G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^{r_0/2} V_{jm}(r_0/2, \tau) d\tau \right).$$

Таким образом для $x \in [r_0, +\infty)$ получаем следующее неравенство снизу:

$$(2.34) \quad \psi_i^{(2)}(x) \geq \min \left\{ \frac{\varepsilon \lambda \xi_i}{6}, d_i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Из (2.17) и (2.20) следует, что при $x \in [0, r_0)$

$$(2.35) \quad \psi_i^{(1)}(x) \leq \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) \int_0^x V_{ij}(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Принимая во внимание (2.25), (2.20) и (2.35) для $x \in [0, r_0)$ приходим к следующему неравенству

$$(2.36) \quad \psi_i^{(1)}(x) \geq \psi_i^{(2)}(x) \geq l_1 \psi_i^{(1)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$(2.37) \quad l_1 = \frac{\min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\alpha_j))}{\max_{1 \leq j \leq N} (G_j(\xi_j))}$$

Учитывая (2.34), (2.21), (2.20) и полагая, что

$$(2.38) \quad l_2 = \min_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{\min \left\{ \frac{\varepsilon \lambda \xi_i}{6}, d_i \right\}}{\xi_i - \beta_i} \right)$$

для $x \in [r_0, +\infty)$ получим

$$(2.39) \quad \psi_i^{(1)}(x) \geq \psi_i^{(2)}(x) \geq l_2 \psi_i^{(1)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом из (2.36)-(2.38) заключаем, что

$$(2.40) \quad \psi_i^{(1)}(x) \geq \psi_i^{(2)}(x) \geq \sigma_0 \psi_i^{(1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$(2.41) \quad \sigma_0 = \min\{l_1, l_2\}.$$

Следует отметить, что

$$(2.42) \quad 0 < l_i < 1, \quad i = 1, 2.$$

Действительно, неравенства (2.42) сразу следуют из условий А), В), формул (2.24), (2.31), (2.13), (2.33), (2.37), (2.38) и следующих простых оценок

$$0 < l_1 \leq \frac{G_j(\alpha_j)}{G_j(\xi_j)} \leq \frac{G_j(\beta_j)}{G_j(\xi_j)} < \frac{G_j(\xi_j)}{G_j(\xi_j)} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{aligned}
 0 < l_2 &\leq \frac{1}{\xi_i - \beta_i} \min \left\{ \frac{\varepsilon \lambda \xi_i}{6}, d_i \right\} \leq \frac{1}{\xi_i - \beta_i} d_i \leq \frac{1}{\xi_i - \beta_i} \cdot \sum_{j=1}^N q_j a_{ij} \leq \\
 &\leq \frac{1}{\xi_i - \beta_i} \cdot \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j - \beta_j) a_{ij} \leq \frac{\sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) a_{ij}}{\xi_i - \beta_i} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Из (2.42) и (2.41) сразу получаем, что

$$(2.43) \quad \sigma_0 \in (0, 1).$$

Учитывая (2.43) и условие а), из (2.40) приходим к неравенству

$$(2.44) \quad \sigma_0(\psi_j^{(1)}(t) + g_j(t)) \leq \psi_j^{(2)}(t) + g_j(t) \leq \psi_j^{(1)}(t) + g_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Принимая во внимание условия 1), А), В) и С), из (2.44) с учетом (2.17) получим

$$\varphi(\sigma_0)\psi_i^{(2)}(x) \leq \psi_i^{(3)}(x) \leq \psi_i^{(2)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда в частности следует, что

$$\begin{aligned}
 (2.45) \quad &\varphi(\sigma_0)(\psi_j^{(2)}(t) + g_j(t)) \leq \psi_j^{(3)}(t) + g_j(t) \leq \psi_j^{(2)}(t) + g_j(t), \\
 &j = 1, 2, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R}^+,
 \end{aligned}$$

ибо

$$\varphi(\sigma_0) \in (0, 1), \quad g_j(t) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Снова учитывая условия 1), А), В) и С) из (2.45) с учетом (2.17) получаем

$$\varphi(\varphi(\sigma_0))\psi_i^{(3)}(x) \leq \psi_i^{(4)}(x) \leq \psi_i^{(3)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Продолжая, эту процедуру на p -том шаге приходим к следующей цепочке неравенств:

$$(2.46) \quad \underbrace{\varphi(\dots\varphi(\sigma_0))}_p \psi_i^{(p+1)}(x) \leq \psi_i^{(p+2)}(x) \leq \psi_i^{(p+1)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

Теперь используя оценку (3.16) из работы [21], для любого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ получаем следующее неравенство

$$(2.47) \quad 0 \leq 1 - \underbrace{\varphi(\dots\varphi(\sigma_0))}_p \leq (1 - \sigma_0)k_{\varepsilon_0}^p, \quad p = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$(2.48) \quad k_{\varepsilon_0} = \frac{1 - \varphi(\varepsilon_0 \sigma_0)}{1 - \varepsilon_0 \sigma_0} \in (0, 1).$$

Следовательно, учитывая (2.46), (2.47) и (2.20) получим

$$(2.49) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \psi_i^{(p+1)}(x) - \psi_i^{(p+2)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1 - \sigma_0)k_{\varepsilon_0}^p, \\ p &= 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

