

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵԴԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Том 60 N1, 2025

ADAC 411

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Том 60 N1, 2025



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

Известия НАН Армении, Математика.



**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ХААРА, СХОДЯЩИХСЯ ПО
ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ
ФУНКЦИЯМ**

Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет¹

E-mail: *ggg@ysu.am*

Аннотация. Пусть $I := \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2^{m_i} < n \leq 2^{m_i+1}\}$, где m_i некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. В работе доказано, что если частичные суммы ряда Хаара $\sum_{k=1}^n a_k \chi_k(x)$, $n \in I$, всюду сходятся к всюду конечной интегрируемой функции f , то этот ряд является рядом Фурье-Хаара функции f .

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: система Хаара; теорема единственности; сходимость по подпоследовательности.

Напомним определение системы Хаара. Пусть $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \dots$, $1 < \nu \leq 2^\mu$. Обозначим

$$(1) \quad \Delta_k := \left(\frac{\nu-1}{2^\mu}, \frac{\nu}{2^\mu} \right), \quad \Delta_k^+ = \left(\frac{\nu-1}{2^\mu}, \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}} \right), \quad \Delta_k^- = \left(\frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}, \frac{\nu}{2^\mu} \right).$$

Система Хаара определяется формулами $\chi_1(x) = 1$, $x \in [0, 1]$, а для $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \dots$, $1 < \nu \leq 2^\mu$, полагается

$$(2) \quad \chi_k(x) := \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} & \text{когда } x \in \Delta_k^+, \\ -2^{\frac{k}{2}} & \text{когда } x \in \Delta_k^-, \\ 0, & \text{когда } x \notin \Delta_k. \end{cases}$$

В остальных точках значение функции $\chi_k(x)$ равно среднему арифметическому односторонних пределов функции в этих точках. Отсюда следует, что частичные суммы $S_n(x)$ ряда Хаара $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ обладают свойством

$$(3) \quad S_n(x) = \frac{S_n(x+) + S_n(x-)}{2}.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке комитета по науке министерства ОНКС Республики Армения (грант № 21T-1A055).

Точками разрыва первых n функций системы Хаара отрезок $[0, 1]$ разбивается на n интервалов (два полуоткрытых, остальные открытые), на каждом из которых первые n функций системы Хаара принимают постоянные значения. Обозначим их слева на право через Δ_i^n , $i = 1, 2, \dots, n$. Если имеем интервалы $\{\Delta_i^n\}_{i=1}^n$, то интервалы $\{\Delta_i^{n+1}\}_{i=1}^{n+1}$ получаются разделением первого слева самого длинного интервала Δ_i^n на два равных интервала.

Частичные суммы ряда Фурье-Хаара интегрируемой функции f определяются формулами (см. напр. [10] гл.3, §1)

$$(4) \quad S_n(x) = \int_{\Delta_i^n} f(t)dt, \quad \text{когда } x \in \Delta_i^n,$$

а в точках разрыва-формулами (3). Есть также другие способы определения функций системы Хаара, однако при других определениях теоремы единственности, доказанные в этой работе и многие другие теоремы, доказанные ранее, перестают быть верными. Сам Хаар [1] систему определял так как это сделано выше.

Система Хаара является первым примером ортонормированной системы обладающей свойством: ряд Фурье непрерывной функции по системе Хаара равномерно сходится к этой функции.

С работ [2]-[4] начались исследования вопросов единственности рядов по системе Хаара. В этих работах было доказано, что если ряд по системе Хаара всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю. Г. Фаб-ер [5] показал, что даже одноточечное множество $\{\frac{1}{2}\}$ не является множеством единственности для рядов Хаара, т.е. существует нетривиальный ряд по системе Хаара, который всюду вне этого множества сходится к нулю. Оказалось (см. напр. [6]), что для рядов Хаара любое одноточечное множество не является множеством единственности. В работе [6] доказана следующая теорема.

Теорема 1 (Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талаляян). *Пусть ряд Хаара*

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

обладает свойствами:

- а) ряд (5) сходится к некоторой интегрируемой функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0, 1]$, кроме, быть может, некоторого счетного множества точек,

- b) для любой точки $x_0 \in [0, 1]$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, суть все те номера n для которых $\chi_n(x_0) \neq 0$.

Тогда ряд (5) является рядом Фурье-Хаара функции f .

Когда ряд (5) сходится во всех точках, условие b) автоматически выполняется во всех точках. Вообще говоря, условие b) нужно, чтобы допустить исключительное счетное множество. Условие b) присутствует во многих теоремах единственности рядов Хаара.

В работе [7] В. А. Скворцов определил интеграл, который восстанавливает коэффициенты всюду сходящегося ряда Хаара по сумме этого ряда. Он назвал этот интеграл HD интегралом и доказал, что этот интеграл представляет собой некоторое обобщение интеграла Данжуа. В работах [8], [9] В. А. Скворцов рассмотрел ряды Хаара с коэффициентами удовлетворяющие условию b) теоремы 1 и сходящиеся всюду по некоторой подпоследовательности частичных сумм. Он показал также, что этот интеграл зависит от того, какая подпоследовательность частичных сумм сходится.

В настоящей работе мы рассмотрим ряды Хаара, с некоторой подпоследовательностью частичных сумм всюду сходящиеся к всюду конечной интегрируемой по Лебегу функции.

Пусть m_i , $i \in \mathbb{N}$, возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$(6) \quad I := \bigcup_{i=1}^{\infty} \{n \in \mathbb{N} : 2^{m_i} < n \leq 2^{m_i+1}\}.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 2. Если частичные суммы $S_j(x) = \sum_{n=1}^j a_n \chi_n(x)$, $j \in I$, ряда Хаара (5) всюду на $[0, 1]$ сходятся к всюду конечной интегрируемой функции f , т.е.

$$(7) \quad \lim_{j \in I, j \rightarrow \infty} S_j(x) = f(x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

то ряд (5) является рядом Фурье-Хаара функции f .

Обозначим через $\tilde{S}_n(x)$ частичные суммы ряда Фурье-Хаара функции $f(x)$, а через $\bar{S}_n(x)$ обозначим частичные суммы ряда Фурье-Хаара функции $|f(x)|$. Из (4) следует

$$(8) \quad |\tilde{S}_n(x)| \leq \bar{S}_n(x).$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно доказать, что для любого $n \in I$ и $i = 1, 2, \dots, n$, выполняются

$$(9) \quad \int_{\Delta_i^n} S_n(x) dx = \int_{\Delta_i^n} f(x) dx.$$

Лемма 1. *Допустим для некоторых $n \in I$ и $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ не выполняется (9). Тогда для любого $M > 0$ существует интервал $\Delta_{i_1}^{n_1}$, $n_1 \in I$, правый конец которого не совпадает с правым концом интервала Δ_i^n и удовлетворяет условиям:*

$$(10) \quad \Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n,$$

$$(11) \quad |S_n(x)| > M \quad \text{на} \quad \Delta_{i_1}^{n_1},$$

$$(12) \quad \int_{\Delta_{i_1}^{n_1}} S_n(x) dx \neq \int_{\Delta_{i_1}^{n_1}} f(x) dx.$$

Доказательство. Сначала убедимся, что найдется

$$(13) \quad \Delta_{i'}^{n'} \subset \Delta_i^n, \quad n' > n_1, \quad n' \in I,$$

удовлетворяющее условию

$$(14) \quad |S_{n'}(\Delta_{i'}^{n'})| > 5M + 2\bar{S}_n(\Delta_{i'}^{n'}).$$

Действительно, если не нашелся бы такой интервал $\Delta_{i'}^{n'}$, то выполнялось бы

$$(15) \quad |S_{n'}(\Delta_{i'}^{n'})| \leq 5M + 2\bar{S}_n(\Delta_{i'}^{n'}) \quad \text{для любого} \quad \Delta_{i'}^{n'} \subset \Delta_i^n.$$

Известно (см. напр [10], гл. 3. §2, теорема 3), что ряд Фурье-Хаара интегрируемой функции f сходится в метрике L^1 к f . Поэтому из (15) следовала бы равномерная абсолютная интегрируемость последовательности $S_n(x)$, $n \in I$, на интервале $\Delta_{i_1}^{n_1}$. Поэтому из (15) и (7) получили бы

$$(16) \quad \int_{\Delta_i^n} f(x) dx = \lim_{k \in I, k \rightarrow \infty} \int_{\Delta_i^n} S_k(x) dx = \int_{\Delta_i^n} S_n(x) dx,$$

которое противоречит (12).

Теперь убедимся, что среди интервалов $\Delta_{i'}^{n'}$, удовлетворяющих (13) и (14), найдется такой, который не имеет общего правого конца с Δ_i^n . Допустим такого интервала не существует. Обозначим через α правый конец интервала Δ_i^n , а через $\Delta_\alpha^{(j)}$ обозначим интервал длины 2^{-m_j-1} с правым концом α . Пусть n_j такое, что

$$(17) \quad \Delta_{n_j}^- = \Delta_\alpha^{(j)}.$$

Учитывая, что для остальных интервалов постоянства суммы $S_{n_j}(x)$ не выполняются (14), то если бы для бесконечного числа $n_j \in I$ выполнялось

$$S_{n_j}(\Delta_\alpha^{n_j}) \leq 5M + 2\bar{S}_n(\Delta_\alpha^{n_j}),$$

то получилось бы (16). Следовательно, для некоторого j' выполняется

$$(18) \quad |S_{n_j}(\Delta_\alpha^{(j)})| > 5M + 2\bar{S}_{n_j}(\Delta_\alpha^{(j)}), \quad n_j \in I, [n] = m_j \geq m_{j'}.$$

Учитывая (7), можем j' выбрать настолько большим, чтобы выполнялось

$$(19) \quad |a_{n_j} \chi_{n_j}(\alpha)| < \frac{M}{2}, \quad \text{когда } n_j \in I, [n] = m_j \geq m_{j'}.$$

Фиксируем некоторое $j > j'$. Тогда

$$(20) \quad \max_{x \in \Delta_\alpha^{(j)}} |a_{n_j} \chi_{n_j}(x)| = 2|a_{n_j} \chi_{n_j}(\alpha)| < M$$

и

$$(21) \quad |S_{n_j}(\Delta_{n_j}^-)| > 5M + 2\bar{S}_{n_j}(\Delta_{n_j}^-).$$

По предположению имеем также, что

$$(22) \quad |S_{n_j-1}(\Delta_{n_j})| > 5M + 2\bar{S}_{n_j-1}(\Delta_{n_j}).$$

Из свойства (4) для функции $|f|$ имеем

$$(23) \quad |\bar{S}_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)| = \frac{1}{|\Delta_{n_j}^+|} \int_{\Delta_{n_j}^+} |f(x)| dx \leq \frac{2}{|\Delta_{n_j}|} \int_{\Delta_{n_j}} |f(x)| dx = 2\bar{S}_{n_j-1}(\Delta_{n_j}).$$

Последовательно применяя (20), (22) и (23) получим

$$(24) \quad |S_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)| \geq |S_{n_j-1}(\Delta_{n_j})| - 2|a_{n_j} \chi_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)| >$$

$$3M + 2\bar{S}_{n_j-1}(\Delta_{n_j}) \geq 3M + |\bar{S}_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)|.$$

Учитывая, что $|S_n(x)| \leq |\bar{S}_n(x)|$ на любом Δ_i^n , из (24) получим

$$(25) \quad |S_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)| \geq 3M$$

и

$$(26) \quad S_{n_j}(\Delta_{n_j}^+) \neq \frac{1}{|\Delta_{n_j}^+|} \int_{\Delta_{n_j}^+} f(x) dx,$$

причем правый конец интервала $\Delta_{n_j}^+$ не равен α . Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. Допустим для некоторых $n \in I$ и $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ не выполняется (9). Тогда для любого $M > 0$ существует интервал $\Delta_{i_1}^{n_1}$, $n_1 \in I$, левый конец которого не совпадает с левым концом интервала Δ_i^n и удовлетворяет условиям:

$$(27) \quad \Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n,$$

$$(28) \quad |S_{n_1}(x)| > M \text{ на } \Delta_{i_1}^{n_1},$$

$$(29) \quad \int_{\Delta_{i_1}^{n_1}} S_n(x) dx \neq \int_{\Delta_{i_1}^{n_1}} f(x) dx.$$

Последовательно применяя леммы 1, 2, получим основную лемму.

Лемма 3. Допустим для некоторых $n \in I$ и $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ не выполняется (9). Тогда для любого $M > 0$ существует интервал $\Delta_{i_1}^{n_1}$, $n_1 \in I$, который не имеет общих концов с интервалом Δ_i^n и выполняются (27)-(29).

Доказательство теоремы 2. Допустим ряд (5) удовлетворяет (7) и не является рядом Фурье-Хаара функции f . Тогда найдутся $n_1 \in I$ и некоторое $i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которых не выполняется (9). Применив лемму 3, найдем интервал $\Delta_{i_1}^{n_1}$, который не имеет общих концов с Δ_i^n и выполняются (27)-(29), с $M = 1$. Выполнение (29) позволяет нам опять применить лемму 3. Продолжая этот процесс, найдем последовательность интервалов $\Delta_{i_k}^{n_k}$ со свойствами

$$(30) \quad \Delta_{i_k}^{n_k} \subset \Delta_{i_{k-1}}^{n_{k-1}} \text{ и не имеет общих концов с } \Delta_{i_{k-1}}^{n_{k-1}},$$

$$(31) \quad |S_{n_k}(x)| > k \text{ на } \Delta_{i_k}^{n_k}$$

Условие (30) обеспечивает, чтобы пересечение интервалов $\Delta_{i_k}^{n_k}$ было не пустым. Тогда, если это пересечение есть одноточечное множество $\{z\}$, то из условия (31) следует, что

$$\limsup_{n \in I, n \rightarrow \infty} S_n(z) = +\infty,$$

которое противоречит (7). Теорема доказана.

Abstract. Let $I := \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2^{m_i} < n \leq 2^{m_i+1}\}$, where m_i is some increasing sequence of natural numbers. It is proved, if partial sums $\sum_{k=1}^n a_k \chi_k(x)$, $n \in I$, of Haar series everywhere converge to everywhere finite integrable function f , then that series is Fourier-Haar series of function f .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme”, Math. Ann., **69**, 331 – 371 (1910).
- [2] Ф. Г. Арутюнян, “О рядах по системе Хаара”, ДАН Арм. ССР **38**, но. 3, 129 – 134 (1964).
- [3] М. Б. Петровская, “О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности”, Изв. АН, сер. матем., **28**, но. 4, 773 – 798 (1964).
- [4] В. А. Скворцов, “Теорема типа Кантора для системы Хаара”, Вестник МГУ, сер. матем. **5**, 3 – 6 (1964).
- [5] G. Faber, “Uber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar”, Deutsch. Math. Ver., **19**, 104 – 112 (1910).
- [6] Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, “О единственности рядов по системам Хаара и Уолша”, Изв. АН, сер. матем., **28**, но. 6, 1391 – 1408 (1964).
- [7] В. А. Скворцов, “Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара”, Матем. сборник, **75**, но. 3, 349 – 360 (1968).
- [8] В. А. Скворцов, “О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм”, Докл. АН СССР, **183**, но. 4, 784 – 786 (1968).
- [9] В. А. Скворцов, “О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм”, Мат. Заметки, **4**, но. 6, 707 – 714 (1968).
- [10] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Изд-во АФЦ, М. (1999).

Поступила 02 сентября 2024

После доработки 02 сентября 2024

Принята к публикации 25 октября 2024

**ОБ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ
ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ГАУССОВСКИХ
СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ**

М. С. ГИНОВЯН, А. А. СААКЯН

Бостонский университет, Ереванский государственный университет
E-mails: ginovyan@bu.edu; sart@ysu.am

Аннотация. В этой статье мы устанавливаем предельные теоремы с умеренными уклонениями для Теплицевых и суженно Теплицевых квадратичных функционалов от гауссовских стационарных процессов с непрерывным временем. Результаты применяются для непараметрической оценки спектральных функционалов.

MSC2020 numbers: 60F10; 60G10; 60G15; 62G05; 62G20.

Ключевые слова. Теплицевый квадратичный функционал; принцип больших уклонений; умеренное уклонение; гауссовские стационарные процессы с непрерывным временем; спектральная плотность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{\xi_T, T \in \mathbb{N}\}$ – последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, сходящейся по вероятности к действительной константе m (ξ_T может представлять собой T -ю частную сумму среднего значения другой последовательности случайных величин $\xi_T = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \eta_k$, где последовательность $\{\eta_k\}$ может быть независимой и одинаково распределенной или зависимой, как наблюдаемый отрезок некоторого стохастического процесса).

По закону больших чисел (ЗБЧ) имеем, что для $\varepsilon > 0$

$$(1.1) \quad \mathbb{P}\{|\xi_T - m| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

Но как насчет скорости сходимости к нулю в (1.1)? Часто бывает так, что сходимость к нулю в (1.1) экспоненциально быстро, то есть, для $T \rightarrow \infty$,

$$(1.2) \quad \mathbb{P}\{|\xi_T - m| > \varepsilon\} \approx R(\cdot) \exp[-TI(\varepsilon, m)],$$

где $R(\cdot) = R(\varepsilon, m, T)$ – медленно меняющаяся (относительно экспоненциальной) функция от T , а $I(\varepsilon, m)$ – положительная величина.

Грубо говоря, если (1.2) выполняется, мы будем говорить, что последовательность $\{\xi_T, T \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет принципу больших уклонений. Одной из основных проблем теории больших уклонений является определение величин $I(\varepsilon, m)$ и $R(\varepsilon, m, T)$.

Таким образом, теорию больших уклонений можно рассматривать как расширение ЗБЧ. ЗБЧ утверждает, что определенные вероятности сходятся к нулю, в то время как теория больших уклонений занимается скоростью сходимости.

Теперь дадим стандартное определение *принципа больших уклонений (ПБУ)* (см. [2] – [4]).

Определение 1.1. Скажем, что набор действительных случайных величин $\{Y_T, T \in \mathbb{U}\}$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, удовлетворяет ПБУ со скоростью $a_T \rightarrow \infty$ и функцией скорости $I : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$, если множества уровня $I^{-1}([0, b])$ компактны для всех $b < \infty$, и

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P} \{Y_T \in E\} \geq - \inf_{x \in E} I(x)$$

для любого открытого множества $E \subset \mathbb{R}$, в то время как

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P} \{Y_T \in F\} \leq - \inf_{x \in F} I(x),$$

для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}$.

ПБУ для квадратичных форм от гауссовских стационарных процессов с дискретным временем был установлен в ряде работ (см. [1], [2], [5], [12] – [15] и ссылки в них). ПБУ для квадратичных функционалов от гауссовских стационарных процессов с непрерывным временем был доказан в работах [2] и [5].

Важно исследовать ПБУ для случайных величин вида $m_T Y_T$, где фактор m_T является положительной числовой функцией от $T \in \mathbb{R}^+$, которая стремится к бесконечности при $T \rightarrow \infty$, но медленнее, чем стандартный нормализующий фактор $T^{1/2}$ в центральной предельной теореме (ЦПТ) для Y_T , то есть, $m_T = o(T^{1/2})$ при $T \rightarrow \infty$. Этот сценарий часто называют *принципом умеренных уклонений (ПУУ)*, поскольку он дает промежуточную оценку между ЦПТ и ПБУ. Итак, будем говорить, что набор $\{Y_T, T \in \mathbb{U}\}$ действительных случайных величин удовлетворяет ПУУ со скоростью $a_T \rightarrow \infty$ и функцией скорости $I : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$, если случайная величина $m_T Y_T$ с $m_T = o(T^{1/2})$ при $T \rightarrow \infty$, удовлетворяет ПБУ с той же скоростью a_T и функцией скорости I .

