

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 2, 2025, стр. 26 – 42.

ТЕОРЕМЫ ТИПА НЕВАНЛИННЫ ДЛЯ НОВЫХ “ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ” ЗНАЧЕНИЙ

В. Г. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: Volodya.petrosyan.1957@mail.ru

Аннотация. Получены теоремы типа соотношения дефектов Р. Неванлинны для новых “исключительных” значений.

MSC2020 number: 30D30; 30D35; 30C15.

Ключевые слова: теория Неванлинны; теория Альфорса; свойство близости a -точек.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных характеристик в классической теории распределения значений Р. Неванлинны является функция приближения (см. [1])

$$m(r, a) = m(r, a, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |w(re^{i\varphi}) - a|^{-1} d\varphi, \quad a \in \mathbb{C},$$

которая показывает, насколько близки значения мероморфной функции $w(z)$ к заданному значению $a \in \mathbb{C}$ на дугах $\Delta(r, a) = \Delta(r, a, w) = \{z: |z| = r; |w(z) - a| \leq 1\}$ окружности $|z| = r$.

Функция $m(r, a)$ есть норма $\|\ln^+ |w(z) - a|^{-1}\|$ в метрике $L_1[0, 2\pi]$.

С конца 60-х годов двадцатого столетия активно изучается более тонкая характеристика близости $w(z)$ к a , величина (см. [2]-[7])

$$L(r, a) = L(r, a, w) = \max_{|z|=r} \ln^+ |w(z) - a|^{-1}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что функция $L(r, a)$ характеризует скорость приближения $w(z)$ к числу a в более сильной метрике, чем $L_1[0, 2\pi]$.

Установлены многочисленные аналоги в поведении функций $m(r, a)$ и $L(r, a)$ составляющие сегодня “предмет” теории роста В. Петренко (см. [2]).

В работах [8], [9] вводятся новые характеристики близости, которые учитывают поведение производных высшего порядка функций $w(z)$ на тех дугах окружности $|z| = r$, на которых $w(z)$ близка к значению a .

Мы имеем в виду следующие величины ($z = re^{i\varphi}$)

$$P_k(r, a) = r \cdot \int_{\Delta(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi, \quad k \in N.$$

Оказывается, что величины $P_k(r, a)$ обнаруживают свойства, аналогичные свойствам функций приближения $m(r, a)$, т.е. для них выполняется аналог второй основной теоремы Р. Неванлинны и соответственно аналог соотношения дефектов, характеризующих уже новые “исключительные” значения.

Доказано, что для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $w(z)$ конечного нижнего порядка λ множество значений a , в которых

$$D_k(a) = D_k(a, w) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} (P_k(r, a)/T(r)) > 0,$$

не более чем счетно, и имеет место неравенство

$$(1.1) \quad \sum_{(a)} D_k(a) \leq K_0,$$

где $T(r)$ –неванлинновская характеристика, K_0 – постоянная зависящая от k и λ .

Ясно, что оценки величин $P_k(r, a)$ являются одновременно оценками k -тых производных функции $\ln |w(z) - a|^{-1}$, являющейся мерой близости $w(z)$ к a . Укажем также другие точки зрения, с которых изучение величин $P_k(r, a)$ представляет интерес.

На актуальность изучения таких объектов указывает следующее простое предположение, связывающее $P_1(r, a) = P(r, a)$ с классическими характеристиками: если мероморфная в $\mathbb{C}$ функция имеет по крайней мере два дефектных значения в смысле В. П. Петренко, т.е. существуют значения a_1, a_2 для которых $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} (L(r, a)/T(r)) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} \left(\max_{|z|=r} \ln^+ |w(z) - a|^{-1} / T(r) \right)$$

то для любого $a \in \mathbb{C}$ и r справедливы неравенства

$$(1.2) \quad m(r, a) \leq L(r, a) \leq P(r, a) + O(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

Таким образом, оценки сверху величин $P(r, a)$ одновременно являются оценками дефектов $\delta(a) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} (m(r, a)/T(r))$ и $\beta(a)$. Получение окончательных результатов в теории мероморфных функций зачастую упирается в оценки логарифмических производных функций $w(z)$, которые, однако, рассматривались как вспомогательные технические средства (см. [1], [2], [10]–[12]).

Поскольку величины $P(r, a)$ определяются посредством логарифмической производной функций $w(z)$ и для них устанавливаются соотношения дефектов, то эти величины становятся объектом самостоятельного изучения.

Для величин $P_k(r, a)$ устанавливается аналог известного тождества Картана, эквивалентного следующему соотношению (см. [13]–[15])

$$(1.3) \quad \int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty.$$

Из соотношений (1.2) и (1.3) следует соотношение типа тождества Картана в теории роста мероморфных функций:

$$\int_0^{2\pi} L(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty.$$

Отметим, что этот результат отсутствовал в этой теории. А из соотношений (1.1) и (1.2) вытекает известный результат В. Фукса о $\sum \delta^{1/2}(a)$ (см. [10]).

В работах [16] и [17] получены оценки типа $\sum \delta^\alpha$ для мер “исключительности” $D_1(a) = D(a)$.