В силу (2.48) и (2.49) получаем равномерную сходимость последовательности непрерывных вектор-функций $\psi^{(p)}(x) = (\psi_1^{(p)}(x), \dots, \psi_N^{(p)}(x))^T$, $p = 0, 1, 2, \dots$ к решению системы нелинейных интегральных уравнений (2.23) (со скоростью убывающей геометрической прогрессии). Запишем теперь неравенства (2.49) для номеров $p + 1, p + 2, \dots, p + m$:

$$\begin{aligned} &0 \leq \psi_i^{(p+2)}(x) - \psi_i^{(p+3)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1 - \sigma_0)k_{\varepsilon_0}^{p+1}, \\ &0 \leq \psi_i^{(p+3)}(x) - \psi_i^{(p+4)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1 - \sigma_0)k_{\varepsilon_0}^{p+2}, \\ &\dots\dots\dots \\ &0 \leq \psi_i^{(p+m+1)}(x) - \psi_i^{(p+m+2)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1 - \sigma_0)k_{\varepsilon_0}^{p+m}, \\ &x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства и неравенство (2.49), при этом учитывая (2.48), получаем

$$\begin{aligned}
0 &\leq \psi_i^{(p+1)}(x) - \psi_i^{(p+m+2)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1 - \sigma_0)k_{\varepsilon_0}^p(1 + k_{\varepsilon_0} + \dots + k_{\varepsilon_0}^m) \leq \\
(2.50) \quad &\leq (\xi_i - \beta_i)(1 - \sigma_0)k_{\varepsilon_0}^p \frac{1}{1 - k_{\varepsilon_0}} = (\xi_i - \beta_i)(1 - \sigma_0) \cdot \frac{1 - \varepsilon_0\sigma_0}{\varphi(\varepsilon_0\sigma_0) - \varepsilon_0\sigma_0} \cdot k_{\varepsilon_0}^p, \\
&p = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

В (2.50) зафиксирова p и устремляя $t \rightarrow \infty$ приходим следующему неравенству:

$$(2.51) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \psi_i^{(p+1)}(x) - \psi_i(x) \leq \frac{(\xi_i - \beta_i)(1 - \sigma_0)(1 - \varepsilon_0 \sigma_0)k_{\varepsilon_0}^p}{\varphi(\varepsilon_0 \sigma_0) - \varepsilon_0 \sigma_0}, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+, p = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Итак на основе изложенных фактов в пунктах 2.1-2.3 приходим к следующей теореме.

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия 1), 4), а), b), А) и В). Тогда система нелинейных интегральных уравнений (1.1) обладает неотрицательным непрерывным и ограниченным решением $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))^T$. Более того имеют место следующие двусторонние оценки:

$$(2.52) \quad g_i(x) \leq f_i(x) \leq \xi_i - \beta_i + g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Кроме того, при выполнении дополнительных условий 2), 3), C), последовательные приближения (2.15) равномерно сходятся к решению $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))^T$

и выполняется следующая оценка:

$$(2.53) \quad 0 \leq f_i^{(p+1)}(x) - f_i(x) \leq C_i \cdot k_{\varepsilon_0}^p, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad p = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}^+,$$

где

$$C_i := \frac{(\xi_i - \beta_i)(1 - \sigma_0)(1 - \varepsilon_0 \sigma_0)}{\varphi(\varepsilon_0 \sigma_0) - \varepsilon_0 \sigma_0}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

3. ИНТЕГРАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

3.1. Интегральная асимптотика.

В этом разделе мы займемся вопросом изучения интегральной асимптотики построенного решения системы (1.1) при следующих дополнительных ограничениях на g_i, V_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$:

$$c) \quad \beta_i - g_i \in L_1^0(0, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$5) \quad \text{существует матриц-функция } \mathring{V}(x) = (\mathring{V}_{ij}(x))_{i,j=1}^{N \times N} \text{ со свойствами:}$$

$$5_1) \quad \mathring{V}_{ij}(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^+, \int_0^\infty \mathring{V}_{ij}(x) dx = a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$5_2) \quad m(\mathring{V}_{ij}) := \int_0^\infty x \mathring{V}_{ij}(x) dx < +\infty, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

такая что

$$(3.1) \quad V_{ij}(x, t) \geq \mathring{V}_{ij}(x - t), \quad (x, t) \in \Pi, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Имеет место следующая

Теорема 3.1. *При условиях 1), 4), 5), а), б), с), А) и В) для ограниченного неотрицательного решения $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))^T$ построенного при помощи последовательных приближений (2.15), имеет место интегральная асимптотика (1.4).*

Доказательство. Сперва заметим, что из условий б) и с) немедленно следует, существование числа $r^* > 0$, что при $x \geq r^*$ имеет место неравенство:

$$(3.2) \quad g_i(x) \geq \frac{\beta_i}{2}, \quad x \in [r^*, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Из (1.1), (2.1) и условия б), с учетом первой части теоремы 2.1 следует, что

$$(3.3) \quad 0 \leq \xi_i - f_i(x) = \beta_i - g_i(x) + \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j(\xi_j) - \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j(f_j(t)) dt,$$

$$x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Учитывая условие 5) из (3.3), получаем