Инструментом, используемым для установления ПУУ, является следующая теорема Гартнера–Эллиса (см., например, [4], теорема 2.3.6).

Утверждение 1.1 (Теорема Гартнера–Эллиса). *Пусть $\{Y_T, T \in \mathbb{U}\}$ – набор действительных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, и пусть a_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$, стремящаяся к бесконечности при $T \rightarrow \infty$. Положим*

$$M_T(s) := a_T^{-1} \log \mathbb{E}[\exp(s a_T Y_T)].$$

Если предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M_T(s) := M(s) \in \mathbb{R}$$

существует для всех $s \in \mathbb{R}$ и предельная функция $M(s)$ дифференцируема для всех $s \in \mathbb{R}$, то $\{Y_T\}$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I(x)$, которая является преобразованием Фенхеля–Лежандра для $M(s)$:

$$I(x) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{sx - M(s)\},$$

то есть для любого замкнутого множества F из $\mathbb{R}$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P}\{Y_T \in F\} \leq - \inf_{x \in F} I(x),$$

и для любого открытого множества E из $\mathbb{R}$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P}\{Y_T \in E\} \geq - \inf_{x \in E} I(x).$$

Теоремы об умеренных уклонениях для квадратичных форм в дискретных гауссовских стационарных процессах были получены в работах [2] и [13]. В работе [2] также был сформулирован ПУУ для специального квадратичного функционала в случае непрерывного времени (см. теорему 2.4 ниже).

В этой статье нас интересует принцип умеренных уклонений для Теплицевых и суженно Теплицевых квадратичных функционалов от гауссовских стационарных процессов с непрерывным временем и их применение для непараметрической оценки спектральных функционалов.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приводим достаточные условия для ПУУ в случае общих и Теплицевых квадратичных функционалов от гауссовских стационарных процессов. В разделе 3 мы устанавливаем ПУУ для суженных Теплицевых функционалов. Раздел 4 содержит доказательства теорем. В разделе 5 результаты применяются для непараметрической оценки линейных спектральных функционалов.

2. ПУУ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ – центрированный вещественный гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и ковариационной функцией $r(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda.$$

Обозначим через $W_T(f)$ ($T > 0$) ковариационный оператор процесса $X(t)$, то есть, $W_T(f)$ является T -усеченным оператором Теплица (также называемым T -усеченным оператором Винера-Хопфа) определенным равенством:

$$(2.1) \quad [W_T(f)u](t) = \int_0^T r(t-s)u(s)ds, \quad u(s) \in L^2[0, T].$$

Пусть $a(t, s)$ – симметричная интегрируемая с квадратом функция, определенная на $[0, T] \times [0, T]$, и пусть A_T – линейный интегральный оператор, определенный на пространстве $L^2[0, T]$, порождённый ядром $a(t, s)$, то есть для $\phi \in L^2[0, T]$,

$$(2.2) \quad [A_T\phi](t) = \int_0^T a(t, s)\phi(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Рассмотрим следующий случайный квадратичный функционал от процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$(2.3) \quad \mathcal{A}_T := \int_0^T \int_0^T a(t, s)X(t)X(s) dt ds.$$

Через $\tilde{\mathcal{A}}_T$ обозначим нормализованный квадратичный функционал:

$$(2.4) \quad \tilde{\mathcal{A}}_T := b_T^{-1} (\mathcal{A}_T - \mathbb{E}[\mathcal{A}_T]),$$

где b_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $b_T \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$.

Нас интересует ПУУ для функционала $\tilde{\mathcal{A}}_T$. Мы предполагаем, что (A1).

$$(2.5) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{b_T} \text{tr}[A_T W_T(f)]^2 := V \in [0, \infty),$$

где $\text{tr}[A]$ – след оператора A .

(A2). При некоторых $\delta \in [0, 1/2)$ и константе $c \in [0, \infty)$,

$$(2.6) \quad \sup_{T \in \mathbb{R}} b_T^{-\delta} \|A_T W_T(f)\|_{\infty} \leq c.$$

Следующая теорема содержит достаточные условия для того, чтобы общий квадратичный функционал $\tilde{\mathcal{A}}_T$ удовлетворял ПУУ.

Теорема 2.1. *Предположим, что условия (A1) и (A2) выполняются с некоторой $\delta \in [0, 1/2)$. Пусть a_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $1/a_T + a_T b_T^{2\delta-1} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Тогда случайная величина $(b_T/a_T)^{1/2} \tilde{\mathcal{A}}_T$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I_V(x)$:*

$$I_V(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{xy - y^2 V/2\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где V определена в (2.5), то есть, для любого открытого множества $E \subset \mathbb{R}$,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P} \left\{ (b_T/a_T)^{1/2} \tilde{\mathcal{A}}_T \in E \right\} \geq - \inf_{x \in E} I(x)$$

и для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}$.

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P} \left\{ (b_T/a_T)^{1/2} \tilde{\mathcal{A}}_T \in F \right\} \leq - \inf_{x \in F} I(x),$$

Замечание 2.1. В дополнение к условиям теоремы 2.1 рассмотрим неслучайную функцию ε_T (в статистических приложениях это часто смещение оценок) такую, что $(b_T/a_T)^{1/2} \varepsilon_T \rightarrow b \in \mathbb{R}$ при $T \rightarrow \infty$. Тогда случайная величина $(b_T/a_T)^{1/2} (\tilde{\mathcal{A}}_T + \varepsilon_T)$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I_V(x - b)$, $x \in \mathbb{R}$.

Теперь, пусть $a(t, s) = \hat{g}(t - s)$, где $\hat{g}$ – преобразование Фурье некоторой интегрируемой четной функции g . В этом случае оператор A_T , определенный по формуле (2.2) с $a(t, s) = \hat{g}(t - s)$, является T -усеченным оператором Теплица, порожденным функцией g :

$$[W_T(g)u](t) = \int_0^T \hat{g}(t - s)u(s)ds, \quad u(s) \in L^2[0, T].$$

Теперь нас интересует ПУУ для следующего Теплицевого квадратичного функционала от процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$(2.7) \quad Q_T := \int_0^T \int_0^T \hat{g}(t - s)X(t)X(s) dt ds,$$

Через $\tilde{Q}_T$ обозначим стандартный нормализованный квадратичный функционал:

$$(2.8) \quad \tilde{Q}_T := T^{-1} (Q_T - \mathbb{E}[Q_T]).$$

Предположим следующее:

(B1). $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и при $T \rightarrow \infty$,

$$(2.9) \quad \chi_2(\tilde{Q}_T) := \frac{2}{T} \text{tr} [W_T(f)W_T(g)]^2 \longrightarrow V(f, g) := 16\pi^3 \int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda)g^2(\lambda)d\lambda$$

(B2). При некоторых $\delta \in [0, 1/2)$ и $c \in [0, \infty)$,

$$(2.10) \quad \sup_{T \in \mathbb{R}} T^{-\delta} \|W_T(f)W_T(g)\|_{\infty} \leq c.$$

Как следствие теоремы 2.1, имеем следующий ПУУ для квадратичного функционала типа Теплица $\tilde{Q}_T$, заданного в (2.8).

Теорема 2.2. *Предположим, что функции f и g удовлетворяют условиям (B1) и (B2) с некоторой $\delta \in [0, 1/2)$. Пусть a_T – положительная функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $1/a_T + a_T T^{2\delta-1} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Тогда случайная величина $(b_T/a_T)^{1/2} \tilde{Q}_T$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I(x)$:*

$$I(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{xy - y^2 V(f, g)/2\},$$

где $V(f, g)$ определена в (2.9).

Следующая теорема содержит конструктивные достаточные условия для того, чтобы квадратичный функционал Теплица $\tilde{Q}_T$ удовлетворял ПУУ.

Теорема 2.3. *Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ ($p > 2$) и $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ ($q > 2$) с $1/p + 1/q < 1/2$. Пусть a_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что*

$$1/a_T + a_T T^{2(1/p+1/q)-1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

Тогда случайная величина $(T/a_T)^{1/2} \tilde{Q}_T$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I(x)$ определенной в теореме 2.2.

Следствие 2.1. *Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ ($p > 2$), и g имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$. Пусть a_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $1/a_T + T^{1-2/p} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Тогда случайная величина $(T/a_T)^{1/2} \tilde{Q}_T$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I(x)$ определенной в теореме 2.3.*

Следующая теорема, которая была сформулирована в [2] без доказательства, является следствием теоремы 2.2.

Теорема 2.4. *Пусть $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ – действительный, центрированный стационарный гауссовский процесс со спектральной плотностью $f_Y(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R})$, $r > 2$, и пусть m_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $m_T \rightarrow \infty$, $m_T T^{-1/r} \rightarrow \infty$ и $m_T T^{-1/2} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Положим*

$$(2.11) \quad L_T := \int_0^T Y^2(t) dt.$$

Тогда нормализованный квадратичный функционал

$$\tilde{L}_T = m_T T^{-1} (L_T - \mathbb{E}[L_T])$$

удовлетворяет ПБУ со скоростью T/m_T^2 и функцией скорости $I(x) = x^2/\sigma^2$, где

$$(2.12) \quad \sigma^2 = 16\pi^3 \int_{\mathbb{R}} f_Y^2(\lambda) d\lambda.$$

Заметим, что если $m_T = T^\delta$, то $\delta \in (1/r, 1/2)$.

3. ПУУ для суженных Теплицевых квадратичных функционалов

Сужение — это метод, предназначенный на повышение точности спектральных оценок путем внесения определенных предварительных преобразований в исходные данные перед применением процедуры оценивания (о мотивации и преимуществах сужения см., [10]).

В статистическом анализе стационарных процессов данные часто сужаются перед вычислением интересующей статистики, и процедура статистического вывода вместо исходных данных: $\mathbf{X}_T := \{X(t), t \in [0, T]\}$ основана на *суженных данных*:

$$\mathbf{X}_T^h := \{h_T(t)X(t), t \in [0, T]\},$$

где

$$(3.1) \quad h_T(t) := h(t/T)$$

а $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — *функция сужения*, которая будет уточнена ниже.

Случай $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$, где $\mathbf{1}_{[0,1]}(\cdot)$ — индикатор отрезка $[0, 1]$, является *несуженным случаем*.

Для $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ обозначим через $H_{k,T}(\lambda)$ *суженное ядро типа Дирихле*, определяемое как

$$(3.2) \quad H_{k,T}(\lambda) := \int_0^T h_T^k(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

и положим

$$(3.3) \quad H_{k,T} := H_{k,T}(0) \text{ и } C_T := 2\pi H_{2,T}.$$

Заметим, что в несуженном случае $C_T := 2\pi T$.

Мы предполагаем, что функция сужения $h(\cdot)$ удовлетворяет следующему предположению.

Предположение 3.1. Сужение $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной неотрицательной функцией ограниченной вариации с ограниченным носителем в $[0, 1]$, такой, что

$$(3.4) \quad H_k := \int_0^1 h^k(t) dt \neq 0.$$

Нас интересует ПУУ для следующего суженного Теплицевого квадратичного функционала:

$$(3.5) \quad Q_T^h := \int_0^T \int_0^T \widehat{g}(t-s) h_T(t) h_T(s) X(t) X(s) dt ds$$

где $\widehat{g}(t)$ — преобразование Фурье некоторой интегрируемой четной функции $g(\lambda)$, а $h_T(t)$ — определена в (3.1) с функцией сужения $h(t)$, $t \in [0, 1]$, удовлетворяющей Предположению 3.1. Обозначим

$$(3.6) \quad \widetilde{Q}_T^h := T^{-1} (Q_T^h - \mathbb{E}[Q_T^h]).$$

Следующая теорема является суженной версией теоремы 2.3.

Теорема 3.1. Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ ($p > 2$) и $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ ($q > 2$) с $1/p + 1/q < 1/2$, и сужение h удовлетворяет предположению 3.1. Пусть a_T — положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $1/a_T + a_T T^{2(1/p+1/q)-1} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Тогда случайная величина $(T/a_T)^{1/2} \widetilde{Q}_T^h$ удовлетворяет ПБУ с со скоростью a_T и функцией скорости $I^h(x)$:

$$I^h(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{xy - y^2 V^h(f, g)/2\},$$

где

$$V^h(f, g) = 16\pi^3 H_4 \int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda,$$

а H_4 определена в (3.4).

Следствие 3.1. Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ ($p > 2$) и g имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$. Пусть a_T — положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $a_T \rightarrow \infty$ и $1/a_T + T^{1-2/p} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Тогда случайная величина $(T/a_T)^{1/2} \widetilde{Q}_T^h$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I^h(x)$ как в теореме 3.1.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

4.1. Предварительные результаты. Предварительные результаты мы формулируем для суженного случая, для несуженного случая полагаем $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$.

1. Распределение квадратичных форм. Пусть ξ — гауссовская случайная величина со средним m и ковариационным оператором R со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H , то есть ξ — случайная величина с характеристическим функционалом:

$$(4.1) \quad \psi(h) = \exp \left\{ m(h) - \frac{1}{2}(Rh, h) \right\}, \quad h \in H,$$

где $m(h)$ — непрерывный линейный функционал, а ковариационный оператор R — самосопряженный вполне непрерывный оператор с конечным следом. Мы предполагаем, не ограничивая общности, что $m(h) \equiv 0$.

Пусть A — некоторый линейный самосопряженный ограниченный оператор.

Доказательство следующего результата можно найти в работе [11].

Утверждение 4.1. Пусть операторы R и A такие, как указано выше. Справедливы следующие утверждения.

- а) Квадратичная форма $\eta := (A\xi, \xi)$ имеет то же распределение, что и сумма $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2$, где ξ_k — независимые $N(0, 1)$ гауссовские случайные величины, а λ_k — собственные значения оператора R .
- б) Характеристическая функция $\varphi_{\eta}(t)$ квадратичной формы $(A\xi, \xi)$ задается формулой

$$(4.2) \quad \varphi_{\eta}(t) = \prod_{k=1}^{\infty} |1 - 2it\lambda_k|^{-1/2}.$$

- в) Кумулянт k -го порядка $\chi_k(\cdot)$ $(A\xi, \xi)$ задается формулой

$$(4.3) \quad \chi_k(\eta) := 2^{k-1}(k-1)! \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^k = 2^{k-1}(k-1)! \operatorname{tr}[RA]^k,$$

где $\operatorname{tr}[A]$ — след оператора A .

2. Аппроксимация следа. Для заданного действительного числа $T > 0$, интегрируемой действительной симметричной функции ψ , определенной на $\mathbb{R}$, и функции сужения h , удовлетворяющей предположению 3.1, T -усеченный суженный оператор Теплица, сгенерированный функциями ψ и h , обозначаемый как $W_T^h(\psi)$, определяется следующим равенством:

$$(4.4) \quad [W_T^h(\psi)u](t) = \int_0^T \hat{\psi}(t-s)u(s)h_T(s)ds, \quad u(s) \in L^2([0, T]; h_T),$$

где $\hat{\psi}(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $\psi(\cdot)$, а $L^2([0, T]; h_T)$ — весовое L^2 -пространство относительно меры $h_T(t)dt$.

Дана совокупность интегрируемых вещественных симметричных функций $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$, определенных на $\mathbb{R}$. Пусть $W_T^h(\psi_i)$ обозначает T -усеченный оператор Теплица, порожденный функциями ψ_i и h . Положим

$$(4.5) \quad S_{W, \mathcal{H}, h}(T) := \frac{1}{T} \operatorname{tr} \left[\prod_{i=1}^k W_T^h(\psi_i) \right],$$

$$(4.6) \quad M_{\mathbb{R}, \mathcal{H}, h} := (2\pi)^{k-1} H_k \int_{\mathbb{R}} \left[\prod_{i=1}^k \psi_i(\lambda) \right] d\lambda,$$

где H_k определена в в (3.4), и пусть

$$(4.7) \quad \Delta_h(T) := |S_{W, \mathcal{H}, h}(T) - M_{\mathbb{R}, \mathcal{H}, h}|.$$

Для доказательства следующего предложения см. [8], теорема 2.3.

Утверждение 4.2. *Предположим, что $\psi_i \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{p_i}(\mathbb{R})$, $p_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, причем $1/p_1 + \dots + 1/p_k \leq 1$, а функция сужения h удовлетворяет предположению 3.1. Тогда*

$$\Delta_h(T) = o(1) \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

3. Оценки для норм Шаттена. Для числа p , $1 \leq p \leq \infty$, p -норма Шаттена компактного оператора B определяется как

$$(4.8) \quad \|B\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(B) \right)^{1/p}, & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_j s_j(B), & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Доказательство следующего предложения можно найти в работах Гиновяна [6] и Гиновяна и Саакяна [8].

Утверждение 4.3. *Пусть $W_T^h(\psi)$ – T -усеченный суженный Теплицевый оператор, определенный в (4.4). Справедливы следующие утверждения.*

а) Для $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ с $1 \leq p \leq \infty$ имеем

$$(4.9) \quad \|W_T^h(\psi)\|_p \leq T^{1/p} \|\psi\|_p.$$

б) Для $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$ имеем

$$(4.10) \quad \lambda_T := \|W_T^h(\psi)\|_{\infty} = o(T^{1/p}) \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

в) Для $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ имеем

$$(4.11) \quad \frac{1}{T} \|W_T^h(\psi)\|_2^2 \longrightarrow 2\pi H_4 \|\psi\|_2^2 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty,$$

где H_4 определена в (3.4).

4.2. Доказательство теорем.

Доказательство теоремы 2.1. По предположению 4.1 а) с $R = W_T(f)$ и $A = A_T$ квадратичный функционал $\mathcal{A}_T$ в (2.3) имеет то же распределение, что и сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,T} \xi_k^2,$$

где $\{\xi_k, k \geq 1\}$ — независимые $N(0, 1)$ гауссовские случайные величины и $\{\lambda_{k,T}, k \geq 1\}$ — собственные значения оператора $W_T(f)A_T$.

Из предположений (A1) и (A2), ввиду предложения 4.1 с), имеем, что

$$(4.12) \quad b_T \text{Var}[\tilde{\mathcal{A}}_T] = \frac{2}{b_T} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{j,T}^2 = \frac{2}{b_T} \text{tr}[A_T W_T(f)]^2 \rightarrow V \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty,$$

и

$$(4.13) \quad \sup_j |\lambda_{j,T}| = \|A_T W_T(f)\|_{\infty} \leq c b_T^{\delta} \quad \text{для всех} \quad T \in \mathbb{R}.$$

Чтобы применить теорему Эллиса–Гартнера (Предложение 1.1) с $Y_T = (b_T/a_T)^{1/2} \tilde{\mathcal{A}}_T$, нам нужно только доказать, что для $s \in \mathbb{R}$

$$(4.14) \quad M_T(\mathcal{A}, s) := a_T^{-1} \log \mathbb{E}[\exp(s a_T (b_T/a_T)^{1/2} \tilde{\mathcal{A}}_T)] \rightarrow \frac{s^2 V}{2} \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

По предположению 4.1 б) с $R = W_T(f)$ и $A = A_T$, имеем

$$(4.15) \quad \begin{aligned} M_T(\mathcal{A}, s) &= \frac{1}{a_T} \sum_{k=1}^{\infty} \log \mathbb{E} \left[\exp\{s(a_T/b_T)^{1/2} \lambda_{k,T} (\xi_k^2 - 1)\} \right] \\ &= \frac{1}{a_T} \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \log(1 - 2s(a_T/b_T)^{1/2} \lambda_{k,T}) - s(a_T/b_T)^{1/2} \lambda_{k,T} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим $\mu_{j,T}^{(s)} := s(a_T/b_T)^{1/2} \lambda_{j,T}$, и заметим, что по (4.13) и выбору a_T имеем

$$(4.16) \quad \sup_j |\mu_{j,T}^{(s)}| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

Действительно, в силу (4.13),

$$(4.17) \quad |\mu_{j,T}^{(s)}| \leq c (a_T/b_T)^{1/2} b_T^{\delta} = c (a_T b_T^{2\delta-1})^{1/2}.$$

Последний член в (4.17) стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$, поскольку по предположению, наложенному на a_T , имеем $a_T b_T^{2\delta-1} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Из (4.16) имеем

$$(4.18) \quad \sup_j |1 - \theta(\mu_{j,T}^{(s)}) \mu_{j,T}^{(s)}| \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty,$$

где $\theta(\mu_{j,T}^{(s)}) \in [0, 1]$.