В данной работе устанавливаются следующие результаты:

Теорема 1.1. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция конечного нижнего порядка λ ; $a_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, \dots, q$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$; $\rho, c_\nu \in (0, 1)$ фиксированные числа. Тогда для некоторой неограниченной последовательности $r = r_n \rightarrow \infty$, выполняется неравенство:

$$(1.4) \quad \sum_{\nu=1}^q \frac{P_k(r, a_\nu)}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(r),$$

где $\Delta_\rho(r, a_\nu) = \{z: |z| = r; |w(z) - a_\nu| \leq \rho\}$, $|\Delta_\rho(r, a_\nu)|$ – угловая мера множества $\Delta_\rho(r, a_\nu)$, $T(r)$ – неванлинновская характеристика, $K(k, \lambda)$ – постоянная зависящая от k и λ .

Теорема 1.2. При условиях теоремы 1.1 выполняется следующее соотношение

$$(1.5) \quad \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{D_k(a_\nu)}{\ln \frac{eK_0}{D_k(a_\nu)}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq K_1(k, \lambda),$$

где K_0 – постоянная фигурирующая в неравенстве (1.1).

Теорема 1.3. При условиях теоремы 1.1 имеет место неравенство

$$(1.6) \quad \sum_{\nu=1}^q D_k^{\frac{1}{2}}(a_\nu) \leq K_2(k, \lambda) \ln^{\frac{1}{2}} q.$$

Следствие 1.1. При условиях теоремы 1.1 выполняется

$$(1.7) \quad \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{\delta(a_\nu)}{\ln \frac{e}{\delta(a_\nu)}} \right]^{\frac{1}{3}} \leq K_3(k, \lambda).$$

Из соотношения (1.7) вытекает известный результат В. Петренко о $\sum \delta^\alpha(a)$ (см. [21]).

Следствие 1.2. При условиях теоремы 1.1 имеет место неравенство

$$(1.8) \quad \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{\beta(a_\nu)}{\ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq K_4(k, \lambda),$$

$$\text{где } c_\nu = \begin{cases} \beta(a_\nu)/2, & \text{если } 0 \leq \lambda \leq 0,5 \\ \beta(a_\nu)/\pi\lambda, & \text{если } \lambda > 0,5. \end{cases}$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $w(z)$ обозначим через $F_k(z) = \ln^{(k)}(w(z) - a)$, $a \in \mathbb{C}$, а через $D(R) = \{z: |z| \leq R\}$.

Лемма 2.1. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда имеет место неравенство

$$(2.1) \quad \iint_{D(R)} \left| \frac{F_{k+1}(z)}{F_k(z)} \right| d\sigma \leq K(k, \beta) T(\beta R, w) \cdot R, \quad R > R_0,$$

где $d\sigma$ – элемент площади, $K(k, \beta)$ – постоянная, зависящая от k и β ($\beta > 1$).

Доказательство. Используя лемму 2 работы [18], получим

$$(2.2) \quad \iint_{D(R)} \left| \frac{F_{k+1}(z)}{F_k(z)} \right| d\sigma \leq K(k, \beta) \cdot T(R_1, F_k) R,$$

где $R_1 = ((\beta - 1)/2 + 1)R$.

Поскольку $T(r, \sum_{\nu} w_{\nu}) \leq \sum_{\nu} T(r, w_{\nu}) + O(1)$, $T(r, \prod_{\nu} w_{\nu}) \leq \sum_{\nu} T(r, w_{\nu})$, то используя формулу Лейбница $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$, имеем

$$(2.3) \quad T(R_1, F_k) \leq K(k) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ T(R_1, w^{(k-1)}) + T \left[R_1, \left(\frac{1}{w-a} \right)^{(i)} \right] \right\} + O(1).$$

Учитывая теперь известное неравенство (см. [19], теорема 2.3, гл. III)

$$T(r, w^{(\ell)}) \leq (\ell + 1) T(r, w) + Q(r, w),$$

где $Q(r, w) = O(\ln r)$, $r \rightarrow \infty$, если $w(z)$ имеет конечный нижний порядок, и $Q(r, w) = O[\ln T(r) + \ln r]$, если $w(z)$ бесконечного порядка, и $r \rightarrow \infty$, пропуская, возможно, некоторое множество сегментов, имеющих конечную меру.

Согласно теореме 1.3 (лемма о логарифмической производной) и теореме 2.3 главы III из [19], для величин $Q(r, w)$ имеет место оценка $Q(r, w) = o[T(r, w)]$, $r_1 > r$, $r \rightarrow \infty$. Теперь из неравенства (2.3) получим, при R больше некоторого фиксированного R_0 , оценку $T(R_1, F_k) \leq K(k, \beta) T(\beta R, w)$, отсюда и из (2.2) следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $a, b \in \mathbb{C}$ – комплексные числа, такие, что $|a - b| > 2$. Тогда имеют место следующие соотношения ($z = re^{i\varphi}$)

$$(2.4) \quad \int_0^R \int_{\Delta_{\rho}^*(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{k}} r dr d\varphi = o[T(\beta R, w)] \cdot R$$

$$(2.4') \quad \int_0^R \int_{\Delta(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b) \right|^{\frac{1}{k}} r dr d\varphi = o[T(\beta R, w)] \cdot R,$$

где $\Delta_{\rho}^*(r, a) = \{z: |z| = r, \rho \leq |w(z) - a| \leq 1\}$, $\beta > 1$, $\rho \in (0, 1)$ – фиксированные числа.