$$\begin{aligned}
 0 \leq \xi_i - f_i(x) &\leq \beta_i - g_i(x) + \sum_{j=1}^N \int_0^\infty \mathring{V}_{ij}(\tau) d\tau \cdot G_j(\xi_j) - \\
 (3.4) \quad \sum_{j=1}^N \int_0^x \mathring{V}_{ij}(x-t) G_j(f_j(t)) dt &= \beta_i - g_i(x) + \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) \int_x^\infty \mathring{V}_{ij}(\tau) d\tau + \\
 \sum_{j=1}^N \int_0^x \mathring{V}_{ij}(x-t) (G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))) dt, &x \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Пусть $R > r^*$ произвольное число. Интегрируя обе части неравенства (3.4) и принимая во внимание (3.2), (2.52), А), В) и 5) будем иметь

$$\begin{aligned}
 0 \leq \int_{r^*}^R (\xi_i - f_i(x)) dx &\leq \int_{r^*}^\infty (\beta_i - g_i(x)) dx + \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) \int_{r^*}^R \int_x^\infty \mathring{V}_{ij}(\tau) d\tau dx \\
 + \sum_{j=1}^N \int_{r^*}^R \int_0^x \mathring{V}_{ij}(x-t) (G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))) dt dx &\leq \int_{r^*}^\infty (\beta_i - g_i(x)) dx + \\
 + \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) \int_0^R \int_x^\infty \mathring{V}_{ij}(\tau) d\tau dx + \sum_{j=1}^N \int_{r^*}^R \int_0^{r^*} \mathring{V}_{ij}(x-t) (G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))) dt dx + \\
 + \sum_{j=1}^N \int_{r^*}^R \int_{r^*}^x \mathring{V}_{ij}(x-t) (G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))) dt dx &\leq \int_{r^*}^\infty (\beta_i - g_i(x)) dx + \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) m(\mathring{V}_{ij}) + \\
 + \sum_{j=1}^N \int_0^{r^*} (G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))) \int_{r^*}^R \mathring{V}_{ij}(x-t) dx dt + \sum_{j=1}^N \int_{r^*}^R (G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))) \cdot \\
 \cdot \int_t^R \mathring{V}_{ij}(x-t) dx dt &\leq \int_{r^*}^\infty (\beta_i - g_i(x)) dx + \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) m(\mathring{V}_{ij}) + \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) \cdot \\
 \cdot \int_0^{r^*} \int_{r^*}^\infty \mathring{V}_{ij}(y) dy dt + \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_{r^*}^R (G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))) dt &\leq \int_{r^*}^\infty (\beta_i - g_i(x)) dx + \\
 + 2 \cdot \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) m(\mathring{V}_{ij}) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_{r^*}^R (G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))) dt &\leq \int_{r^*}^\infty (\beta_i - g_i(x)) dx + \\
 + 2 \cdot \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) m(\mathring{V}_{ij}) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \alpha_j \int_{r^*}^R (\xi_j - f_j(t)) dt, &i = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned}$$

где

$$(3.5) \quad \alpha_j = \frac{G_j(\xi_j) - G_j(\frac{\beta_j}{2})}{\xi_j - \frac{\beta_j}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Итак мы получили следующие неравенства:

$$(3.6) \quad 0 \leq \int_{r^*}^R (\xi_i - f_i(t)) dt \leq b_i + \sum_{j=1}^N a_{ij} \alpha_j \int_{r^*}^R (\xi_j - f_j(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$(3.7) \quad b_i = \int_{r^*}^{\infty} (\beta_i - g_i(x)) dx + 2 \cdot \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) m(\overset{\circ}{V}_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Умножим теперь обе части неравенства (3.6) на $G_i(\xi_i)$ и просуммируем во всем $i = 1, 2, \dots, N$. В результате учитывая условие 5) и (2.1) получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^N G_i(\xi_i) \int_{r^*}^R (\xi_i - f_i(t)) dt \leq \sum_{i=1}^N G_i(\xi_i) b_i + \sum_{i=1}^N G_i(\xi_i) \sum_{j=1}^N a_{ij} \alpha_j \cdot \\ &\cdot \int_{r^*}^R (\xi_j - f_j(t)) dt = \sum_{i=1}^N G_i(\xi_i) b_i + \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_{r^*}^R (\xi_j - f_j(t)) dt \cdot \sum_{i=1}^N a_{ij} G_i(\xi_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N G_i(\xi_i) b_i + \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_{r^*}^R (\xi_j - f_j(t)) dt \cdot \sum_{i=1}^N a_{ji} G_i(\xi_i) = \sum_{i=1}^N G_i(\xi_i) b_i + \\ &+ \sum_{j=1}^N \alpha_j (\xi_j - \beta_j) \int_{r^*}^R (\xi_j - f_j(t)) dt, \end{aligned}$$

откуда учитывая (3.5) приходим к неравенству:

$$(3.8) \quad 0 \leq \sum_{j=1}^N \frac{G_i(\xi_j) \frac{\beta_j}{2} + G_j\left(\frac{\beta_j}{2}\right) (\xi_j - \beta_j)}{\xi_j - \frac{\beta_j}{2}} \int_{r^*}^R (\xi_j - f_j(t)) dt \leq \sum_{i=1}^N G_i(\xi_i) b_i$$

В (3.8) устремляя R к бесконечности получаем, что $\xi_j - f_j \in L_1(r^*, +\infty)$, $j = 1, 2, \dots, N$ и

$$(3.9) \quad 0 \leq \sum_{j=1}^N \frac{G_i(\xi_j) \frac{\beta_j}{2} + G_j\left(\frac{\beta_j}{2}\right) (\xi_j - \beta_j)}{\xi_j - \frac{\beta_j}{2}} \int_{r^*}^{\infty} (\xi_j - f_j(t)) dt \leq \sum_{i=1}^N G_i(\xi_i) b_i.$$

Так как $f_i \in C(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, N$ (см. теорему 2.1), то $\xi_i - f_i \in L_1(0, r^*)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Итак мы доказали, что $\xi_i - f_i \in L_1(0, +\infty)$, $i = 1, 2, \dots, N$. $\square$

3.2. Единственность решения системы (1.1)

В настоящем разделе, при одном дополнительном условии на функций $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, мы докажем единственность решения системы нелинейных интегральных уравнений (1.1) в классе $\mathfrak{M}$.

