Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 2, 2025, стр. 53 – 76.

О КОНСТРУКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА-ВОЛЬТЕРРА НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУПРЯМОЙ

Х. А. ХАЧАТРЯН, А. С. ПЕТРОСЯН, Т. Р. ВАРДАНЯН

Ереванский государственный университет[1]
Национальный Аграрный Университет Армении
Институт математики НАН Республики Армения
E-mails: *khachatur.khachatryan@ysu.am; Haykuhi25@mail.ru*
tamar.vardanyan2000@gmail.com

Аннотация. Исследуется система нелинейных интегральных уравнений с матричным оператором Гаммерштейна - Вольтерра. Указанная система уравнений, кроме чисто математического интереса, представляет определенный интерес в различных областях естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в гидроаэродинамике, в моделях популяционной генетики и в теории переноса тепла излучением. Доказывается конструктивная теорема существования неотрицательного ограниченного и непрерывного решения указанной системы уравнений. При одном дополнительном ограничении на нелинейность получается равномерная сходимость специально выбранных последовательных приближений со скоростью убывающей геометрической прогрессии. Исследуется также асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности. Более того, доказывается теорема единственности решения в классе ограниченных вектор-функций, координаты которых неотрицательны. В конце работы приводятся конкретные примеры указанных систем, удовлетворяющие всем условиям доказанных утверждений.

MSC2020 number: 45G05; 45G15.

Ключевые слова: ядро; спектральный радиус; итерации, монотонность.

1. Введение

Работа посвящена исследованию вопросов конструктивной разрешимости, единственности и изучению асимптотического поведения построенного решения на

[1]Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027. Исследование третьего автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 24RL-1A028.

бесконечности для следующей системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна- Вольтерра на полуоси:

$$f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^x V_{ij}(x,t) G_j(f_j(t)) dt, \ i = 1,2,...,N, \ x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty) \tag{1.1}$$

относительно искомой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), ..., f_N(x))^T \in \mathfrak{M}$, где T знак транспонирования, а $\mathfrak{M}$ следующий класс вектор-функций

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M} = \{\varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_N(x))^T : \ \varphi_i(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^+, \ \varphi_i \in M(\mathbb{R}^+), \\ &i = 1,2,...N\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

В (1.2) через $M(\mathbb{R}^+)$ обозначено пространство ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}^+$.

В система (1.1) матричное ядро $V(x,t) = (V_{ij}(x,t))_{i,j=1}^{N \times N}$ определено на множестве

$$\Pi = \{(x,t) : 0 \leq t \leq x\}$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1) $V_{ij}(x,t) > 0, \ (x,t) \in \Pi, \ i,j = 1,...N$ и $V \in C(\Pi)$,
2) если $(x_1,t), (x_2,t) \in \Pi$ и $x_1 \geq x_2$, то
$$V_{ij}(x_1,t) \leq V_{ij}(x_2,t), \ i,j = 1,2,...,N,$$
3) функции $\displaystyle\int_0^x V_{ij}(x,t)dt, \ i,j = 1,...,N$ монотонно возрастают по x на $\mathbb{R}^+$,
4) существуют $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left(\int_0^x V_{ij}(x,t)dt \right) =: a_{ij} = a_{ji} < +\infty, \ i,j = 1,2,...,N.$

Функции $g_i(x), \ i = 1,2,...,N$ обладают следующми свойствами:

a) $g_i(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^+, \ g_i(0) > 0, \ g_i \in C(\mathbb{R}^+), \ i = 1,2,...N,$
b) существуют $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^+} (g_i(x)) =: \beta_i < +\infty, \ i = 1,2,...,N.$

Обозначим через λ спектральный радиус матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N \times N}$. Согласно теореме Перрона (см. [1]) существует вектор $\eta = (\eta_1, ..., \eta_N)^T$ с положительными координатами $\eta_i, \ i = 1,2,...,N$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\eta_j = \lambda \eta_i, \ i = 1,2,...,N. \tag{1.3}$$

Нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=1}^N$ в системе (1.1) определены на множестве $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяют условиям

A) $G_j \in C(\mathbb{R}^+), G_j(0) = 0, \ G_j(\eta_j) = \eta_j, \ j = 1,2,...N,$
B) $G_j(u)$ монотонно возрастают, строго вогнуты на множестве $\mathbb{R}^+$ и
$$\lim_{u \to +\infty} \frac{G_j(u)}{u} = 0, \ j = 1,2,...,N.$$

Система (1.1) имеет важное прикладное значение в различных отраслях естествознания. В частности система (1.1) и его скалярный аналог встречаются в моделях, популяционной генетики, в гидроаэродинамике, в теории переноса тепла излучением и в теории марковских процессов (см. [2-6]).

С прикладной точки зрения особый интерес представляют положительные решения из класса $\mathfrak{M}$.

В скалярном случае когда $N = 1$ и ядро V зависит от разности своих аргументов, удовлетворяет некоторым условиям технического характера, а нелинейность G допускает представление $G(u) = u^\alpha,\ \alpha \in (0,1)$, уравнение (1.1), при различных условиях на "свободного члена" g было иследовано в работах [7-14]. В случае когда $G(u) = u^\alpha,\ \alpha \in (0,1)$ в работе [15] доказаны теоремы существования и единственности решения в определенном конусном отрезке пространства непрерывных функций для скалярного аналога системы (1.1), при достаточно сильных ограничениях на ядро V и на функцию g (условия гладкости, монотонности, сжимаемости в конкретно выбранном конусном отрезке).

Следует отметить, что системы вида (1.1) в линейном случае $G_i(u) = u, i = 1, 2, ..., N$ достаточно подробно исследовались в работах [16-18]. В настоящей работе мы будем заниматься вопросами существования единственности и изучения асимптотического поведения на бесконечности непрерывного решения системы (1.1) в классе $\mathfrak{M}$. В частности, при условиях 1), 4), a), b), A) и B) будет доказано, существование непрерывного решения системы (1.1) в $\mathfrak{M}$. При условиях 1)-4), a), b), A), B) и выполнении следующего дополнительного условия:

C) существует непрерывное монотонно возрастающее и вогнутое отображение $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, со свойствами $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ такое, что

$$G_i(\sigma u) \geq \varphi(\sigma) G_i(u),\ \sigma \in (0,1)\ u \in [0, \xi_i],\ i = 1, 2, ...N,$$

(где числа $\xi_i,\ i = 1, 2, ..., N$ единственным образом определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений вида $\xi_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} G_j(\xi_j)$, $i = 1, 2, ..., N$),

мы получим равномерную оценку для разности соседних элементов соответствующих последовательных приближений системы (1.1). При этом правая часть этой оценки будет представлять из себя элемент бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Во второй части работы мы займемся доказательством следующей интегральной асимптотики:

$$\xi_i - f_i \in L_1(0,+\infty),\ i=1,2,...,N. \tag{1.4}$$

Наконец в третьей части, при условиях 1)-4), a), b), A)-C), мы докажем также единственность решения в классе вектор-функций $\mathfrak{M}$. В конце работы приведем конкретные примеры матричного ядра V, "свободного члена" $g(x)=(g_1(x),...,g_N(x))^T$ и нелинейностей $\{G_i(u)\}_{i=1}^N$, удовлетворяющие всем ограничениям доказанных теорем.

2. Разрешимость системы (1.1)

2.1. Об одной вспомогательной системе нелинейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим следующую систему алгебраических уравнений с нелинейностями $G_j(u), j=1,2,...,N$:

$$\xi_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} G_j(\xi_j),\ i=1,2,...,N \tag{2.1}$$

относительно неизвестного вектора $\xi=(\xi_1,...,\xi_N)^T, \xi_i \geq 0,\ i=1,2,...,N,$ где числа β_i и $a_{ij},\ i,j=1,2,...,N$ определяются из условий b) и 4) соответственно. Для системы (2.1) рассмотрим следующие простые итерации:

$$\begin{gathered} \xi_i^{(p+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} G_j(\xi_j^{(p)}), \\ \xi_i^{(0)} = \beta_i,\ i=1,2,...,N,\ p=0,1,2,.... \end{gathered} \tag{2.2}$$

Индукцией по p несложно проверить, что

$$\beta_i^{(p)} \uparrow \text{по } p,\ i=1,2,...,N. \tag{2.3}$$

Из свойств A) и B) следует существование обратной функции к функции $G_i(u)$. Обозначим через $Q_i(u)$ обратную функцию к функции $G_i(u)$. Учитывая свойства A) и B) можно утверждать, что

A′) $Q_j \in C(\mathbb{R}^+),\ Q_j(0)=0,\ Q_j(\eta_j)=\eta_j,\ j=1,2,...,N,$

B′) $Q_j(u),\ j=1,2,...,N$ монотонно возрастают и строго выпуклы (вниз) на множестве $\mathbb{R}^+$.