Доказательство. Используем метод математической индукции. Покажем, что лемма верна при $k = 1$. Учитывая, что $|w(z)| \leq k(a)$, $|w(z) - a| \geq \rho$, когда $z \in \Delta_{\rho}^*(r, a)$, получим

$$(2.5) \quad \int_0^R \int_{\Delta_{\rho}^*(r, a)} |\ln'(w(z) - a)| r dr d\varphi \leq K(a, \rho) \int_0^R \int_{\Delta_{\rho}^*(r, a)} \frac{|w'(z)| r}{1 + |w(z)|^2} dr d\varphi$$

Используя неравенство Коши-Буняковского имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \frac{|w'(z)| r dr d\varphi}{1 + |w(z)|^2} \leq \\ & \leq \left(\int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \frac{|w'(z)|^2 r dr d\varphi}{(1 + |w(z)|^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} r dr d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\pi} R \cdot A^{\frac{1}{2}}(R) \end{aligned}$$

где $A(z)$ – сферическая характеристика Л. Альфорса.

Отсюда, учитывая очевидное соотношение $A(R) < T(\beta R)/\ln \beta$ и неравенство (2.5), получим утверждение леммы при $k = 1$.

Предположим, что лемма верна при $k = n$, докажем при $k = n + 1$.

Пользуясь неравенством Гельдера, при $p = n + 1$, $q = (n + 1)/n$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \left| \ln^{(n+1)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{n+1}} r dr d\varphi \leq \\ & \leq \left(\int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \left| \frac{\ln^{(n+1)}(w(z) - a)}{\ln^{(n)}(w(z) - a)} \right| r dr d\varphi \right)^{\frac{1}{n+1}} \times \\ & \times \left(\int_0^R \int_{\Delta_\rho^*(r,a)} \left| \ln^{(n)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{n}} r dr d\varphi \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя лемму 2.1 и предложения, получим неравенство (2.4). Поскольку $|w(z) - b| > 1$, $|w(z)| < K(a)$, когда $z \in \Delta(r, a)$, то соотношение (2.4') доказывается аналогично доказательству соотношения (2.4). Лемма доказана. $\square$

В дальнейшем, будем помнить, что в силу пункта I теоремы 2 работы [20], все рассматриваемые далее a -точки и b -точки являются простыми (не кратными).

Обозначим соответственно через $n(r, a)$ и $n(r, b)$ – количество a -точек и b -точек функции $w(z)$ в круге $|z| < r$, а через $n(r, a, b)$ – количество тех a -точек $z_k(a) \in \tilde{E}_k(r) \subset \bigcup_{i=1}^{\tilde{\Phi}(r)} \tilde{E}_i(r)$, для каждой из которых найдется b -точка $z_k(b)$ из области $\tilde{E}_k(r) \subset \{|z| < r\}$, $k = 1, 2, \dots, \tilde{\Phi}(r)$ ($\tilde{E}_k(r)$ и $\tilde{\Phi}(r)$ определены в [20]). Нетрудно видеть, что

$$(2.6) \quad n(r, a, b) \leq \tilde{\Phi}(r)$$

В процессе доказательства теоремы 2 работы [20] для $\tilde{\Phi}(r)$ получено следующее неравенство

$$(2.7) \quad \tilde{\Phi}(r) \leq A(r) + \frac{8A(r)}{\varphi(r)} + h\varphi^2(r) L(r),$$

где $A(r)$ и $L(r)$ – сферические характеристики Л. Альфорса, $\varphi(r)$ – произвольная монотонная функция, стремящаяся к бесконечности, h – постоянная.

Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$, $\rho, c \in (0, 1)$ – фиксированные числа. Обозначим через $(z = re^{i\varphi})$

$$E_\alpha(R) = E_{\alpha_1}^{\alpha_2}(R) = \{r: \alpha_1 R < r < \alpha_2 R\}$$

$$P_k^*(r, a) = r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi,$$

где $\Delta_\rho(r, a) = \{z: |z| = r; |w(z) - a| \leq \rho\}$.

Лемма 2.3. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, $a, b \in \mathbb{C}$ комплексные числа, такие, что $|a - b| > 2$, $c \in (0, 1)$, $\beta > 1$ – фиксированные числа. Тогда выполняется следующее соотношение ($R' = \alpha_3 R$)

$$(2.8) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^*(r, a) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K\{[m(R', a) + m(R', b) + O(1)] +$$

$$+ [n(R', a) + n(R', b) - 2n(R', a, b)] + \frac{1}{c} A^{\frac{1}{8}}(R') L(R') + o[A(R')] + o[T(\beta R')]\} R \ln \frac{e}{c},$$

где $|\Delta_\rho(r, a)|$ – угловая мера множества $\Delta_\rho(r, a)$, K – постоянная зависящая от α_1 , α_2 и k .