Имеет место следующая

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия 1)-4), а), b), A)-C). Тогда, если существует число $\tilde{r} > 0$ такое, что

$$(3.10) \quad \gamma_i := \inf_{x > \tilde{r}} (g_i(x)) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

то система нелинейных интегральных уравнений (1.1) в классе $\mathfrak{M}$ не может иметь более одного решения.

Доказательство. Поскольку системы интегральных уравнений (1.1) и (2.23) эквивалентны, то для доказательства сформулированной теоремы достаточно доказать единственность решения системы (2.23) в $\mathfrak{M}$. Предположим, что система (2.23), кроме решения $\psi \in \mathfrak{M}$ (которое является равномерным пределом последовательных приближений (2.17)) обладает также другим решением $\tilde{\psi} \in \mathfrak{M}$. Тогда используя условия 1), а), A), B), а также соотношения (2.24), из (2.23) для $x \in [0, r_0)$ будем иметь

$$(3.11) \quad \tilde{\psi}_i(x) \geq \sum_{j=1}^N G_j(\alpha_j) \int_0^x V_{ij}(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим следующие функции:

$$(3.12) \quad \mathcal{B}_i(x) := \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j)) \cdot \sum_{j=1}^N \eta_j \int_0^x V_{ij}(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Принимая во внимание условия 1), 3), 4), а также соотношения (1.3), относительно функций $\mathcal{B}_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, можно утверждать, что

$$(3.13) \quad \mathcal{B}_i(0) = 0, \quad \mathcal{B}_i(x) > 0, \quad x > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$(3.14) \quad \mathcal{B}_i \in C(\mathbb{R}^+), \quad \mathcal{B}_i(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$(3.15) \quad \mathcal{B}_i(+\infty) = \lambda \eta_i \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j)), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Положим

$$(3.16) \quad M_i := \mathcal{B}_i(\tilde{r}), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Из свойств (3.13) - (3.15) немедленно следует, что для каждого $i = \{1, 2, \dots, N\}$ существует $r_i > 0$ такое, что

$$(3.17) \quad \mathcal{B}_i(r_i) = \frac{1}{2} \left(M_i + \lambda \eta_i \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j)) \right),$$

причем $r_i > \tilde{r}$.

Обозначим через

$$(3.18) \quad \hat{r} = \max_{1 \leq j \leq N} (r_i).$$

Теперь используя условия 1), 2), 3), (3.10), а), А) и В) из (2.23) для $x > \hat{r}$ получим

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i(x) &\geq \sum_{j=1}^N \int_{\tilde{r}}^x V_{ij}(x, t) G_j(g_j(t)) dt \geq \sum_{j=1}^N G_j(\gamma_j) \int_{\tilde{r}}^x V_{ij}(x, t) dt \geq \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j)) \cdot \\ &\cdot \sum_{j=1}^N \int_{\tilde{r}}^x V_{ij}(x, t) dt = \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j)) \sum_{j=1}^N \left(\int_0^x V_{ij}(x, t) dt - \int_0^{\tilde{r}} V_{ij}(x, t) dt \right) \geq \\ &\geq \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j)) \cdot \sum_{j=1}^N \left(\int_0^{\hat{r}} V_{ij}(\hat{r}, t) dt - \int_0^{\tilde{r}} V_{ij}(\tilde{r}, t) dt \right) \geq \frac{1}{\max_{1 \leq j \leq N} (\eta_j)} \cdot \\ &\cdot \min_{1 \leq j \leq N}^2 (G_j(\gamma_j)) (\mathcal{B}_i(\hat{r}) - \mathcal{B}_i(\tilde{r})) \geq \frac{\min_{1 \leq j \leq N}^2 (G_j(\gamma_j))}{2 \cdot \max_{1 \leq j \leq N} (\eta_j)} \cdot (\lambda \eta_i \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j)) - M_i) := \\ &:= \tilde{p}_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Наконец, если $x \in [r_0, \max(r_0, \hat{r}) + 1]$, то снова используя условия 1), А), В), а) соотношения (2.24) в силу теоремы Вейерштрасса приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i(x) &\geq \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j(g_j(t)) dt \geq \sum_{j=1}^N \int_0^{r_0} V_{ij}(x, t) G_j(g_j(t)) dt \geq \sum_{j=1}^N G_j(\alpha_j) \cdot \\ &\cdot \int_0^{r_0} V_{ij}(x, t) dt \geq \sum_{j=1}^N G_j(\alpha_j) \min_{x \in [r_0, \max(r_0, \hat{r}) + 1]} \left(\int_0^{r_0} V_{ij}(x, t) dt \right) := p_i^* \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Таким образом, из выше изложенного для $x \in [r_0, +\infty)$ получаем следующую оценку снизу:

$$(3.19) \quad \tilde{\psi}_i(x) \geq \min\{\tilde{p}_i, p_i^*\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Заметим, что

$$(3.20) \quad 0 < \min\{\tilde{p}_i, p_i^*\} < \xi_i - \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Действительно, учитывая (2.24), б), А), В) и (2.1) будем иметь

$$0 < \min\{\tilde{p}_i, p_i^*\} \leq p_i^* \leq \sum_{j=1}^N G_j(\beta_j) a_{ij} < \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j(\xi_j) = \xi_i - \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Теперь займемся доказательством следующего неравенства:

$$(3.21) \quad \tilde{\psi}_i(x) \leq \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