Далее, по теореме Тейлора, для $|w| < 1$

$$(4.19) \quad \log(1 - w) = -w - (1/2)w^2(1 - \theta(w)w)^{-2},$$

где $\theta(w) \in [0, 1]$.

Применяя (4.19) с $w = \mu_{j,T}^{(s)}$ с учетом (4.12), (4.15) и (4.18) получаем (4.14). Теорема 2.1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.2. По предложению 4.1 а) при $R = W_T(f)$ и $A = W_T(g)$ квадратичный функционал Q_T в (2.7) имеет то же распределение, что и сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,T} \xi_k^2,$$

где $\{\xi_k, k \geq 1\}$ — независимые $N(0, 1)$ гауссовские случайные величины и $\{\lambda_{k,T}, k \geq 1\}$ — собственные значения оператора $W_T(f)W_T(g)$. Остальная часть доказательства повторяет аргументы доказательства теоремы 2.1. $\square$

Доказательство теоремы 2.3. Результат мы выводим из теоремы 2.2. Во-первых, предположение (B1) теоремы 2.2 выполняется в силу 4.2 с $k = 4$. Во-вторых, по предложению 4.3 имеем, что

$$(4.20) \quad \|W_T(f)W_T(g)\|_{\infty} \leq \|W_T(f)\|_{\infty}\|W_T(g)\|_{\infty} \leq cT^{1/p+1/q},$$

и, следовательно, предположение (B2) теоремы 2.2 выполняется с $\delta = 1/p + 1/q$. Таким образом, результат следует из теоремы 2.2. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3, с использованием предложений 4.2 и 4.3. Поэтому мы опускаем подробности. $\square$

5. ПРИЛОЖЕНИЕ: ПУУ ДЛЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ — центрированный стационарный процесс с *неизвестной* спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что $f(\lambda)$ принадлежит заданному (бесконечномерному) классу $\mathcal{F} \subset L^p := L^p(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$) спектральных плотностей, обладающих некоторыми заданными свойствами гладкости. Пусть $J(\cdot)$ — некоторый *известный* функционал, область определения которого содержит $\mathcal{F}$. Интересующая нас задача — оценить значение $J(f)$ функционала $J(\cdot)$ в *неизвестной* 'точке' $f \in \mathcal{F}$ на основе наблюдаемых данных.

Мы предполагаем, что оцениваемый функционал $J(f)$ линеен и непрерывен в $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$. Тогда $J(f)$ допускает представление:

$$(5.1) \quad J(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)g(\lambda)d\lambda,$$

где $g(\lambda) \in L^q(\mathbb{R})$, $1/p + 1/q = 1$.

Нас интересует непараметрическая оценка функционала $J(f)$ на основе суженных данных:

$$(5.2) \quad \mathbf{X}_T^h := \{h_T(t)X(t), t \in [0, T]\},$$

где $h_T(t)$ определена в (3.1) с функцией сужения $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей предположению 3.1. Как и прежде, случай $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ – *несуженный* случай.

Квадратичные функционалы Q_T и Q_T^h предоставляют непараметрические оценки для функционала (5.1) на основе несуженных и суженных данных соответственно. Действительно, естественная статистическая оценка для $J(f)$ является линейным интегральным функционалом суженной эмпирической спектральной плотности процесса $X(t)$:

$$(5.3) \quad J(I_T^h, g) := \int_{\mathbb{R}} I_T^h(\lambda)g(\lambda)d\lambda.$$

где

$$(5.4) \quad I_T^h(\lambda) := \frac{1}{C_T} \left| \int_0^T h_T(t)X(t)e^{-i\lambda t}dt \right|^2$$

является *суженной периодограммой* (эмпирической спектральной плотностью) процесса $X(t)$, а

$$(5.5) \quad C_T := 2\pi H_{2,T}(0) \neq 0$$

с $H_{k,T}(\cdot)$ как в (3.3). Напомним, что в несуженном случае ($h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$), мы имеем $C_T = 2\pi T$.

Из (3.5), (5.3) и (5.4) имеем

$$(5.6) \quad J_T^h = C_T^{-1}Q_T^h,$$

Асимптотические свойства оценки (5.6), включая асимптотическую несмещенность, состоятельность и асимптотическую нормальность J_T^h , были установлены в работах Гиновяна и Саакяна [8], [9]. Следующая теорема, вытекающая из теоремы 3.1 и формулы (5.6), утверждает, что ПУУ выполняется для оценки $J(I_T^h, g)$.

Теорема 5.1. *Предположим, что условия теоремы 3.1 выполнены. Тогда случайная величина*

$$\eta_T := (T/a_T)^{1/2}[J(I_T^h, g) - \mathbb{E}[J(I_T^h, g)]]$$

удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I^h(x)$:

$$(5.7) \quad I^h(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{xy - y^2 V^h(f, g)/2\},$$

где

$$(5.8) \quad V^h(f, g) = 4\pi e(h) \int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda$$

и

$$(5.9) \quad e(h) := H_4 H_2^{-2}$$

где H_k определена в (3.4).

В следующем следствии теоремы 5.1 мы заменяем $\mathbb{E}[J(I_T^h, g)]$ на $J(f, g)$, что более полезно на практике, но требует больше предположений для оценки смещения $J(I_T^h, g)$.

Следствие 5.1. *Предположим, что условия теоремы 5.1 выполнены, и пусть функция g имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$. Тогда случайная величина*

$$\tilde{\eta}_T := (T/a_T)^{1/2}[J(I_T^h, g) - J(f, g)]$$

удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I^h(x)$ определенной как в теореме 5.1.

Доказательство. Чтобы вывести результат из теоремы 5.1, с учетом замечания 2.1, нам нужно только показать, что

$$(5.10) \quad (T/a_T)^{1/2}[J(f, g) - \mathbb{E}[J(I_T^h, g)]] = o(1) \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Это следует из теоремы 2.1 [9], утверждающей, что в условиях следствия для смещения $J(I_T^h, g)$ имеем

$$(5.11) \quad \text{Bias}(J(I_T^h, g)) := J(f, g) - \mathbb{E}[J(I_T^h, g)] = o(T^{-1/2}) \quad \text{при } T \rightarrow \infty,$$

откуда вытекает (5.10). □

Замечание 5.1. Для несуженного случая имеем

$$(5.12) \quad V(f, g) = 4\pi \int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda,$$

и согласно (5.8) и (5.12)

$$V^h(f, g)/V(f, g) = e(h).$$

Ввиду (3.4), согласно неравенству Шварца, имеем $e(h) := H_4 H_2^{-2} \geq 1$. Таким образом, экспоненциальное убывание вероятности больших отклонений в суженном случае не больше, чем в несуженном случае.

Abstract. In this paper, we establish moderate deviations limit theorems for Toeplitz and tapered Toeplitz type quadratic functionals in continuous time Gaussian stationary processes. The results are applied in the nonparametric estimation of spectral functionals.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Bercu, F. Gamboa, A. Rouault, “Large deviations for quadratic forms of Gaussian stationary processes”, *Stochastic Process. Appl.*, **71**, 75 – 90 (1997).
- [2] W. Bryc, A. Dembo, “Large deviations for quadratic functionals of Gaussian processes”, *J. Theoret. Probab.*, **10**, 307 – 332 (1997).
- [3] J. A. Bucklew, “Large deviations techniques in decision, simulation, and estimation”, Wiley (1990).
- [4] A. Dembo, O. Zeitouni, “Large Deviations Technique and Applications”, Jones and Barlett, Boston, Massachusetts (1993).
- [5] F. Gamboa, A. Rouault, M. Zani, “A functional large deviations principle for quadratic forms of Gaussian stationary processes”, *Statist. Probab. Lett.*, **43**, 299 – 308 (1999).
- [6] M. S. Ginovyan, “On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process”, *Probab. Theory Related Fields*, **100**, 395 – 406 (1994).
- [7] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, “Limit Theorems for Toeplitz quadratic functionals of continuous time stationary process”, *Probab. Theory Relat. Fields*, **138**, 551 – 579 (2007).
- [8] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, “Limit theorems for tapered Toeplitz quadratic functionals of continuous time Gaussian stationary processes”, *J. Cont. Math. Anal.*, **54**(4), 222 – 239 (2019).
- [9] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, “Estimation of spectral functionals for Lévy-driven continuous time linear models with tapered data”, *Electronic Journal of Statistics*, **13**, 255 – 283 (2019).
- [10] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, “Statistical inference for stationary models with tapered data”, *Statistics Surveys*, **15**, 154 – 194 (2021).
- [11] I. A. Ibragimov, “On estimation of the spectral function of a stationary Gaussian process”, *Theory Probab. Appl.*, **8**, 366 – 401 (1963).
- [12] S. Ihara, “Large deviation theorems for Gaussian processes and their applications in information theory”, *Acta Appl. Math.*, **63**, 165 – 174 (2000).
- [13] Y. Kakizawa, “Moderate deviations for quadratic forms in Gaussian stationary processes”, *J. Multivar. Anal.*, **98**, 992 – 1017 (2007).
- [14] T. Sato, Y. Kakizawa, M. Tahiguchi, “Large deviations results for statistics of short- and long-memory Gaussian processes”, *Austral. and New Zeland J. Statist.*, **40**, 17 – 29 (1998).
- [15] M. Taniguchi, Y. Kakizawa, *Asymptotic Theory of Statistical Inference for Time Series*, Academic Press, New York (2000).

Поступила 06 августа 2024

После доработки 30 октября 2024

Принята к публикации 02 декабря 2024

**О МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРАХ $\mathcal{L}$ -ВИНЕРА-ХОПФА
В СЛУЧАЕ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА**

Г. А. КИРАКОСЯН

Институт Математики, Национальная Академия Наук Армении

E-mail: *grigor.kirakosyan.99@gmail.com*

Аннотация. В работе рассматриваются матричные операторы $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа порожденные безотражательным потенциалом и действующие в лебеговых пространствах с весом Макенхаупта. Эти операторы определяются заменой преобразования Фурье в стандартном определении Винера-Хопфа на спектральное преобразование оператора Штурма-Лиувилля с безотражательным потенциалом. Получены критерий фредгольмовости и формула для индекса в случае кусочно-непрерывного символа.

MSC2020 number: 47G10; 47B35.

Ключевые слова: безотражательный потенциал; матричный оператор $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа; оператор Фредгольма.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть λ_k, m_k ($k = 1, \dots, N$) положительные числа, причём $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$, а функции $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ однозначно определяются системой линейных уравнений

$$(1.1) \quad \varphi_k(x) + \sum_{s=1}^N m_k m_s \frac{e^{-(\lambda_k + \lambda_s)x}}{\lambda_k + \lambda_s} \varphi_s(x) = m_k e^{-\lambda_k x}, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Определим также функции $t(\lambda), u^\mp(x, \lambda), x, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= \prod_{k=1}^N \frac{\lambda + i\lambda_k}{\lambda - i\lambda_k}, \\ u^-(x, \lambda) &= t(\lambda) e^{i\lambda x} \left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{m_k e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k - i\lambda} \varphi_k(x) \right), \\ u^+(x, \lambda) &= e^{-i\lambda x} \left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{m_k e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k + i\lambda} \varphi_k(x) \right). \end{aligned}$$

При $N = 0$ будем считать, что $t(\lambda) = 1, u^\mp(x, \lambda) = e^{\pm i\lambda x}$.

Рассмотрим интегралы

$$(U_{\mp}y)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\mp}(x, \lambda) y(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Как известно (более подробно см. [1, 2]) эти интегралы сходятся по норме $L_2(\mathbb{R})$ и определяют ограниченные операторы $U_{\mp}: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$.

Функции $u^{\mp}$ и операторы $U_{\pm}$ тесно связаны с действующим в $L_2(\mathbb{R})$ самосопряжённым дифференциальным оператором $\mathcal{L}$ порождённым дифференциальным выражением

$$(\ell x)(x) = -y''(x) + v(x)y(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

в случае когда v является безотражательным потенциалом (более подробно см. [1, секция 3], а также [3, 4, 5, 6]).

Ниже для линейного пространства X через X^n (соответственно через $X^{n \times n}$) будем обозначать множество n -мерных столбцов (соответственно $n \times n$ матриц). Для оператора A , действующего из линейного пространства X в линейное пространство Y , оператор

$$\text{diag}(A, \dots, A): X^n \rightarrow Y^n$$

также будем обозначать через A , т.е. действие оператора A на X^n будем понимать покомпонентно. Условимся через $m(a)$ обозначать действующий в функциональных пространствах оператор умножения на матриц-функцию a :

$$(m(a)y)(x) = a(x)y(x),$$

а через $J: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ оператор действующий по формуле $(Jy)(x) = y(-x)$.

Для банаховой алгебры $\mathfrak{A}$, через $G\mathfrak{A}$ будем обозначать группу обратимых элементов.

Пусть E либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{R}_{\pm} := \{\pm x > 0: x \in \mathbb{R}\}$, а $A_p(E)$, $1 < p < \infty$ множество весов на E удовлетворяющих условию A_p :

$$\sup \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^p dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-q} dx \right)^{1/q} < \infty,$$

где I пробегает все ограниченные интервалы E , $|I|$ длина интервала и $q = p/(p-1)$. Через $L_p(E, w)$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R})$ будем обозначать лебегово пространство с нормой

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_E |f(x)|^p w(x)^p dx \right)^{1/p}.$$

Под спектральным преобразованием оператора $\mathcal{L}$ мы понимаем оператор

$$U := m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)JU_+ : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}).$$

Оператор U удовлетворяет равенствам

$$U^*U = I - P, \quad UU^* = I,$$

где I – единичный оператор, а P – ортогональный оператор на собственное подпространство $\text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ оператора $\mathcal{L}$. Кроме того на всюду плотном в $L_2(\mathbb{R})$ множестве имеет место равенство $U\mathcal{L}U^* = m(\lambda^2)$ (см. [1, 2, 6]).

При $v = 0$ (соответствующему случаю $N = 0$) оператор $U = U_{\pm}$ совпадает с преобразованием Фурье $F : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$:

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} y(x) dx.$$

Функцию $a \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ назовём U -мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}, w)$ если для каждого $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$ функция $U^*m(a)Uy$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ и кроме того при некотором постоянном $c > 0$ неравенство

$$\|U^*m(a)Uy\| \leq c\|y\|$$

имеет место одновременно для всех $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$. Оператор $U^*m(a)U$ допускает непрерывное продолжение до действующего на $L_p(\mathbb{R}, w)$ ограниченного оператора, который мы будем обозначать через $W_{\mathcal{L}}^0(a)$ и называть оператором $\mathcal{L}$ -свёртки на $L_p(\mathbb{R}, w)$ с символом a . Множество U -мультипликаторов будем обозначать через $\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$. В случае $a = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}^{n \times n}$ под оператором $\mathcal{L}$ -свёртки мы понимаем оператор

$$W_{\mathcal{L}}^0(a) = (W_{\mathcal{L}}^0(a_{ij})) : L_p^n(\mathbb{R}, w) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}, w),$$

здесь, как и в дальнейшем, через $L_p^n(\mathbb{R}, w)$ будем обозначать алгебру $(L_p(\mathbb{R}, w))^n$ (см. определение пространства X^n для банахова пространства X).

Определим операторы $\pi_{\pm}^0 : L_p(\mathbb{R}_{\pm}, w) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, w)$, $\pi_{\pm} : L_p(\mathbb{R}, w) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_{\pm}, w)$ по формулам $(\pi_{\pm}y)(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}_{\pm}$

$$(\pi_+^0 y)(x) = \begin{cases} y(x) & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}, \quad (\pi_-^0 y)(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R}_+ \\ y(x) & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}.$$

Пусть $a \in \mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}^{n \times n}$. Оператор $W_{\mathcal{L}}(a) := \pi_+ W_{\mathcal{L}}^0(a) \pi_+^0 : L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$, $1 < p < \infty$ будем называть оператором $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа с символом a .

Поскольку при $v = 0$, оператор U совпадает с преобразованием Фурье F , то операторы $W_{\mathcal{L}}^0(a)$ и $W_{\mathcal{L}}(a)$ в этом случае совпадают, соответственно определёнными в весовых пространствах, оператором свёртки и оператором Винера-Хопфа (см. [7]). По этой причине в этом случае во всех обозначениях мы опускаем индекс $\mathcal{L}$ и будем пользоваться стандартными обозначениями $\mathcal{M}_{p,w}$, $\mathcal{M}_{p,w}^{n \times n}$, $W^0(a)$, $W(a)$. Множество мультипликаторов $\mathcal{M}_{p,w}$ (см. [7]) является банаховой алгеброй с нормой

$$\|a\|_{\mathcal{M}_{p,w}} := \|W^0(a)\|_{B(L_p(\mathbb{R},w))}.$$

Далее через $PC = PC(\dot{\mathbb{R}})$ будем обозначать алгебру всех кусочно непрерывных функций на $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, т.е. функций имеющих в каждой точке $x_0 \in \dot{\mathbb{R}}$ пределы $a(x_0 - 0) := \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} a(x)$, $a(x_0 + 0) := \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} a(x)$, причём $a(\infty \mp 0) := a(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x)$.

Заметим, что функции из PC имеющие ограниченную вариацию $V(a)$ принадлежат $\mathcal{M}_{p,w}$ (см. [7]) и $\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$ (см. [2, теорема 5.1]).

Далее через $PC_{p,w}$ (соответственно $C_{p,w}$) обозначим замыкание в $\mathcal{M}_{p,w}$ множества кусочно непрерывных функций имеющих ограниченную вариацию и не более чем конечное число скачков (соответственно непрерывных на $\dot{\mathbb{R}}$ функций).

Напомним, что линейный ограниченный оператор $A : X \rightarrow Y$, где X, Y банаховы пространства, называется фредгольмовым, если его образ замкнут и конечномерны его ядро $\ker A := \{x \in X : Ax = 0\}$ и коядро $\operatorname{coker} A := Y/\operatorname{Im} A$.

В данной работе исследуется задача фредгольмовости матричного оператора $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа $W_{\mathcal{L}}(a) : L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$ в случае, когда $a \in PC_{p,w}^{n \times n}$.

Как и в скалярном случае исследование фредгольмовости оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ сводится к исследованию фредгольмовости оператора Винера-Хопфа $W(a) : L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$. О возможности исследования этого оператора говорится в работе [7] стр. 331. К сожалению в этой работе не приведены условия фредгольмовости и формула для индекса оператора $W(a)$. По этой причине мы вынуждены исследовать достаточно подробно фредгольмовость этого оператора (см. секции 2–6).

