

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ-УОЛША

А. А. САРГСЯН

Ереванский государственный университет¹

E-mail: *asargsyan@ysu.am*

Аннотация. В работе обсуждается вопрос существования универсальных функций, ряды Фурье которых по системе Уолша условно универсальны в смысле перестановок во всех весовых пространствах $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: ряд Фурье; система Уолша; коэффициенты Фурье; весовое пространство; сходимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mu(x)$, $x \in [0, 1]$ – весовая функция (т.е. измеримая на $[0, 1]$, положительная функция) и пусть $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$ – будет классом всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых $\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx < \infty$. Пусть $\|f\|_{L_\mu^p} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$ – норма весового пространства $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$. В случае $\mu(x) = 1$ весовое пространство $L_\mu^p[0, 1]$ превращается в классическое пространство $L^p[0, 1]$.

Говорят, что ряд $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$; $f_k(x) \in L_\mu^p[0, 1]$ к сходится $f(x)$ в $L_\mu^p[0, 1]$, если частичные суммы $\sum_{k=0}^n f_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, этого ряда сходятся к $f(x)$ по $L_\mu^p[0, 1]$ норме т.е.

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right\|_{L_\mu^p} = 0.$$

Пусть $L^0[0, 1]$ – класс всех измеримых на $[0, 1]$ функций. Под сходимостью в $L^0[0, 1]$ мы будем подразумевать сходимость почти всюду.

Напомним определение системы Уолша-Пэли $\{W_k(x)\}$ (см.[1]).

$$W_0(x) = 1, W_n(x) = \prod_{s=1}^k r_{m_s}(x), n = \sum_{s=1}^k 2^{m_s}, m_1 > m_2 > \dots > m_s \geq 0,$$

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066.

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), r_k(x) = r_0(2^k x), k = 1, 2, \dots$$

Система Уолша-Пэли является одной из популярных систем функций, ее изучению было посвящено много работ. Одно из главных свойств этой системы состоит в том, что она образует базис во всех пространствах $L^p[0, 1]$, $p > 1$ (ортонормальный базис в $L^2[0, 1]$) (см. [2]).

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная в $L^2[0, 1]$ ортонормированная система и пусть

$$(1.2) \quad c_k(U) = \int_0^1 U(x) \varphi_k(x) dx, \quad k \in \mathbf{N}$$

– коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0, 1]$, ($\mathbf{N}$ – совокупность всех натуральных чисел). Пусть S – одно из пространств $L_\mu^p[0, 1]$, $p > 0$ или $L^0[0, 1]$.

Говорят, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$; $f_k(x) \in S$ – универсален в S в смысле перестановок, если для каждой функции $f(x) \in S$ члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$ сходиллся к функции $f(x)$ в S .

Необходимо отметить, что понятие универсального ряда восходит к работам Меньшова [3] и Талаляна [4]. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками. В работах [5] – [7] М. Григорян ввел следующее

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $U \in L^1[0, 1]$ для класса S относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется

а) универсальной в смысле перестановок, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ универсален в S в смысле перестановок,

б) условно универсальной в смысле перестановок, если можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ универсален в S в смысле перестановок,

с) универсальной в смысле знаков, если для каждой функции $f(x) \in S$ можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ сходится к $f(x)$ в S .

В работе [7] построена функция $U \in L^1[0, 1]$, которая универсальна для класса $L^0[0, 1]$ относительно системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в смысле знаков.

Следует отметить, что первые примеры универсальных функций были построены Биркгофом [8] в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, Марцинкевичем [9] в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции (см. также [10] – [13]).

Отметим, что в работах [5] – [7] и [14] – [22] были получены некоторые результаты, связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых (по системе Уолша либо по тригонометрической системе) универсальны в том или ином смысле в различных функциональных классах.

Отметим, что нам не известно, существует ли универсальная функция $U \in L^1[0, 1]$ для классов $L^p[0, 1]$, $p \in [0, 1]$ и $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$ относительно системы Уолша **в смысле перестановок**?

В этой статье доказывается, что для любых $p \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество Θ с мерой $|\Theta| > 1 - \varepsilon$ и функция $U \in L^1[0, 1]$, такие что функция U условно универсальна для класса $L^p(\Theta)$, $p \geq 1$ относительно системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k,s=0}^\infty$ в смысле перестановок.