С этой целью сперва убедимся в достоверности следующей оценки:

$$(3.22) \quad \tilde{\psi}_i(x) \leq \xi_i - \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Обозначим через

$$(3.23) \quad \mu_i = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left(\tilde{\psi}_i(x) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда из (2.23), в силу условий 1), 3), 4), а), б), А) и В) будем иметь

$$(3.24) \quad \mu_i \leq \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j(\mu_j + \beta_j), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Учитывая (2.1) из (3.24) получим

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \mu_i &\leq \max_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{G_j(\mu_j + \beta_j)}{G_j(\xi_j)} \right) \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j(\xi_j) = \\ &= (\xi_i - \beta_i) \max_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{G_j(\mu_j + \beta_j)}{G_j(\xi_j)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Очевидно, что существует индекс $j_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$ такой, что

$$(3.26) \quad \frac{G_{j_0}(\mu_{j_0} + \beta_{j_0})}{G_{j_0}(\xi_{j_0})} = \max_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{G_j(\mu_j + \beta_j)}{G_j(\xi_j)} \right)$$

В неравенстве (3.25) в качестве индекса i если выбрать $i = j_0$ и использовать (3.26) получим

$$(3.27) \quad \mu_{j_0} \leq (\xi_{j_0} - \beta_{j_0}) \frac{G_{j_0}(\mu_{j_0} + \beta_{j_0})}{G_{j_0}(\xi_{j_0})}.$$

Заметим теперь, что функции $\frac{G_j(u)}{u}, \frac{u}{u - \beta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N$ монотонно убывают на $(\beta_j, +\infty)$. Действительно, монотонность функций $\frac{G_j(u)}{u}$ сразу следует из условий А), В), а монотонность функции $\frac{u}{u - \beta_j}$ следует из очевидного неравенства

$$(3.28) \quad \frac{-\beta_j}{(u - \beta_j)^2} < 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

С другой стороны из (3.27) получим

$$\frac{G_{j_0}(\mu_{j_0} + \beta_{j_0})}{\mu_{j_0} + \beta_{j_0}} \cdot \frac{\mu_{j_0} + \beta_{j_0}}{\mu_{j_0}} \geq \frac{G_{j_0}(\xi_{j_0})}{\xi_{j_0}} \cdot \frac{\xi_{j_0}}{\xi_{j_0} - \beta_{j_0}},$$

откуда учитывая монотонность функций $\frac{G_{j_0}(u)}{u}$ и $\frac{u}{u - \beta_{j_0}}$ приходим к неравенству

$$(3.29) \quad \xi_{j_0} - \beta_{j_0} \geq \mu_{j_0}$$

Принимая во внимание (3.29) из (3.25) получаем, что

$$\mu_i \leq \xi_i - \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно, оценка (3.22) доказана. Докажем теперь, что имеет место неравенство:

$$(3.30) \quad \tilde{\psi}_i(x) \leq \psi_i^{(p)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad p = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

В случае $p = 0$ неравенство (3.30) следует из (3.22). Предположим теперь, что (3.30) имеет место при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда в силу условий 1), А), В) из (2.17) и (2.23) получаем, что

$$\psi_i^{(p+1)}(x) \geq \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x, t) G_j(\tilde{\psi}_j(t) + g_j(t)) dt = \tilde{\psi}_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

В (3.30) устремляя $p \rightarrow \infty$ приходим к (3.21). Заметим теперь, что из (2.22), 2), А), В), 1) и (2.23) следует, что

$$(3.31) \quad \psi_i(x) \leq \sum_{j=1}^N G_j(\xi_j) \int_0^x V_{ij}(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Принимая во внимание (3.11) и (3.31) для $x \in [0, r_0)$ получим

$$(3.32) \quad \tilde{\psi}_i(x) \geq \frac{\min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\alpha_j))}{\max_{1 \leq j \leq N} (G_j(\xi_j))} \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Обозначим через

$$(3.33) \quad \sigma^* = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{\min\{\tilde{p}_i, p_i^*\}}{\xi_i - \beta_i} \right); \frac{\min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\alpha_j))}{\max_{1 \leq j \leq N} (G_j(\xi_j))} \right\}.$$

Из неравенств (3.20) и

$$0 < G_j(\alpha_j) \leq G_j(\beta_j) < G_j(\xi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

сразу следует, что

$$(3.34) \quad \sigma^* \in (0, 1).$$

Таким образом учитывая (2.22), (3.19), (3.32), (3.30) и (3.34) приходим к следующей цепочке неравенств

$$(3.35) \quad \sigma^* \psi_i(x) \leq \tilde{\psi}_i(x) \leq \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Далее совершая аналогичные рассуждения как при доказательстве теоремы 2.1 заключаем, что существуют числа $C^* > 0$ и $k^* \in (0, 1)$ такие, что

$$(3.36) \quad 0 \leq \psi_i(x) - \tilde{\psi}_i(x) \leq C^* (k^*)^p, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad p = 1, 2, \dots$$

В (3.36) устремляя $p \rightarrow \infty$ получим $\psi_i(x) = \tilde{\psi}_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, $x \in \mathbb{R}^+$. Теорема доказана. $\square$

4. ОТСУТСТВИЕ НЕТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1.1). ПРИМЕРЫ

4.1. Отсутствие нетривиального неотрицательного решения системы (1.1).