Критерий фредгольмовости и формула для индекса оператора $W(a)$ в случае $n = 1$, $w = 1$ получен в [8], а в случае $n = 1$, $w \in A_p$ в [9]. Для оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ аналогичные результаты получены в случае $n = 1$, $w \in A_p$ в [2]. Случай более общих потенциалов $w = 1$, $n = 1$, $p = 2$ рассмотрен в [1]. Аналогичные

результаты для матричного оператора $W(a)$ в случае степенных весов получены в [10].

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Пусть $\nu \in (0, 1)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Множество

$$\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu) := \left\{ \frac{z_2 e^{2\pi(x+i\nu)} - z_1}{e^{2\pi(x+i\nu)} - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \right\} \cup \{z_1, z_2\}$$

является дугой окружности соединяющей точки z_1 и z_2 и содержащая концевые точки z_1 и z_2 . Множество $\mathcal{A}(z, z; \nu)$ вырождается в точку $\{z\}$. Множество $\mathcal{A}(z_1, z_2; 1/2)$ совпадает с отрезком соединяющий точки z_1 и z_2 . В случае $\nu > 1/2$ из точек $\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu)$ отличных от z_1 и z_2 отрезок $[z_1, z_2]$ виден под углом $2\pi(1-\nu)$ и при переходе от точки z_1 к точке z_2 отрезок остаётся справа. В случае $\nu < 1/2$, из отличных от z_1 и z_2 точек $\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu)$ отрезок виден под углом $2\pi\nu$ и при переходе от точки z_1 к z_2 отрезок остаётся слева.

Заметим, что

$$\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu) = \{(1-\mu)z_1 + \mu z_2 : \mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu)\}.$$

Рассмотрим также множество

$$\mathcal{H}(z_1, z_2; \nu_1, \nu_2) = \bigcup_{\nu \in [\nu_1, \nu_2]} \mathcal{A}(z_1, z_2; \nu)$$

называемое рогом между z_1 и z_2 из $\mathbb{C}$ и определяемое числами ν_1, ν_2 , $0 < \nu_1 \leq \nu_2 < 1$ (см. [7]).

Каждое из множеств (см. [7, 9])

$$I_\xi(p, w) = \left\{ \mu \in \mathbb{R} : \left| \frac{x-\xi}{x-i} \right|^\mu w(x) \in A_p \right\}, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

$$I_\infty(p, w) = \left\{ \mu \in \mathbb{R} : |x-i|^{-\mu} w(x) \in A_p \right\}$$

является открытым интервалом длиной не превышающей единицу и содержащий 0

$$I_\xi(p, w) = \left(-\nu_\xi^-(p, w), 1 - \nu_\xi^+(p, w) \right), \quad \xi \in \dot{\mathbb{R}}$$

где $0 < \nu_\xi^-(p, w) \leq \nu_\xi^+(p, w) < 1$.

Рассмотрим также числа $\nu_0^0 = \frac{1}{2}(\nu_0^- + \nu_0^+)$, $\nu_\infty^0 = \frac{1}{2}(\nu_\infty^- + \nu_\infty^+)$.

Пусть $a \in PC^{n \times n}$. Через $\gamma_{p,w}(a)$ мы обозначим замкнутую непрерывную кривую дополняющую существенный образ функции $\det a$ кривыми

$$\det[(1-\mu)a(x-0) + \mu a(x+0)],$$

$\mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu_\infty^0)$ при $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu_0^0)$ при $x = \infty$, соединяющими точки $\det a(x - 0)$ и $\det a(x + 0)$ в каждой точке разрыва $x \in \mathbb{R}$. Ориентация $\mathbb{R}$ от $-\infty$ до $+\infty$ и вышеуказанных кривых от $\mu = 0$ к $\mu = 1$ порождает естественную ориентацию кривой $\gamma_{p,w}(a)$ которая совпадает с множеством

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{ \det[(1 - \mu)a(x - 0) + \mu a(x + 0)] : \mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu_\infty^0) \} \bigcup \\ \bigcup \{ \det[(1 - \mu)a(+\infty) + \mu a(-\infty)] : \mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu_0^0) \}.$$

В случае, когда $0 \notin \gamma_{p,w}(a)$ корректно определено количество оборотов, обозначаемое далее через $\text{wind}_{p,w} a$, вокруг нулевой точки при обходе кривой $\gamma_{p,w}(a)$ в направлении ее естественной ориентации (см. [7]). Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2.1. Пусть $a \in PC_{p,w}^{n \times n}$. Тогда оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фегдольмов в пространстве $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$ тогда и только тогда, когда

$$\det[(1 - \mu)a(x - 0) + \mu a(x + 0)] \neq 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R} \quad \text{и } \mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_\infty^-, \nu_\infty^+) \quad \text{и} \\ \det[(1 - \mu)a(+\infty) + \mu a(-\infty)] \neq 0 \quad \text{при } \mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-, \nu_0^+).$$

В случае выполнения этих условий

$$\text{Ind } W_{\mathcal{L}}(a) = -\text{wind}_{p,w} a.$$

Окончательное доказательство этой теоремы будет приведено в секциях 5, 6. В секциях 3, 4 приведены результаты необходимые для доказательства основной теоремы.

3. СВЯЗЬ ОПЕРАТОРОВ $W_{\mathcal{L}}(a)$ С $W(a)$

С помощью непрерывной на $\mathbb{R}_+$ функции ϕ и удовлетворяющей там неравенству $|\phi(x)| < ce^{-\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, где λ и c положительные постоянные, построим ограниченные операторы

$$N_{\phi,1}^+, N_{\phi,2}^+ : L_p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_+),$$

действующие по формулам

$$(3.1) \quad \left(N_{\phi,1}^+ y \right)(x) = \int_x^\infty \phi(\sigma) y(\sigma) d\sigma, \quad \left(N_{\phi,2}^+ y \right)(x) = \int_0^x \phi(\sigma) y(\sigma) d\sigma,$$

Определим так называемый оператор преобразования по формуле

$$I + \mathcal{K}_+ = I - \sum_{k=1}^N m(\varphi_k) N_{\psi_k,1}^+ : L_p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_+),$$

а также оператор

$$I - \Gamma_+ = I - \sum_{k=1}^N m(\psi_k) N_{\varphi_k,2}^+ : L_p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_+),$$

где φ_k , $k = 1, \dots, N$ определяются из (1.1), а $\psi_k(x) := m_k e^{-\lambda_k x}$, $k = 1, \dots, N$, $x \in \mathbb{R}$.

Точно так же как в [2] можно установить ограниченность и обратимость этих операторов в $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$, при $w \in A_p(\mathbb{R})$ а также связь между операторами $W_{\mathcal{L}}(a)$ и $W(a)$, при $a \in \mathcal{M}_{p,w}^{n \times n}$, $w \in A_p(\mathbb{R})$. Именно, справедливы следующие результаты.

Лемма 3.1. *$w \in A_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Тогда операторы $I + \mathcal{K}_+$, $I - \Gamma_+$ ограничены в пространствах $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$. Кроме того эти операторы обратимы и справедливы равенства*

$$\begin{aligned} (I + \mathcal{K}_+)^{-1} &= I + \sum_{k=1}^N m(\psi_k) N_{\varphi_k,1}^+, \\ (I - \Gamma_+)^{-1} &= I + \sum_{k=1}^N m(\varphi_k) N_{\psi_k,2}^+ \end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Пусть $w \in A_p(\mathbb{R})$, $a \in \mathcal{M}_{p,w}^{n \times n}$. Тогда $a \in \mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}^{n \times n}$ и в пространстве $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$ справедливо тождество*

$$W_{\mathcal{L}}(a) = (I + \mathcal{K}_+)W(a)(I - \Gamma_+).$$

Последнее даёт эквивалентность фредгольмовых свойств операторов $W_{\mathcal{L}}(a)$ и $W(a)$ в пространствах $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$. Следовательно, для доказательства основной теоремы достаточно убедиться в её справедливости для оператора $W(a)$.

Пусть $\mathcal{M}_{p,w}^{n \times n}$. Определим операторы

$$E = \begin{pmatrix} -\pi_+^0 & m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a) \\ I & -\pi_+ W^0(a - E_n) \end{pmatrix} : L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \oplus L_p^n(\mathbb{R}, w) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}, w) \oplus L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$$

$$F = \begin{pmatrix} \pi_+ W^0(a - E_n) & I \\ m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a) & \pi_+^0 \end{pmatrix} : L_p^n(\mathbb{R}, w) \oplus L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \oplus L_p^n(\mathbb{R}, w),$$

где E_n единичная матрица размера n . Нетрудно убедиться, что эти операторы обратимы, причём

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_+ W^0(a - E_n) & W(a) \\ I & \pi_+^0 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} -\pi_+^0 & I \\ W(a) & -\pi_+^0 W^0(a - E_n) \end{pmatrix},$$

а также имеет место равенство

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} W(a) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} F$$

Это доказывается непосредственной проверкой записав оператор $m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)$ в виде $I + \pi_+^0 \pi_+ W^0(a - E_n)$.

Из равенства (3.2) и обратимости E, F следует, что оператор $W(a)$ (а следовательно и $W_{\mathcal{L}}(a)$) фредгольмов в $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$ тогда и только тогда когда оператор $m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)$ фредгольмов в $L_p^n(\mathbb{R}, w)$.

4. ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП

Пусть $\mathfrak{A}$ – банахова алгебра с единицей. Ограниченное подмножество $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ называется локализирующим классом, если $0 \notin \mathfrak{M}$ и для любых элементов $B_1, B_2 \in \mathfrak{M}$ существует третий $B \in \mathfrak{M}$, что $B_j B = B B_j = B$, $j = 1, 2$. Система $\{\mathfrak{M}\}_{\tau \in T}$ локализирующих классов называется покрывающей, если из каждого множества $\{B_\tau\}_{\tau \in T}$, $B_\tau \in \mathfrak{M}_\tau$, можно выделить конечное число, сумма которых обратима в алгебре $\mathfrak{A}$ (см. [11]).

Пусть $\{\mathfrak{M}\}_{\tau \in T}$ покрывающая система локализирующих классов в $\mathfrak{A}$ и положим $\mathcal{B} = \cup\{\mathfrak{M}_\tau : \tau \in T\}$. Комутант $\text{Com } \mathcal{B}$ замкнутая подалгебра в $\mathfrak{A}$. Для $\tau \in T$ определим

$$\mathfrak{Z}_\tau = \left\{ A \in \text{Com } \mathcal{B} : \inf_{B \in \mathfrak{M}_\tau} \|AB\| = \inf_{B \in \mathfrak{M}_\tau} \|BA\| = 0 \right\}$$

Можно показать, что $\mathfrak{Z}_\tau$ замкнутый, двухсторонний идеал в $\text{Com } \mathcal{B}$. Для $A \in \text{Com } \mathcal{B}$ через A_τ обозначим смежный класс в $\text{Com } \mathcal{B} / \mathfrak{Z}_\tau$ содержащий элемент A .

Теорема 4.1 (Локальный принцип Гохберга и Крупника [11]). *Элемент $A \in \text{Com } \mathcal{B}$ обратим в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда A_τ обратим в $\text{Com } \mathcal{B} / \mathfrak{Z}_\tau$ для всех $\tau \in T$.*

Теорему 4.1 будем применять в случае алгебры Калкина $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(L_p^n(\mathbb{R}_+, w)) / \mathcal{K}(L_p^n(\mathbb{R}_+, w))$, где $\mathcal{B}(L_p^n(\mathbb{R}_+, w))$ – банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов на $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$, а $\mathcal{K}(L_p^n(\mathbb{R}_+, w))$ – идеал компактных операторов на $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$, который кратко будем обозначать через $\mathcal{K}$.

В качестве кандидатов на локализационных классов в $\mathfrak{A}$ возьмём семейство $\{\mathfrak{M}_{y,\eta}\}$, $(y, \eta) \in (\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}) \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = T$. Множество $\mathfrak{M}_{y,\eta}$ состоит из смежных классов $m(v)W^0(u) + \mathcal{K}$ таких, что $u = \text{diag}(\underbrace{u^0, \dots, u^0}_n)$, $v = \text{diag}(\underbrace{v^0, \dots, v^0}_n)$, где $u^0, v^0 \in C(\dot{\mathbb{R}})$ кусочно линейные с ограниченной вариацией и u^0 (соответственно v^0) тождественно равно 1 в некоторой открытой окрестности y (соответственно η) и тождественно равно 0 вне некоторой открытой окрестности y (соответственно η).

Сначала покажем, что каждый из множеств $\mathfrak{M}_{y,\eta}$ является локализирующим классом. Пусть $m(v_i)W^0(u_i) + \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_{y,\eta}$, $i = 1, 2$, для некоторой $(y, \eta) \in T$. Для любого $m(v)W^0(u) + \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_{y,\eta}$ имеем

$$\begin{aligned} (m(v_i)W^0(u_i) + \mathcal{K})(m(v)W^0(u) + \mathcal{K}) &= m(v_i)W^0(u_i)m(v)W^0(u) + \mathcal{K} = \\ &= m(v_i v)W^0(u_i u) + m(v_i) [W^0(u_i)m(v) - m(v)W^0(u_i)] W^0(u) + \mathcal{K} = \\ &= m(v_i v)W^0(u_i u) + \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из следующего известного факта (см. [7, 8]).

Лемма 4.1. *Пусть хотя бы одна из матриц функций a или b диагональна. Тогда, если $a \in C^n(\dot{\mathbb{R}})$, b является функцией ограниченной вариации ($\text{Var}(b) < \infty$) либо $a \in PC^{n \times n}$, $\text{Var}(b) < \infty$, $b \in C^n(\dot{\mathbb{R}})$, то оператор $m(a)W^0(b) - W^0(b)m(a)$ компактен в $L_p^n(\mathbb{R}, w)$.*

Очевидно, что $v_i v = v v_i$, $u_i u = u u_i$ и что функции u, v можно выбрать таким образом, что $v_i v = v$, $u_i u = u$. Система локализирующих классов $\{\mathfrak{M}_{y,\eta}\}$ является покрывающей, т.е. что оператор $\sum_{j=1}^n m(u_j)W^0(v_j)$ фредгольмов для заданных

$$u_j = \text{diag}(u_j^0, \dots, u_j^0), \quad v_j = \text{diag}(v_j^0, \dots, v_j^0), \quad \sum_{j=1}^n u_j^0 \geq 1, \quad \sum_{j=1}^n v_j^0 \geq 1.$$

Этот факт очевидным образом сводится к скалярному случаю рассмотренному в [12].

Аналогичными рассуждениями, из леммы 4.1 следует, что если хотя бы одна из матриц-функций c или a диагональна, $b, c \in PC^{n \times n}$, $a \in PC_{p,w}^{n \times n}$, то $m(b) + m(c)W^0(a) + \mathcal{K} \in \text{Com } \mathcal{B}$. Тогда элемент $[m(b) + m(c)W^0(a) + \mathcal{K}]_{(y,\eta)}$ принадлежит алгебре $\text{Com } \mathcal{B} / \mathfrak{Z}_{y,\eta}$, которую кратко обозначим через $[m(b) + m(c)W^0(a)]_{y,\eta}^\pi$.

Используя локальный принцип Гохберга-Крупника заключаем, что для доказательств фредгольмовости оператора $m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)$ (а, следовательно,

и для $W(a)$, $W_{\mathcal{L}}(a)$ достаточно исследовать обратимость элементов $[m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{y,\eta}^\pi$ в алгебре $\text{Com } \mathcal{B}/\mathfrak{Z}_{y,\eta}$ для всех $(y, \eta) \in T$.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КРИТЕРИЙ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ $W_{\mathcal{L}}(a)$

Пусть $\sigma_\zeta(x) = -\text{sgn}(x - \zeta)E_n$, $\lambda_\zeta(x) = e^{i\zeta x}E_n$, где $x, \zeta \in \mathbb{R}$. Имеет место равенство

$$m(b) + m(c)W^0(\sigma_\zeta) = m(\lambda_\zeta^{-1})(m(b) + m(c)S)m(\lambda_\zeta),$$

где $b, c \in PC^{n \times n}$, а S сингулярный интегральный оператор на оси (см. например [7] либо [11]). Пользуясь стандартной техникой сингулярных интегральных операторов (см. например [9, лемма 3.4] и [7, теорема 16.21]) можем утверждать справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.1. *Пусть $b, c \in PC^{n \times n}$, $\zeta \in \mathbb{R}$ и предположим, что $b - c \in GL_\infty^{n \times n}(\mathbb{R})$. Тогда оператор $m(b) + m(c)W^0(\sigma_\zeta)$ фредгольмов в пространстве $L_p(\mathbb{R}, w)$ тогда и только тогда, когда*

$$\det[(1 - \mu)d(x - 0) + \mu d(x + 0)] \neq 0$$

при $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_x^-(p, w), \nu_x^+(p, w))$, $x \in \dot{\mathbb{R}}$, где $d = (b - c)^{-1}(b + c)$.

Доказательства следующих лемм в скалярном случае приведены в работе [9] (см. [9, лемма 4.6, лемма 5.1]). Сохраняя методологию этой работы перенесем эти результаты на матричный случай.

Лемма 5.1. *Пусть $b, c \in PC^{n \times n}$, $b - c, b + c \in GL_\infty^n(\mathbb{R})$ и $d = d_{b,c} = (b - c)^{-1}(b + c)$ и предположим, что $y, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$. Тогда*

- (1) $[m(b) + m(c)W^0(\sigma_\zeta)]_{y,\infty}^\pi$ обратим тогда и только тогда, когда $\det[(1 - \mu)d(y - 0) + \mu d(y + 0)] \neq 0$, при $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_y^-(p, w), \nu_y^+(p, w))$;
- (2) $[m(b) + m(c)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\infty}^\pi$ обратим;
- (3) $[m(b) + m(c)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\eta}^\pi$ обратим, если $\eta \neq \zeta$;
- (4) $[m(b) + m(c)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\zeta}^\pi$ обратим тогда и только тогда, когда $\det[(1 - \mu)d(+\infty) + \mu d(-\infty)] \neq 0$, при $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$.

Доказательство. (1) Имеем

$$[m(b) + m(c)W^0(\sigma_\zeta)]_{y,\infty}^\pi = [m(b_y) + m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)]_{y,\infty}^\pi$$

где $b_y, c_y \in PC^{n \times n}$ такие, что $b_y(y \pm 0) = b(y \pm 0)$, $c_y(y \pm 0) = c(y \pm 0)$. Функции b_y, c_y выберем так, чтобы они были непрерывными на $\dot{\mathbb{R}} \setminus \{y\}$, а также $b_y \pm c_y \in GPC^{n \times n}$ и $\det d_{b_y, c_y}(x) \neq 0$ при $x \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{y\}$.

Пусть $\det[(1-\mu)d(y-0)+\mu d(y+0)] \neq 0$ при $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_y^-(p, w), \nu_y^+(p, w))$. Тогда из теоремы 5.1 заключаем, что оператор $m(b_y) + m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)$ фредгольмовый. В силу теоремы 4.1 элемент $[m(b_y) + m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)]_{y,\infty}^\pi$ обратим.

Теперь предположим, что $\det[(1-\mu)d(x-0) + \mu d(x+0)] = 0$ при некотором $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_y^-(p, w), \nu_y^+(p, w))$, но элемент $[m(b_y) + m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)]_{y,\infty}^\pi$ обратим. Для $x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}$ имеем

$$[m(b_y) + m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)]_{x,\infty}^\pi = [m(b_y(x)) + m(c_y(x))W^0(\sigma_\zeta)]_{x,\infty}^\pi,$$

а так как оператор $m(b_y(x)) + m(c_y(x))W^0(\sigma_\zeta)$ (с постоянными матрицами $b_y(x)$, $c_y(x)$) фредгольмов по теореме 5.1, то в силу теоремы 4.1 элемент $[m(b_y(x)) + m(c_y(x))W^0(\sigma_\zeta)]_{x,\infty}^\pi$ обратим. Также, для $\eta \in \mathbb{R}$ имеем

$$[m(b_y) + m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\eta}^\pi = [m(b_y(\infty)) + m(c_y(\infty))W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\eta}^\pi.$$

Повторяя вышеуказанные рассуждения получим обратимость и для элемента $[m(b_y) + m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\eta}^\pi$.

