Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 2, 2025, стр. 3 – 14.

О ТРАНЗИТИВРЫХ И ОДНОРОДНЫХ БИНАРНЫХ G-ПРОСТРАНСТВАХ

П. С. ГЕВОРКЯН, К. М. МЕЛЕНДЕС

Московский педагогический государственный университет, Россия
Universidad Pedagógica Nacional – Unidad 201 Oaxaca, Camino a la Zanjita S/N[1]
E-mails: *pgev@yandex.ru; qmoralesme@conacyt.mx*

Аннотация. В данной статье изучаются понятия транзитивности и однородности в бинарных G-пространствах. Эти понятия совпадают в классе дистрибутивных бинарных G-пространств. Доказано, что в случае компактной группы G дистрибутивные транзитивные бинарные G-пространства являются пространствами смежных классов группы G с подходящим образом определённым бинарным G-действием. Однородные бинарные G-пространства топологически однородны и разбиваются на различные типы стабилизации. Для каждого из этих типов приведены соответствующие примеры.

MSC2020 number: 54H15.

Ключевые слова: однородные пространства; транзитивные действия; бинарные G-действия.

Введение

Изучение однородных G-пространств связано с классификацией типов G-орбит. Исследование орбитных типов позволило подробно описать топологическую структуру однородных G-пространств как в общем случае, так и в важных частных случаях, например, в случаях свободных или собственных действий группы G. В частности, это позволило построить универсальные G-пространства для многих классов G-пространств.

Орбиты бинарных G-пространств изучались в работе [1], где было установлено, что многие понятия для G-пространств, такие как орбиты или пространство орбит, непосредственно не переносятся на бинарные G-пространства. Причина в том, что в бинарных G-пространствах орбиты могут пересекаться. Однако в работе [2] было доказано, что в специальном случае дистрибутивных бинарных G-пространств орбиты либо совпадают, либо имеют пустое пересечение. В общем случае орбиты могут быть как конечно, так и бесконечно порожденными. В случае дистрибутивных бинарных G-пространств орбиты конечно порождены.

[1]Второй автор частично поддержан проектом Catedras CONACyT Project 1522

Вводятся понятия транзитивных и однородных бинарных G-пространств. Для дистрибутивных бинарных G-пространств эти понятия совпадают. Дана классификация транзитивных дистрибутивных бинарных G-пространств в случае компактной группы G. Эти пространства являются смежными классами группы G по замкнутым нормальным подгруппам с бинарным действием G посредством левого скрученного умножения. Как следствие, дана классификация свободных транзитивных дистрибутивных бинарных G-пространств при компактной группе G.

Однородные бинарные G-пространства являются топологически однородными пространствами. Свойства стабилизации однородных бинарных G-пространств играют важную роль для их исследования. Однородное бинарное G-пространство может иметь различные свойства стабилизации в различных точках. Эти свойства разделяют класс однородных бинарных G-пространств на типы, принимающие значения в натуральных числах или равные ∞. Транзитивные бинарные G-пространства являются примерами первого типа. В работе [1] приведен пример бесконечно порожденного бинарного G-пространства. Подобные конструкции дают примеры дискретных бинарных G-пространств различных типов. Применение гиперсферических координат в вещественных евклидовых n-мерных пространствах дает примеры однородных бинарных G-пространств каждого конечного типа в случае недискретной абелевой топологической группы G.

1. Предварительные сведения

В дальнейшем G и H обозначают топологические группы, а X и Y — топологические пространства. Предполагается, что все отображения являются непрерывными.

Напомним, что *действие* группы G на пространстве X — это отображение

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X,$$

такое, что

$$\alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h, x)),$$

$$\alpha(e, x) = x$$

для любых $g, h \in G$ и $x \in X$, где e — нейтральный элемент группы G. Пространство X вместе с заданным действием α группы G называется *G-пространством.*

Обычно отображение α опускается и вместо $\alpha(g, x)$ используется запись gx. Тогда приведенные выше равенства принимают вид $g(hx) = (gh)x$ и $ex = x$.