В этом разделе, при определенных ограничениях на матричное ядро и на нелинейностей системы (1.1), мы будем заниматься изучением системы (1.1) в случае когда $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Имеет место

Теорема 4.1. Пусть существует матриц функция $V^*(x) = (V_{ij}^*(x))_{i,j=1}^{N \times N}$, со свойствами $V_{ij}^*(x) > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, $x \in \mathbb{R}^+$, $V_{ij}^* \in L_1(0, +\infty)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ такая, что

$$(4.1) \quad V_{ij}(x, t) \leq V_{ij}^*(x - t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (x, t) \in \Pi.$$

Пусть далее $G_j \in C(\mathbb{R}^+)$, $G_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$ и выполняется условие B). Тогда, если $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ и существует число $b > 0$ такое, что

$$(4.2) \quad G_j(u) \leq b \cdot u, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad u \in \mathbb{R}^+,$$

то система (1.1) в классе

$$\mathcal{P} := \{f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))^T, \quad f_j(x) \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \quad f_j(x)e^{-\varepsilon x} \in M(\mathbb{R}^+), \\ j = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+\}$$

имеет только тривиальное решение $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Рассмотрим следующие характеристические функции:

$$Q_i(h) := b \sum_{j=1}^N \int_0^\infty V_{ij}^*(t) e^{-ht} dt, \quad h \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Из свойств функций $V_{ij}^*(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, $t \in \mathbb{R}^+$ немедленно следует, что

$$(4.3) \quad Q_i(0) = b \sum_{j=1}^N \int_0^\infty V_{ij}^*(t) dt > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$(4.4) \quad Q_i \in C(\mathbb{R}^+), \quad Q_i(h) \downarrow \text{ по } h \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$(4.5) \quad Q_i(+\infty) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно для каждого $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ существует $h_i > 0$ такое, что

$$(4.6) \quad Q_i(h_i) < 1.$$

Положим

$$(4.7) \quad F_i(x) = e^{-h^*x} f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где

$$(4.8) \quad h^* = \max_{1 \leq i \leq N} (h_i) > 0.$$

Из (4.3)-(4.6) и (4.8) следует, что

$$(4.9) \quad Q_i(h^*) < 1, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Учитывая условия (4.1), (4.2), 1) и обозначение (4.7), из (1.1), в силу того, что $g_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, будем иметь

$$\begin{aligned} F_i(x) &\leq b \sum_{j=1}^N e^{-h^*x} \int_0^x V_{ij}(x, t) f_j(t) dt \leq b \sum_{j=1}^N e^{-h^*x} \int_0^x V_{ij}^*(x-t) f_j(t) dt = \\ &= b \sum_{j=1}^N \int_0^x e^{-h^*(x-t)} V_{ij}^*(x-t) F_j(t) dt \leq D \cdot b \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}^*(y) e^{-h^*y} dy \leq D \cdot Q_i(h^*), \\ i &= 1, 2, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

где

$$(4.10) \quad D = \max_{1 \leq j \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (F_j(x)).$$

Из полученного выше, неравенства сразу вытекает, что $D \leq Q_i(h^*)D$, $i = 1, 2, \dots, N$, откуда в силу (4.9) следует, что $D = 0$. Принимая во внимание (4.7) и (4.10) заключаем, что $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Теорема доказана. $\square$

4.2.Примеры

Последний раздел настоящей работы посвящен рассмотрению конкретных примеров функций g_i , V_{ij} и G_j удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем. Сперва приведем примеры матричного ядра $V(x, t) = (V_{ij}(x, t))_{i,j=1}^{N \times N}$:

Примеры V_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$

- $a_1)$ $V_{ij}(x, t) = \overset{\circ}{V}_{ij}(x-t)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, $(x, t) \in \Pi$, где $0 < \overset{\circ}{V}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ обладают свойствами, $5_1)$, $5_2)$ и монотонно убывают по τ , $i, j = 1, 2, \dots, N$, причем $\overset{\circ}{V}_{ij} \in C(\mathbb{R}^+)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$
- $a_2)$ $V_{ij}(x, t) = V_{ij}(x-t) + \varepsilon \overset{\circ}{V}_{ij}(x+t)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, $(x, t) \in \Pi$, где $\varepsilon \in (0, 1)$ числовой параметр,