Доказательство. Индексом i будем отмечать те a -точки $z_i(a)$ и b -точки $z_i(b)$, которые фигурируют в определении $n(R', a, b)$; остальные a -точки (b -точки) из круга $|z| < R'$ будем отмечать индексом $\ell(j) - z_\ell(a)$ ($z_j(b)$). Используя формулу Неванлинны и следующее неравенство

$$(2.9) \quad \left(\sum_\nu d_\nu \right)^\alpha \leq \sum_\nu d_\nu^\alpha, \quad d_\nu > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

получим ($z = ze^{i\varphi}$)

$$P_k^*(r, a) \leq r \cdot \int_{\Delta_\rho(r, a)} \left\{ \frac{k!}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \ln \left| \frac{w(R'e^{i\theta}) - a}{w(R'e^{i\theta}) - b} \right| \right| \times \frac{R' d\theta}{|R'e^{i\theta} - z|^{k+1}} \right\}^{\frac{1}{k}} d\varphi +$$

$$+ K \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{1}{(z_i(b) - z)^k} - \frac{1}{(z_i(a) - z)^k} \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi +$$

$$\begin{aligned}
 & +K \sum_{j=1}^{n(R',b)-n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{d\varphi}{|z-z_j(b)|} + K \sum_{\ell=1}^{n(R',a)-n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{d\varphi}{|z-z_\ell(a)|} + \\
 & +K \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \left| \frac{[\overline{z_i}(a)]^k}{[(R')^2 - \overline{z_i}(a)z]^k} - \frac{[\overline{z_i}(b)]^k}{[(R')^2 - \overline{z_i}(b)z]^k} \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi + \\
 & +K \sum_{\ell=1}^{n(R',a)-n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{|\overline{z_\ell}(a)|}{|(R')^2 - \overline{z_\ell}(a)z|} d\varphi + \\
 & +K \sum_{j=1}^{n(R',b)-n(R',a,b)} r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{|\overline{z_j}(b)|}{|(R')^2 - \overline{z_j}(b)z|} d\varphi + r \cdot \int_{\Delta_\rho(r,a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi = \\
 (2.10) \quad & = J_1^{(k)}(r) + \dots + J_8^{(k)}(r),
 \end{aligned}$$

где K постоянная зависящая от k .

Нетрудно видеть, что

$$(2.11) \quad J_1^{(k)}(r) \leq K_1 \{m(R', a) + m(R', b) + O(1)\} |\Delta_\rho(r, a)|^1$$

Отсюда получим

$$(2.12) \quad \int_{E_\alpha} \frac{J_1^{(k)}(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_1 \{m(R', a) + m(R', b) + O(1)\} R.$$

Обозначим соответственно через

$$\begin{aligned}
 D_{z_0}(r) &= \{z: |z - z_0| \leq r\}, \quad D_{z_0}^{z_1}(r) = \left\{z: \left|z - \frac{z_0 + z_1}{2}\right| \leq r\right\}, \quad z_0, z_1 \in \mathbb{C} \\
 \bar{D}_{z_0}^{z_1}(r) &= D_{z_0}^{z_1}(r) \setminus \{D_{z_0}(r/2) \cup D_{z_1}(r/2)\}, \\
 \rho_i &= |z_i(a) - z_i(b)|, \quad i = 1, 2, \dots, n(R', a, b).
 \end{aligned}$$

Используя неравенство (2.9), имеем

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad & \int_{E_2(R)} J_2^{(k)}(r) dr \leq \\
 & \leq K_2 \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} \rho_i^{\frac{1}{k}} \left\{ \sum_{p=1}^k \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_i(a)|^{\frac{p}{k}} \cdot |z - z_i(b)|^{\frac{k-p+1}{k}}} \right\}.
 \end{aligned}$$

¹В дальнейшем обозначим через K_i , $i = 1, 2, \dots$ постоянные, не обязательно одинаковые, даже на протяжении одной цепочки неравенств.

Обозначим через

$$J_{p,k}(R) = \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_\rho(r,a)} \frac{r \, dr \, d\varphi}{|z - z_i(a)|^{\frac{p}{k}} \cdot |z - z_i(b)|^{\frac{k-p+1}{k}}}, \quad p = 1, 2, \dots, k$$

Исходя из геометрических соображений нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} J_{p,k}(R) &\leq \iint_{D_{z_i(a)}(\rho_i/2)} + \iint_{D_{z_i(b)}(\rho_i/2)} + \iint_{D_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)} + \\ &+ \iint_{D_{z_i(a)}^{z_i(b)}(2R) \setminus D_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)} \frac{r \, dr \, d\varphi}{|z - z_i(a)|^{\frac{p}{k}} \cdot |z - z_i(b)|^{\frac{k-p+1}{k}}} = \\ &:= J_{p,k}^{(1)}(R) + J_{p,k}^{(2)}(R) + J_{p,k}^{(3)}(R) + J_{p,k}^{(4)}(R). \end{aligned}$$

Оценим эти интегралы. Пока мы предположим, что $k > 1$.

Поскольку при $z \in D_{z_i(a)}(\rho_i/2)$ выполняется неравенство $|z - z_i(b)| > \rho_i/2$, то

$$J_{p,k}^{(1)}(R) \leq 2\pi \left(\frac{2}{\rho_i} \right)^{\frac{k-p+1}{k}} \int_0^{\rho_i/2} \frac{r \, dr}{r^{p/k}} \leq 4\pi \rho_i^{1-\frac{1}{k}}.$$

Аналогично получим, что

$$J_{p,k}^{(2)}(R) \leq 4\pi \rho_i^{1-\frac{1}{k}} \quad \text{и} \quad J_{p,k}^{(3)}(R) \leq 4\pi \rho_i^{1-\frac{1}{k}}$$

Исходя из геометрических соображений нетрудно видеть, что $J_{p,k}^{(4)}(R) \leq K \cdot R^{1-\frac{1}{k}}$.

При $k = 1$, имеем $p = 1$. Очевидно, что $J_{1,1}^{(1)}(R) \leq 2\pi$, $J_{1,1}^{(2)}(R) \leq 2\pi$, $J_{1,1}^{(3)}(R) \leq 4\pi$.