Отображение $\varphi : X \longrightarrow Y$ между G-пространствами (G, X, α) и (G, Y, β) называется *эквивариантным*, если выполняется равенство $\varphi(\alpha(g, x)) = \beta(g, \varphi(x))$, или, в более простой записи, $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ для любых $g \in G,\ x \in X$.

Если X — G-пространство и $x \in X$, то подпространство $Gx = \{gx;\ g \in G,\ x \in X\} \subset X$ называется *орбитой* или *G-орбитой* точки $x \in X$.

G-пространство X называется *транзитивным*, если $Gx = X$ для любой точки $x \in X$. Известно, что если G — компактная группа, то любое транзитивное G-пространство эквивариантно гомеоморфно некоторому факторпространству $G|H$ топологической группы G по замкнутой подгруппе H с действием G посредством левого умножения: $g(g'H) = (gg')H$ для любых $g, g' \in G$.

Отображение $\mu : G \times X^2 \longrightarrow X$ называется *бинарным действием* топологической группы G на пространстве X, если выполняются следующие равенства:

$$\mu(gh, x, y) = \mu(g, x, \mu(h, x, y)),$$

$$\mu(e, x, y) = y$$

для любых $g, h \in G$ и $x, y \in X$. В этом случае тройка (G, X, μ) называется *бинарным G-пространством*.

По аналогии с обычным действием группы G, вместо $\mu(g, x, y)$ применяется запись $g(x, y)$. В этих обозначениях равенства в определении бинарного действия принимают вид:

$$gh(x, y) = g(x, h(x, y)),$$

$$e(x, y) = y.$$

Отображение $\varphi : X \to Y$ между бинарными G-пространствами (G, X, μ) и (G, Y, ν) называется *биэквивариантным*, если следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{tikzcd} G \times X \times X \arrow[r, "1\times\varphi\times\varphi"] \arrow[d, "\mu"'] & G \times Y \times Y \arrow[d, "\nu"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

или, эквивалентно, если $\varphi(g(x, x')) = g(\varphi(x), \varphi(x'))$ для любых $g \in G$ и $x, x' \in X$.

Отображение $\varphi : X \to Y$ называется *биэквиморфизмом*, если оно является биэквивариантным гомеоморфизмом с биэквивариантным обратным отображением.

Для подмножества $K \subset G$ группы G и подмножества $A \subset X$ бинарного G-пространства X обозначим

$$K(A, A) = \{g(a_1, a_2);\ g \in K,\ a_1, a_2 \in A\}.$$

В частности, $g(A, A) = \{g\}(A, A)$ и $G(x, y) = G(\{x\}, \{y\})$.

Подмножество $A \subset X$ бинарного G-пространства X называется *G-би-инвариантным* или просто *би-инвариантным*, если выполняется равенство $G(A, A) = A$.

Если X — бинарное G-пространство и $x \in X$, то минимальное би-инвариантное подмножество X, содержащее x, называется *орбитой* точки x, и обозначается $[x]$.

Множество $G_{(x,x)} = \{g \in G;\ g(x, x) = x\}$ является подгруппой группы G, которую мы называем *стационарной подгруппой* или *подгруппой изотропии* точки $x \in X$.

Бинарное G-пространство называется *дистрибутивным*, если выполняется равенство

$$g(h(x, x'), h(x, x'')) = h(x, g(x', x'')) \tag{1.1}$$

для любых точек $x, x', x'' \in X$ и любых элементов $g, h \in G$.

В работе [1] показано, что для дистрибутивных G-пространств справедливо равенство $[x] = G(x, x)$.

Эти и другие определения, понятия и результаты, использованные в данной статье без ссылок, можно найти в работах [3] –[10].

2. Транзитивные бинарные G-пространства

Рассмотрим топологическую группу G и топологическое пространство X.