Следовательно получили, что элемент $[m(b_y) + m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)]_{x,\eta}^\pi$ обратим для всех $(x, \eta) \in T$ и в силу теоремы 4.1 заключаем, что оператор $m(b_y) + m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)$ фредгольмов, что противоречит нашему предположению с учетом теоремы 5.1.

Доказательство (2), (3) без всяких изменений проводится также как и в скалярном случае (см. [9, лемма 5.1]).

(4) Имеем

$$[m(b) + m(c)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\zeta}^\pi = [m(b_\infty) + m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\zeta}^\pi,$$

где b_∞ , c_∞ непрерывны на $\mathbb{R}$ такие, что $b_\infty(\pm\infty) = b(\pm\infty)$, $c_\infty(\pm\infty) = c(\pm\infty)$, $b_\infty \pm c_\infty \in GPC^{n \times n}$, $\det d_{b_\infty, c_\infty}(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $\det[(1-\mu)d(+\infty)+\mu d(-\infty)] \neq 0$ при $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$. Тогда оператор $m(b_\infty) + m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)$ фредгольмов по теореме 5.1. Следовательно, в силу теоремы 4.1 элемент $[m(b_\infty) + m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\zeta}^\pi$ обратим.

Предположим обратное, пусть $\det[(1-\mu)d(+\infty) + \mu d(-\infty)] = 0$ при некотором $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$, но элемент $[m(b_\infty) + m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty,\zeta}^\pi$ обратим. При $y \in \mathbb{R}$, имеем

$$[m(b_\infty) + m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)]_{y,\infty}^\pi = [m(b_\infty(y)) + m(c_\infty(y))W^0(\sigma_\zeta)]_{y,\infty}^\pi,$$

но оператор $m(b_\infty(y)) + m(c_\infty(y))W^0(\sigma_\zeta)$ (с постоянными матрицами $b_\infty(y)$, $c_\infty(y)$) фредгольмов в силу теоремы 5.1 и, следовательно, в силу теоремы 4.1 элемент $[m(b_\infty) + m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)]_{y,\infty}^\pi$ обратим. В случае $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{\zeta\}$ имеем обратимость

элемента $[m(b_\infty) + m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)]_{\infty, \eta}^\pi$ в силу пунктов (2), (3). Следовательно, в силу теоремы 4.1 из обратимости элементов $[m(b_\infty) + m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)]_{y, \eta}^\pi$ для любых $(y, \eta) \in T$ заключаем фредгольмовость оператора $m(b_\infty) + m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)$, что противоречит нашему предположению с учетом теоремы 5.1. $\square$

Лемма 5.2. Пусть $a \in PC_{p, w}^{n \times n} \cap GL_\infty^n(\mathbb{R})$, $y, \eta \in \mathbb{R}$. Тогда

- (1) $[m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{y, \infty}^\pi$ обратим если $y \neq 0$;
- (2) $[m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{0, \infty}^\pi$ обратим тогда и только тогда, когда $\det[(1 - \mu)a(+\infty) + \mu a(-\infty)] \neq 0$, при $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$;
- (3) $[m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{\infty, \infty}^\pi$ обратим;
- (4) $[m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{\infty, \eta}^\pi$ обратим тогда и только тогда, когда $\det[(1 - \mu)a(\eta - 0) + \mu a(\eta + 0)] \neq 0$, при $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$.

Доказательство. (1) При $y < 0$ имеет место равенство

$$[m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{y, \infty}^\pi = [I]_{y, \infty}^\pi,$$

а при $y > 0$ имеем

$$\begin{aligned} [m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{y, \infty}^\pi &= [W^0(a(-\infty)\chi_- + a(+\infty)\chi_+)]_{y, \infty}^\pi = \\ &= \left[m \left(\frac{a(-\infty) + a(+\infty)}{2} \right) + m \left(\frac{a(-\infty) - a(+\infty)}{2} \right) W^0(\sigma_0) \right]_{y, \infty}^\pi = \\ &= [m(b) + m(c)W^0(\sigma_0)]_{y, \infty}^\pi. \end{aligned}$$

Очевидно, что $[I]_{y, \infty}^\pi$ обратимый и поскольку

$$\det[(b - c)^{-1}(b + c)] = \det[(a(+\infty))^{-1}a(-\infty)] \neq 0,$$

то из леммы 5.1 (1) заключаем, что элемент $[m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{y, \infty}^\pi$ обратим.

(2) Имеем

$$\begin{aligned} [m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{0, \infty}^\pi &= \\ &= [m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a(-\infty)\chi_- + a(+\infty)\chi_+)]_{0, \infty}^\pi = \\ &= [m(b) + m(c)W^0(\sigma_0)]_{0, \infty}^\pi. \end{aligned}$$

Поскольку

$$((b - c)^{-1}(b + c))(x) = \begin{cases} E_n, & \text{для } x < 0 \\ (a(+\infty))^{-1}a(-\infty), & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

то из леммы 5.1 (1) заключаем, что элемент $[m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{0, \infty}^\pi$ обратим тогда и только тогда, когда

$$\det[(1 - \mu)E_n + \mu(a(+\infty))^{-1}a(-\infty)] \neq 0, \quad \text{при } \mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w)).$$

Последнее умножая на $\det a(+\infty) \neq 0$ получим требуемое.

(3) Имеем

$$\begin{aligned} & [m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{\infty, \infty}^\pi = \\ & = [m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a(-\infty)\chi_- + a(+\infty)\chi_+)]_{\infty, \infty}^\pi = \\ & = [m(b) + m(c)W^0(\sigma_0)]_{\infty, \infty}^\pi. \end{aligned}$$

что обратимо в силу леммы 5.1 (2).

(4) Пусть χ_η^- и χ_η^+ характеристические функции множеств $(-\infty, \eta)$ и $(\eta, +\infty)$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} & [m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{\infty, \eta}^\pi = \\ & = [m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a(\eta-0)\chi_\eta^- + a(\eta+0)\chi_\eta^+)]_{\infty, \eta}^\pi = \\ & = \left[m(\chi_-) + m\left(\frac{a(\eta-0) + a(\eta+0)}{2}\right) + m\left(\frac{a(\eta-0) - a(\eta+0)}{2}\right)W^0(\sigma_\eta) \right]_{\infty, \eta}^\pi = \\ & = [m(b) + m(c)W^0(\sigma_\eta)]_{\infty, \eta}^\pi. \end{aligned}$$

Поскольку

$$((b-c)^{-1}(b+c))(-\infty) = E_n, \quad ((b-c)^{-1}(b+c))(+\infty) = (a(\eta+0))^{-1}a(\eta-0),$$

то из леммы 5.1 (4) заключаем, что элемент $[m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)]_{\infty, \eta}^\pi$ обратим тогда и только тогда, когда

$$\det \left[(1-\mu)(a(\eta+0))^{-1}a(\eta-0) + \mu E_n \right] \neq 0, \quad \text{при } \mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w)).$$

Умножая на $\det a(\eta+0) \neq 0$ получим требуемое. $\square$

Принимая во внимание вышеуказанный факт о фредгольмовой эквивалентности операторов $W_{\mathcal{L}}(a)$ и $m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)$ и локальный принцип Гохберга-Крупника, из леммы 5.2 получаем первую часть теоремы 2.1, а именно критерий фредгольмовости оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$.

6. ФОРМУЛА ИНДЕКСА

Пусть $a \in \mathcal{M}_{p, w}^{n \times n}$. Операторы Ганкеля $H(a)$, $\tilde{H}(a)$ с символом a определим

$$\begin{aligned} H(a) &= \pi_+ W^0(a) \pi_-^0 J: L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}_+, w), \\ \tilde{H}(a) &= J \pi_- W^0(a) \pi_+^0: L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}_+, w). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться (см. [7, предложение 2.10]), что имеет место следующее равенство

$$(6.1) \quad W(ab) = W(a)W(b) + H(a)\tilde{H}(b), \quad \text{где } a, b \in \mathcal{M}_{p,w}^{n \times n}$$

Предложение 6.1. Пусть $c \in C^{n \times n}(\mathbb{R})$, тогда операторы Ганкеля $H(c)$, $\tilde{H}(c)$ компактны.

Доказательство. Пусть $1 < p < \infty$ и $w \in A_p(\mathbb{R}_+)$. Теорема 2.31 из [13] утверждает, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $w^{1+\gamma} \in A_{p_1}(\mathbb{R}_+)$, как только

$$(6.2) \quad |\gamma| < \varepsilon_0, \quad |p - p_1| < \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad 1 < p_1 < \infty.$$

Пусть $0 < \theta < 1$, $\gamma = \frac{1-\theta}{\theta}$ и $p_1 = p(1 + \varepsilon)$. Выберем θ таким образом, чтобы имело место равенство

$$(6.3) \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{p(1+\varepsilon)}$$

и одновременно были выполнены условия (6.2). Такой выбор возможен поскольку из (6.3) следует, что

$$\varepsilon = \frac{(1-\theta)(p-2)}{2-p(1-\theta)}$$

и при $\theta \rightarrow 1$, имеем $\gamma \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть весовая функция w_1 определена равенством $w^p = w_1^{p_1 \frac{p\theta}{p_1}} = w_1^{p\theta}$, т.е. $w_1 = w^{\frac{1}{\theta}} = w^{1+\frac{1-\theta}{\theta}} = w^{1+\gamma}$ и поэтому в силу вышеуказанной теоремы $w_1 \in A_{p_1}(\mathbb{R}_+)$. В силу интерполяционной теоремы Стейна-Вейса (см. [14]) $L_p(\mathbb{R}_+, w)$ является интерполяционным пространством с показателем θ , между парой пространств $L_2(\mathbb{R}_+)$ и $L_{p_1}(\mathbb{R}, w_1)$. Ганкелевы операторы $H(c)$ и $\tilde{H}(c)$ в случае $c \in C(\mathbb{R})$ компактны как операторы действующие из $L_2(\mathbb{R}_+)$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$ (см. [7]) и ограничены как операторы действующие из $L_{p_1}(\mathbb{R}_+, w)$ в $L_{p_1}(\mathbb{R}_+, w)$. В силу обобщённой теоремы Красносельского (см. [15]) эти операторы компактны и как операторы действующие из $L_p(\mathbb{R}_+, w)$ в $L_p(\mathbb{R}_+, w)$. $\square$

Используя равенство (6.1) из предложения 6.1 вытекает

Следствие 6.1. Пусть $a, b \in \mathcal{M}_{p,w}^{n \times n}$ и хотя бы один из функций a , b принадлежит $C^{n \times n}(\mathbb{R})$, то оператор $W(ab) - W(a)W(b)$ компактный.

Перейдём теперь к доказательству формулы индекса. Учитывая теорему 3.1 формулу индекса достаточно доказать для $W(a)$.

Пусть E подмножество $PC_{p,w}^{n \times n}$ состоящее из матриц-функций компоненты которых являются функциями ограниченной вариации и имеющих конечное число разрывов. Из определения $PC_{p,w}^{n \times n}$ следует существование последовательности a_n , $a_n \in E$, такого что $\|W(a_n) - W(a)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поскольку индекс оператора является непрерывной функцией, то без потери общности мы можем считать, что $a \in E$. Из условий фредгольмовости имеем, что $a \in GPC^{n \times n}$. Тогда, как известно (см. [16, лемма 2.2]), матрица a может быть представлена в виде

$$a = b \varphi c,$$

где $b, c \in GC^{n \times n}(\mathbb{R})$, $\varphi \in GPC^{n \times n}$ и φ верхтреугольная матрица вида

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_n \end{pmatrix}$$

при этом матриц-функции b , φ , c могут быть выбраны так, чтобы их компоненты были функциями ограниченной вариации. Тогда в силу обобщенного неравенства Стечкина (см. [7, теорема 17.1]) матриц-функции являются мультипликаторами, т.е. $b, \varphi, c \in \mathcal{M}_{p,w}^{n \times n}$.

В силу следствия 6.1 оператор $W(a) - W(b)W(\varphi)W(c): L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$ является компактным. Из критерия фредгольмовости и из того, что $b, c \in GC^{n \times n}(\mathbb{R})$ имеем, что операторы $W(b)$, $W(c)$ фредгольмовы. Кроме того

$$\begin{aligned} 0 \neq \det[(1 - \mu)a(x - 0) + \mu a(x + 0)] &= \det[(1 - \mu)b(x)\varphi(x - 0)c(x) + \\ &+ \mu b(x)\varphi(x + 0)c(x)] = \det b(x) \cdot \det[(1 - \mu)\varphi(x - 0) + \mu\varphi(x + 0)] \det c(x), \end{aligned}$$

где при $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$, а при $x = \infty$, $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$.

Следовательно, так как $\det b(x) \neq 0$, $\det c(x) \neq 0$, то в силу уже доказанного критерия фредгольмовости оператор $W(\varphi)$ также является фредгольмовым и $\det[(1 - \mu)\varphi(x - 0) + \mu\varphi(x + 0)] \neq 0$. В силу треугольной структуры φ

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n [(1 - \mu)\varphi_i(x - 0) + \mu\varphi_i(x + 0)] &\neq 0 \implies \\ \implies [(1 - \mu)\varphi_i(x - 0) + \mu\varphi_i(x + 0)] &\neq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где при $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_\infty^-(p, w), \nu_\infty^+(p, w))$, а при $x = \infty$, $\mu \in \mathcal{H}(0, 1; \nu_0^-(p, w), \nu_0^+(p, w))$.

Используя критерий фредгольмовости для оператора Винера-Хопфа со скалярным символом (см. [9]) получаем, что операторы $W(\varphi_i)$, $i = 1, \dots, n$ фредгольмовы. Следовательно

$$(6.4) \quad \text{Ind } W(a) = \text{Ind } W(b) + \sum_{j=1}^n \text{Ind } W(\varphi_j) + \text{Ind } W(c).$$

Для каждой φ_j обозначим через $\varphi_j^\#$ кривую, которая получается из существенного образа кривой φ_j путем соединения точек $\varphi_j(x-0)$, $\varphi_j(x+0)$ дугами вида

$$(1-\mu)\varphi_j(x-0) + \mu\varphi_j(x+0),$$

где $\mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu_\infty^0)$ при $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu_0^0)$ при $x = \infty$.

Из [9, теорема 5.2] следует, что

$$\text{Ind } W(\varphi_j) = -\text{wind } \varphi_j^\#.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^n \text{Ind } W(\varphi_j) = \sum_{j=1}^n -\text{wind } \varphi_j^\# = -\text{wind } \prod_{j=1}^n \varphi_j^\# = -\text{wind } \varphi^\#,$$

где $\varphi^\#$ кривая полученная из образа $\det \varphi$ добавлением кривыми вида

$$\det[(1-\mu)\varphi(x-0) + \mu\varphi(x+0)],$$

где $\mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu_\infty^0)$ при $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu_0^0)$ при $x = \infty$, в точках разрыва функции $\det \varphi$. Таким образом $\text{Ind } W(\varphi) = -\text{wind } \varphi^\#$.

Для непрерывных b, c имеем, что (см. [7, теорема 17.10])

$$\text{Ind } W(b) = -\text{wind } \det b, \quad \text{Ind } W(c) = -\text{wind } \det c.$$

Следовательно из (6.4) имеем $\text{Ind } W(a) = -\text{wind } \det b - \text{wind } \varphi^\# - \text{wind } \det c = -\text{wind}_{p,w} a$. Теорема 2.1 доказана.

7. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Обозначим через $\lambda_j(x)$, $x \in \dot{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2, \dots, n$ собственные значения матрицы $a^{-1}(x-0)a(x+0)$. Легко видеть, что при $x \in \dot{\mathbb{R}}$ условие

$$\det[(1-\mu)a(x-0) + \mu a(x+0)] \neq 0, \quad \mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu)$$

эквивалентно условиям

$$\det a(x \pm 0) \neq 0,$$

$$\frac{\mu}{\mu-1} \lambda_j(x) \neq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad \mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu) \setminus \{0, 1\},$$

или, что тоже самое

$$\det a(x \pm 0) \neq 0,$$

$$\lambda_j(x) \neq \frac{\mu - 1}{\mu}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu) \setminus \{0, 1\}.$$

С учетом того, что для $\mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu) \setminus \{0, 1\}$, $\frac{\mu}{\mu-1} = e^{i2\pi\nu}\zeta$, $\zeta \in (0, \infty)$ из теоремы 2.1 несложно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 7.1. Пусть $a \in PC_{p,w}^{n \times n}$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны

- (1) Оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов;
- (2) $\det a(x \pm 0) \neq 0$ для $x \in \mathbb{R}$,
 $\nu + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(x) \notin \mathbb{Z}$ для $x \in \mathbb{R}$, $\nu \in [\nu_{\infty}^-, \nu_{\infty}^+]$, $j = 1, \dots, n$,
 $\nu + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(\infty) \notin \mathbb{Z}$ для $\nu \in [\nu_0^-, \nu_0^+]$, $j = 1, \dots, n$;
- (3) $\det a(x \pm 0) \neq 0$ для $x \in \mathbb{R}$,
 $\lambda_j(x) \notin \{re^{-i2\pi\nu} : r \in (0, \infty), \nu \in [\nu_{\infty}^-, \nu_{\infty}^+]\}$ для $x \in \mathbb{R}$,
 $\lambda_j(\infty) \notin \{re^{-i2\pi\nu} : r \in (0, \infty), \nu \in [\nu_0^-, \nu_0^+]\}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $0 < \nu < 1$, функция $g: \mathcal{A}(0, 1, \nu) \rightarrow \mathbb{C}$ определена равенством $g(\mu) = (1 - \mu) + \mu\lambda$. Как известно (см. например [7, теорема 16.18])

$$\frac{1}{2\pi} [\arg g]_{\mathcal{A}(0,1,\nu)} = -\nu + \left\{ \nu + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda \right\},$$

где $[\arg g]_{\mathcal{A}(0,1,\nu)}$ является изменением аргумента g при переходе от $\mu = 0$ к $\mu = 1$ по дуге $\mathcal{A}(0, 1; \nu)$, а $\{c\}$ означает дробная часть числа, $c \in \mathbb{R}$. Отсюда при $x \in \mathbb{R}$ изменение аргумента вдоль дуги $\mathcal{A}(0, 1; \nu)$ функции $\arg \det((1 - \mu)a(x - 0) + \mu a(x + 0))$ равно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} [\arg \det((1 - \mu)a(x - 0) + \mu a(x + 0))]_{\mathcal{A}(0,1;\nu)} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \prod_{j=1}^n ((1 - \mu) + \mu \lambda_j(x)) \right]_{\mathcal{A}(0,1;\nu)} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n [\arg((1 - \mu) + \mu \lambda_j(x))]_{\mathcal{A}(0,1;\nu)} = -n\nu_{\infty} + \sum_{j=1}^n \left\{ \nu_{\infty} + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(x) \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi} [\arg \det((1 - \mu)a(+\infty) + \mu a(-\infty))]_{\mathcal{A}(0,1;\nu)} =$$

$$= -n\nu_0 + \sum_{j=1}^n \left\{ \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(\infty) \right\}.$$

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$, где $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Для непрерывной на Δ и отличной там от нуля функции c через $\arg_{\Delta} c$ будем обозначать непрерывный аргумент функции c , т.е. непрерывную на Δ функцию удовлетворяющую тождеству $c(x) = |c(x)|e^{i \arg c(x)}$, $x \in \Delta$.