Из геометрических соображений следует, что $J_{1,1}^{(4)}(R) \leq K(\ln R - \ln \rho_i)$. Учитывая эти оценки, для $k \geq 1$ получаем

$$J_{p,k}(R) \leq K \left(\rho_i^{1-\frac{1}{k}} + R^{1-\frac{1}{k}} + \ln R - \ln \rho_i \right).$$

Следовательно, из неравенства (2.13) имеем

$$(2.14) \quad \int_{E_\alpha(R)} J_2^{(k)}(r) \, dr \leq K_2 \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} \rho_i^{\frac{1}{k}} \left(\rho_i^{1-\frac{1}{k}} + R^{1-\frac{1}{k}} + \ln R - \ln \rho_i \right).$$

В работе [20] для ρ_i устанавливается следующая оценка

$$(2.15) \quad \rho_i < d(E_i(R')) < K R \varphi^8(R') A^{-\frac{1}{2}}(R'), \quad i = 1, 2, \dots, n(R', a, b),$$

где $d(x)$ – диаметр множества X , $\varphi(r)$ – произвольная монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \rightarrow +\infty$.

Учитывая это, оценка из неравенства (2.14) получит вид

$$\int_{E_\alpha(R)} J_2^{(k)}(r) dr \leq K_2 \cdot \left\{ \varphi(R') A^{-\frac{1}{2}}(R') + \varphi^{\frac{1}{k}}(R') \cdot A^{-\frac{1}{2k}} \right\} n(R', a, b) R$$

Отсюда, используя неравенства (2.6) и (2.7), и взяв $\varphi^{18}(r) < A(r)$, получим

$$(2.16) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_2^{(k)}(r) dr}{\max\{\Delta_\rho(r, a), c\}} \leq \frac{K_2}{c} \left\{ A^{-\frac{1}{2k}}(R') + A^{\frac{3}{5}}(R') + L(R') \right\} R.$$

Для оценки $J_3^{(k)}(r)$ и $J_4^{(k)}(r)$ введём следующие обозначения.

$$\delta(z_0, c) = \{z: |z| = r, |\arg(z/z_0)| \leq c\}, \text{ где } z_0 \in \{|z| < R'\};$$

$$D_{\alpha_1, \alpha_2}^c(R) = \{z: \alpha_1 R < |z| < \alpha_2 R, |\arg(z/z_0)| \leq c\};$$

$$D^c(R) = \{z: 0 < |z| \leq R', |\arg(z/z_0)| \leq c\};$$

$$E_{z_0}^c(R) = \{z: |z - z_0| \leq c \cdot R\};$$

$$D_{z_0}^c(R) = \{z: |z - z_0| \leq \bar{R}\}, \text{ где } \bar{R} = 2|z_0| \cdot c.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_\rho(z, a)} \frac{r d\varphi}{|z - z_0|} &= \int_{\Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} + \int_{\Delta_\rho(z, a) \cap \delta(z_0, c)} \frac{r d\varphi}{|z - z_0|} \leq \\ &\leq \int_{\delta(z_0, c)} \frac{r d\varphi}{|z - z_0|} + |\Delta_\rho(z, a)| \cdot \max_{z \in \Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} \frac{r}{|z - z_0|} \end{aligned}$$

Ясно, что когда $|z_0| \leq \alpha_1 R/2$, то

$$\int_{E_\alpha(R)} \int_{\delta(z_0, c)} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} \leq KcR.$$

Предположим, что $\alpha_1 R/2 < |z_0| \leq \alpha_1 R$, тогда

$$\int_{E_\alpha(R)} \int_{\delta(z_0, c)} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} \leq \iint_{D_{z_0}^c(\bar{R})} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} + \iint_{D_{\alpha_1, \alpha_2}^c(R) \setminus D_{z_0}^c(\bar{R})} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} = J_1(R) + J_2(R).$$

Нетрудно видеть, что

$$J_1(R) = \iint_{D_{z_0}^c(\bar{R})} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} \leq Kc|z_0| < KcR.$$

Оценим интеграл $J_2(R)$. Пусть $\gamma(\tau)$ та дуга из множества $\{|z - z_0| = \tau\} \cap D^c(2R)$, $\bar{R} < \tau < 2R$, которая близко расположена к области $D_{\alpha_1, \alpha_2}^c(R)$ или пересекается с ней. Обозначим через $\ell(\tau)$ длину дуги $\gamma(\tau)$, а через $c_1(\tau)$ – величину

того угла, под которым видна дуга $\gamma(\tau)$ из точки z_0 . Исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что $\ell(\tau) \leq KcR$.

Следовательно,

$$J_2(R) \leq \int_{\bar{R}}^{2R} \int_0^{c_1(\tau)} d\tau d\theta = \int_{\bar{R}}^{2R} \frac{\ell(\tau)}{\tau} d\tau \leq KcR \ln \frac{1}{c}.$$

Суммируя полученные оценки для $J_1(R)$ и $J_2(R)$, получим

$$(2.17) \quad \int_{E_\alpha(R)} \int_{\delta(z_0, c)} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_0|} \leq KcR \ln \frac{e}{c}.$$

При $\alpha_1 R < |z_0| < \alpha_3 R$ доказательство неравенства (2.17) приводится аналогично доказанным выше случаям.