$$a_3) \quad V_{ij}(x, t) = \overset{\circ}{V}_{ij}(x - t)\mu_{ij}(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (x, t) \in \Pi, \text{ где } \mu_{ij}(t) = \mu_{ji}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \mu_{ij} \in C(\mathbb{R}^+), \mu_{ij} \text{ монотонно возрастают по } t \text{ и } 0 < \mu_{ij}(t) \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Подробно остановимся на примере a_2). Поскольку $\overset{\circ}{V}_{ij} \in C(\mathbb{R}^+)$, то $V_{ij} \in C(\Pi)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Из положительности $\overset{\circ}{V}_{ij}(\tau)$ сразу следует, что $V_{ij}(x, t) > 0$, $(x, t) \in \Pi$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Так как $\overset{\circ}{V}_{ij}(\tau) \downarrow$ по τ , $i, j = 1, 2, \dots, N$, то из представления a_2) немедленно следует, что $V_{ij}(x, t) \downarrow$ по x , $i, j = 1, 2, \dots, N$. Таким образом для примера a_2) условия 1) и 2) выполняются. Убедимся теперь, что функции $\int_0^x V_{ij}(x, t)dt$ монотонно возрастают по x на $\mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Обозначим через

$$\mathcal{B}_{ij}(x) = \int_0^x V_{ij}(x, t)dt =: \int_0^x \overset{\circ}{V}_{ij}(\tau)d\tau + \varepsilon \int_x^{2x} \overset{\circ}{V}_{ij}(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Так как $\overset{\circ}{V}_{ij} \in C(\mathbb{R}^+)$, $\overset{\circ}{V}_{ij}(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, то из соотношения

$$\mathcal{B}'_{ij}(x) = \overset{\circ}{V}_{ij}(x) + 2\varepsilon \overset{\circ}{V}_{ij}(2x) - \varepsilon \overset{\circ}{V}_{ij}(x) = (1 - \varepsilon)\overset{\circ}{V}_{ij}(x) + 2\varepsilon \overset{\circ}{V}_{ij}(2x) > 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^+, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

сразу следует, что $\mathcal{B}_{ij}(x) \uparrow$ по x , на $\mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Заметим, также что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{B}_{ij}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \overset{\circ}{V}_{ij}(\tau)d\tau = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно условия 3) и 4) также выполняются. Условие 5) выполняется очевидным образом, если $\varepsilon > 0$, $\overset{\circ}{V}_{ij}(\tau) > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Наконец проверим условие (4.1). Поскольку $\overset{\circ}{V}_{ij}(\tau) \downarrow$ по τ на $\mathbb{R}^+$, то $\overset{\circ}{V}_{ij}(x - t) \geq \overset{\circ}{V}_{ij}(x + t)$, $(x, t) \in \Pi$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Следовательно в качестве $V_{ij}^*(x)$ взяв

$$V_{ij}^*(x) = (1 + \varepsilon)\overset{\circ}{V}_{ij}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

приходим к (4.1).

Проверка условий 1)-5) и (4.1) для остальных примеров осуществляется аналогичными рассуждениями. Приведем теперь примеры для нелинейностей $G_j(u)$; $j = 1, 2, \dots, N$:

$$b_1) \quad G_j(u) = u^{\frac{1}{\tilde{\alpha}_j}} \quad u \in \mathbb{R}^+, \tilde{\alpha}_j > 1 \text{-числовые параметры, } j = 1, 2, \dots, N.$$

$$b_2) \quad G_j(u) = \tilde{\gamma}_j(1 - e^{-u^{\frac{1}{\tilde{\alpha}_j}}}), \quad \tilde{\gamma}_j, \tilde{\alpha}_j > 1 \text{-числовые параметры, } j = 1, 2, \dots, N.$$

Несложно проверить что для примеров b_1) и b_2) выполняются условия А)-С), где в качестве отображения $\varphi(\sigma)$ можно выбрать следующую функцию:

$$\varphi(\sigma) = \sigma^{\frac{1}{\alpha^*}}, \quad \sigma \in [0, 1],$$

где $\alpha^* = \min_{1 \leq j \leq N} (\tilde{\alpha}_j)$.

Для полноты изложения приведем также пример для функций $G_j(u)$, $j = 1, 2, \dots, N$ удовлетворяющих условиям теоремы 4.1. Таковыми являются например функции вида:

$$G_j(u) = \frac{1}{2} (\tilde{\gamma}_j(1 - e^{-u}) + u), \quad j = 1, 2, \dots, N, u \in \mathbb{R}^+.$$

Наконец приведем примеры для функций $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} c_1) \quad & g_j(x) = \beta_j(1 - \varepsilon_j e^{-x^2}), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \beta_j > 0, \varepsilon_j \in (0, 1) \text{-числовые параметры,} \\ & j = 1, 2, \dots, N. \\ c_2) \quad & g_j(x) = \begin{cases} W_j |\cos x|, & x \in \left[0, \frac{7}{2}\pi\right], \\ S_j \left(1 - e^{-(x - \frac{7}{2}\pi)}\right), & x \in \left(\frac{7}{2}\pi, +\infty\right) \end{cases}, \text{ где } W_j, S_j > 0 \text{-числовые} \\ & \text{параметры, причем } W_j < S_j, j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Небезынтересно отметить, что приведенные примеры $a_1) - a_3)$, $b_1)$, $b_2)$ и $c_1)$ имеют также прикладной интерес в различных направлениях физики и биологии (см. введение).