Из теоремы 2.1 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 7.2. Пусть матриц-функция $a \in PC_{p,w}^{n \times n}$ имеет конечное число разрывов в точках $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_m < \infty$ и может иметь разрыв в бесконечности. Тогда, если оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов, то

$$\begin{aligned} \text{Ind } W_{\mathcal{L}}(a) &= \frac{1}{2\pi} (\arg_{\Delta_0} \det a(-\infty) - \arg_{\Delta_0} \det a(x_1 - 0)) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m-1} (\arg_{\Delta_k} \det a(x_k + 0) - \arg_{\Delta_k} \det a(x_{k+1} - 0)) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} (\arg_{\Delta_m} \det a(x_m + 0) - \arg_{\Delta_m} \det a(+\infty)) + n m \nu_{\infty}^0 + n \nu_0^0 - \\ &- \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \nu_{\infty}^0 + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(x_k) \right\} - \sum_{j=1}^n \left\{ \nu_0^0 + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(+\infty) \right\}. \end{aligned}$$

8. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть $w(x) = t^{\beta}$, $\beta \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$, где $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Известно, что тогда $w \in A_p(\mathbb{R})$ (см. [7, стр. 304]).

Рассмотрим оператор $W_{\mathcal{L}}(a): L_p(\mathbb{R}_+, t^{\beta}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_+, t^{\beta})$ в случае символа $a(x) = -\text{sgn}(x)$ и безотражательного потенциала

$$v(x) = -\frac{2\mu^2}{\text{ch}^2(\mu(x - \xi))}, \quad \xi = \frac{1}{\ln(m^2/2\mu)},$$

$m, \mu > 0$. Известно следующее равенство (см. [17, 6])

$$W_{\mathcal{L}}(-\text{sgn } x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{1}{s - x} y(s) ds - \frac{1}{\pi i} \varphi(x) \int_0^{\infty} (Ei(\mu(s - x)) - Ei(\mu(x - s))) \varphi(s) y(s) ds,$$

где $\varphi(x) := \frac{me^{\mu\xi}}{2\text{ch}(\mu(x - \xi))}$, а $Ei(x) := v.p. \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ интегрально-показательная функция. Из теоремы 3.1 имеем

$$W_{\mathcal{L}}(-\text{sgn } x) = (I + \mathcal{K}_+) W(-\text{sgn } x) (I - \Gamma_+).$$

С другой стороны из леммы 3.1 имеем обратимость операторов $(I + \mathcal{K}_+)$, $(I - \Gamma_+)$ и их явный вид. Следовательно обратимость оператора $W_{\mathcal{L}}(-\operatorname{sgn} x)$ сводится к обратимости оператора $W(-\operatorname{sgn} x)$.

Известно, что (см. [7]) оператор $W(-\operatorname{sgn} x)$ совпадает с сингулярным интегральным оператором S_+ на положительной полуоси

$$(S_+ f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В свою очередь (см. [11, стр. 312]) имеем, что при $2(1 + \beta) > p$

$$(S_+^{-1} f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а при $2(1 + \beta) < p$

$$(S_+^{-1} f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{t}{\tau}} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

В случае когда $p = 2(1 + \beta)$ оператор S_+ (а следовательно и $W_{\mathcal{L}}(-\operatorname{sgn} x)$) не является обратимым.

Таким образом справедливо следующее утверждение.

Следствие 8.1. *В случае $p \neq 2(1 + \beta)$ оператор $W_{\mathcal{L}}(-\operatorname{sgn} x)$ обратим и его обратный оператор допускает представление*

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{L}}^{-1}(-\operatorname{sgn} x) &= (I - \Gamma_+)^{-1} W^{-1}(-\operatorname{sgn} x) (I + \mathcal{K}_+)^{-1} = \\ &= \left(I + m(\varphi) N_{\psi,2}^+ \right) S_+^{-1} \left(I + m(\psi) N_{\varphi,1}^+ \right) = \\ &= S_+^{-1} + m(\varphi) N_{\psi,2}^+ S_+^{-1} + S_+^{-1} m(\psi) N_{\varphi,1}^+ + m(\varphi) N_{\psi,2}^+ S_+^{-1} m(\psi) N_{\varphi,1}^+, \end{aligned}$$

где $\psi(x) = m e^{-\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$, а операторы $N_{\varphi,1}^+$, $N_{\psi,2}^+$ определяются по формулам (3.1).

Abstract. The present paper considers matrix $\mathcal{L}$ -Wiener-Hopf operators generated by a reflectionless potential and acting in Lebesgue spaces with Muckenhoupt weight. These operators are defined by replacing the Fourier transform in the standard definition of the Wiener-Hopf operator with the spectral transform of the Sturm-Liouville operator with a reflectionless potential. Criteria for Fredholm property and a formula for the index in the case of a piecewise continuous symbol are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Камалян, И. М. Спитковский, “О фредгольмовости одного класса операторов типа свертки”, Математические заметки, **104**, no. 3, 407 – 421 (2018). DOI:10.4213/mzm12113
- [2] А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян, “Операторы $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа в весовых пространствах в случае безотражательного потенциала”, Изв. НАН Армении, Математика, **57**, no. 2, 112 – 121 (2022). DOI:10.54503/0002-3043-2022.57.2-0-43
- [3] Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния”, Итоги науки и техники, Сер. Современ. проблем мат., 3 ВИНТИ, Москва, 93 – 180 (1974).
- [4] В. Юрко, Введение в Теорию Обратных Спектральных Задач, Физмат, Москва (2007).
- [5] П. Бхатнагар, Нелинейные Волны в Одномерных Диспергирующих Системах, Мир, Москва (1983).
- [6] D. Hasanyan, A. Kamalyan, M. Karakhanyan, I. M. Spitkovsky, “Integral Operators of the $\mathcal{L}$ -Convolution Type in the Case of a Reflectionless Potential”, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, **291**, 175 – 197 (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-030-26748-3_11
- [7] A. Böttcher Y. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky, Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions, Birkhäuser, Basel (2002).
- [8] Р. В. Дудучава, Интегральные Уравнения Свертки с Разрывными Предсимволами, СИУ, (1979).
- [9] A. Böttcher, I. M. Spitkovsky, “Wiener-Hopf integral operators with PC symbols on spaces with Muckenhoupt weight”, Revista Matemática Iberoamericana, **9**, no. 2, 257 – 279 (1993). DOI:10.4171/RMI/136
- [10] R. Schneider, “Integral equations with piecewise continuous coefficients in L^p -spaces with weight”, Journal of Integral Equations, **9**, no. 2, 135 – 152 (1985). <https://www.jstor.org/stable/26164260>
- [11] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Интегральных Операторов, Кишинев, Штиинца (1973).
- [12] A. Böttcher, I. M. Spitkovsky, “Pseudodifferential operators with heavy spectrum, Integral Equations and Operator Theory”, **19**, 251–269, (1994). DOI:10.1007/BF01203665
- [13] A. Böttcher, Y. I. Karlovich, Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators, Progress in Mathematics, 154, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (1997).
- [14] E. Stein, G. Weiss, “Interpolation of operators with change of measures”, Transactions of the American Mathematical Society, **87**, 159 – 172 (1958). DOI:10.1090/s0002-9947-1958-0092943-6
- [15] A. Persson, Compact linear mappings between interpolation spaces, Arkiv för Matematik, **5**, no. 13, 215 – 219 (1964). DOI:10.1007/BF02591123
- [16] K. F. Clancey, I. Gohberg, Factorization of matrix functions and singular integral operators, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston (1981).
- [17] G. Kirakosyan, “On the invertibility of one integral operator”, Armenian Journal of Mathematics, **14**, no. 6, 1 – 10 (2022). DOI: <https://doi.org/10.52737/18291163-2022.14.6-1-10>

Поступила 08 июля 2024

После доработки 29 октября 2024

Принята к публикации 05 ноября 2024

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 1, 2025, стр. 45 – 51.

ЗАМЕТКА О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И РЯДАХ ФУРЬЕ

Т. КАРЧАВА, А. АПЛАКОВ

Сухумский государственный университет, Тбилиси, Грузия
Тбилисский государственный университет им. И.Джавахишвили, Тбилиси, Грузия
E-mails: *tkarchava01@gmail.com*; *aleksandre.aplakovi@tsu.ge*

Аннотация. В этой статье мы находим класс функций, для которых можно улучшить оценку Лебега.

MSC2020 numbers: 41A10.

Ключевые слова: ряд Фурье; модуль непрерывности.

Пусть $C([0, 2\pi])$ – пространство непрерывных функции f с периодом 2π . Если $f \in C([0, 2\pi])$, то функция

$$\omega(\delta, f) := \sup_x \sup_{|h| \leq \delta} |f(x+h) - f(x)|$$

называется модулем непрерывности функции f .

Модули непрерывности более высоких порядков определяются следующим образом

$$\omega_p(\delta, f) := \sup_x \sup_{|h| \leq \delta} |\Delta_p(x; h, f)|, \quad \omega_1(\delta, f) := \omega(\delta, f),$$

где

$$\Delta_p(x; h, f) = \sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} f(x+jh)$$

является разностью p -го порядка.

$$\Delta_1(x; h, f) := f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_{p+1}(x; h, f) = \Delta_p(x+h; h, f) - \Delta_p(x; h, f).$$

Известно, что тригонометрическая система не является базисом в пространстве непрерывных функций. Более того, Лебег (см. [1, Ch.1]) построил пример непрерывной функции с неограниченно расходящимся в одной точке рядом Фурье.

Отсюда возник вопрос охарактеризовать подмножества пространства непрерывных функций, обеспечивающие равномерную сходимость рядов Фурье. В этом направлении существует два подхода:

1) характеристика подклассов с помощью вариации функции (Жордан [2], Винер [3], Янг [4], Ватерман [5], Кита [6], Чантурия [7], Осколков [8], Карчава [9], Ахобадзе [10, 11, 12], Гогинава [13] – [16]); Гогинава, Саакян [17, 18]);

2) Использовать следующую оценку Лебега (см. [19],[20])

$$\|f - S_n(f)\| \leq c \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \log(n+2),$$

где $S_n(f, x)$ — n -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f , а ω — модуль непрерывности функции.

Основной целью статьи является улучшение оценки Лебега. Доказывается справедливость следующей оценки.

Теорема 1. Пусть $f \in C([0, 2\pi])$. Тогда

$$\|f - S_n(f)\|_C \leq c \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k 2^k}.$$

Доказательство. Пусть $T_n(x)$ — полином Валле-Пуссена, который обеспечивает наилучшее приближение функции f в пространстве $C([0, 2\pi])$ (см. [20]),

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) V_n(t) dt, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_n(t)| dt \leq 1.$$

Положим

$$g(t) := f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) - T_n(x+t) - T_n(x-t) + 2T_n(x).$$

Очевидно, что

$$\omega_p(\delta, T_n) \leq c \omega_p(\delta, f).$$

Мы будем использовать следующее представление

$$(1) \quad \sum_{i=k+1}^n \frac{(-1)^i}{i} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + P_k(n),$$

где

$$|P_k(n)| \leq \frac{c}{k^2}.$$

Чтобы получить (1), когда k и n — нечетные положительные целые числа, обозначим

$$a = \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Применим следующее равенство: $a = \frac{a+b+(a-b)}{2}$, где

$$b = \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) + \left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Имеем

$$a + b = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

и

$$a - b = \left(\frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} \right).$$

Очевидно, что

$$|a - b| \leq c \left(\frac{1}{(k+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^3} \right) \leq \frac{c}{k^2}.$$

В заключение получаем

$$a = \frac{a + b + (a - b)}{2} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Когда k — нечетное, а n — четное положительное целое число, достаточно применить представление

$$a = \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

При четном k с помощью элементарных преобразований приходим к рассмотренным случаям. Равенство (1) доказано.

Пусть $D_n(t)$ — ядро Дирихле. Тогда,

$$(2) \quad \int_0^\pi g(t) D_n(t) dt = \int_0^\pi g(t) \left(D_n(t) - \frac{\sin nt}{t} \right) dt + \int_0^\pi g(t) \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Легко видеть, что функция

$$D_n(t) - \frac{\sin nt}{t}$$

ограничена и

$$|g(t)| \leq 4E_n(f).$$

Следовательно,

$$(3) \quad \left| \int_0^\pi g(t) \left(D_n(t) - \frac{\sin nt}{t} \right) dt \right| \leq cE_n(f),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f .

С другой стороны,

$$(4) \quad \left| \int_0^{\pi/n} g(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \|g\|_c \int_0^{\pi/n} \frac{\sin nt}{t} dt \leq cE_n(f).$$

Из (2)-(4) находим

$$(5) \quad \int_0^{\pi} g(t) D_n(t) dt = \int_{\pi/n}^{\pi} g(t) \frac{\sin nt}{t} dt + \gamma,$$

где $|\gamma| \leq cE_n(f)$. Очевидно, что

$$(6) \quad \begin{aligned} & \left| \int_{\pi/n}^{\pi} g(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\pi k/n}^{\pi(k+1)/n} g(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi/n} g\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k \sin nt}{t + \pi k/n} dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} g\left(\frac{u + \pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k \sin u}{u + \pi k} du \right| \\ &\leq \pi \max_{0 \leq u \leq \pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{u + \pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k \sin u}{u + \pi k} \right| \leq \pi \left| \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{u_0 + \pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k}{u_0 + \pi k} \right| \\ &\leq \pi \left| \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{u_0 + \pi k}{n}\right) \left(\frac{(-1)^k}{u_0 + \pi k} - \frac{(-1)^k}{\pi k} \right) \right| \\ &+ \pi \left| \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{u_0 + \pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k}{\pi k} \right| = I + II, \end{aligned}$$

где $u_0 \in [0, \pi]$. Ясно, что

$$(7) \quad I \leq \|g\|_c \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} = O(E_n(f)).$$

Пусть $u_k := \frac{u_0 + \pi k}{n}$. Нам понадобятся следующие оценки для $p = 1, 2, \dots, n$:

$$II = \pi \left| \sum_{k=1}^{n-1} g(u_k) \frac{(-1)^k}{\pi k} \right| \leq \frac{c}{2^p} \left| \sum_{k=p+1}^{n-1} \Delta_p\left(u_k; \frac{\pi}{n}, g\right) \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| + \sum_{k=1}^p \gamma_k$$

где

$$\gamma_k < c \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k 2^k}.$$

Применив преобразование Абеля и (1), для II получим

$$\begin{aligned}
II &= \pi \left| \sum_{k=1}^{n-1} g(u_k) \frac{(-1)^k}{\pi k} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=2}^{n-1} (g(u_{k+1}) - g(u_k)) \sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i} \right| + \left| g(u_1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=2}^{n-1} (g(u_{k+1}) - g(u_k)) \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + P_k(n) \right) \right| + \left| g(u_1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=2}^{n-1} (g(u_{k+1}) - g(u_k)) \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \right| + \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \sum_{k=2}^{n-1} (g(u_{k+1}) - g(u_k)) \right| \\
&\quad + c \sum_{k=2}^{n-1} \frac{|g(u_{k+1}) - g(u_k)|}{k^2} + |g(u_1)| \left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i} \right| \\
&\leq c \left| \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} (g(u_{k+1}) - g(u_k)) \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| + \gamma_1 \\
&\leq c \left| \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \Delta_1 \left(u_k; \frac{\pi}{n}, g \right) \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| + \gamma_1 \\
&= c \frac{1}{2} \left| \sum_{k=3}^{n-1} \left(\Delta_1 \left(u_{k+1}; \frac{\pi}{n}, g \right) - \Delta_1 \left(u_k; \frac{\pi}{n}, g \right) \right) \sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i} \right. \\
&\quad \left. + \Delta_1 \left(u_k; \frac{\pi}{n}, g \right) \sum_{i=2}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i} \right| + \gamma_1 \\
&= c \frac{1}{2} \left| \sum_{k=3}^{n-1} \Delta_2 \left(u_k; \frac{\pi}{n}, g \right) \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + P_k(n) \right) \right. \\
&\quad \left. + \Delta_1 \left(u_k; \frac{\pi}{n}, g \right) \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i} \right| + \gamma_1 \\
&= c \frac{1}{2^2} \left| \sum_{k=3}^{n-1} \Delta_2 \left(u_k; \frac{\pi}{n}, g \right) \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=2}^{n-1} \Delta_2 \left(u_k; \frac{\pi}{n}, g \right) P_k(n) \right| + \gamma_1 \\
&\leq c \frac{1}{2^2} \left| \sum_{k=3}^{n-1} \Delta_2 \left(u_k; \frac{\pi}{n}, g \right) \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| + \frac{1}{2^2} \omega_2 \left(\frac{\pi}{n}, g \right) \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \gamma_1 + \gamma_2.
\end{aligned}$$

При $p = 3, 4, \dots, n$ доказательство аналогично.

Пусть $p = n - 2$. Тогда из (6), (7) и оценки для II получим утверждение теоремы 1. Из этой теоремы вытекает следующий результат:

Следствие 1. Пусть $f \in C([0, 2\pi])$. Тогда

$$\|f - S_n(f)\|_C \leq c \max_{1 \leq k \leq [\log \log n]} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right).$$

Доказательство. Применив очевидное неравенство

$$(8) \quad \frac{\omega_i\left(\frac{1}{n}, f\right)}{2^i} \leq \frac{\omega_j\left(\frac{1}{n}, f\right)}{2^j},$$

при $i \geq j$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_C &\leq c \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k2^k} = c \left(\sum_{k=1}^m \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k2^k} + \sum_{k=m+1}^n \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k2^k} \right) \\ &\leq c \left(\max_{1 \leq k \leq m} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + \frac{\omega_m\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{2^m} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \right) \\ &\leq c \left(\max_{1 \leq k \leq m} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + \frac{\omega_m\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{2^m} \log \frac{n}{m} \right) \leq c \max_{1 \leq k \leq m} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \end{aligned}$$

где $m = [\log \log n]$.

Следствие 2. Пусть $f \in C([0, 2\pi])$ и $\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \leq \frac{2^k}{l(k)}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l(k)k} < \infty.$$

Тогда,

$$\|f - S_n(f)\|_C \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Из (8) имеем

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_C &\leq c \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k2^k} = c \left(\sum_{k=1}^m \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k2^k} + \sum_{k=m+1}^n \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k2^k} \right) \\ &\leq c \left(\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{kl(k)} \right) \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $m = [\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)]^{-1}$.