Определение 2.1. *Бинарное действие группы G на пространстве X называется транзитивным, если выполнено условие $G(x, x) = X$ для любой точки $x \in X$, то есть если существует ровно одна орбита, равная самому X. В этом случае X называется транзитивным бинарным G-пространством.*

Определение 2.2. *Бинарное действие группы G на пространстве X называется свободным, если для любой точки $x \in X$ стационарная группа $G_{(x,x)}$ является тривиальной. В этом случае пространство X называется свободным бинарным G-пространством.*

Предложение 2.1. *Пусть G — компактная группа, а $H \subset G$ — замкнутая нормальная подгруппа. Тогда факторпространство $G|H$ вместе с бинарным действием $\mu : G \times G|H \times G|H \to G|H$ группы G, заданным формулой*

$$\mu(g, g_1H, g_2H) = g_1 g g_1^{-1} g_2 H, \quad \text{или} \quad g(g_1H, g_2H) = g_1 g g_1^{-1} g_2 H \tag{2.1}$$

для любых элементов $g, g_1, g_2 \in G$, является транзитивным бинарным G-пространством.

Доказательство. Поскольку H является нормальной подгруппой группы G, несложно доказать, что отображение μ определено корректно.

Заметим, что μ действительно является бинарным действием группы G на $G|H$: Действительно, $e(g_1H, g_2H) = g_2H$ и

$$gg'(g_1H, g_2H) = g_1gg'g_1^{-1}g_2H = g_1gg_1^{-1}g_1g'g_1^{-1}g_2H = \\ = g(g_1H, g_1g'g_1^{-1}g_2H) = g(g_1H, g'(g_1H, g_2H)).$$

Очевидно, что бинарное действие μ является транзитивным.

Предложение 2.2. *Пусть G — компактная группа, а H и K — замкнутые нормальные подгруппы группы G. Тогда между транзитивными бинарными G-пространствами $G|H$ и $G|K$ существует биэквивариантное отображение $G|H \to G|K$ тогда и только тогда, когда H является подгруппой K.*

Доказательство. Пусть H является подгруппой K. Определим отображение $f : G|H \to G|K$ формулой $f(gH) = gK$. Заметим, что f корректно определено, то есть если $gH = g'H$, то $f(gH) = f(g'H)$. Действительно, из $gH = g'H$ следует, что $g^{-1}g' \in H \subset K$, $g^{-1}g'K = K$, $g'K = gK$, а значит $f(gH) = f(g'H)$.

Отображение f биэквивариантно:

$$f(g(g_1H, g_2H)) = f(g_1gg_1^{-1}g_2H) = g_1gg_1^{-1}g_2K = \\ = g(g_1K, g_2K) = g(f(g_1H), f(g_2H)).$$

Обратно, пусть $f : G|H \to G|K$ — произвольное биэквивариантное отображение, и предположим, что $f(H) = aK$ для некоторого $a \in G$. Из биэквивариантности отображения f следует, что для любого $h \in H$ выполняется $f(h(H, H)) = h(f(H), f(H)) = h(aK, aK) = aha^{-1}aK = ahK$. С другой стороны, $f(h(H, H)) = f(hH) = f(H) = aK$. Таким образом, $ahK = aK$, $hK = K$. Следовательно, $h \in K$, а значит, $H \subset K$.

Теорема 2.1. *Пусть G — компактная группа. Тогда любое транзитивное дистрибутивное бинарное G-пространство X биэквиморфно бинарному G-пространству $(G, G|H, \mu)$, где H — некоторая нормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Выберем любую точку $x \in X$ и рассмотрим подгруппу изотропии $H = G_{(x,x)}$ точки x. Для любого $h \in H$ и $g \in G$ из дистрибутивности бинарного действия следует, что

$$ghg^{-1}(x,x) = gh(x, g^{-1}(x,x)) = g^{-1}(gh(x,x), gh(x,x)) =$$
$$= g^{-1}(g(x, h(x,x)), g(x, h(x,x))) = g^{-1}(g(x,x), g(x,x)) =$$
$$= g(x, g^{-1}(x,x)) = e(x,x) = x.$$

Таким образом, $gHg^{-1} = H$, то есть H является нормальной подгруппой группы G.