Abstract. A system of nonlinear integral equations with the Hammerstein-Volterra matrix operator is investigated. The specified system of equations, in addition to purely mathematical interest, is of particular interest in various fields of natural science. In particular, such equations are encountered in hydroaerodynamics, in population genetics models, and in the theory of radiative heat transfer. A constructive theorem on the existence of a nonnegative bounded and continuous solution to the specified system of equations is proved. With an additional constraint on the nonlinearity, uniform convergence of specially selected successive approximations with the rate of decreasing geometric progression is obtained. The asymptotic behavior of the constructed solution at infinity is also investigated. Moreover, a theorem on the uniqueness of a solution in the class of bounded vector functions whose coordinates are nonnegative is proved. At the end of the work, specific examples of the specified systems are given that satisfy all the conditions of the proved statements.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Ланкастер, Теория Матриц, Наука, М., 280с (1978).
- [2] J. J. Keller, "Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction", Z. Angew. Math Phys, **32**, no. 2, 170 – 181 (1981).
- [3] W. R. Schneider, "The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type", Z. Angew. Math Phys, **33**, no. 1, 140 – 142 (1982).

- [4] W. Okrasinski, “Nonlinear Volterra equations and physical applications”, *Extracta Math.*, **4**, no. 2, 51 – 74 (1989).
- [5] S. N. Askhabov, “On an integral equation with sum kernel and an inhomogeneity in the linear part”, *Differential Equations*, **54**, no. 2, 1185 – 1194 (2021).
- [6] Н. Б. Енгибарян, “Асимптотические и структурные теоремы для уравнения марковского восстановления”, *Теория вероятн. и ее примен.*; **48**, no. 1, 62 – 77 (2003).
- [7] W. Okrasinski, “On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain non-linear convolution equation”, *Ann. Pol. Math.*, **36**, no. 1, 61 – 72 (1979).
- [8] W. Okrasinski, “On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation”, *Ann. Pol. Math.*, **37**, no. 3, 223 – 229 (1980).
- [9] S. N. Askhabov, N. K. Karapetyants, A. Ya. Yakobov, “Integral equations of convolution type with power nonlinearity and systems of such equations”, *Dokl. Math.*, **41**, no. 2, 323 – 327 (1990).
- [10] S. N. Askhabov, M. A. Betilgiriev, “Nonlinear integral equations of convolution type with almost increasing kernels in cones”, *Differential Equations*, **27**, no. 2, 234 – 243 (1991).
- [11] P. J. Bushell, W. Okrasinski, “Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel”, *J. London Math. Soc.*, **41**, no. 2, 503 – 510 (1991).
- [12] H. Brunner, *Volterra Integral Equations: An Introduction to The Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge (2017).
- [13] P. J. Bushell, W. Okrasinski, “Nonlinear Volterra integral equations and the Apéry identities”, *Bull. London Math. Soc.*, **24**, 478 – 484 (1992).
- [14] A. A. Kilbas, M. Saigo, “On solution of nonlinear Abel-Volterra integral equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **229**, 41 – 60 (1999).
- [15] С. Н. Асхабов, “Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью”, *Чебышевский сб.*, **23**, no. 5, 6 – 19 (2022).
- [16] Л. Г. Арабаджян, “О системах интегральных уравнений восстановления”, *Дифференц. уравнения*, **20**, no. 6, 1050 – 1055 (1984).
- [17] Н. Б. Енгибарян, “Теоремы восстановления для системы интегральных уравнений”, *Матем. сб.*, **189**, no. 12, стр. 59 – 72 (1998).
- [18] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ.*, **22**, ВИНТИ, М., 175 – 244 (1984).
- [19] Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, “О нетривиальной разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений на всей прямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **87**, no. 5, 215 – 231 (2023).
- [20] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, “Элементы теории функций и функционального анализа”, 5-е изд., Наука М., 544 стр. (1981).
- [21] А. Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян, А. С. Петросян, “Вопросы существования, отсутствия и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой с оператором типа Гаммерштейна - Стильбеса”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **30**, no. 1, 249 – 269 (2024).

Поступила 20 октября 2024

После доработки 20 октября 2024

Принята к публикации 18 декабря 2024

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал "Известия НАН Армении, Математика" публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата A4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
 - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
 - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
 - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы, место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала "Известия НАН Армении, Математика", пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
E-mail: sart@ysu.am, URL: <http://www.maik.ru>
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале "Journal of Contemporary Mathematical Analysis". URL: <http://www.springer.com>.

Заказ N1367. Тираж 150. Подписано к печати 04.03.25.

Печ. л. 4.75. Бумага офсетная. Цена договорная.

Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 60, номер 2, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

П. С. ГЕВОРКЯН, К. М. МЕЛЕНДЕС, О транзитивных и однородных бинарных G -пространствах	3
М. Г. ГРИГОРЯН, Л. Н. ГАЛОЯН, Об условно универсальных функциях	15
В. Г. ПЕТРОСЯН, Теоремы типа Неванлинны для новых “исключительных” значений	26
А. А. САРГСЯН, Об универсальных рядах Фурье-Уолша	43
Х. А. ХАЧАТРЯН, А. С. ПЕТРОСЯН, Т. Р. ВАРДАНЯН, О конструктивной разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра на положительной полупрямой	53 – 76

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 60, No. 2, 2025

CONTENTS

P. S. GEVORGYAN, Q. M. MELENDEZ, On transitive and homogeneous binary G -spaces	3
M. G. GRIGORYAN, L. N. GALOYAN, On conditionally universal functions	15
V. G. PETROSYAN, Nevanlinna type theorems for new “exclusive” values	26
A. A. SARGSYAN, On universal Furie-Walsh series	43
Kh. A. KHACHATRYAN, H. S. PETROSYAN, T. R. VARDANYAN, On the constructive solvability of a system of nonlinear Hammerstein-Volterra integral equations on the positive half-line	53 – 76