Рассмотрим теперь функции на множестве $[1,+\infty)$:

$$\Gamma_i(u) := \min\{1;\lambda\} \cdot \frac{Q_i(u\eta_i)}{u\eta_i} - \lambda - \frac{\beta_i}{\eta_i},\ i=1,2,...,N. \tag{2.4}$$

Принимая во внимание A') и B') можно утверждать, что

$$\Gamma_i \in C[1,+\infty),\ i=1,2,...,N, \tag{2.5}$$

$$\Gamma_i(1)=\min\{1;\lambda\}-\lambda-\frac{\beta_i}{\eta_i}\leq -\frac{\beta_i}{\eta_i}<0,\ i=1,2,...,N, \tag{2.6}$$

$$\Gamma_i(+\infty)=+\infty,\ i=1,2,...,N, \tag{2.7}$$

$$\Gamma_i(u)\uparrow \text{по } u \text{ на } \mathbb{R}^+,\ i=1,2,...,N. \tag{2.8}$$

Из свойств (2.5)-(2.8) сразу следует, что для любого индекса $i=\{1,2,...,N\}$ существует единственное $c_i>1$ такое, что

$$\Gamma_i(c_i)=0. \tag{2.9}$$

Положим

$$c=\max\{c_1,c_2,...,c_N\}. \tag{2.10}$$

С учетом (2.8)-(2.10) имеем

$$\Gamma_i(c)\geq\Gamma_i(c_i)=0,\ i=1,2,...,N,$$

т.е.

$$\min\{1;\lambda\}\cdot\frac{Q_i(c\eta_i)}{c\eta_i}\geq\lambda+\frac{\beta_i}{\eta_i},\ i=1,2,...,N. \tag{2.11}$$

Докажем теперь, что

$$\xi_i^{(p)}\leq Q_i(c\eta_i),\ i=1,2,...,N,\ p=0,1,2,.... \tag{2.12}$$

Сперва проверим справедливость неравенства (2.12) для номера $p=0$. Действительно, учитывая (2.11) будем имет

$$\xi_i^{(0)}=\beta_i\leq\min\{1,\lambda\}\frac{Q_i(c\eta_i)}{c}-\lambda\eta_i\leq\frac{Q_i(c\eta_i)}{c}-\lambda\eta_i<Q_i(c\eta_i)-\lambda\eta_i<Q_i(c\eta_i),$$
$$i=1,2,...,N.$$

Предположим теперь, что (2.12) выполняется для некоторого номера $p\in\mathbb{N}$. Тогда снова используя (2.11), а также (1.3), из (2.2) получим

$$\xi_i^{(p+1)}\leq\beta_i+\sum_{j=1}^{N}a_{ij}G_j(Q_j(c\eta_j))=\beta_i+c\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\eta_j=\beta_i+c\lambda\eta_i\leq\beta_i+$$
$$+\min\{1,\lambda\}\cdot Q_i(c\eta_i)-\beta_i c<\min\{1,\lambda\}\cdot Q_i(c\eta_i)\leq Q_i(c\eta_i),\ i=1,2,...,N.$$

Следовательно из (2.3) и (2.12) заключаем, что последовательность векторов $\xi^{(p)}=(\xi_1^{(p)},...,\xi_N^{(p)})^T$, $p=0,1,2,...$ имеет предел: $\lim\limits_{p\to\infty}\xi_i^{(p)}=\xi_i,\ i=1,2,...N$, причем в силу непрерывности функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^N$предельный вектор $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_N)^T$

удовлетворяет системе (2.1). Из (2.3) и (2.12) следует также, что

$$\beta_i < \xi_i \le Q_i(c\eta_i),\ i = 1,2,...,N. \tag{2.13}$$

Совершая аналогичные рассуждения как при доказательстве леммы из работы [19] можно убедиться, что система (2.1) не может иметь более одного решения в следующем классе векторов:

$$\mathcal{P} = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)^T : \xi_i \ge 0,\ i = 1,2,...,N\right\}. \tag{2.14}$$

2.2. Последовательные приближения для системы (1.1). Основные свойства итерационной последовательности.

Рассмотрим следующие последовательные приближения для системы нелинейных интегральных уравнений (1.1):

$$\begin{gathered} f_i^{(p+1)}(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^x V_{ij}(x,t) G_j(f_j^{(p)}(t))dt, \\ f_i^{(0)}(x) = \xi_i - \beta_i + g_i(x),\ p = 0,1,2,...,\ i = 1,2,...,N,\ x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Обозначим через

$$\psi_i^{(p)}(x) = f_i^{(p)}(x) - g_i(x),\ p = 0,1,2,...,\ i = 1,2,...,N,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.16}$$

Тогда итерации (2.15) примут следующий вид:

$$\begin{gathered} \psi_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^x V_{ij}(x,t) G_j(\psi_j^{(p)}(t) + g_j(t))dt, \\ \psi_i^{(0)}(x) = \xi_i - \beta_i,\ p = 0,1,2,...,\ i = 1,2,...,N,\ x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Используя условия 1), a), A) и B) индукцией по p несложно убедиться в достоверности следующих фактов:

$$\psi_i^{(p)} \in C(\mathbb{R}^+),\ p = 0,1,2,...,\ i = 1,2,...,N, \tag{2.18}$$

$$\psi_i^{(p)}(x) \ge 0,\ x \in \mathbb{R}^+,\ p = 0,1,2,...,\ i = 1,2,...,N. \tag{2.19}$$

Докажем теперь, что

$$\psi_i^{(p)}(x) \downarrow \text{по } p,\ i = 1,2,...,N,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.20}$$

Сперва проверим, что

$$\psi_i^{(1)}(x) \le \psi_i^{(0)}(x),\ x \in \mathbb{R}^+,\ i = 1,2,...,N. \tag{2.21}$$

Учитывая условия 1), 4), A), B), a), в) и формулу (2.1), из (2.17) будем иметь

$$\psi_i^{(1)}(x)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^x V_{ij}(x,t)G_j(\xi_j-\beta_j+g_j(t))dt\leq\sum_{j=1}^{N}G_j(\xi_j)\int_0^x V_{ij}(x,t)dt\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{N}a_{ij}G_j(\xi_j)=\xi_i-\beta_i=\psi_i^{(0)}(x),\ i=1,2,...,N,\ x\in\mathbb{R}^+.$$

Предполагая, что $\psi_i^{(p)}(x)\leq\psi_i^{(p-1)}(x),\ x\in\mathbb{R}^+,\ i=1,2,...,N$ при некотором натуральном p и при этом учитывая условия A), 1), a) и B), из (2.17) получаем, что $\psi_i^{(p+1)}(x)\leq\psi_i^{(p)}(x),\ x\in\mathbb{R}^+,\ i=1,2,...,N.$

Итак на основе (2.18)-(2.20) заключаем, что последовательность непрерывных вектор функций $\psi^{(p)}(x)=(\psi_1^{(p)}(x),\psi_2^{(p)}(x),...,\psi_N^{(p)}(x))^T,\ p=0,1,2,...$ имеет поточечный предел когда $p\to\infty$:

$$\lim_{p\to\infty}\psi_i^{(p)}(x)=\psi_i(x),\ i=1,2,...,N,\ x\in\mathbb{R}^+,$$

причем координаты предельной вектор-функции $\psi(x)=(\psi_1(x),\psi_2(x),...,\psi_N(x))^T$ удовлетворяют неравенствам:

$$0\leq\psi_i(x)\leq\xi_i-\beta_i,\ i=1,2,...,N,\ x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.22}$$

Используя непрерывность функций V и $\{G_j(u)\}_{j=1}^N$ в силу предельной теоремы Б. Леви (см. [20]) заключаем, что $\psi(x)=(\psi_1(x),\psi_2(x),...,\psi_N(x))^T$ удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений:

$$\psi_i(x)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^x V_{ij}(x,t)G_j(\psi_j(t)+g_j(t))dt,\ i=1,2,...,N,\ x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.23}$$

Из условия 1) немедленно следует, что $\psi_i\in C(\mathbb{R}^+),\ i=1,2,...,N.$

2.3. Равномерная сходимость последовательных приближений (2.17). Основная оценка.