Теперь определим $\varphi : G|H \to X$ формулой $\varphi(gH) = \varphi(gG_{(x,x)}) = g(x,x)$, где $g \in G$, $x \in X$.

Заметим, что отображение φ является биекцией. Оно также непрерывно по определению факторпространства $G|H$ и непрерывности отображения $g \mapsto g(x,x)$. Поскольку пространство $G|G_{(x,x)}$ компактно, отображение φ является гомеоморфизмом.

Остается показать, что φ биэквивариантно, то есть выполняется равенство

$$\varphi(g(g_1H, g_2H)) = g(\varphi(g_1H), \varphi(g_2H)).$$

Используя дистрибутивность бинарного действия группы G на X, получаем:

$$\varphi(g(g_1H, g_2H)) = \varphi(g_1gg_1^{-1}g_2H) = g_1gg_1^{-1}g_2(x,x) =$$
$$= g_1(x, gg_1^{-1}g_2(x,x)) = g_1(x, g(x, g_1^{-1}g_2(x,x))) = g(g_1(x,x), g_1(x, g_1^{-1}g_2(x,x))) =$$
$$g(g_1(x,x), g_2(x,x)) = g(\varphi(g_1H), \varphi(g_2H)).$$

для любых $g, g_1, g_2 \in G$, $x \in X$. Следовательно, φ — биэквиморфизм.

Следующая теорема является следствием теоремы 2.1 и предложения 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть G — компактная группа. Тогда любое свободное транзитивное дистрибутивное бинарное G-пространство биэквиморфно бинарному G-пространству (G, G, η) с бинарным действием*

$$\eta(g, g_1, g_2) = g_1gg_1^{-1}g_2, \tag{2.2}$$

где $g, g_1, g_2 \in G$.

3. Однородные бинарные G-пространства

Определение 3.1. *Пусть X — бинарное G-пространство. Если существует точка $x \in X$ такая, что $[x] = X$, то пространство X называется однородным бинарным G-пространством. В этом случае x называется точкой стабилизации пространства X.*

Следующий пример показывает, что если X является однородным бинарным G-пространством, то не обязательно каждая точка $x \in X$ является точкой стабилизации X.

Пример 3.1. *Бинарное G-пространство (G, X, μ), где $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{Z}$, а бинарное действие $\mu : G \times X \times X \to X$ задано правилом*

$$\mu(n, x, x') = n(x, x') = nx + x', \tag{3.1}$$

является однородным. Заметим, что $x = 1$ — точка стабилизации: $[1] = G(1, 1) = X$. Однако $x = 0$ не является точкой стабилизации, так как $[0] = G(0, 0) = \{0\} \neq X$.

Заметим, что транзитивные бинарные G-пространства являются однородными. Обратное неверно. Однако для дистрибутивных бинарных G-пространств верно следующее.

Предложение 3.1. *Любое однородное дистрибутивное бинарное G-пространство является транзитивным.*

Доказательство. Рассмотрим однородное дистрибутивное бинарное G-пространство X. Согласно определению 3.1, существует точка $x_0 \in X$, такая что $[x_0] = X$. Так как X является дистрибутивным, то справедливо равенство $[x_0] = G(x_0, x_0)$, и для любой точки $x \in X$, согласно [2, предложение 2], выполняется $G(x, x) = [x] = [x_0] = G(x_0, x_0) = X$. Следовательно, X — транзитивное бинарное G-пространство.

Теорема 3.1. *Однородные бинарные G-пространства являются топологически однородными пространствами.*

Доказательство. Пусть X — однородное бинарное G-пространство. Согласно определению 3.1, существует точка $x_0 \in X$ такая, что $[x_0] = X$.