Более того, мы строим весовую функцию $\mu(x)$ и интегрируемую функцию $U(x)$ так, чтобы после выбора подходящих знаков $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ для коэффициентов Фурье-Уолша $\{c_k(U)\}_{k=0}^\infty$ можно достичь того, что вновь полученный ряд $\sum_{k=0}^\infty \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ – будет универсальным в $L_\mu^p[0, 1]$, $p \geq 1$ в смысле перестановок. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Существуют весовая функция $\mu(x)$ и интегрируемая функция $U(x)$, такие что*

a) $0 < \mu(x) \leq 1$ и $\text{mes}\{x \in [0, 1], \mu(x) = 1\} > 1 - \theta$, где θ произвольное наперед заданное положительное число,

b) функция $U(x)$ имеет монотонно убывающие коэффициенты Фурье по системе Уолша и ее ряд Фурье-Уолша сходится в метрике $L^1[0, 1]$,

c) $U(x)$ условно универсальна в смысле перестановок для каждого пространства $L_\mu^p[0, 1]$, $p > 1$ относительно системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ в смысле перестановок,

d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\#\{k \leq n; \delta_k = 1\}}{n} = 1,$$

где $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^\infty$, - последовательность знаков входящих в определение, а $\{A\}$ - число элементов конечного множества A .

Замечание 1.1. Отметим, что сформулированная выше теорема в определенном смысле окончательна, ибо каковы бы не были число $p \geq 1$ и ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, не существует функция $U \in L^1[0, 1]$, которая была бы условно универсальной (универсальной) для класса $L^p[0, 1]$, $p \geq 1$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ в смысле перестановок.

Было бы интересно узнать ответы на следующие вопросы:

Вопрос 1. Верна ли эта теорема для тригонометрической системы?

Вопрос 2. Существуют ли весовая функция $\mu(x)$ и интегрируемая функция $U(x)$, такие что $U(x)$ была бы универсальной в смысле перестановок для некоторого пространства $L_\mu^p[0, 1]$, $p > 1$ относительно системы Уолша в смысле перестановок?

Вопрос 3. Существует ли интегрируемая функция, ряд Фурье которой по системе Уолша или по тригонометрической системе $\{e^{2\pi kix}\}_{k=0}^\infty$ был бы универсальным в $L^p[0, 1]$ относительно перестановок при некотором $p \in (0, 1)$?

При доказательстве теоремы мы будем использовать следующую лемму, доказанную в [21] (см. Лемма 2.4).

Лемма 1.1. Для любого $\theta \in (0, 1)$ существует весовая функция $0 < \mu(x) \leq 1$, с $\text{mes}\{x \in [0, 1], \mu(x) = 1\} > 1 - \theta$, так что для любых чисел $p_0 > 1$, $n_0 \geq 1$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и полинома $f(x)$ по системе Уолша можно найти полиномы

$$H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x), \quad Q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1, 0$$

по системе Уолша, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\|_{L^1} < \varepsilon, \quad 0 < a_{k+1} < a_k < \varepsilon, \quad k \in [2^{n_0}, 2^n - 1),$$

$$\|f - Q\|_{L_\mu^{p_0}} < \varepsilon, \quad \max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M \delta_k a_k W_k(x) \right\|_{L_\mu^{p_0}} < 2 \|f\|_{L_\mu^p} + \varepsilon, \quad p \in [1, p_0].$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Пусть $p_n \nearrow \infty$ и пусть

$$(2.1) \quad F = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty.$$

– последовательность всех полиномов по системе Уолша с рациональными коэффициентами. Последовательно применяя лемму, мы можем (по индукции) определить последовательности полиномов $\{U_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{U_n^*(x)\}_{n=1}^\infty$ вида

$$(2.2) \quad U_0(x) = 2W_0(x) + W_1(x), \quad U_n(x) = \sum_{k=M_n}^{M_n^*-1} a_k^{(n)} W_k(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad M_1 = 2,$$

$$(2.3) \quad Q_0(x) = 2W_0(x), \quad Q_n(x) = \sum_{k=M_n}^{M_n^*-1} \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x), \quad \delta_k^{(n)} = \pm 1, 0,$$