Доказательство. Предположим теперь, что помимо условий 1), 4), a), b), A), B) выполняются также условия 2), 3) и C). Из условия a) немедленно следует, что существует число $r_0>0$ такое, что

$$\alpha_j:=\inf_{x\in[0,r_0)}(g_j(t))>0,\ j=1,2,...,N. \tag{2.24}$$

В силу условий a), 1), A), B) из (2.17) с учетом (2.24) имеем для $x\in[0,r_0)$

$$\psi_i^{(1)}(x)\geq\sum_{j=1}^{N}G_j(\xi_j-\beta_j+\alpha_j)\int_0^x V_{ij}(x,t)dt,\ i=1,2,...,N,$$

а для $x \in [r_0, +\infty)$

$$\psi_i^{(1)}(x) \geq \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j - \beta_j) \int_0^x V_{ij}(x,t)dt, \ i = 1, 2, ..., N.$$

Следовательно, если $x \in [0, r_0)$, то

$$\begin{aligned}(2.25) \qquad &\psi_i^{(2)}(x) \geq \sum_{j=1}^{N} \int_0^x V_{ij}(x,t) G_j \Bigg(\sum_{m=1}^{N} G_m(\xi_m - \beta_m + \alpha_m) \cdot \\ &\cdot \int_0^t V_{jm}(t,\tau)d\tau + \alpha_j \Bigg) \, dt \geq \sum_{j=1}^{N} G_j(\alpha_j) \int_0^x V_{ij}(x,t)dt, \ i = 1, 2, ..., N,\end{aligned}$$

если же $x \in [r_0, +\infty)$, то

$$\begin{aligned}(2.26) \qquad &\psi_i^{(2)}(x) \geq \sum_{j=1}^{N} \int_0^x V_{ij}(x,t) G_j \left(\sum_{m=1}^{N} G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^t V_{jm}(t,\tau)d\tau \right) dt, \\ &i = 1, 2, ..., N.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь следующие вспомогательные функции, определенные на множестве $[0, +\infty)$:

$$(2.27) \qquad \chi_i(x) := \sum_{j=1}^{N} \xi_j \int_0^x V_{ij}(x,t)dt - \lambda \xi_i, \ i = 1, 2, ..., N, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Из непрерывности функций $V_{ij}, \ i, j = 1, 2, ..., N$ на множестве Π немедленно следует, что $\chi_i \in C(\mathbb{R}^+), \ i = 1, 2, ..., N$. Так как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \int_0^x V_{ij}(x,t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x V_{ij}(x,t)dt = a_{ij}, \ i, j = 1, 2, ..., N,$$

то в силу соотношения (1.3) имеем

$$(2.28) \qquad \chi_i(0) = -\lambda \xi_i < 0, \chi_i(+\infty) = 0, \ i = 1, 2, ..., N,$$

$$(2.29) \qquad \chi_i(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, ..., N.$$

Следовательно для каждого $i \in \{1, 2, ..., N\}$ существуют $\sigma_i, \delta_i : 0 < \sigma_i < \delta_i$ такие, что

$$(2.30) \qquad \chi_i(\sigma_i) = -\frac{\lambda \xi_i}{2}, \quad \chi_i(\delta_i) = -\frac{\lambda \xi_i}{3}.$$

Пусть

$$x > \max\{r_0, \delta_1, ..., \delta_N\} + 1 = r_1.$$

Тогда используя b), 1), A), B), (2.30) и (2.26) при $x > r_1$, будем иметь

$$\psi_i^{(2)}(x) \geq \sum_{j=1}^{N} \int_{\sigma_j}^{x} V_{ij}(x,t) G_j \left(\sum_{m=1}^{N} G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^t V_{jm}(t,\tau) d\tau \right) dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{N} G_j \left(\sum_{m=1}^{N} G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^{\sigma_j} V_{jm}(\sigma_j,\tau) d\tau \right) \int_{\sigma_j}^{x} V_{ij}(x,t) dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{N} G_j \left(\min_{1\leq m\leq N} \left(\frac{G_m(\xi_m - \beta_m)}{\xi_m} \right) \cdot \sum_{m=1}^{N} \xi_m \int_0^{\sigma_j} V_{jm}(\sigma_j,\tau) d\tau \right) \cdot \int_{\sigma_j}^{x} V_{ij}(x,t) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} G_j \left(\min_{1\leq m\leq N} \left(\frac{G_m(\xi_m - \beta_m)}{\xi_m} \right) \cdot \frac{\lambda \xi_j}{2} \right) \cdot \int_{\sigma_j}^{x} V_{ij}(x,t) dt \geq$$

$$\geq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{N} \xi_j \left(\int_0^x V_{ij}(x,t) dt - \int_0^{\sigma_j} V_{ij}(x,t) dt \right) := I_i, \ i = 1,2,...,N,$$

где

$$\varepsilon := \min_{1\leq j\leq N} \left(\frac{G_j \left(\min_{1\leq m\leq N} \left(\frac{G_m(\xi_m - \beta_m)}{\xi_m} \right) \cdot \frac{\lambda \xi_j}{2} \right)}{\xi_j} \right). \tag{2.31}$$

Учитывая условие 2) получим

$$I_i \geq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{N} \xi_j \left(\int_0^x V_{ij}(x,t) dt - \int_0^{\sigma_j} V_{ij}(\sigma_i,t) dt \right) = \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{N} \xi_j \int_0^x V_{ij}(x,t) dt - \varepsilon \cdot \frac{\lambda \xi_i}{2} \geq$$

$$\geq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{N} \xi_j \int_0^{\delta_i} V_{ij}(\delta_i,t) dt - \varepsilon \cdot \frac{\lambda \xi_i}{2} = \varepsilon \left(\frac{2\lambda \xi_i}{3} - \frac{\lambda \xi_i}{2} \right) = \varepsilon \cdot \frac{\lambda \xi_i}{6}, \ i = 1,2,...,N.$$

Итак для $x > r_1$ приходим к оценке

$$\psi_i^{(2)}(x) \geq \varepsilon \cdot \frac{\lambda \xi_i}{6}, \ i = 1,2,...,N. \tag{2.32}$$

Пусть теперь $x \in [r_0, r_1]$. Тогда снова используя условия 1), 3), A), B) согласно теореме Вейерштрасса приходим к неравенствам:

$$\psi_i^{(2)}(x) \geq \sum_{j=1}^{N} \int_0^{r_0} V_{ij}(x,t) G_j \left(\sum_{m=1}^{N} G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^t V_{jm}(t,\tau) d\tau \right) dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{N} \int_{r_0/2}^{r_0} V_{ij}(x,t) dt \cdot G_j \left(\sum_{m=1}^{N} G_m(\xi_m - \beta_m) \int_0^{r_0/2} V_{jm}(r_0/2,\tau) d\tau \right) \geq$$

$$\geq \min_{x\in[r_0,r_1]} \left(\sum_{j=1}^{N} q_j \int_{r_0/2}^{r_0} V_{ij}(x,t) dt \right) := d_i, \ i = 1,2,...,N,$$

где

$$q_j = G_j\left(\sum_{m=1}^{N} G_m(\xi_m-\beta_m)\int_0^{r_0/2} V_{jm}(r_0/2,\tau)d\tau\right). \tag{2.33}$$

Таким образом для $x\in[r_0,+\infty)$ получаем следующее неравенетво снизу:

$$\psi_i^{(2)}(x)\geq \min\left\{\frac{\varepsilon\lambda\xi_i}{6}, d_i\right\},\ i=1,2,...,N. \tag{2.34}$$

Из (2.17) и (2.20) следует, что при $x\in[0,r_0)$

$$\psi_i^{(1)}(x)\leq \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j)\int_0^x V_{ij}(x,t)dt,\ i=1,2,...,N. \tag{2.35}$$

Принимая во внимание (2.25), (2.20) и (2.35) для $x\in[0,r_0)$ приходим к следующему неравенству

$$\psi_i^{(1)}(x)\geq\psi_i^{(2)}(x)\geq l_1\psi_i^{(1)}(x),\ i=1,2,...,N, \tag{2.36}$$

где

$$l_1=\frac{\min\limits_{1\leq j\leq N}(G_j(\alpha_j))}{\max\limits_{1\leq j\leq N}(G_j(\xi_j))} \tag{2.37}$$

Учитывая (2.34), (2.21), (2.20) и полагая, что

$$l_2=\min_{1\leq i\leq N}\left(\frac{\min\left\{\frac{\varepsilon\lambda\xi_i}{6}, d_i\right\}}{\xi_i-\beta_i}\right) \tag{2.38}$$

для $x\in[r_0,+\infty)$ получим

$$\psi_i^{(1)}(x)\geq\psi_i^{(2)}(x)\geq l_2\psi_i^{(1)}(x),\ i=1,2,...,N. \tag{2.39}$$

Таким образом из (2.36)-(2.38) заключаем, что

$$\psi_i^{(1)}(x)\geq\psi_i^{(2)}(x)\geq \sigma_0\psi_i^{(1)}(x),\ x\in\mathbb{R}^+,\ i=1,2,...,N, \tag{2.40}$$