Для доказательства топологической однородности пространство X достаточно показать, что для любой точки $x^* \in X$ существует гомеоморфизм $\varphi : X \to X$ такой, что $\varphi(x_0) = x^*$.

Рассмотрим следующую последовательность подмножеств бинарного G-пространства X:

$$G^1(x_0) = G(x_0, x_0), \ \dots, \ G^n(x_0) = G(G^{n-1}(x_0), G^{n-1}(x_0)), \ \dots \tag{3.2}$$

где $n = 1, 2, \dots$

Из [1, предложение 7] следует, что

$$[x_0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} G^n(x_0),$$

а значит, по условию,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G^n(x_0).$$

Следовательно, для любой точки $x \in X$ существует натуральное число n такое, что $x \in G^n(x_0)$.

Предположим, что $x^* \in G^1(x_0) = G(x_0, x_0)$, то есть существует элемент $g_0 \in G$ такой, что $g_0(x_0, x_0) = x^*$. Тогда отображение $\varphi : X \to X$, определяемое как

$$\varphi(x) = g_0(x_0, x),$$

является гомеоморфизмом и переводит x_0 в x^*: $\varphi(x_0) = g_0(x_0, x_0) = x^*$.

Допустим, что для любой точки $x \in G^n(x_0)$ существует гомеоморфизм $\varphi : X \to X$ такой, что $\varphi(x_0) = x$, и рассмотрим точку $x^* \in G^{n+1}(x_0)$. Поскольку $G^{n+1}(x_0) = G(G^n(x_0), G^n(x_0))$, то существуют $x', x'' \in G^n(x_0)$ и $g' \in G$, такие что

$$x^* = g'(x', x'').$$

Так как $x'' \in G^n(x_0)$, существует гомеоморфизм $\varphi' : X \to X$ такой, что

$$\varphi'(x_0) = x''.$$

Рассмотрим отображение $\varphi'' : X \to X$, определяемое как

$$\varphi''(x) = g'(x', x),$$

для любого $x \in X$, которое является гомеоморфизмом. Тогда для гомеоморфизма $\varphi = \varphi'' \circ \varphi' : X \to X$ выполняется

$$\varphi(x_0) = \varphi''(\varphi'(x_0)) = \varphi''(x'') = g'(x', x'') = x^*,$$

что и требовалось доказать.

Определение 3.2. *Однородное бинарное G-пространство X назовем стабилизирующимся на n-м шаге в точке x, если $G^n(x) = X$, но $G^{n-1}(x) \neq X$, где $G^n(x)$ определено как в* (3.2).

Определение 3.2 делит конечно порожденные орбиты (см. [1, определение 4]) на типы стабилизации. Важной задачей в изучении однородных бинарных G-пространств является построение примеров бинарных G-пространств для каждого типа стабилизации.

Справедливо следующее простое утверждение.

Предложение 3.2. *Однородные дистрибутивные бинарные G-пространства стабилизируются на шаге* 1 *в любой точке.*

Доказательство. Так как однородное дистрибутивное бинарное G-пространство X транзитивно (согласно предложению 3.1), имеем $G^1(x) = G(x,x) = X$ для любой точки $x \in X$.

Однородные бинарные G-пространства могут содержать точки, орбиты которых не совпадают со всем пространством (см. пример 3.1). Также верно, что однородное бинарное G-пространство может иметь разные свойства стабилизации в различных точках.

Пример 3.2 (Стабилизация в различных точках на шагах 1 и 2)**.** *Рассмотрим аддитивную циклическую группу $\mathbb{Z}_5$ из пяти элементов. Группа её обратимых элементов $G = \{1,2,3,4\}$ действует на себя умножением слева.*

Теперь рассмотрим пространство $X = G$ с бинарным G-действием, заданным формулой

$$g(x,x') = g^x x'. \tag{3.3}$$

Легко проверить, что $G^1(1) = G(1,1) = X$. Следовательно, бинарное G-пространство X стабилизируется на шаге 1 в точке $x = 1$.