$$(2.4) \quad U_n^*(x) = \sum_{k=M_n^*}^{M_{n+1}-1} b_k^{(n)} W_k(x),$$

которые для каждого $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяют условиям:

$$(2.5) \quad M_n < M_n^* < M_{n+1} = 2^{2n} M_n^*, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(2.6) \quad 2^{-4(n+1)} > a_{M_n}^{(n)} > \dots > a_j^{(n)} > a_{j+1}^{(n)} > \dots > a_{M_n^*-1}^{(n)} > b_{M_n^*}^{(n)} > \dots > b_{k-1}^{(n)} > b_k^{(n)} > \dots > b_{M_{n+1}-1}^{(n)} > a_{M_{n+1}}^{(n+1)} > \dots > a_s^{(n+1)} > a_{s+1}^{(n+1)} > \dots > a_{M_{n+1}^*-1}^{(n+1)} > 0,$$

где $j \in [M_n, M_n^* - 2)$, $k \in [M_n^*, M_{n+1} - 2)$, $s \in [M_{n+1}, M_{n+1}^* - 2)$.

$$(2.7) \quad \sum_{k=M_n^*}^{M_{n+1}-1} b_k^{(n)} < 2^{-5(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(2.8) \quad \|U_n\|_{L^1} \leq \max_{m \in [M_n, M_n^*)} \left\| \sum_{k=M_n}^m a_k^{(n)} W_k \right\|_{L^1} < 2^{-4(n+1)}.$$

$$(2.9) \quad \|f_n - Q_n\|_{L_\mu^{p_n}} < 2^{-4(n+4)},$$

$$(2.10) \quad \max_{m \in [M_n, M_n^*)} \left\| \sum_{k=M_n}^m \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k \right\|_{L_\mu^p} < 2 \|f_n\|_{L_\mu^p} + 2^{-4(n+1)}, \quad p \in [1, p_n].$$

Положим

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_k = a_k^{(n)}, \quad k \in [M_n, M_n^*),$$

$$(2.11) \quad a_k = b_k^{(n)}, \quad k \in [M_n^*, M_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad U_0(x) = 2W_0(x) + W_1(x).$$

Из (2.4), (2.7) и (2.8) следует

$$(2.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n + U_n^{(*)}\|_{L^1} < \infty.$$

Определим функцию $U(x)$ следующим образом:

$$(2.13) \quad U(x) = U_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n(x) + U_n^{(*)}(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x).$$

Из (2.12) и (2.13) вытекает, что $U(x) \in L^1[0, 1]$. Учитывая соотношения (2.2), (2.4), (2.8) и (2.11) - (2.13) получим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x)$ сходится к $U(x)$ по $L^1[0, 1]$ норме, и следовательно

$$(2.14) \quad a_k = c_k(U) = \int_0^1 U(x) W_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В силу (2.11) - (2.13), (2.6) и (2.14) будем иметь $\{c_k(U)\}_{k=0}^{\infty} \searrow$. Положим

$$(2.15) \quad \Omega_n = \{k \in [M_n, M_n^*]; \delta_k^{(n)} = 0\}, \quad Q_n^{(0)}(x) = \sum_{k \in \Omega_n} a_k^{(n)} W_k(x).$$

Очевидно, что

$$(2.16) \quad \text{spec}(Q_n) = [M_n, M_n^*] \setminus \Omega_n = \{k_s \nearrow; k_s \in [M_n, M_n^*]; \delta_{k_s}^{(n)} = \pm 1\}.$$

Следовательно

$$(2.17) \quad Q_n(x) = \sum_{k=M_n}^{M_n^*-1} \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x) = \sum_{M_n \leq k_s < M_n^*} \delta_{k_s}^{(n)} a_{k_s}^{(n)} W_{k_s}(x), \quad \delta_{k_s}^{(n)} = \pm 1.$$

Определим последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ знаков следующим образом:

$$(2.18) \quad \varepsilon_k = \delta_k^{(n)}, \quad k \in \text{spec}(Q_n); \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_k = 1, \quad k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega_n \cup [M_n^*, M_{n+1})).$$