где

$$\sigma_0=\min\{l_1,l_2\}. \tag{2.41}$$

Следует отметить, что

$$0<l_i<1,\ i=1,2. \tag{2.42}$$

Действительно, неравенства (2.42) сразу следуют из условий A), B), формул (2.24), (2.31), (2.13), (2.33), (2.37), (2.38) и следующих простых оценок

$$0<l_1\leq\frac{G_j(\alpha_j)}{G_j(\xi_j)}\leq\frac{G_j(\beta_j)}{G_j(\xi_j)}<\frac{G_j(\xi_j)}{G_j(\xi_j)}=1,\ j=1,2,...,N,$$

$$0 < l_2 \le \frac{1}{\xi_i - \beta_i} \min\left\{\frac{\varepsilon\lambda\xi_i}{6}, d_i\right\} \le \frac{1}{\xi_i - \beta_i} d_i \le \frac{1}{\xi_i - \beta_i} \cdot \sum_{j=1}^{N} q_j a_{ij} \le$$

$$\le \frac{1}{\xi_i - \beta_i} \cdot \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j - \beta_j) a_{ij} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) a_{ij}}{\xi_i - \beta_i} = 1, \ i = 1, 2, ..., N.$$

Из (2.42) и (2.41) сразу получаем, что

$$\sigma_0 \in (0, 1). \tag{2.43}$$

Учитывая (2.43) и условие a), из (2.40) приходим к неравенству

$$\sigma_0(\psi_j^{(1)}(t) + g_j(t)) \le \psi_j^{(2)}(t) + g_j(t) \le \psi_j^{(1)}(t) + g_j(t), \ j = 1, 2, ..., N, \ t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.44}$$

Принимая во внимание условия 1), A), B) и C), из (2.44) с учетом (2.17) получим

$$\varphi(\sigma_0)\psi_i^{(2)}(x) \le \psi_i^{(3)}(x) \le \psi_i^{(2)}(x), \ i = 1, 2, ..., N, \ x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда в частности следует, что

$$\begin{aligned} &\varphi(\sigma_0)(\psi_j^{(2)}(t) + g_j(t)) \le \psi_j^{(3)}(t) + g_j(t) \le \psi_j^{(2)}(t) + g_j(t), \\ &j = 1, 2, ..., N, \ t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{2.45}$$

ибо

$$\varphi(\sigma_0) \in (0, 1), \ g_j(t) \ge 0, \ j = 1, 2, ..., N, \ t \in \mathbb{R}^+.$$

Снова учитывая условия 1), A), B) и C) из (2.45) с учетом (2.17) получаем

$$\varphi(\varphi(\sigma_0))\psi_i^{(3)}(x) \le \psi_i^{(4)}(x) \le \psi_i^{(3)}(x), \ i = 1, 2, ..., N, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Продолжая, эту процедуру на p-том шаге приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\underbrace{\varphi(\varphi ... \varphi(\sigma_0))}_{p} \psi_i^{(p+1)}(x) \le \psi_i^{(p+2)}(x) \le \psi_i^{(p+1)}(x), \ i = 1, 2, ..., N, \ x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.46}$$

Теперь используя оценку (3.16) из работы [21], для любого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ получаем следующее неравенство

$$0 \le 1 - \underbrace{\varphi(\varphi ... \varphi(\sigma_0))}_{p} \le (1 - \sigma_0) k_{\varepsilon_0}^p, \ p = 1, 2, ..., N, \tag{2.47}$$

где

$$k_{\varepsilon_0} = \frac{1 - \varphi(\varepsilon_0\sigma_0)}{1 - \varepsilon_0\sigma_0} \in (0, 1). \tag{2.48}$$

Следовательно, учитывая (2.46), (2.47) и (2.20) получим

$$\begin{aligned} &0 \leq \psi_i^{(p+1)}(x) - \psi_i^{(p+2)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1-\sigma_0)k_{\varepsilon_0}^p, \\ &p = 1,2,...,N,\ i = 1,2,...,N,\ x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{2.49}$$

В силу (2.48) и (2.49) получаем равномерную сходимость последовательности непрерывных вектор-функций $\psi^{(p)}(x) = (\psi_1^{(p)}(x),...,\psi_N^{(p)}(x))^T,\ p = 0,1,2,...$ к решению системы нелинейных интегральных уравнений (2.23) (со скоростью убывающей геометрической прогрессии). Запишем теперь неравенства (2.49) для номеров $p+1, p+2, ..., p+m$:

$$\begin{aligned} &0 \leq \psi_i^{(p+2)}(x) - \psi_i^{(p+3)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1-\sigma_0)k_{\varepsilon_0}^{p+1}, \\ &0 \leq \psi_i^{(p+3)}(x) - \psi_i^{(p+4)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1-\sigma_0)k_{\varepsilon_0}^{p+2}, \\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ &0 \leq \psi_i^{(p+m+1)}(x) - \psi_i^{(p+m+2)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1-\sigma_0)k_{\varepsilon_0}^{p+m}, \\ &x \in \mathbb{R}^+,\ i = 1,2,...,N. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства и неравенство (2.49), при этом учитывая (2.48), получаем

$$\begin{aligned} &0 \leq \psi_i^{(p+1)}(x) - \psi_i^{(p+m+2)}(x) \leq (\xi_i - \beta_i)(1-\sigma_0)k_{\varepsilon_0}^p(1 + k_{\varepsilon_0} + ... + k_{\varepsilon_0}^m) \leq \\ &\leq (\xi_i - \beta_i)(1-\sigma_0)k_{\varepsilon_0}^p \frac{1}{1-k_{\varepsilon_0}} = (\xi_i - \beta_i)(1-\sigma_0) \cdot \frac{1-\varepsilon_0\sigma_0}{\varphi(\varepsilon_0\sigma_0) - \varepsilon_0\sigma_0} \cdot k_{\varepsilon_0}^p, \\ &p = 1,2,...,\ m = 0,1,2,...,\ i = 1,2,...,N,\ x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{2.50}$$

В (2.50) зафиксируя p и устремляя $m \to \infty$ приходим следующему неравенству:

$$\begin{aligned} &0 \leq \psi_i^{(p+1)}(x) - \psi_i(x) \leq \frac{(\xi_i - \beta_i)(1-\sigma_0)(1-\varepsilon_0\sigma_0)k_{\varepsilon_0}^p}{\varphi(\varepsilon_0\sigma_0) - \varepsilon_0\sigma_0}, \\ &i = 1,2,...,N,\ x \in \mathbb{R}^+, p = 1,2,.... \end{aligned} \tag{2.51}$$

Итак на основе изложенных фактов в пунктах 2.1-2.3 приходим к следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия 1), 4), a), b), A) и B). Тогда система нелинейных интегральных уравнений (1.1) обладает неотрицательным непрерывным и ограниченным решением $f(x) = (f_1(x),...,f_N(x))^T$. Более того имеют место следующие двусторонные оценки:*

$$g_i(x) \leq f_i(x) \leq \xi_i - \beta_i + g_i(x),\ i = 1,2,...,N,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.52}$$

Кроме того, при выполнении дополнительных условий 2), 3), C), последовательные приближения (2.15) равномерно сходятся к решению$f(x) = (f_1(x),...,f_N(x))^T$

и выполняется следующая оценка:

$$0 \leq f_i^{(p+1)}(x) - f_i(x) \leq C_i \cdot k_{\varepsilon_0}^p, \; i = 1,2,...,N, \; p = 1,2,...,x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.53}$$

где

$$C_i := \frac{(\xi_i - \beta_i)(1-\sigma_0)(1-\varepsilon_0\sigma_0)}{\varphi(\varepsilon_0\sigma_0) - \varepsilon_0\sigma_0}, \; i = 1,2,...,N.$$

3. Интегральная асимптотика решения. Единственность решения

3.1. Интегральная асимптотика.

В этом разделе мы займемся вопросом изучения интегральной асимптотики построенного решения системы (1.1) при следующих дополнительных ограничениях на $g_i, V_{ij}, \; ij = 1,2,...,N$:

c) $\beta_i - g_i \in L_1^0(0,+\infty), \; i = 1,2,...,N,$

5) существует матриц-функция $\overset{\circ}{V}(x) = (\overset{\circ}{V}_{ij}(x))_{i,j=1}^{N\times N}$ со свойствами:

5_1) $\overset{\circ}{V}_{ij}(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^+, \displaystyle\int_0^\infty \overset{\circ}{V}_{ij}(x)dx = a_{ij} = a_{ji}, \; i,j = 1,2,...,N$

5_2) $m(\overset{\circ}{V}_{ij}) := \displaystyle\int_0^\infty x\overset{\circ}{V}_{ij}(x)dx < +\infty, \; ,i,j = 1,2,...,N,$

такая что

$$V_{ij}(x,t) \geq \overset{\circ}{V}_{ij}(x-t), \; (x,t) \in \Pi, \; i,j = 1,2,...,N. \tag{3.1}$$

Имеет место следующая

Теорема 3.1. *При условиях 1), 4), 5), a), b), c), A) и B) для ограниченного неотрицательного решения $f(x) = (f_1(x),...,f_N(x))^T$ построенного при помощи последовательных приближений (2.15), имеет место интегральная асимптотика (1.4).*