С другой стороны, прямым вычислением получаем $G^1(2) = G(2,2) = \{2,3\}$ и $G^2(2) = G(G^1(2), G^1(2)) = X$. Таким образом, бинарное G-пространство X стабилизируется в точке $x = 2$ на шаге 2.

Пример 3.3 (Стабилизация на шаге 3)**.** *Рассмотрим симметрическую группу из шести элементов S_3, заданную как*

$$S_3 = \langle h, x : h^2 = x^2 = (xh)^3 = e\rangle. \tag{3.4}$$

Очевидно, что

$$S_3 = \{e, x, h, xh, hx, xhx\} \tag{3.5}$$

и $xhx = hxh$.

Теперь рассмотрим подгруппу $G = \{e,h\} \subset S_3$ и определим бинарное действие $\mu : G \times X^2 \to X$ группы G на $X = S_3$ формулой

$$g(x,x') = x^{-1}gxx'. \tag{3.6}$$

Прямым вычислением получаем:

$$G^1(x) = G(x,x) = \{x, xh\}, \qquad G^2(x) = \{e, h, x, xh\}, \qquad G^3(x) = X.$$

Таким образом, бинарное G-пространство X стабилизируется в точке x на шаге 3.

Бесконечные бинарные G-пространства могут стабилизироваться на шаге ∞.

Пример 3.4 (Стабилизация на шаге ∞)**.** *Пусть G — бесконечная группа. Предположим, что существуют элементы $h, x \in G$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. Элементы h и x имеют порядок 2: $h^2 = x^2 = e$, где e — нейтральный элемент группы G;

2. Элемент $xh \in G$ имеет бесконечный порядок.

Подгруппа $H = \{e, h\}$ группы G бинарно действует на G по формуле (3.6).

Как показано в [1, теорема 3], орбита элемента $x \in G$ является бесконечно порожденной. Следовательно, орбита $[x]$, рассматриваемая как однородное бинарное H-пространство, стабилизируется в точке x на шаге ∞.

Далее мы приведем примеры стабилизации на конечных шагах для бесконечных не дискретных бинарных G-пространств.

Пример 3.5. *Пусть $G = \mathbb{R}$ — аддитивная группа действительных чисел, а $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость. Определим непрерывное отображение $\mu : G \times X^2 \to X$ по формуле*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (g \cdot \cos x_1 + x'_1, g \cdot \sin x_1 + x'_2), \tag{3.7}$$

где $g \in G$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2) \in X$, и было применено обозначение $\mu(g, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Легко проверить, что μ является бинарным действием группы G на пространстве X.

Докажем, что это бинарное G-пространство является однородным и стабилизируется на шаге 2 в точке $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, то есть $G^2(x_0) = X$.

Сначала вычислим $G^1(\mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$. Рассмотрим элемент $g \in G$. Тогда:

$$g(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = (g \cdot \cos 0 + 0, g \cdot \sin 0 + 0) = (g, 0).$$

Таким образом, $G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = \mathbb{R} \times \{0\} \neq X$.

Теперь рассмотрим любую точку $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in X$. Возьмем $g = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $x'_1 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$, если $x_1 \neq 0$, и $x'_1 = \pi/2$, если $x_1 = 0$. Тогда можно проверить, что

$$g((x'_1, 0), (0, 0)) = \mathbf{x}.$$

Следовательно, $G^2(x_0) = X$.

Этот пример можно обобщить следующим образом.

Пример 3.6. *Пусть $G = \mathbb{R}$ — аддитивная группа действительных чисел, а $X = \mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Рассмотрим непрерывное отображение*

$$\mu : G \times X^2 \to X, \quad \mu(g, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n),$$

заданное следующими формулами:

$$\begin{array}{l} z_1 = g \cdot \cos x_1 + y_1, \\ z_2 = g \cdot \sin x_1 \cdot \cos x_2 + y_2, \\ z_3 = g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \cos x_3 + y_3, \\ \dots \\ z_{n-1} = g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_{n-2} \cdot \cos x_{n-1} + y_{n-1}, \\ z_n = g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_{n-2} \cdot \sin x_{n-1} + y_n \end{array} \tag{3.8}$$

для всех $g \in G$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство того, что отображение μ является бинарным действием группы G на X, оставим читателю.