Очевидно, что

$$\max_{z \in \Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} \frac{r}{|z - z_0|} \leq \begin{cases} \frac{r}{|z - z_0|}, & r \notin E_{z_0}^c(R) \\ \frac{1}{c}, & r \in E_{z_0}^c(R). \end{cases}$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \int_{E_\alpha(R)} \frac{|\Delta_\rho(r, a)| \max_{z \in \Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} \frac{r}{|z - z_0|}}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} dr \leq \\ & \leq \int_{E_\alpha(R)} \max_{z \in \Delta_\rho(z, a) \setminus \delta(z_0, c)} \frac{r}{|z - z_0|} dr \leq KR \ln \frac{e}{c}. \end{aligned}$$

Отсюда используя неравенство (2.17), получим

$$\int_{E_\alpha(R)} \frac{\int_{\delta(z_0, c)} \frac{r}{|z - z_0|} d\varphi}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} dr \leq KR \ln \frac{e}{c}.$$

Учитывая это неравенство имеем

$$(2.18) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_3^{(k)}(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_3 \{n(R', b) - n(R', a, b)\} R \ln \frac{e}{c},$$

$$(2.19) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_4^{(k)}(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_4 \{n(R', a) - n(R', a, b)\} R \ln \frac{e}{c}.$$

Используя неравенство (2.9) получим

$$\int_{E_\alpha(R)} J_5(r) dr \leq$$

$$\leq K_5 \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} \rho_i^{\frac{1}{k}} \left\{ \sum_{\rho=1}^k \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{R^{\frac{r}{k}} |\overline{z_i}(a)|^{\frac{k-p}{k}} |\overline{z_i}(b)|^{\frac{p-1}{k}} r dr d\varphi}{|(R')^2 - \overline{z_i}(a)z|^{\frac{p}{k}} \cdot |(R')^2 - \overline{z_i}(b)z|^{\frac{k-p+1}{k}}} \right\}$$

Очевидно, что

$$\int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{R^{\frac{r}{k}} |\overline{z_i}(a)|^{\frac{k-p}{k}} |\overline{z_i}(b)|^{\frac{p-1}{k}} r dr d\varphi}{|(R')^2 - \overline{z_i}(a)z|^{\frac{p}{k}} \cdot |(R')^2 - \overline{z_i}(b)z|^{\frac{k-p+1}{k}}} \leq K_5 \cdot R^{1-\frac{1}{k}}, \quad p = 1, 2, \dots, k$$

Следовательно

$$\int_{E_\alpha(R)} J_5(r) dr \leq K_5 R^{1-\frac{1}{k}} \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} \rho_i^{\frac{1}{k}}.$$

Отсюда, как и при выводе неравенства (2.16), получим

$$(2.20) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_5(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_5 \{A^{\frac{1}{8}}(R')L(R') + o(A(R'))\}R.$$

Нетрудно видеть, что

$$r \cdot \int_{E_\alpha(R)} \frac{|z_\ell(a) d\varphi}{|(R')^2 - \overline{z_\ell}(a)z|} \leq K_6 \frac{r}{R' - r} |\Delta_\rho(r, a)|,$$

Следовательно,

$$(2.21) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_6(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_6 \{n(R', a) - n(R', a, b)\}R.$$

Аналогично

$$(2.22) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{J_7(r) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \leq K_7 \{n(R', b) - n(R', a, b)\}R.$$

Из леммы 2.2 получим, что

$$(2.23) \quad \int_{E_\alpha(R)} \frac{\int \frac{\Delta_\rho(r, a)}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi}{\max\{|\Delta_\rho(r, a)|, c\}} dr = o[T(\beta R, w)].$$

Окончательно, из неравенств (2.10)-(2.12), (2.16), (2.18)-(2.23), получим соотношение (2.8). Лемма доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C}$, $|a_\nu - b_\nu| > 2$, $c_\nu \in (0, 1)$, $\nu = 1, 2, \dots, q$ – фиксированные числа.

Записав для каждой тройки $\{a_\nu, b_\nu, c_\nu\}$ неравенство (2.8) леммы 2.3 и просуммировав, получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^*(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq \\
 & \leq K_1 R \cdot \sum_{\nu=1}^q [m(R', a_\nu) + m(R', b_\nu) + O(1)] + \\
 & + K_2 R \cdot \sum_{\nu=1}^q [n(R', a_\nu) + n(R', b_\nu) - 2n(R', a_\nu, b_\nu)] + \\
 (3.1) \quad & + K_3 R \cdot \left\{ A^{\frac{1}{8}}(R') L(R') \sum_{\nu=1}^q \frac{1}{c_\nu} + o(A(R')) + o[T(\beta R')] \right\}, \quad R > R_0.
 \end{aligned}$$

По второй основной теореме Р. Неваллины (с учётом леммы о логарифмической производной) при $R > R_0^*$, имеем

$$(3.2) \quad \sum_{\nu=1}^q [m(R', a_\nu) + m(R', b_\nu) - 2n(R', a_\nu, b_\nu)] \leq 3T(R')$$