Доказательство. Сперва заметим, что из условий b) и c) немедленно следует, существование числа $r^* > 0$, что при $x \geq r^*$ имеет место неравенство:

$$g_i(x) \geq \frac{\beta_i}{2}, \; x \in [r^*,+\infty), \; i = 1,2,...,N. \tag{3.2}$$

Из (1.1), (2.1) и условия b), с учетом первой части теоремы 2.1 следует, что

$$0 \leq \xi_i - f_i(x) = \beta_i - g_i(x) + \sum_{j=1}^N a_{ij}G_j(\xi_j) - \sum_{j=1}^N \int_0^x V_{ij}(x,t)G_j(f_j(t))dt, \tag{3.3}$$
$$x \in \mathbb{R}^+, \; i = 1,2,...,N.$$

Учитывая условие 5) из (3.3), получаем

$$0 \le \xi_i - f_i(x) \le \beta_i - g_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^\infty \mathring{V}_{ij}(\tau)d\tau \cdot G_j(\xi_j) -$$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^x \mathring{V}_{ij}(x-t) G_j(f_j(t))dt = \beta_i - g_i(x) + \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) \int_x^\infty \mathring{V}_{ij}(\tau)d\tau + \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^x \mathring{V}_{ij}(x-t)(G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t)))dt, x \in \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, ..., N.$$

Пусть $R > r^*$ произвольное число. Интегрируя обе части неравенства (3.4) и принимая во внимание (3.2), (2.52), A), B) и 5) будем иметь

$$0 \le \int_{r^*}^{R} (\xi_i - f_i(x))dx \le \int_{r^*}^{\infty} (\beta_i - g_i(x))dx + \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) \int_{r^*}^{R} \int_x^\infty \mathring{V}_{ij}(\tau)d\tau dx$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{r^*}^{R} \int_0^x \mathring{V}_{ij}(x-t) \left(G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))\right) dt dx \le \int_{r^*}^{\infty} (\beta_i - g_i(x))dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) \int_0^R \int_x^\infty \mathring{V}_{ij}(\tau)d\tau dx + \sum_{j=1}^{N} \int_{r^*}^{R} \int_0^{r^*} \mathring{V}_{ij}(x-t) \left(G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))\right) dt dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{r^*}^{R} \int_{r^*}^{x} \mathring{V}_{ij}(x-t) \left(G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))\right) dt dx \le \int_{r^*}^{\infty} (\beta_i - g_i(x))dx + \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) m(\mathring{V}_{ij}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_0^{r^*} \left(G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))\right) \int_{r^*}^{R} \mathring{V}_{ij}(x-t) dx dt + \sum_{j=1}^{N} \int_{r^*}^{R} \left(G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))\right) \cdot$$

$$\cdot \int_t^R \mathring{V}_{ij}(x-t) dx dt \le \int_{r^*}^{\infty} (\beta_i - g_i(x))dx + \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) m(\mathring{V}_{ij}) + \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{r^*} \int_{r^*}^{\infty} \mathring{V}_{ij}(y) dy dt + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \int_{r^*}^{R} \left(G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))\right) dt \le \int_{r^*}^{\infty} (\beta_i - g_i(x))dx +$$

$$+ 2 \cdot \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) m(\mathring{V}_{ij}) + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \int_{r^*}^{R} \left(G_j(\xi_j) - G_j(f_j(t))\right) dt \le \int_{r^*}^{\infty} (\beta_i - g_i(x))dx +$$

$$+ 2 \cdot \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) m(\mathring{V}_{ij}) + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \alpha_j \int_{r^*}^{R} \left(\xi_j - f_j(t)\right) dt, \ i = 1, 2, ..., N,$$

где

$$\alpha_j = \frac{G_j(\xi_j) - G_j(\frac{\beta_j}{2})}{\xi_j - \frac{\beta_j}{2}}, \ j = 1, 2, ..., N. \tag{3.5}$$

Итак мы получили следующие неравенства:

$$(3.6)\qquad 0\leq\int_{r^*}^{R}(\xi_i-f_i(t))dt\leq b_i+\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\alpha_j\int_{r^*}^{R}(\xi_j-f_j(t))\,dt,\ \ i=1,2,...,N,$$

где

$$(3.7)\qquad b_i=\int_{r^*}^{\infty}(\beta_i-g_i(x))dx+2\cdot\sum_{j=1}^{N}G_j(\xi_j)m(\overset{\circ}{V}_{ij}),\ \ i=1,2,...,N.$$

Умножим теперь обе части неравенства (3.6) на $G_i(\xi_i)$ и просуммируем во всем $i=1,2,...,N$. В результате учитывая условие 5) и (2.1) получим

$$0\leq\sum_{i=1}^{N}G_i(\xi_i)\int_{r^*}^{R}(\xi_i-f_i(t))dt\leq\sum_{i=1}^{N}G_i(\xi_i)b_i+\sum_{i=1}^{N}G_i(\xi_i)\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\alpha_j\cdot$$

$$\cdot\int_{r^*}^{R}(\xi_j-f_j(t))\,dt=\sum_{i=1}^{N}G_i(\xi_i)b_i+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\int_{r^*}^{R}(\xi_j-f_j(t))\,dt\cdot\sum_{i=1}^{N}a_{ij}G_i(\xi_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}G_i(\xi_i)b_i+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\int_{r^*}^{R}(\xi_j-f_j(t))\,dt\cdot\sum_{i=1}^{N}a_{ji}G_i(\xi_i)=\sum_{i=1}^{N}G_i(\xi_i)b_i+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\,(\xi_j-\beta_j)\int_{r^*}^{R}(\xi_j-f_j(t))\,dt,$$

откуда учитывая (3.5) приходим к неравенству:

$$(3.8)\qquad 0\leq\sum_{j=1}^{N}\frac{G_i(\xi_j)\dfrac{\beta_j}{2}+G_j\left(\dfrac{\beta_j}{2}\right)(\xi_j-\beta_j)}{\xi_j-\dfrac{\beta_j}{2}}\int_{r^*}^{R}(\xi_j-f_j(t))\,dt\leq\sum_{i=1}^{N}G_i(\xi_i)b_i$$

В (3.8) устремляя R к бесконечности получаем, что $\xi_j-f_j\in L_1(r^*,+\infty),\ j=1,2,...,N$ и

$$(3.9)\qquad 0\leq\sum_{j=1}^{N}\frac{G_i(\xi_j)\dfrac{\beta_j}{2}+G_j\left(\dfrac{\beta_j}{2}\right)(\xi_j-\beta_j)}{\xi_j-\dfrac{\beta_j}{2}}\int_{r^*}^{\infty}(\xi_j-f_j(t))\,dt\leq\sum_{i=1}^{N}G_i(\xi_i)b_i.$$

Так как $f_i\in C(\mathbb{R}^+),\ i=1,2,...,N$ (см. теорему 2.1), то $\xi_i-f_i\in L_1(0,r^*),\ i=1,2,...,N$. Итак мы доказали, что $\xi_i-f_i\in L_1(0,+\infty),\ i=1,2,...,N$. □

3.2. Единственность решения системы (1.1)

В настоящем разделе, при одном дополнительном условии на функций $g_i(x),\ i=1,2,...,N$, мы докажем единственность решения системы нелинейных интегральных уравнений (1.1) в классе $\mathfrak{M}$.

Имеет место следующая

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия 1)-4), a), b), A)-C). Тогда, если существует число $\tilde{r} > 0$ такое, что*

$$\gamma_i := \inf_{x > \tilde{r}} (g_i(x)) > 0, \ i = 1, 2, ..., N, \tag{3.10}$$

то система нелинейных интегральных уравнений (1.1) в классе $\mathfrak{M}$ не может иметь более одного решения.

Доказательство. Поскольку системы интегральных уравнений (1.1) и (2.23) эквивалентны, то для доказательства сформулированной теоремы достаточно доказать единственность решения системы (2.23) в $\mathfrak{M}$. Предположим, что система (2.23), кроме решения $\psi \in \mathfrak{M}$ (которое является равномерным пределом последовательных приближений (2.17)) обладает также другим решением $\tilde{\psi} \in \mathfrak{M}$. Тогда используя условия 1), a), A), B) , а также соотношения (2.24), из (2.23) для $x \in [0, r_0)$ будем иметь

$$\tilde{\psi}_i(x) \geq \sum_{j=1}^{N} G_j(\alpha_j) \int_0^x V_{ij}(x,t)dt, \ i = 1, 2, ..., N. \tag{3.11}$$

Рассмотрим следующие функции:

$$\mathcal{B}_i(x) := \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j)) \cdot \sum_{j=1}^{N} \eta_j \int_0^x V_{ij}(x,t)dt, \ x \in \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, ..., N. \tag{3.12}$$

Принимая во внимание условия 1), 3), 4), а также соотношения (1.3), относительно функций $\mathcal{B}_i(x), \ i = 1, 2, ..., N$, можно утверждать, что

$$\mathcal{B}_i(0) = 0, \ \mathcal{B}_i(x) > 0, \ x > 0, \ i = 1, 2, ..., N \tag{3.13}$$

$$\mathcal{B}_i \in C(\mathbb{R}^+), \ \mathcal{B}_i(x) \uparrow \text{по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, ..., N \tag{3.14}$$

$$\mathcal{B}_i(+\infty) = \lambda \eta_i \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j)), \ i = 1, 2, ..., N. \tag{3.15}$$

Положим

$$M_i := \mathcal{B}_i(\tilde{r}), \ i = 1, 2, ..., N. \tag{3.16}$$

Из свойств (3.13) - (3.15) немедленно следует, что для каждого $i = \{1, 2, ..., N\}$ существует $r_i > 0$ такое, что

$$\mathcal{B}_i(r_i) = \frac{1}{2}\left(M_i + \lambda \eta_i \min_{1 \leq j \leq N} (G_j(\gamma_j))\right), \tag{3.17}$$

причем $r_i > \tilde{r}$.