Из (2.5), (2.8) и (2.18) следует

$$\frac{\#\{k \in \mathbf{N}, k \leq M_{n+1}; \varepsilon_k = 1\}}{M_{n+1}} \geq \frac{M_{n+1} - M_n^*}{M_{n+1}} = \frac{2^{2n} M_n^* - M_n^*}{2^{2n} M_n^*} = 1 - \frac{1}{2^{2n}}.$$

Отсюда и из (2.18) имеем

$$(2.19) \quad \varepsilon_k = \pm 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\#\{k \in \mathbf{N}, k \leq n; \varepsilon_k = 1\}}{n} = 1.$$

Покажем, что ряд (см. (2.4), (2.11), (2.14) - (2.18))

$$(2.20) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x) = U_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (Q_j(x) + Q_j^{(0)}(x) + U_j^{(*)}(x)),$$

универсален во всех пространствах $L_{\mu}^p[0, 1]$, $p \geq 1$ относительно перестановок.

Пусть $p \geq 1$ и пусть $f(x) \in L_{\mu}^p[0, 1]$. Возьмем функцию $f_{\nu_1}(x)$ из последовательности (2.1) таким образом, чтобы

$$\left\| f(x) - Q_{\nu_0}(x) - \varepsilon_{l(1)} c_{l(1)}(U) W_{l(1)}(x) - f_{\nu_1 \nu_1}(x) \right\|_{L_{\mu}^p} \leq 2^{-6}, \quad p_{\nu_1} \geq p, \quad \nu_1 \geq 2,$$

где

$$\nu_0 = 0, \quad Q_{\nu_0}(x) = 2W_0(x), \quad \varepsilon_{l(1)}c_{l(1)}(U)W_{l(1)}(x) = W_1(x), \quad l(1) = 1$$

Отсюда и из (2.9) следует

$$\left\| f(x) - Q_{\nu_0}(x) - \varepsilon_{l(1)}c_{l(1)}(U)W_{l(1)}(x) - Q_{\nu_1}(x) \right\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-6},$$

Положим

$$l(2) = \min \{n \in N, \quad n > 2, \quad n \notin \text{spec}(Q_{\nu_1})\}, \quad l(0) = 0, \quad l(1) = 1.$$

Предположим, что уже определены числа $\nu_0 = 0 < \nu_1 < \dots < \nu_r \dots < \nu_{q-1}$, $l(1) = 1, l(2), l(3), \dots, l(q)$, функции $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$ и полиномы $\{Q_{\nu_j}(x)\}_{j=1}^{q-1}$ удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \left\{ \sum_{j=0}^r [Q_{\nu_j}(x) + \varepsilon_{l(j+1)}c_{l(j+1)}(U)W_{l(j+1)}] \right\} \right\|_{L_\mu^p} &\leq \\ (2.21) \quad &\leq 2^{-4(r+4)} + |c_{l(r+1)}(U)|, \end{aligned}$$

$$(2.22) \quad \max_{m \in [M_{\nu_r}, M_{\nu_r}^*]} \left\| \sum_{M_{\nu_r} \leq k_s \leq m} \varepsilon_{k_s} c_{k_s}(U) W_{k_s} \right\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-2(r+1)} + |c_{s(r)}(U)|, \quad r \in [0, q].$$

Легко видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1} + q + 1$ (функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (2.1)) таким образом, чтобы

$$(2.23) \quad \left\| f - \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} [Q_{\nu_j} + \varepsilon_{l(j+1)}c_{l(j+1)}(U)W_{l(j+1)}] \right\} - f_{\nu_q} \right\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-4(q+5)}.$$

Из (2.9), (2.21) и (2.23) следует

$$(2.24) \quad \left\| f - \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} [Q_{\nu_j} + \varepsilon_{l(j+1)}c_{l(j+1)}(U)W_{l(j+1)}] \right\} - Q_{\nu_q} \right\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-4(q+4)},$$

$$(2.25) \quad \|f_{\nu_q}\|_{L_\mu^p} \leq 2^{-4(q+5)} + 2^{-4(q+3)} + |c_{l(q)}(U)| \leq 2^{-4q-2} + |c_{l(q)}(U)|.$$

Положим

$$(2.26) \quad l(q+1) = \min \{n; \quad n \notin \left\{ \bigcup_{i=0}^q \text{spec}(Q_{\nu_j}) \right\} \cup \{l(n)\}_{n=1}^q\}$$