Положим теперь $\alpha_1 = 1/(\lambda + 2)$, $\alpha_2 = 1/(\lambda + 1)$. Из оценки $L_2 \leq [A(r)^{2/3}]$, $r \notin E$, $\int_E d \ln t < \infty$ (см. [1], п. 326) вытекает, что при $R > R_1^*$ в каждом интервале $(\frac{1+\alpha_2}{2} R, \frac{3+\alpha_2}{4} R)$ найдётся такая точка $R' = \alpha_3(R)R = \alpha_3 R$, в которой верно неравенство $L(R') = L(\alpha_3 R) \leq [A(\alpha_3 R)]^{\frac{2}{3}}$ (здесь мы учли, что множество E имеет конечную логарифмическую меру). Отсюда учитывая очевидное неравенство

$$(3.3) \quad A(r) < T(\beta r) / \ln \beta \quad (\beta > 1)$$

имеем

$$(3.4) \quad L(R') \leq \left[\left(\ln \frac{1}{\alpha_3} \right)^{-1} T(R) \right]^{\frac{2}{3}},$$

Далее положим $\beta = (\lambda + 2)/(\lambda + 1)$ и, используя лемму 2.2 работы [17], получим

$$(3.5) \quad \sum_{\nu=1}^q [n(R', a_\nu) + n(R', b_\nu) - 2n(R', a_\nu, b_\nu)] \leq K(\lambda) T(\beta R).$$

Из неравенств (3.1)-(3.5) следует, что

$$(3.6) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^*(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(\beta R) R.$$

С другой стороны, ясно, что

$$P_k(r, a_\nu) = P_k^*(r, a_\nu) + P_k^{**}(r, a_\nu),$$

где $P_k^{**}(r, a_\nu) = r \cdot \int_{\Delta_\rho^*(r, a_\nu)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a_\nu) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} &= \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^*(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} + \\ &+ \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^{**}(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношение (2.4) леммы 2.2 и неравенство (3.6) получим

$$(3.7) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k(r, a_\nu) dr}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(\beta R).$$

Применяя теорему о среднем значении, в некоторой точке $R^* \in E_\alpha(R)$, получим

$$(3.8) \quad \sum_{\nu=1}^q \frac{P_k(R^*, a_\nu)}{\max\{|\Delta_\rho(R^*, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(\beta R).$$

Выберем множество $R_n = R_n(\alpha_1, \beta)$ значений R , зависящих только от α_1 и β , для которых выполняется неравенство

$$(3.9) \quad T(\beta R_n) = T\left(\frac{\beta}{\alpha_1} \cdot \alpha_1 R_n\right) \leq \left(\frac{\beta}{\alpha_1}\right)^{\lambda+1} T(\alpha_1 R_n).$$

Возможность такого выбора обеспечивается леммой 1.3.1. из работы [2]. Ясно, что для таких R_n существует множество $R_n^* = R_n^*(\alpha_1, \beta)$ значений R^* , что выполняется неравенство (3.8). Из неравенств (3.8) и (3.9) получим

$$\sum_{\nu=1}^q \frac{P_k(R_n^*, a_\nu)}{\max\{|\Delta_\rho(R_n^*, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \leq K(k, \lambda) T(\beta R_n^*).$$

Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\rho = \min \left\{ \min_{i \neq j} \frac{|a_i - a_j|}{2}, 1 \right\}$, тогда ясно что $\Delta_\rho(r, a_i) \cap \Delta_\rho(r, a_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, следовательно

$$(3.10) \quad \sum_{\nu=1}^q |\Delta_\rho(r, a_\nu)| \leq 2\pi.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, при $r = r_n > r(\varepsilon)$, где ε – произвольное число большее нуля, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{D_k(a_\nu) - \varepsilon}{\ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \left[\sum_{\nu=1}^q \frac{D_k(a_\nu) - \varepsilon}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[\sum_{\nu=1}^q \max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{\nu=1}^q \frac{P_k(r, a_\nu)}{T(r) \max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \end{aligned}$$

$$(3.11) \quad \times \left[\sum_{\nu=1}^q \max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Выберем в качестве значений c_ν , $\nu = 1, 2, \dots, q$ следующие числа $c_\nu = D_k(a_\nu)/K_0$, где K_0 – постоянная фигурирующая в неравенстве (1.1). Ясно, что $\sum_{\nu=1}^q c_\nu \leq 1$.

Отсюда, используя теорему 1.1, неравенства (3.10) и (3.11), получим

$$\sum_{\nu=1}^q \left[\frac{D_k(a_\nu) - \varepsilon}{\ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq K(k, \lambda).$$

Так как ε произвольное число, то получим утверждение теоремы 1.2. $\square$

Доказательство теоремы 1.3 получим подставив в неравенстве (3.11) значения $c_\nu = 1/q$, $\nu = 1, 2, \dots, q$ и применив к полученному неравенству последние рассуждения.

Доказательство следствия 1.1. Нетрудно видеть, что

$$(3.12) \quad \frac{m(r, a_\nu)}{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|} \leq P(r, a_\nu) + O(1).$$

Поскольку $\delta(a, w) = \delta(\ell a, \ell w)$ для любого $\ell \in R$, то мы предполагаем, что $|a_i - a_j| > 2$ ($1 \leq i < j \leq n$). Отсюда следует, что $\Delta(r, a_i) \cap \Delta(r, a_j) = \Phi$, при $i \neq j$. Ясно, что $|\Delta_\rho(r, a_\nu)| \geq |\Delta_\rho(r, a_\nu)|$.