Следствие 3. Пусть $f \in C([0, 2\pi])$ and $\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \leq M$, $k = 1, 2, \dots$ Тогда

$$\|f - S_n(f)\|_C \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Abstract. In this paper we find class of functions for which the Lebesgue estimate can be improved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Torchinsky, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Pure and Applied Mathematics, **123**, Academic Press, Inc., Orlando, FL (1986).
- [2] G. C.R. Jordan, “Sur la series de Fourier”, C.R. Acad.Sci. Paris **92**, 228 – 230 (1881).
- [3] N. Wiener, “The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients”, Massachusetts J. Math. **3**, 72 – 92 (1924).
- [4] L. Young, “Sur un generalization de la notion de variation de Poissance p -ieme bornee an sonce de Wiener et sur la convergence de series de Fourier”, C.R. Acad. Sci. Paris. **204**, 470 – 472 (1937).
- [5] D.Waterman, “On Λ -bounded variation”, Studia Math. **57**, 33 – 45 (1976).
- [6] H. Kita, “Convergence of Fourier series of functions on generalized Wiener’s class $BV(p(n) \uparrow \infty)$ ”, Acta Math. Hung. **57**, 233 – 243 (1991).
- [7] Z. Chanturia, “Uniform convergence of Fourier series” [in Russian], Mat. Sb. **100**, 534 – 554 (1976).
- [8] K. Oskolkov, “Non-ampliability of Lebesgue estimates for approximation by Fourier sums with given modulus of continuity” [in Russian], Trudy Mat. Inst. Steklov, **112**, 337 – 345 (1971).
- [9] T. Karchava, “On the convergence of Fourier series” [in Russian], Reports of Enlarged session of the Seminar of I. Vekua’s Institute of Applied Mathematics, **3**, 93 – 95 (1988).
- [10] T. Akhobadze, “Functions of generalized Wiener classes $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$ and their Fourier coefficients”, Georgian Math. J. **7**, No.3, 401 – 416 (2000).
- [11] T. Akhobadze, “ $BA(p(n) \uparrow p, \phi)$ classes of functions of bounded variation”, Bull. Georgian Acad. Sci. **164**, No.1, 18 – 20 (2001).
- [12] T. Akhobadze, “Generalized $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$ class of bounded variation”, Bull. Georgian Acad. Sci., **163**, No. 3, 426 – 428 (2001).
- [13] U. Goginava, “On the divergence of trigonometric Fourier series of the class $H^\omega \cap BV(p(n) \uparrow \infty)$ ”, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **121**, 63 – 70 (1999).
- [14] U. Goginava, “Uniform summability of double Walsh-Fourier series of functions of bounded partial λ -variation”, Math. Slovaca **64**, no. 6, 1451 – 1474 (2014).
- [15] U. Goginava, “On the embedding Waterman, Chanturia and generalized Wiener classes in the classes H^ω ”, Georgian Math. J. **10**, no. 4, 677 – 686 (2003).
- [16] U. Goginava, “On the uniform convergence of Walsh-Fourier series”, Acta Math. Hungar. **93**, no. 1 – 2, 59 – 70 (2001).
- [17] U. Goginava, A. Sahakian, “On the convergence and summability of double Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation”, Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat., **49**, no. 6, 51 – 65 (2014).
- [18] U. Goginava, A. Sahakian, “On the convergence of multiple Fourier series of functions of bounded partial generalized variation”, Anal. Math. **39**, no. 1, 45 – 56 (2013).
- [19] N. Bari, Trigonometric Series [in Russian], Nauka, Moscow (1961).
- [20] V. Dzyadyk, Introduction to the Theory of Uniformly Approximation of Functions [in Russian], Nauka, Moscow (1977).

Поступила 17 марта 2023

После доработки 30 мая 2024

Принята к публикации 05 июня 2024

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕРОМОРФНЫХ ζ – ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

ДЖ.-Л. КЮ, Ж.-Г. ВАНГ, М. ЛИ

Чаншаский университет науки и технологий, Чанша, Хунань, КНР¹
Первый педагогический университет Хунань, Чанша, Хунань, КНР
E-mails: *qiujiule2023@163.com*; *wangmath@163.com*; *minglimath@163.com*

Аннотация. В этой статье, мотивированной в основном аналитическими ζ -звездообразными функциями, мы вводим и исследуем класс $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ мероморфных ζ -звездообразных функций. Выводятся такие результаты, как свойство свертки, неравенства коэффициентов, свойство окрестности и частичные суммы для этого класса функций.

MSC2020 numbers: 30C45; 30C80.

Ключевые слова: мероморфная функция; ζ -звездообразная функция; свертка; дифференциальное подчинение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{U}$ обозначает открытый единичный круг $\mathbb{U} := \{z : z \in \mathbb{C} \text{ and } |z| < 1\}$ и $\mathbb{U}^* := \mathbb{U} \setminus \{0\}$. Класс мероморфных функций, определенных в $\mathbb{U}^*$ и имеющих вид

$$(1.1) \quad f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

обозначается через Σ .

Как обычно, для двух функций $f, g \in \Sigma$, свертка f и g определяется как

$$(f * g)(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}^*),$$

где

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}^*).$$

Для двух аналитических функций f и g в $\mathbb{U}$ мы говорим, что f подчинена g в $\mathbb{U}$, что записывается как $f(z) \prec g(z)$, если существует функция Шварца $\omega(z)$ (т. е. ω аналитическая в $\mathbb{U}$ с $\omega(0) = 0$ и $|\omega(z)| < 1$ для каждого $z \in \mathbb{U}$), такая, что $f(z) = g(\omega(z))$, $z \in \mathbb{U}$.

¹Настоящее исследование было поддержано Фондом естественных наук провинции Хунань в рамках гранта № 2022JJ30185 и Национальным Фондом естественных наук в рамках гранта № 12001063 и гранта № 12171055 КНР.

Пусть $\mathcal{A}$ — класс нормированных аналитических функций τ в $\mathbb{U}$, т. е.

$$\tau(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} d_n z^n.$$

Для $f \in \mathcal{A}$ пусть $\mathcal{S}^*(\alpha)$ — класс звездообразных функций порядка α , которые удовлетворяют условию

$$\Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1; z \in \mathbb{U}).$$

Ввиду свертки мы видим, что производную f' можно записать как

$$(1.2) \quad f'(z) = \frac{1}{z} \left\{ f(z) * \frac{z}{(1-z)^2} \right\}.$$

Мы отсылаем читателя к [1] – [5] для недавних исследований звездообразных функций порядка α . Для $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| \leq 1$, [6] (см. также [7]) привели следующее обобщение (1.2)

$$(1.3) \quad D_{\zeta} f(z) = \frac{1}{z} \left\{ f(z) * \frac{z}{(1-\zeta z)(1-z)} \right\}.$$

На основе вышеприведенного наблюдения они определили класс $\mathcal{S}^*(\zeta, \alpha)$ ζ -звездообразных функций порядка α : для $f \in \mathcal{A}$ и заданного $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| \leq 1$ мы говорим, что f принадлежит $\mathcal{S}^*(\zeta, \alpha)$, если

$$(1.4) \quad \Re \left(\frac{z D_{\zeta} f(z)}{f(z)} \right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1; z \in \mathbb{U}),$$

где D_{ζ} задается как в (1.3). Для недавних исследований аналитических ζ -звездообразных функций мы отсылаем читателя к [8] – [18].

Напомним класс мероморфных звездообразных функций порядка α , который обозначается $\mathcal{MS}^*(\alpha)$. Функция $f \in \mathcal{MS}^*(\alpha)$ удовлетворяет условиям $f \in \Sigma$ и

$$\Re \left(-\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1; z \in \mathbb{U}).$$

Заметим, что для каждой $f \in \Sigma$ ее производная f' может быть представлена как

$$(1.5) \quad f'(z) = \frac{1}{z} \left\{ f(z) * \frac{2z-1}{z(1-z)^2} \right\}.$$

Более подробное изучение мероморфных звездообразных функций можно найти в [19] – [29].

Основываясь по существу на классе $\mathcal{S}^*(\zeta, \alpha)$ и свойств свертки (1.5), мы вводим следующий класс мероморфных функций $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$, который является обобщением класса $\mathcal{MS}^*(\alpha)$.

Определение 1.1. Для $f \in \Sigma$ и заданного $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| \leq 1$ говорят, что функция f принадлежит классу $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ мероморфных ζ -звездообразных функций порядка α , если она удовлетворяет условию

$$(1.6) \quad \Re \left(-\frac{z d_{\zeta} f(z)}{f(z)} \right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1; z \in \mathbb{U}),$$

где

$$(1.7) \quad d_{\zeta}f(z) := \frac{1}{z} \left\{ f(z) * \frac{2z-1}{z(1-\zeta z)(1-z)} \right\} = \frac{1}{z} \{f(z) * h_{\zeta}(z)\}.$$

Замечание 1.1. Функция h_{ζ} в (1.7) имеет вид

$$h_{\zeta}(z) = \frac{2z-1}{z(1-\zeta z)(1-z)} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} \right) z^n \quad (z \in \mathbb{U}^*).$$

Для $f \in \Sigma$ вида (1.1) имеем

$$(1.8) \quad \begin{aligned} d_{\zeta}f(z) &= \frac{1}{z} \left\{ -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} \right) a_n z^n \right\} \\ &= \frac{1}{z} \left\{ -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} [n]_{\zeta} a_n z^n \right\} \quad (z \in \mathbb{U}^*), \end{aligned}$$

где

$$(1.9) \quad \begin{aligned} [n]_{\zeta} &:= \frac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} \\ &= 1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^n - \zeta^{n+1} \quad (\zeta \neq 1). \end{aligned}$$

Когда $\zeta = 1$, $d_1 f$ сводится к классической производной f' .

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Следующие леммы нужны для доказательства наших основных результатов.

Лемма 2.1. Для $0 \leq \alpha < 1$ и $|\zeta| \leq 1$ последовательность $\{A_{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ определяется следующим образом

$$(2.1) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1||\zeta-2|}, \\ A_{m+1} = 2(1-\alpha) \left| \frac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}} \right| \left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} A_{k+1} \right), \end{cases}$$

где $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. Тогда

$$A_{m+1} = \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1||\zeta-2|} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{|2-\zeta-2\zeta^{m+1-k}+\zeta^{m+2-k}| + 2(1-\alpha)|\zeta-1|}{|2-\zeta-2\zeta^{m+2-k}+\zeta^{m+3-k}|}.$$

Доказательство. Из (2.1) легко видеть, что

$$(2.2) \quad |2-\zeta-2\zeta^{m+1}+\zeta^{m+2}| A_m = 2(1-\alpha) |\zeta-1| \left(1 + \sum_{k=0}^{m-2} A_{k+1} \right).$$

В силу (2.1) и (2.2) имеем, что

$$(2.3) \quad \frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{|2-\zeta-2\zeta^{m+1}+\zeta^{m+2}| + 2(1-\alpha)|\zeta-1|}{|2-\zeta-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}|}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= \frac{A_{m+1}}{A_m} \cdot \frac{A_m}{A_{m-1}} \cdot \dots \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot A_1 \\ &= \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1||\zeta-2|} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{|2-\zeta-2\zeta^{m+1-k}+\zeta^{m+2-k}|+2(1-\alpha)|\zeta-1|}{|2-\zeta-2\zeta^{m+2-k}+\zeta^{m+3-k}|}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы 2.1. $\square$

Пусть $\mathcal{P}$ обозначает класс функций Каратаедори. Функция $p \in \mathcal{P}$, если она аналитична в $\mathbb{U}$ с положительной действительной частью и нормирована:

$$(2.4) \quad p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n.$$

Лемма 2.2. ([30]) Если функция $p \in \mathcal{P}$, то

$$(2.5) \quad 2p_2 = p_1^2 + (4 - p_1^2)x$$

для некоторого x с $|x| \leq 1$.

Лемма 2.3. ([31]) Если функция $p \in \mathcal{P}$, то $|p_n| \leq 2$, и неравенство точное.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Во-первых, мы выводим следующее свойство свертки для класса $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$.

Теорема 3.1. Если $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ и $\theta \in (0, 2\pi)$, то

$$(3.1) \quad f * \left\{ \frac{1 + (1 - 2\alpha)e^{i\theta}}{z(1 - z)} + \frac{(2z - 1)(1 - e^{i\theta})}{z(1 - \zeta z)(1 - z)} \right\} \neq 0.$$

Доказательство. Для функции $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ из (1.6) выводим, что

$$-\frac{zd_{\zeta}f(z)}{f(z)} \prec \frac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z},$$

или эквивалентно,

$$(3.2) \quad -\frac{zd_{\zeta}f(z)}{f(z)} = \frac{1 + (1 - 2\alpha)\omega(z)}{1 - \omega(z)},$$

где ω — функция Шварца в $\mathbb{U}$. Из (3.2) следует, что

$$(3.3) \quad -\frac{zd_{\zeta}f(z)}{f(z)} \neq \frac{1 + (1 - 2\alpha)e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \quad (z \in \mathbb{U}; 0 < \theta < 2\pi).$$

С помощью (1.7) имеем

$$(3.4) \quad zd_{\zeta}f(z) = f(z) * \frac{2z - 1}{z(1 - \zeta z)(1 - z)}.$$

Заметим, что функция f может быть записана как

$$(3.5) \quad f(z) = f(z) * \frac{1}{z(1 - z)},$$

и нетрудно получить утверждение (3.1) из (3.3), (3.4) и (3.5). $\square$

Докажем некоторые неравенства для первых коэффициентов функции f из класса $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$.

Теорема 3.2. Пусть $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$. Тогда,

$$\begin{aligned} |a_0| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta-2|}, \\ |a_1| &\leq \frac{4(1-\alpha)^2}{|(\zeta+1)(\zeta-2)^2|} + \frac{2(1-\alpha)}{|(\zeta+1)(\zeta-)|}, \\ |a_2| &\leq \frac{8(1-\alpha)^3}{|(\zeta+1)(\zeta-2)^3(\zeta^2+\zeta+1)|} + \frac{4|\zeta+2|(1-\alpha)^2}{|(\zeta+1)(\zeta-2)^2(\zeta^2+\zeta+1)|} + \frac{2(1-\alpha)}{|(\zeta-2)(\zeta^2+\zeta+1)|}. \end{aligned}$$

Доказательство. Для $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$, в силу (3.2), имеем

$$-\frac{z d_{\zeta} f(z)}{f(z)} = \varphi(\omega(z)) \quad (z \in \mathbb{U}),$$

где ω – функция Шварца, и

$$(3.6) \quad \varphi(z) = \frac{1 + (1-2\alpha)z}{1-z}.$$

Учитывая связь функций Шварца и Каратеодори, существует функция $p \in \mathcal{P}$ такая, что

$$p(z) = \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (3.7) \quad w(z) &= \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} \\ &= \frac{1}{2} p_1 z + \frac{1}{2} \left(p_2 - \frac{1}{2} p_1^2 \right) z^2 + \frac{1}{2} \left(p_3 - p_1 p_2 + \frac{1}{4} p_1^3 \right) z^3 + \dots \end{aligned}$$

Используя (3.6) и (3.7), легко видеть, что

$$(3.8) \quad \varphi(\omega(z)) = 1 + (1-\alpha)p_1 z + (1-\alpha)p_2 z^2 + (1-\alpha)p_3 z^3 + \dots$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (3.9) \quad -\frac{z d_{\zeta} f(z)}{f(z)} &= 1 + (\zeta-2)a_0 z + [(\zeta^2 - \zeta - 2)a_1 - (\zeta-2)a_0^2] z^2 \\ &\quad + [(\zeta^3 - \zeta^2 - \zeta - 2)a_2 - (\zeta^2 - 4)a_0 a_1 + (\zeta-2)a_0^3] z^3 + \dots \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты в (3.8) и (3.9), находим, что

$$\begin{aligned} (3.10) \quad a_0 &= \frac{1-\alpha}{\zeta-2} p_1, \\ a_1 &= \frac{(1-\alpha)^2}{(\zeta+1)(\zeta-2)^2} p_1^2 + \frac{1-\alpha}{(\zeta+1)(\zeta-2)} p_2, \\ a_2 &= \frac{(1-\alpha)^3}{(\zeta+1)(\zeta-2)^3(\zeta^2+\zeta+1)} p_1^3 + \frac{(\zeta+2)(1-\alpha)^2}{(\zeta+1)(\zeta-2)^2(\zeta^2+\zeta+1)} p_1 p_2 + \\ &\quad + \frac{1-\alpha}{(\zeta-2)(\zeta^2+\zeta+1)} p_3. \end{aligned}$$

Применив лемму 2.3 и (3.10), получим утверждение теоремы 3.2. $\square$

Ниже мы приводим оценки коэффициентов Тейлора функции $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ с $a_0 = 0$.

Теорема 3.3. Пусть $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ с $a_0 = 0$. Тогда для $m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$(3.11) \quad |a_{m+2}| \leq \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1||\zeta-2|} \prod_{k=0}^m \frac{|2-\zeta-2\zeta^{m+2-k}+\zeta^{m+3-k}|+2(1-\alpha)|\zeta-1|}{|2-\zeta-2\zeta^{m+3-k}+\zeta^{m+4-k}|}.$$

Доказательство. Для $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$, имеем

$$(3.12) \quad p(z) := \frac{-\frac{zd_\zeta f(z)}{f(z)} - \alpha}{1-\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in \mathcal{P}.$$

В силу (3.12),

$$(3.13) \quad -zd_\zeta f(z) = (1-\alpha)p(z)f(z) + \alpha f(z).$$

Из (1.8) (3.12) и (3.13) следует

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} a_n z^n &= (1-\alpha) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \right) \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) + \\ &+ \alpha \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты z^{m+1} ($m \in \mathbb{N}_0$) в равенстве (3.14), получим

$$(3.15) \quad -\frac{1-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}}{1-\zeta} a_{m+1} = (1-\alpha)(a_{m+1} + p_1 a_m + \dots + p_m a_1 + p_{m+2}) + \alpha a_{m+1}.$$

В силу леммы 2.3, из (3.15) находим

$$|a_1| \leq \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1||\zeta-2|},$$

и

$$(3.16) \quad |a_{m+1}| \leq 2(1-\alpha) \left| \frac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}} \right| \left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} |a_{k+1}| \right) \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Теперь определим последовательность $\{A_{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$:

$$(3.17) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1||\zeta-2|}, \\ A_{m+1} = 2(1-\alpha) \left| \frac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}} \right| \left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} A_{k+1} \right) \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Далее мы применим принцип математической ндукции для доказательства неравенства

$$(3.18) \quad |a_{m+1}| \leq A_{m+1} \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Очевидно, что $|a_1| \leq A_1$. Теперь, допустив, что $|a_{j+1}| \leq A_{j+1}$ ($j = 0, 1, \dots, m$; $m \in \mathbb{N}_0$), из (3.16) и (3.17) находим, что

$$\begin{aligned} |a_{m+2}| &\leq 2(1-\alpha) \left| \frac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+3}+\zeta^{m+4}} \right| \left(1 + \sum_{k=0}^m |a_{k+1}| \right) \\ &\leq 2(1-\alpha) \left| \frac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+3}+\zeta^{m+4}} \right| \left(1 + \sum_{k=0}^m A_{k+1} \right) = A_{m+2} \quad (m \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

В силу леммы 2.1

$$(3.19) \quad A_{m+2} = \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1||\zeta-2|} \prod_{k=0}^m \frac{|2-\zeta-2\zeta^{m+2-k}+\zeta^{m+3-k}|+2(1-\alpha)|\zeta-1|}{|2-\zeta-2\zeta^{m+3-k}+\zeta^{m+4-k}|}.$$

Из (3.18) и (3.19), получим (3.11). Теорема 3.3 доказана. $\square$

Теорема 3.4. Если функция $f \in \Sigma$ удовлетворяет условию

$$(3.20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left| \frac{2-\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} \right| + \left| \frac{2\alpha-(2\alpha-1)\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} \right| \right) |a_n| \leq 2(1-\alpha),$$

тогда $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$.