Обозначим через

$$\hat{r} = \max_{1\leq j\leq N}(r_i). \tag{3.18}$$

Теперь используя условия 1), 2), 3), (3.10), a), A) и B) из (2.23) для $x > \hat{r}$ получим

$$\tilde{\psi}_i(x) \geq \sum_{j=1}^{N}\int_{\tilde{r}}^{x} V_{ij}(x,t)G_j(g_j(t))dt \geq \sum_{j=1}^{N} G_j(\gamma_j)\int_{\tilde{r}}^{x} V_{ij}(x,t)dt \geq \min_{1\leq j\leq N}(G_j(\gamma_j))\cdot$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{N}\int_{\tilde{r}}^{x} V_{ij}(x,t)dt = \min_{1\leq j\leq N}(G_j(\gamma_j))\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^x V_{ij}(x,t)dt - \int_0^{\tilde{r}} V_{ij}(x,t)dt\right) \geq$$

$$\geq \min_{1\leq j\leq N}(G_j(\gamma_j))\cdot\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^{\hat{r}} V_{ij}(\hat{r},t)dt - \int_0^{\tilde{r}} V_{ij}(\tilde{r},t)dt\right) \geq \frac{1}{\max\limits_{1\leq j\leq N}(\eta_j)}\cdot$$

$$\cdot\min_{1\leq j\leq N}{}^2(G_j(\gamma_j))(\mathcal{B}_i(\hat{r}) - \mathcal{B}_i(\tilde{r})) \geq \frac{\min\limits_{1\leq j\leq N}{}^2(G_j(\gamma_j))}{2\cdot\max\limits_{1\leq j\leq N}(\eta_j)}\cdot(\lambda\eta_i\min_{1\leq j\leq N}(G_j(\gamma_j)) - M_i) :=$$

$$:= \tilde{p}_i > 0,\ i = 1, 2, ..., N.$$

Наконец, если $x \in [r_0, \max(r_0, \hat{r}) + 1]$, то снова используя условия 1), A), B), a) соотношения (2.24) в силу теоремы Вейерштрасса приходим к неравенствам

$$\tilde{\psi}_i(x) \geq \sum_{j=1}^{N}\int_0^x V_{ij}(x,t)G_j(g_j(t))dt \geq \sum_{j=1}^{N}\int_0^{r_0} V_{ij}(x,t)G_j(g_j(t))dt \geq \sum_{j=1}^{N} G_j(\alpha_j)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{r_0} V_{ij}(x,t)dt \geq \sum_{j=1}^{N} G_j(\alpha_j)\min_{x\in[r_0,\max(r_0,\hat{r})+1]}\left(\int_0^{r_0} V_{ij}(x,t)dt\right) := p_i^*\ i = 1, 2, ..., N.$$

Таким образом, из выше изложенного для $x \in [r_0, +\infty)$ получаем следующую оценку снизу:

$$\tilde{\psi}_i(x) \geq \min\{\tilde{p}_i, p_i^*\},\ i = 1, 2, ..., N. \tag{3.19}$$

Заметим, что

$$0 < \min\{\tilde{p}_i, p_i^*\} < \xi_i - \beta_i,\ i = 1, 2, ..., N. \tag{3.20}$$

Действительно, учитывая (2.24), b), A), B) и (2.1) будем иметь

$$0 < \min\{\tilde{p}_i, p_i^*\} \leq p_i^* \leq \sum_{j=1}^{N} G_j(\beta_j)a_{ij} < \sum_{j=1}^{N} a_{ij}G_j(\xi_j) = \xi_i - \beta_i,\ i = 1, 2, ..., N.$$

Теперь займемся доказательством следующего неравенства:

$$\tilde{\psi}_i(x) \leq \psi_i(x),\ i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.21}$$

С этой целью сперва убедимся в достоверности следующей оценки:

$$\tilde{\psi}_i(x) \leq \xi_i - \beta_i,\ i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.22}$$

Обозначим через

$$\mu_i = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left(\tilde{\psi}_i(x)\right),\ i = 1, 2, ..., N. \tag{3.23}$$

Тогда из (2.23), в силу условий 1), 3), 4), a), b), A) и B) будем иметь

$$\mu_i \leq \sum_{j=1}^{N} a_{ij} G_j(\mu_j + \beta_j),\ i = 1, 2, ..., N. \tag{3.24}$$

Учитывая (2.1) из (3.24) получим

$$\begin{aligned} \mu_i &\leq \max_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{G_j(\mu_j + \beta_j)}{G_j(\xi_j)}\right) \sum_{j=1}^{N} a_{ij} G_j(\xi_j) = \\ &= (\xi_i - \beta_i) \max_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{G_j(\mu_j + \beta_j)}{G_j(\xi_j)}\right),\ i = 1, 2, ..., N. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Очевидно, что существует индекс $j_0 \in \{1, 2, ..., N\}$ такой, что

$$\frac{G_{j_0}(\mu_{j_0} + \beta_{j_0})}{G_{j_0}(\xi_{j_0})} = \max_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{G_j(\mu_j + \beta_j)}{G_j(\xi_j)}\right) \tag{3.26}$$

В неравенстве (3.25) в качестве индекса i если выбрать $i = j_0$ и использовать (3.26) получим

$$\mu_{j_0} \leq (\xi_{j_0} - \beta_{j_0}) \frac{G_{j_0}(\mu_{j_0} + \beta_{j_0})}{G_{j_0}(\xi_{j_0})}. \tag{3.27}$$

Заметим теперь, что функции $\dfrac{G_j(u)}{u}, \dfrac{u}{u - \beta_j},\ j = 1, 2, ..., N$ монотонно убывают на $(\beta_j, +\infty)$. Действительно, монотонность функций $\dfrac{G_j(u)}{u}$ сразу следует из условий A), B), а монотонность функции $\dfrac{u}{u - \beta_j}$ следует из очевидного неравенства

$$\frac{-\beta_j}{(u - \beta_j)^2} < 0,\ j = 1, 2, ..., N. \tag{3.28}$$

С другой стороны из (3.27) получим

$$\frac{G_{j_0}(\mu_{j_0} + \beta_{j_0})}{\mu_{j_0} + \beta_{j_0}} \cdot \frac{\mu_{j_0} + \beta_{j_0}}{\mu_{j_0}} \geq \frac{G_{j_0}(\xi_{j_0})}{\xi_{j_0}} \cdot \frac{\xi_{j_0}}{\xi_{j_0} - \beta_{j_0}},$$

откуда учитывая монотонность функций $\dfrac{G_{j_0}(u)}{u}$ и $\dfrac{u}{u - \beta_{j_0}}$ приходим к неравенству

$$\xi_{j_0} - \beta_{j_0} \geq \mu_{j_0} \tag{3.29}$$

Принимая во внимание (3.29) из (3.25) получаем, что

$$\mu_i \leq \xi_i - \beta_i,\ i = 1, 2, ...N.$$

Следовательно, оценка (3.22) доказана. Докажем теперь, что имеет место неравенство:

$$\tilde{\psi}_i(x) \leq \psi_i^{(p)}(x),\ i = 1, 2, ..., N,\ p = 0, 1, ...,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.30}$$

В случае $p = 0$ неравенство (3.30) следует из (3.22). Предположим теперь, что (3.30) имеет место при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда в силу условий 1), A), B) из (2.17) и (2.23) получаем, что

$$\psi_i^{(p+1)}(x) \geq \sum_{j=1}^{N} \int_0^x V_{ij}(x,t) G_j(\tilde{\psi}_j(t) + g_j(t))dt = \tilde{\psi}_i(x),\ i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+.$$

В (3.30) устремляя $p \to \infty$ приходим к (3.21). Заметим теперь, что из (2.22), 2), A), B), 1) и (2.23) следует, что

$$\psi_i(x) \leq \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi_j) \int_0^x V_{ij}(x,t)dt,\ i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.31}$$