Следовательно, используя неравенство Гельдера и неравенство (3.12), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^q \left[\frac{m(r, a_\nu)}{\ln \frac{e}{c_\nu}} \right]^{\frac{1}{3}} &\leq \left(\sum_{\nu=1}^q \frac{\rho(r, a_\nu) + O(1)}{\max\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|, c_\nu\} \ln \frac{e}{c_\nu}} \right)^{\frac{1}{3}} \times \\ &\times \left(\sum_{\nu=1}^q \{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|^{\frac{1}{2}} \cdot \max^{\frac{1}{2}}\{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|\}, c_\nu\} \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Взяв в качестве значений $c_\nu = \delta(a_\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots, q$ и применяя теорему 1.1 и неравенство Коши-Буняковского, получим соотношение (1.7).

Доказательство следствия 1.2. В работах [22] и [2] соответственно, доказано, что для каждой мероморфной функции $w(z)$ конечного и нижнего порядка λ и любого числа $a \in \mathbb{C}$ имеем

$$\beta(a) = \beta(a, w) \leq \begin{cases} \frac{\pi \lambda}{\sin \pi \lambda}, & \text{если } 0 \leq \lambda \leq 0,5 \\ \pi, \lambda, & \text{если } \lambda > 0,5. \end{cases}$$

$$(3.13) \quad \sum_{\nu=1}^q \beta(a_\nu) \leq K(\lambda + 1), \quad a_\nu \in \mathbb{C}, \quad \nu = 1, \dots, q.$$

Выберем в качестве значений c_ν , $\nu = 1, 2, \dots, q$ следующие числа

$$c_\nu = \begin{cases} \frac{\beta(a_\lambda)}{2}, & \text{если } 0 \leq \lambda \leq 0,5 \\ \frac{\beta(a_\lambda)}{\pi\lambda}, & \text{если } \lambda > 0,5. \end{cases}$$

Так как $\beta(a_\lambda) \leq D(a_\nu)$, то, используя неравенства (3.11), (3.13) и теорему 1.1, получаем утверждение следствия 1.2. $\square$

Автор выражает благодарность Г. А. Барсегяну за ценные обсуждения результатов.

Abstract. Some R. Nevanlinna defect-relation-type theorems for new “exclusive” values are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ (1941).
- [2] В. П. Петренко, Рост мероморфных функций, Харьков, Вища школа (1978).
- [3] Н. В. Говоров, “О проблеме Пэyli”, Функц. анализ и его приложения, **3**, вып. 2, 38 – 43 (1969).
- [4] А. А. Гольдберг, “К вопросу о связи между дефектом и отклонением мероморфной функции”, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, вып. 29, 31 — 35 (1978).
- [5] А. А. Гольдберг, В. И. Островский, “Некоторые теоремы о росте мероморфных функций”, Записки мат. отделения Харьковского гос. универ-та и Харьковского мат. общества, Серия 4, **27**, 3 — 37 (1961).
- [6] А. Э. Еременко, “Об отклонениях мероморфных функций конечного порядка”, Теория функций, анализ и их приложения, Харьков: Вища школа, вып. 40, 56 — 64 (1983).
- [7] Г. А. Барсегян, Докторская диссертация, Тбилиси (1984).
- [8] Г. А. Барсегян, “Исключительные значения, ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций”, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **16**, no. 5, 408 – 423 (1981).
- [9] Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, “Исключительные значения мероморфных функций, определяемые посредством производных высшего порядка”, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **28**, no. 3, 89 – 91 (1993).
- [10] W. H. J. Fuchs, “A theorem on the Nevanlinna Deficiencies of Meromorphic Functions of Finite Order”, Annals of Mathematics Second Series, **68**, no. 2, 203 – 209 (1958).
- [11] W. H. J. Fuchs, “Proof of a conjecture of G. Pólya concerning gap series”, Illinois J. Math., **7**, N 4, 661 – 667 (1963).
- [12] E. Mues, “Über eine Vermutung von Hayman”, Math. Z., **119**, 11 – 20 (1971).
- [13] У. К. Хейман, Мероморфные функции, М., Мир (1966).
- [14] Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, “Соотношения типа тождества Картана для величин, ассоциированных с логарифмическими производными мероморфных функций”, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **XXV**, N 5, 474 – 488 (1990).
- [15] В. Г. Петросян, “Соотношения типа тождества Картана”, ДАН Арм. ССР, **93**, N 5, 200 – 206 (1992).
- [16] В. Г. Петросян, “Некоторые оценки мер исключительности исключительных значений мероморфных функций конечного нижнего порядка”, Арм. НИИ НТИ, N 73 AP-89, деп., 20с.
- [17] В. Г. Петросян, “Оценки мер исключительности исключительных значений ассоциированных с логарифмическими производными мероморфных функций”, **48**, N 6 (2013).

- [18] Г. А. Барсегян, “О геометрии мероморфных функций”, Математический сборник, **114** (156), N 2, 179 – 225 (1981).
- [19] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, М., Наука (1970).
- [20] Г. А. Барсегян, “Свойство близости α -точек мероморфных функций”, Матем. сб., **120** (162):1, 42 – 67 (1983).
- [21] В. П. Петренко, “Некоторые оценки для величин дефектов мероморфной функции”, Сиб. матем. журн., **7**, N 6, 1319 – 1336 (1966).
- [22] В. П. Петренко, “Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **33**, N 2, 414 – 454 (1969).

Поступила 28 сентября 2023

После доработки 27 ноября 2023

Принята к публикации 15 июня 2024