Доказательство. Легко проверить, что условие $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ эквивалентно условию

$$\left| -\frac{zd_{\zeta}f(z)}{f(z)} - 1 \right| < \left| -\frac{zd_{\zeta}f(z)}{f(z)} - (2\alpha-1) \right|.$$

Если f удовлетворяет условию (3.20), тогда

$$\begin{aligned} &\left| \frac{-\frac{zd_{\zeta}f(z)}{f(z)} - 1}{-\frac{zd_{\zeta}f(z)}{f(z)} - (2\alpha-1)} \right| = \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} a_n z^n}{(2\alpha-2)\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(2\alpha-1 + \frac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} \right) a_n z^n} \right| \\ &= \frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} a_n z^n \right|}{\left| (2\alpha-2)\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\alpha-(2\alpha-1)\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} a_n z^n \right|} \\ &< \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{2-\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} \right| |a_n|}{(2-2\alpha) - \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{2\alpha-(2\alpha-1)\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} \right| |a_n|} \leq 1. \end{aligned}$$

Теорема 3.4 доказана. $\square$

Теорема 3.5. Пусть $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ с $0 \leq \zeta \leq 1$. Тогда

$$|a_1 - a_0^2| \leq \frac{\zeta(1-\alpha)^2 + 2(1-\alpha)(2-\zeta)}{(1+\zeta)(2-\zeta)^2}.$$

Доказательство. В силу (2.5), и (3.10), имеем:

$$\begin{aligned} |a_1 - a_0^2| &= \left| \frac{(1-\alpha)^2}{(\zeta+1)(\zeta-2)^2} p_1^2 + \frac{1-\alpha}{(\zeta+1)(\zeta-2)} p_2 - \frac{(1-\alpha)^2}{(\zeta-2)^2} p_1^2 \right| \\ &= \left| \frac{-2\zeta(1-\alpha)^2 + (\zeta-2)(1-\alpha)}{2(\zeta+1)(\zeta-2)^2} p_1^2 + \frac{1-\alpha}{2(\zeta+1)(\zeta-2)} x (4-p_1^2) \right|. \end{aligned}$$

Допустим $c = |p_1| \in [0, 2]$ и $t = |x| \leq 1$. Тогда

$$|a_1 - a_0^2| \leq \frac{2\zeta(1-\alpha)^2 + (2-\zeta)(1-\alpha)}{2(\zeta+1)(\zeta-2)^2} c^2 + \frac{1-\alpha}{2(\zeta+1)(2-\zeta)} (4-c^2) t.$$

Положив

$$\Psi_\zeta(c, t) = \frac{2\zeta(1-\alpha)^2 + (2-\zeta)(1-\alpha)}{2(\zeta+1)(\zeta-2)^2} c^2 + \frac{1-\alpha}{2(\zeta+1)(2-\zeta)} (4-c^2) t,$$

легко проверить, что

$$\frac{\partial \Psi_\zeta}{\partial t} = \frac{1-\alpha}{2(1+\zeta)(2-\zeta)} (4-c^2) \geq 0.$$

Таким образом,

$$\max\{\Psi_\zeta(c, t)\} = \Psi_\zeta(c, 1) = \frac{\zeta(1-\alpha)^2}{(1+\zeta)(2-\zeta)^2} c^2 + \frac{2(1-\alpha)}{(1+\zeta)(2-\zeta)} =: \Phi_\zeta(c).$$

Следовательно, $\max\{\Phi_\zeta(c)\} = \Phi_\zeta(1)$ for $0 \leq \zeta \leq 1$ и

$$|a_1 - a_0^2| \leq \Phi_\zeta(1) = \frac{\zeta(1-\alpha)^2 + 2(1-\alpha)(2-\zeta)}{(1+\zeta)(2-\zeta)^2}.$$

Теорема 3.5 доказана. $\square$

Вдохновленные значительными результатами [32] и [33], основанными на понятии окрестности аналитических функций, мы вводим δ -окрестность мероморфных функций следующим образом:

$$(3.21) \quad N_\delta(f) := \left\{ g \in \Sigma : g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{1-\alpha} |a_n - b_n| < \delta \quad (\delta \geq 0) \right\}.$$

Теорема 3.6. Если $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ и

$$(3.22) \quad \frac{f(z) + \varepsilon z^{-1}}{1 + \varepsilon} \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha) \quad (\varepsilon \in \mathbb{C}; |\varepsilon| \leq \delta; \delta > 0),$$

тогда $N_\delta(f) \subset \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 3.4, мы видим, что $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ эквивалентно условию

$$(3.23) \quad \left| \frac{-\frac{z d_\zeta f(z)}{f(z)} - 1}{-\frac{z d_\zeta f(z)}{f(z)} - (2\alpha - 1)} \right| < 1 \quad (z \in \mathbb{U}^*),$$

откуда следует, что функция $g \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\frac{zd_\zeta g(z)}{g(z)} + 1}{\frac{zd_\zeta g(z)}{g(z)} + (2\alpha - 1)} \neq \sigma \quad (z \in \mathbb{U}^*; \sigma \in \mathbb{C}, |\sigma| = 1),$$

что можно переписать как

$$(3.24) \quad \frac{(g * h)(z)}{z^{-1}} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{U}^*),$$

где

$$(3.25) \quad h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}^*)$$

с

$$(3.26) \quad h_n = \frac{1 + \frac{1 - 2\zeta^{n+1} + \zeta^{n+2}}{1 - \zeta} - \left(2\alpha - 1 + \frac{1 - 2\zeta^{n+1} + \zeta^{n+2}}{1 - \zeta}\right) \sigma}{2(1 - \alpha)\sigma}.$$

Из (1.9) и (3.26) следует, что

$$(3.27) \quad |h_n| \leq \frac{1 + \left| \frac{1 - 2\zeta^{n+1} + \zeta^{n+2}}{1 - \zeta} \right| + \left| 2\alpha - 1 + \frac{1 - 2\zeta^{n+1} + \zeta^{n+2}}{1 - \zeta} \right| |\sigma|}{2(1 - \alpha) |\sigma|} \\ \leq \frac{1 + \alpha + (n + 1) |\zeta|}{1 - \alpha}.$$

Если для $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ имеет место (3.22), то согласно (3.24),

$$\frac{(f * h)(z)}{z^{-1}} \neq -\varepsilon \quad (|\varepsilon| \leq \delta; \delta > 0).$$

Следовательно,

$$(3.28) \quad \left| \frac{(f * h)(z)}{z^{-1}} \right| \geq \delta \quad (\delta > 0; z \in \mathbb{U}).$$

Теперь допустим, что

$$q(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n.$$

Если $q \in N_\delta(f)$, то

$$(3.29) \quad \left| \frac{[(q - f) * h](z)}{z^{-1}} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (q_n - a_n) h_n z^n \right| \\ \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \alpha + (n + 1) |\zeta|}{1 - \alpha} |q_n - a_n| < \delta.$$

В силу (3.28) и (3.29),

$$\left| \frac{(q * h)(z)}{z^{-1}} \right| = \left| \frac{[f + (q - f)] * h}{z^{-1}}(z) \right| \geq \left| \frac{(f * h)(z)}{z^{-1}} \right| - \left| \frac{[(q - f) * h](z)}{z^{-1}} \right| > 0,$$

откуда следует $\frac{(q*h)(z)}{z^{-1}} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{U})$. Таким образом, $q(z) \in N_\delta(f) \subset \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$. Теорема 3.6 доказана. $\square$

В заключении мы приводим свойства частных сумм для $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$.

Теорема 3.7. Пусть $f \in \Sigma$ и

$$f_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Если

$$(3.30) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} |a_n| \leq 1,$$

тогда

- (1) $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$;
- (2)

$$(3.31) \quad \Re \left(\frac{f(z)}{f_n(z)} \right) \geq \frac{2\alpha + (n+1)|\zeta|}{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|},$$

и

$$(3.32) \quad \Re \left(\frac{f_n(z)}{f(z)} \right) \geq \frac{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|}{2 + (n+1)|\zeta|}.$$

Оценки (3.31) и (3.32) точные.

Доказательство. Если $f_1(z) = z^{-1} \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$, тогда

$$\frac{f_1(z) + \varepsilon z^{-1}}{1 + \varepsilon} = z^{-1} \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha).$$

Из (3.30) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} |a_n - 0| \leq 1,$$

или, что одно и то же, $f \in N_1(z^{-1})$. Согласно теореме 3.6, $f \in N_1(z^{-1}) \subset \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$. Ясно, что

$$(3.33) \quad \sum_{k=0}^n |a_k| + \frac{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 + \alpha + (k+1)|\zeta|}{1 - \alpha} |a_k| \leq 1.$$

Допустим, что

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \phi(z) &:= \frac{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} \times \left(\frac{f(z)}{f_n(z)} - \frac{2\alpha + (n+1)|\zeta|}{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|} \right) \\ &= 1 + \frac{\frac{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k+1}}{1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}}. \end{aligned}$$

Из (3.33) и (3.34) следует, что

$$\left| \frac{\phi(z) - 1}{\phi(z) + 1} \right| \leq \frac{\frac{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}{2 - 2 \sum_{k=0}^n |a_k| - \frac{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|} \leq 1,$$

($z \in \mathbb{U}$), откуда,

$$(3.35) \quad \Re(\phi(z)) \geq 0 \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Таким образом, утверждение (3.31) теоремы 3.7 выполняется.

Далее, если

$$(3.36) \quad f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|} z^{n+1} \quad (n \geq 0),$$

то $f_n(z) = \frac{1}{z}$ и для $z = re^{i\frac{\pi}{n+2}}$, имеем:

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \frac{f(z)}{f_n(z)} &= 1 + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|} z^{n+2} \\ &= 1 + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|} \cdot (-r^{n+2}). \end{aligned}$$

При $r \rightarrow 1^-$, получаем

$$\frac{f(z)}{f_n(z)} = \frac{2\alpha + (n+1)|\zeta|}{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|},$$

что доказывает точность оценки (3.31) для любого $n \in \mathbb{N}$.

Аналогично, предположив, что

$$(3.38) \quad \begin{aligned} \psi(z) &:= \frac{2 + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} \times \left(\frac{f_n(z)}{f(z)} - \frac{1 + \alpha + (n+1)|\zeta|}{2 + (n+1)|\zeta|} \right) \\ &= 1 - \frac{\frac{2 + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k+1}}{1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}}, \end{aligned}$$

с учетом (3.33) и (3.38), заключаем, что

$$\left| \frac{\psi(z) - 1}{\psi(z) + 1} \right| \leq \frac{\frac{2 + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}{2 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \frac{2 + (n+1)|\zeta|}{1 - \alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|} \leq 1 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

откуда,

$$(3.39) \quad \Re(\psi(z)) \geq 0 \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Для функции f , заданной в (3.36) при $z = re^{i\frac{2\pi}{n+2}}$, имеем:

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \frac{f_n(z)}{f(z)} &= \frac{1}{1 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha+(n+1)|\zeta|} z^{n+2}} \\ &= \frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{1+\alpha+(n+1)|\zeta|+(1-\alpha)r^{n+2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{f_n(z)}{f(z)} = \frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{2+(n+1)|\zeta|}$$

при $r \rightarrow 1^-$. Из (3.38) и (3.39) получаем утверждение (3.32) теоремы 3.7, и оценка точная. $\square$

Замечание 3.1. Беря $\zeta = 1$ в полученных результатах, получим соответствующие результаты для класса $\mathcal{MS}^*(\alpha)$ мероморфных звездообразных функций порядка α .

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные комментарии и предложения, которые существенно улучшили качество настоящей статьи.

Abstract. In this paper, motivated essentially by analytic ζ -starlike functions, we introduce and investigate the class $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ of meromorphic ζ -starlike functions. Results like a convolution property, coefficient inequalities, a neighborhood property and partial sums for this function class are derived.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. M. Ali, S. Kumar and V. Ravichandran, “The third Hermitian-Toeplitz and Hankel determinants for parabolic starlike functions”, Bull. Korean Math. Soc., **60**, 281 – 291 (2023).
- [2] R. M. Ali, S. K. Lee and S. R. Mondal, “Starlikeness of a generalized Bessel function”, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **25**, 527 – 540 (2018).
- [3] S. Malik, R. M. Ali and V. Ravichandran, “The Booth lemniscate starlikeness radius for Janowski starlike functions”, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **45**, 2715 – 2732 (2022).
- [4] Y. Sun and Z.-G. Wang, “Sharp bounds on Hermitian Toeplitz determinants for Sakaguchi classes”, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **46**, Paper No. 59, 23 pp. (2023).
- [5] Z.-G. Wang, M. Hussain and X.-Y. Wang, “On sharp solutions to majorization and Fekete-Szegő problems for starlike functions”, Miskolc Math. Notes, **24**, 1003 – 1019 (2023).
- [6] K. Piejko and J. Sokół, “On convolution and q -calculus”, Bol. Soc. Mat. Mex. (3), **26**, 349 – 359 (2020).
- [7] K. Piejko, J. Sokół and K. Trąbka-Więclaw, “On q -starlike functions”, Bull. Sci. Math., **186**, Paper No. 103285, 10 pp. (2023).
- [8] A. Akgül, “An application of modified sigmoid function to a class of q -starlike and q -convex analytic error functions”, Turkish J. Math., **46**, 1318 – 1329 (2022).
- [9] M. Arif and B. Ahmad, “New subfamily of meromorphic multivalent starlike functions in circular domain involving q -differential operator”, Math. Slovaca, **68**, 1049 – 1056 (2018).
- [10] S. Agrawal and S. K. Sahoo, “A generalization of starlike functions of order alpha”, Hokkaido Math. J., **46**, 15 – 27 (2017).

- [11] M. Çağlar, H. Orhan and H. M. Srivastava, “Coefficient bounds for q -starlike functions associated with q -Bernoulli numbers”, *J. Appl. Anal. Comput.*, **13**, 2354 – 2364 (2023).
- [12] K. Dhurai, N. E. Cho and S. Sivasubramanian, “On a class of analytic functions closely related to starlike functions with respect to a boundary point”, *AIMS Math.*, **8**, 23146 – 23163 (2023).
- [13] F. Z. El-Emam, “Convolution conditions for two subclasses of analytic functions defined by Jackson q -difference operator”, *J. Egyptian Math. Soc.*, **30**, Paper No. 7, 10 pp. (2022).
- [14] R. K. Maurya and K. Rajesh, “Certain subordination results on the class of strongly starlike p -valent analytic functions”, *Jordan J. Math. Stat.*, **15**, 661 – 681 (2022).
- [15] H. E. Özkan Uçar, “Coefficient inequality for q -starlike functions”, *Appl. Math. Comput.*, **276**, 122 – 126 (2016).
- [16] K. Piejko, J. Sokół and K. Trąbka-Więclaw, “Coefficient bounds in the class of functions associated with Sakaguchi’s functions”, *Bull. Sci. Math.*, **188**, Paper No. 103308, 12 pp. (2023).
- [17] H. M. Srivastava, B. Khan, N. Khan and Q. Z. Ahmad, “Coefficient inequalities for q -starlike functions associated with the Janowski functions”, *Hokkaido Math. J.*, **48**, 407 – 425 (2019).
- [18] S. Verma, R. Kumar and J. Sokół, “A conjecture on Marx-Strohhäcker type inclusion relation between q -convex and q -starlike functions”, *Bull. Sci. Math.*, **174**, Paper No. 103088, 10 pp. (2022).
- [19] R. M. Ali, V. Ravichandran and N. Seenivasagan, “On subordination and superordination of the multiplier transformation for meromorphic functions”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2), **33**, 311 – 324 (2010).
- [20] Q. Z. Ahmad, N. Khan, M. Raza, M. Tahir and B. Khan, “Certain q -difference operators and their applications to the subclass of meromorphic q -starlike functions”, *Filomat* **33**, 3385 – 3397 (2019).
- [21] S. S. Joshi and S. B. Joshi, “On a subclass of meromorphic starlike functions with positive coefficients”, *Ganita*, **73**, 65 – 71 (2023).
- [22] S. Khan, S. Hussain and M. Darus, “Certain subclasses of meromorphic multivalent q -starlike and q -convex functions”, *Math. Slovaca*, **72**, 635 – 646 (2022).
- [23] S. Kavitha, S. Sivasubramanian and K. Muthunagai, “A new subclass of meromorphic function with positive coefficients”, *Bull. Math. Anal. Appl.*, **3**, 109 – 121 (2010).
- [24] N. Khan, H. M. Srivastava, A. Rafiq, M. Arif and S. Arjika, “Some applications of q -difference operator involving a family of meromorphic harmonic functions”, *Adv. Difference Equ.*, **2021**, Paper No. 471, 18 pp. (2021).
- [25] L. Liu and J.-H. Fan, “On starlike meromorphic functions of order α ”, *J. Math. Res. Appl.*, **42**, 363 – 373 (2022).
- [26] K. K. Shergill and S. S. Billing, “On meromorphic starlike and convex functions”, *Palest. J. Math.*, **12**, 404 – 413 (2023).
- [27] H. M. Srivastava, M. Tahir, B. Khan, M. Darus, N. Khan and Q. Z. Ahmad, “Certain subclasses of meromorphically q -starlike functions associated with the q -derivative operators”, *Ukrainian Math. J.*, **73**, 1462 – 1477 (2022).
- [28] Z.-G. Wang, H. M. Srivastava, M. Arif, Z.-H. Liu and K. Ullah, “Sharp bounds on Hankel determinants of bounded turning functions involving the hyperbolic tangent function”, *Appl. Anal. Discrete Math.*, **18**, 551 – 571 (2024).
- [29] Z.-G. Wang, M. U. Farooq, M. Arif, S. N. Malik and F. M. O. Tawfiq, “A class of meromorphic functions involving higher order derivative”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **59**, 419 – 429 (2024).
- [30] R. J. Libera and E. J. Zlotkiewicz, “Early coefficients of the inverse of a regular convex function”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **85**, 225 – 230 (1982).
- [31] C. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1975).
- [32] A. W. Goodman, *Univalent Functions*, Vol. II. Mariner Publishing Co., Inc., Tampa, FL (1983).
- [33] S. Ruscheweyh, “Neighborhoods of univalent functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81**, 521 – 527 (1981).

Поступила 02 февраля 2024
После доработки 24 апреля 2024
Принята к публикации 06 мая 2024

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал "Известия НАН Армении, Математика" публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата А4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
 - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
 - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
 - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы, место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала "Известия НАН Армении, Математика", пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
E-mail: sart@ysu.am, URL: <http://www.maik.ru>
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале "Journal of Contemporary Mathematical Analysis". URL: <http://www.springer.com>.

Заказ N1287. Тираж 150. Подписано к печати 22.01.24.
Печ. л. 6.25. Бумага офсетная. Цена договорная.
Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 60, номер 1, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Г. ГЕВОРКЯН, О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям к интегрируемым функциям	3
М. С. ГИНОВЯН, А. А. СААКЯН, Об умеренных отклонениях для квадратичных функционалов от Гауссовских стационарных процессов с непрерывным временем	10
Г. А. КИРАКОСЯН, О матричных операторах $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа в случае безотражательного потенциала	25
Т. КАРЧАВА, А. АПЛАКОВ, Заметка о модулях непрерывности высших порядков и рядах Фурье	45
Дж.-Л. КЮ, Ж.-Г. ВАНГ, М. ЛИ, Некоторые характеристики мероморфных ζ -звездообразных функций	52 – 64

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 60, No. 1, 2025

CONTENTS

G. GEVORKYAN, On uniqueness of Haar series converging by subsequences to an integrable function	3
M. S. GINOVYAN, A. A. SAHAKYAN, On moderate deviations for quadratic functionals in continuous time Gaussian stationary processes	10
G. A. KIRAKOSYAN, On matrix Operators of $\mathcal{L}$ -Wiener-Hopf in the Case of non-reflective potential	25
T. KARCHAVA, A. APLAKOV, A note on higher modulus of continuity and Fourier series	45
J.-L. QIU, Z.-G. WANG, M. LI, Some characterizations for meromorphic ζ -starlike functions	52 – 64