Принимая во внимание (3.11) и (3.31) для $x \in [0, r_0)$ получим

$$\tilde{\psi}_i(x) \geq \frac{\min\limits_{1 \leq j \leq N}(G_j(\alpha_j))}{\max\limits_{1 \leq j \leq N}(G_j(\xi_j))} \psi_i(x),\ i = 1, 2, ..., N. \tag{3.32}$$

Обозначим через

$$\sigma^* = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{\min\{\tilde{p}_i, p_i^*\}}{\xi_i - \beta_i} \right); \frac{\min\limits_{1 \leq j \leq N}(G_j(\alpha_j))}{\max\limits_{1 \leq j \leq N}(G_j(\xi_j))} \right\}. \tag{3.33}$$

Из неравенств (3.20) и

$$0 < G_j(\alpha_j) \leq G_j(\beta_j) < G_j(\xi_j),\ j = 1, 2, ..., N$$

сразу следует, что

$$\sigma^* \in (0, 1). \tag{3.34}$$

Таким образом учитывая (2.22), (3.19), (3.32), (3.30) и (3.34) приходим к следующей цепочке неравенств

$$\sigma^* \psi_i(x) \leq \tilde{\psi}_i(x) \leq \psi_i(x),\ i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.35}$$

Далее совершая аналогичные рассуждения как при доказательстве теоремы 2.1 заключаем, что существуют числа $C^* > 0$ и $k^* \in (0, 1)$ такие, что

$$0 \leq \psi_i(x) - \tilde{\psi}_i(x) \leq C^*(k^*)^p,\ i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+,\ p = 1, 2, ... \tag{3.36}$$

В (3.36) устремляя $p \to \infty$ получим $\psi_i(x) = \tilde{\psi}_i(x),\ i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+$. Теорема доказана. $\square$

4. Отсутствие нетривиального решения системы (1.1). Примеры

4.1. Отсутствие нетривиального неотрицательного решения системы (1.1).

В этом разделе, при определенных ограничениях на матричное ядро и на нелинейностей системы (1.1), мы будем заниматься изучением системы (1.1) в случае когда $g_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., N$. Имеет место

Теорема 4.1. *Пусть существует матриц функция* $V^*(x) = \left(V^*_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{N\times N}$, *со свойствами* $V^*_{ij}(x) > 0,\ i, j = 1, 2, ..., N, x \in \mathbb{R}^+,\ V^*_{ij} \in L_1(0, +\infty),\ i, j = 1, 2, ..., N$ *такая, что*

$$V_{ij}(x, t) \le V^*_{ij}(x - t),\ i, j = 1, 2, ..., N,\ (x, t) \in \Pi. \tag{4.1}$$

Пусть далее $G_j \in C(\mathbb{R}^+), G_j(0) = 0, j = 1, 2, ..., N$ *и выполняется условие B). Тогда, если* $g_i(x) = 0,\ i = 1, 2..., N$ *и существует число* $b > 0$ *такое, что*

$$G_j(u) \le b \cdot u,\ j = 1, 2, ..., N, u \in \mathbb{R}^+, \tag{4.2}$$

то система (1.1) в классе

$$\mathcal{P} := \{f(x) = (f_1(x), ..., f_N(x))^T,\ f_j(x) \ge 0, \forall \varepsilon > 0,\ f_j(x)e^{-\varepsilon x} \in M(\mathbb{R}^+),$$
$$j = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+\}$$

имеет только тривиальное решение $f_i(x) \equiv 0,\ i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Рассмотрим следующие характеристические функции:

$$Q_i(h) := b\sum_{j=1}^{N}\int_0^\infty V^*_{ij}(t)e^{-ht}dt,\ h \in \mathbb{R}^+,\ i = 1, 2, ..., N.$$

Из свойств функций $V^*_{ij}(t),\ i, j = 1, 2, ..., N,\ t \in \mathbb{R}^+$ немедленно следует, что

$$Q_i(0) = b\sum_{j=1}^{N}\int_0^\infty V^*_{ij}(t)dt > 0,\ i = 1, 2, ..., N, \tag{4.3}$$

$$Q_i \in C(\mathbb{R}^+),\ Q_i(h) \downarrow \text{по } h \text{ на } \mathbb{R}^+,\ i = 1, 2, ..., N, \tag{4.4}$$

$$Q_i(+\infty) = 0,\ i = 1, 2, ..., N. \tag{4.5}$$

Следовательно для каждого $i \in \{1, 2, ...N\}$ существует $h_i > 0$ такое, что

$$Q_i(h_i) < 1. \tag{4.6}$$

Положим

$$F_i(x) = e^{-h^* x} f_i(x),\ i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+, \tag{4.7}$$

где

$$h^* = \max_{1 \le i \le N} (h_i) > 0. \tag{4.8}$$

Из (4.3)-(4.6) и (4.8) следует, что

$$Q_i(h^*) < 1, ß = 1, 2, ..., N. \tag{4.9}$$

Учитывая условия (4.1), (4.2), 1) и обозначение (4.7), из (1.1), в силу того, что $g_i(x) \equiv 0,\ i = 1, 2, ..., N$, будем иметь

$$F_i(x) \le b \sum_{j=1}^{N} e^{-h^* x} \int_0^x V_{ij}(x,t) f_j(t) dt \le b \sum_{j=1}^{N} e^{-h^* x} \int_0^x V_{ij}^*(x-t) f_j(t) dt =$$

$$= b \sum_{j=1}^{N} \int_0^x e^{-h^*(x-t)} V_{ij}^*(x-t) F_j(t) dt \le D \cdot b \sum_{j=1}^{N} \int_0^x V_{ij}^*(y) e^{-h^* y} dy \le D \cdot Q_i(h^*),$$

$$i = 1, 2, ..., N,\ x \in \mathbb{R}^+,$$

где

$$D = \max_{1 \le j \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (F_j(x)). \tag{4.10}$$

Из полученного выше, неравенства сразу вытекает, что $D \le Q_i(h^*) D,\ i = 1, 2, ..., N$, откуда в силу (4.9) следует, что $D = 0$. Принимая во внимание (4.7) и (4.10) заключаем, что $f_i(x) \equiv 0,\ i = 1, 2, ..., N$. Теорема доказана. □

4.2.Примеры

Последний раздел настоящей работы посвящен рассмотрению конкретных примеров функций g_i, V_{ij} и G_j удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем. Сперва приведем примеры матричного ядра $V(x,t) = (V_{ij}(x,t))_{i,j=1}^{N \times N}$:

Примеры $V_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., N$

$a_1)$ $V_{ij}(x,t) = \overset{\circ}{V}_{ij}(x-t),\ i, j = 1, 2, ..., N,\ (x,t) \in \Pi$, где $0 < \overset{\circ}{V}_{ij}(\tau),\ i, j = 1, 2, ..., N$ обладают свойствами, $5_1)$, $5_2)$ и монотонно убывают по $\tau,\ i, j = 1, 2, ..., N$, причем $\overset{\circ}{V}_{ij} \in C(\mathbb{R}^+),\ i, j = 1, 2, ..., N$

$a_2)$ $V_{ij}(x,t) = V_{ij}(x-t) + \varepsilon \overset{\circ}{V}_{ij}(x+t),\ i, j = 1, 2, ..., N,\ (x,t) \in \Pi$, где $\varepsilon \in (0,1)$ числовой параметр,

a_3) $V_{ij}(x,t) = \overset{\circ}{V}_{ij}(x-t)\mu_{ij}(t),\ i,j = 1,2,...,N,\ (x,t) \in \Pi$, где $\mu_{ij}(t) = \mu_{ji}(t),\ t \in \mathbb{R}^+, \mu_{ij} \in C(\mathbb{R}^+), \mu_{ij}$ монотонно возрастают по t и $0 < \mu_{ij}(t) \leq 1,\ t \in \mathbb{R}^+,\ i,j = 1,2,...,N$.