Учитывая соотношения (2.10), (2.15) – (2.19) и (2.24) – (2.26), получим

$$\left\| f(x) - \left\{ \sum_{j=0}^q [Q_{\nu_j} + \varepsilon_{l(j+1)}c_{l(j+1)}(U)W_{l(j+1)}] \right\} \right\|_{L_\mu^p} \leq$$

$$(2.27) \quad \leq 2^{-4(q+4)} + \left\| \varepsilon_{l(q+1)} c_{l(q+1)}(U) W_{l(q+1)} \right\|_{L_\mu^p} = 2^{-4(q+4)} + |c_{l(q+1)}(U)|,$$

$$(2.28) \quad \begin{aligned} & \max_{m \in [M_{\nu_q}, M_{\nu_q}^*)} \left\| \sum_{M_{\nu_q} \leq k_s \leq m} \varepsilon_{k_s} c_{k_s}(U) W_{k_s}(x) \right\|_{L_\mu^p} = \max_{m \in [M_{\nu_q}, M_{\nu_q}^*)} \left\| \sum_{k=M_{\nu_q}}^m \delta_k^{(\nu_q)} a_k^{(\nu_q)} W_k \right\| \leq \\ & \leq 2 \left\| f_{\nu_q} \right\|_{L_\mu^p} + 2^{-4(\nu_q+1)} \leq 2^{-3q-1} + 2 |c_{l(q)}(U)|. \end{aligned}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности чисел $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$, $\{l(q)\}_{q=1}^\infty$, $(l(1) = 0, l(2) = 1)$, и полиномов $\{Q_{\nu_q}(x)\}_{q=1}^\infty$, удовлетворяющие условиям (2.26) - (2.28) для всех $q \geq 1$.

Учитывая выбор натуральных чисел $\{M_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$, и $\{l(q)\}_{q=1}^\infty$ (см. (2.5), (2.23), (2.26)) получим, что последовательность чисел

$$(2.29) \quad 0, l(1) = 1, \text{spec}(Q_{\nu_1}), l(2), \text{spec}(Q_{\nu_2}), l(3), \dots, l(j), \text{spec}(Q_{\nu_j}), l(j+1) \dots$$

есть некоторая перестановка последовательности $0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Последовательность (2.29) запишем в виде

$$\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k), \dots$$

Отсюда, учитывая выбор полиномов $\{Q_{\nu_q}(x)\}_{q=1}^\infty$ и чисел $\{l(q)\}_{q=1}^\infty$, в силу (2.15) - (2.18), (2.20), (2.26) и (2.29) имеем

$$(2.30) \quad \begin{aligned} & \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_{\sigma(k)} c_{\sigma(k)}(U) W_{\sigma(k)}(x) = \\ & = 2W_0(x) + W_1(x) + \sum_{q=1}^\infty \left[Q_{\nu_q}(x) + \varepsilon_{l(q+1)} c_{l(q+1)}(U) W_{l(q+1)}(x) \right]. \end{aligned}$$

Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_{\sigma(k)} c_{\sigma(k)}(U) W_{\sigma(k)}(x)$ сходится к $f(x)$ по $L_\mu^p[0, 1]$ норме. Положим

$$(2.31) \quad K_q = 2 + \sum_{j=1}^{q-1} (\#\text{spec}(Q_{\nu_j}) + j).$$

Учитывая соотношения (2.5), (2.16) и (2.26) - (2.31) для каждого $N \in (K_q, K_{q+1}]$, $q \geq 2$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{k=1}^N \varepsilon_{\sigma(k)} c_{\sigma(k)}(U) W_{\sigma(k)} \right\|_{L_\mu^p} \leq \left\| f - \left\{ \sum_{j=1}^{q-1} [Q_{\nu_j} + \varepsilon_{l(j+1)} c_{l(j+1)}(U) W_{l(j+1)}] \right\} \right\|_{L_\mu^p} \\ & + \max_{m \in [M_{\nu_q}, M_{\nu_q}^*)} \left\| \sum_{M_{\nu_q} \leq k_s \leq m} \varepsilon_{k_s} c_{k_s}(U) W_{k_s}(x) \right\|_{L_\mu^p} + |c_{l(q+1)}(U)| \end{aligned}$$

$$\leq 2^{-2(q+1)} + 2 |c_{l(q)}(U)| + 2 |c_{l(q+1)}(U)|.$$

Отсюда, из того, что $l(q) \rightarrow \infty$ следовательно и $c_{l(q)}(U) \rightarrow 0$ (см. (15)) при $N \rightarrow \infty$ следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{\sigma(k)} c_{\sigma(k)}(U)_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x)$ сходится к $f(x)$ по $L^p_\mu[0, 1]$ норме. Теорема доказана.