Подробно остановимся на примере a_2). Поскольку $\overset{\circ}{V}_{ij} \in C(\mathbb{R}^+)$, то $V_{ij} \in C(\Pi),\ i,j = 1,2,...,N$. Из положительности $\overset{\circ}{V}_{ij}(\tau)$ сразу следует, что $V_{ij}(x,t) > 0,\ (x,t) \in \Pi,\ i,j = 1,2,...,N$. Так как $\overset{\circ}{V}_{ij}(\tau) \downarrow$ по $\tau,\ i,j = 1,2,...,N$, то из представления a_2) немедленно следует, что $V_{ij}(x,t) \downarrow$ по $x,\ i,j = 1,2,...,N$. Таким образом для примера a_2) условия 1) и 2) восполняются. Убедимся теперь, что функции $\int_0^x V_{ij}(x,t)dt$ монотонно возрастают по x на $\mathbb{R}^+,\ i,j = 1,2,...,N$. Обозначим через

$$\mathcal{B}_{ij}(x) = \int_0^x V_{ij}(x,t)dt =: \int_0^x \overset{\circ}{V}_{ij}(\tau)d\tau + \varepsilon\int_x^{2x} \overset{\circ}{V}_{ij}(\tau)d\tau,\ x \in \mathbb{R}^+,\ i,j = 1,2,...,N.$$

Так как $\overset{\circ}{V}_{ij} \in C(\mathbb{R}^+), \overset{\circ}{V}_{ij}(x) > 0, x \in \mathbb{R}^+,\ i,j = 1,2,...,N$, то из состношения

$$\mathcal{B}'_{ij}(x) = \overset{\circ}{V}_{ij}(x) + 2\varepsilon\overset{\circ}{V}_{ij}(2x) - \varepsilon\overset{\circ}{V}_{ij}(x) = (1-\varepsilon)\overset{\circ}{V}_{ij}(x) + 2\varepsilon\overset{\circ}{V}_{ij}(2x) > 0,$$
$$x \in \mathbb{R}^+,\ i,j = 1,2,...,N$$

сразу следует, что $\mathcal{B}_{ij}(x) \uparrow$ по x, на $\mathbb{R}^+,\ i,j = 1,2,...,N$. Заметим, также что

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{B}_{ij}(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \overset{\circ}{V}_{ij}(\tau)d\tau = a_{ij},\ i,j = 1,2,...,N.$$

Следовательно условия 3) и 4) также выполняются. Условие 5) выполняется очевидным образом, если $\varepsilon > 0,\ \overset{\circ}{V}_{ij}(\tau) > 0,\ i,j = 1,2,...,N$. Наконец проверим условие (4.1). Поскольку $\overset{\circ}{V}_{ij}(\tau) \downarrow$ по τ на $\mathbb{R}^+$, то $\overset{\circ}{V}_{ij}(x-t) \geq \overset{\circ}{V}_{ij}(x+t),\ (x,t) \in \Pi,\ i,j = 1,2,...,N$. Следовательно в качестве $V^*_{ij}(x)$ взяв

$$V^*_{ij}(x) = (1+\varepsilon)\overset{\circ}{V}_{ij}(x),\ x \in \mathbb{R}^+,\ i,j = 1,2,...,N,$$

приходим к (4.1).

Проверка условий 1)-5) и (4.1) для остальных примеров осуществляется аналогичными рассуждениями. Приведем теперь примеры для нелинейностей $G_j(u); j = 1,2,...,N$:

b_1) $G_j(u) = u^{\frac{1}{\tilde{\alpha}_j}}\ u \in \mathbb{R}^+, \tilde{\alpha}_j > 1$-числовые параметры , $j = 1,2,...,N$.

b_2) $G_j(u) = \tilde{\gamma}_j(1 - e^{-u^{\frac{1}{\tilde{\alpha}_j}}}),\ \tilde{\gamma}_j, \tilde{\alpha}_j > 1$- числовые параметры, $j = 1,2,...,N$.

Несложно проверить что для примеров b_1) и b_2) выполняются условия A)-C), где в качестве отображения $\varphi(\sigma)$ можно выбрать следующую функцию:

$$\varphi(\sigma) = \sigma^{\frac{1}{\alpha^*}},\ \sigma \in [0,1],$$

где $\alpha^* = \min\limits_{1\le j\le N}(\tilde{\alpha}_j)$.

Для полноты изложения приведем также пример для функций $G_j(u), j = 1,2,...,N$ удовлетворяющих условиям теоремы 4.1. Таковыми являются например функции вида:

$$G_j(u) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\gamma}_j(1-e^{-u})+u\right),\ j=1,2,...,N, u\in\mathbb{R}^+.$$

Наконец приведем примеры для функций $g_j(x),\ j=1,2,...,N:$

$c_1)$ $g_j(x) = \beta_j(1-\varepsilon_j e^{-x^2}),\ x\in\mathbb{R}^+,\ \beta_j>0, \varepsilon_j\in(0,1)$-числовые параметры , $j=1,2,...,N$.

$c_2)$ $g_j(x) = \begin{cases} W_j \mid \cos x\mid,\ x\in\left[0,\dfrac{7}{2}\pi\right], \\ S_j\left(1-e^{-\left(x-\frac{7}{2}\pi\right)}\right),\ x\in\left(\dfrac{7}{2}\pi,+\infty\right) \end{cases}$, где $W_j,\ S_j>0$-числовые параметры, причем $W_j<S_j, j=1,2,...,N$.

Небезынтересно отметить, что приведенные примеры $a_1)-a_3),\ b_1),\ b_2)$ и $c_1)$ имеют также прикладной интерес в различных направлениях физики и биологии (см. введение).

Abstract. A system of nonlinear integral equations with the Hammerstein-Volterra matrix operator is investigated. The specified system of equations, in addition to purely mathematical interest, is of particular interest in various fields of natural science. In particular, such equations are encountered in hydroaerodynamics, in population genetics models, and in the theory of radiative heat transfer. A constructive theorem on the existence of a nonnegative bounded and continuous solution to the specified system of equations is proved. With an additional constraint on the nonlinearity, uniform convergence of specially selected successive approximations with the rate of decreasing geometric progression is obtained. The asymptotic behavior of the constructed solution at infinity is also investigated. Moreover, a theorem on the uniqueness of a solution in the class of bounded vector functions whose coordinates are nonnegative is proved. At the end of the work, specific examples of the specified systems are given that satisfy all the conditions of the proved statements.

Список литературы

[1] П. Ланкастер, Теория Матриц, Наука, М., 280с (1978).
[2] J. J. Keller, "Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction", Z. Angew, Math Phys, **32**, no. 2, 170 – 181 (1981).
[3] W. R. Schneider, "The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type", Z. Angew, Math Phys, **33**, no. 1, 140 – 142 (1982).

[4] W. Okrasinski, "Nonlinear Volterra equations and physical applications", Extracta Math, **4**, no. 2, 51 – 74 (1989).
[5] S. N. Askhabov, "On an integral equation with sum kernel and an inhomogenity in the linear part", Differential Equations, **54**, no. 2, 1185 – 1194 (2021).
[6] Н. Б. Енгибарян, "Асимптотические и структурные теоремы для уравнения марковского восстановления", Теория вероятн. и ее примен.; **48**, no. 1, 62 – 77 (2003).
[7] W. Okrasinski, "On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain non-linear convolution equation", Ann. Pol. Math, **36**, no. 1, 61 – 72 (1979).
[8] W. Okrasinski, "On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation", Ann. Pol. Math, **37**, no. 3, 223 – 229 (1980).
[9] S. N. Askhabov, N. K. Karapetyants, A. Ya. Yakobov, "Integral equations of convolution type with power nonlinearity and systems of such equations", Dokl. Math, **41**, no. 2, 323 – 327 (1990).
[10] S. N. Askhabov, M. A. Betilgiriev, "Nonlinear integral equations of convolution type with almost increasing kernels in cones", Differential Equations, **27**, no. 2, 234 – 243 (1991).
[11] P. J. Bushell, W. Okrasinski, "Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel", J. London Math. Soc., **41**, no. 2, 503 – 510 (1991).
[12] H. Brunner, Volterra Integral Equations: An Introduction to The Theory and Applications", Cambridge University Press, Cambridge (2017).
[13] P. J. Bushell, W. Okrasinski, "Nonlinear Volterra integral equations and the Apery indentities", Bull. London Math. Soc., **24**, 478 – 484 (1992).
[14] A. A. Kilbas, M. Saigo, "On solution of nonlinear Abel-Volterra integral equation", J. Math. Anal. Appl., **229**, 41 – 60 (1999).
[15] С. Н. Асхабов, "Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью", Чебышевский сб., **23**, no. 5, 6 – 19 (2022).
[16] Л. Г. Арабаджян, "О системах интегральных уравнений восстановления", Дифференц. уравнения, **20**, no. 6, 1050 – 1055 (1984).
[17] Н. Б. Енгибарян, "Теоремы восстановления для системы интегральных уравнений", Матем. сб., **189**, no. 12, стр. 59 – 72 (1998).
[18] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., **22**, ВИНИТИ, М., 175 – 244 (1984).
[19] Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, "О нетривиальной разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений на всей прямой", Изв. РАН. Сер. матем, **87**, no. 5, 215 – 231 (2023).
[20] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, "Элементы теории функций и функционального анализа", 5-е изд., Наука М., 544 стр. (1981).
[21] А. Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян, А. С. Петросян, "Вопросы существования, отсутствия и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой с оператором типа Гаммерштейна - Стилтьеса", Тр. ИММ УрО РАН, **30**, no. 1, 249 – 269 (2024).

Поступила 20 октября 2024

После доработки 20 октября 2024

Принята к публикации 18 декабря 2024