Abstract. The paper discusses the question of the existence of universal functions whose Fourier series in the Walsh system are conditionally universal in the sense of permutations in all weighted spaces $L^p_\mu[0, 1]$, $p \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. E. A. C. Paley, “A remarkable set of orthogonal functions”, I, Proc. Lond. Math. Soc. **34**, 241 – 264 (1932).
- [2] C. J. Watari, “Mean convergence of Fourier - Walsh series”, Tohoku Math. J., **16**:2, 183 – 188 (1964).
- [3] Д. Е. Меньшов, “О частичных суммах тригонометрических рядов”, Мат. Сборник, **20**:2, 197 – 238 (1947).
- [4] А. А. Талалян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов”, Изв. АН Арм. ССР, **10**:3, 17 – 34 (1957).
- [5] М. Г. Григорян, “Функции с универсальными рядами Фурье–Уолша”, Матем. Сб. **211**:6, 107 – 131 (2020).
- [6] M. G. Grigoryan, “On Universal Fourier series in the Walsh system”, Siberian Mathematical Journal, **63**:3, 868 – 882 (2022).
- [7] М. Г. Григорян, “Об универсальных (в смысле знаков) рядах Фурье по системе Уолша”, Матем. Сб., **215**:6, 717 – 742 (2024).
- [8] G. D. Birkhoff, “Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières”, C. R. Acad. Sci. Paris, **189**, 473 – 475 (1929).
- [9] J. Marcinkiewicz, “Sur les nombres derives”, Fund. Math. **24**, 305 – 308 (1935).
- [10] V.G. Krotov, “Smoothness of the universal Marcinkiewicz functions and universal trigonometric series”, Izv. universities. Mat., **8**, 26 – 35 (1991).
- [11] G. R. MacLane, “Sequences of derivatives and normal families”, J. Anal. Math. **2**, 72 – 87 (1952).
- [12] K. G. Grosse-Erdmann, “Holomorphe Monster und Universelle Funktionen”, Mitt. Math., Semin. Giessen., **176**, 1 – 84 (1987).
- [13] W. Luh, “Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets”, Analysis, **6**, 191 – 207 (1986).
- [14] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. АН. Росс., **632**:1, 41 – 60 (1999).
- [15] А. А. Саргсян, “Квазиуниверсальные ряды Фурье–Уолша в классах $L^p[0, 1]$, $p > 1$ ”, Матем. заметки, **104**:2, 273 – 288 (2018).
- [16] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, “On the universal function for the class $L^p[0, 1]$, $p \in (0, 1)$ ”, Journal of Func. Anal., **270**:8, 3111 – 3133 (2016).
- [17] A. A. Sargsyan, M. G. Grigorian, “Universal function for a weighted space”, Positivity, **21**, 1457 – 1482 (2017).
- [18] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On Fourier series that are universal modulo signs”, Studia Mathematica, **249**:2, 215 – 231 (2019).
- [19] A. A. Sargsyan, “On the structure of functions, universal for weighted spaces $L^p_\mu[0, 1]$, $p > 1$ ”, Journal of Contemp. Math. Anal., **54**:3, 163 – 175 (2019).
- [20] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы”, Изв. РАН. Сер. матем., **85**:2, 73 – 94 (2021).

- [21] M. G. Grigorian, T. M. Grigorian, A. A. Sargsyan, “On the universal function for weighted spaces $L^p_\mu[0, 1], p \geq 1$ ”, Banach J. Math. Anal. **12**:1, 104 – 125 (2018).
- [22] A. A. Sargsyan, “On the existence of universal functions with respect to the double Walsh system for classes of integrable functions”, Colloq. Math., **161**, 111 – 129 (2020).

Поступила 20 октября 2024

После доработки 24 ноября 2024

Принята к публикации 28 декабря 2024