Докажем, что это бинарное G-пространство является однородным и стабилизируется на n-м шаге в точке $\mathbf{x}_0 = (0, \dots, 0)$, то есть

$$G^n(\mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

Доказательство будет проведено методом математической индукции с использованием гиперсферических координат в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Сначала вычислим $G^1(\mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$. Для любого элемента $g \in G$, согласно (3.8), имеем:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = (&g \cdot \cos 0 + 0, g \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 + 0, g \cdot \sin 0 \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 + 0, \dots \\ &\dots, g \cdot \sin 0 \cdot \ldots \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 + 0, g \cdot \sin 0 \cdot \ldots \cdot \sin 0 + 0) = (g, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, $G^1(\mathbf{x}_0) = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$.

Теперь предположим, что $G^{k-1}(\mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^{k-1}$. Докажем, что тогда $G^k(\mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^k$. Для этого достаточно показать, что

$$G(G^{k-1}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^k.$$

Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{k-1}$ и обозначим $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$. Из (3.8) получаем:

$z_1 = g \cdot \cos x_1,$
$z_2 = g \cdot \sin x_1 \cdot \cos x_2,$
$z_3 = g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \cos x_3,$
$\ldots$
$z_{k-1} = g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_{k-2} \cdot \cos x_{k-1},$
$z_k = g \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_{k-1},$
$z_{k+1} = 0,$
$\ldots$
$z_n = 0,$

что является представлением точки $(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ в гиперсферических координатах $(g, x_1, \ldots, x_{k-1})$. Следовательно, $G(G^{k-1}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^k$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ существует (недискретная, абелева) топологическая группа G и (недискретное) однородное бинарное G-пространство X, стабилизирующееся на n-м шаге.*

Abstract. In this paper, the notions of transitivity and homogeneity in binary G-spaces are studied. These notions coincide for distributive binary G-spaces. For compact G, it is shown that distributive transitive binary G-spaces are coset spaces with a suitably defined binary G-action. Homogeneous binary G-spaces are topologically homogeneous and are separated into distinct stabilization types. Examples of each type are constructed.

Список литературы

[1] P. S. Gevorgyan, A. A. Nazaryan, "On Orbits and Bi-invariant Subsets of Binary G-Spaces", Math Notes **109**, 38 – 45 (2021).
[2] P. S. Gevorgyan, "On Orbit Spaces of Distributive Binary G-Spaces", Mathematical Notes **112**(2), 177 – 182 (2022).
[3] G. E. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, New York (1972).
[4] P. S. Gevorgyan, "Groups of binary operations and binary G-spaces", Topology Appl., **201**, 18 – 28 (2016).
[5] P. S. Gevorgyan, "Groups of invertible binary operations of a topological space", J. Contemp. Math. Anal. **53** (1), 16 – 20 (2018).
[6] P. S. Gevorgyan, "On binary G-spaces", Math Notes **96**, 600 – 602 (2014).
[7] P. S. Gevorgyan, Q. Morales, Universal spaces for binary G-spaces, Topology Appl., accepted.
[8] P. S. Gevorgyan, S. D. Iliadis, "Groups of generalized isotopies and generalized G-spaces", Matematicki Vesnik **70.2**, 110 – 119 (2018).
[9] R. Jimenez, Q. Morales Melendez, "On loop extensions satisfying one single identity and cohomology of loops", Communications in Algebra, **45**(9), 3667 – 3690 (2017).
[10] Yu. M. Movsisyan, "Hyperidentities in algebras and varieties", Russian Math. Surveys, **53**:1, 57 – 108 (1998).

Поступила 20 сентября 2024

После доработки 20 сентября 2024

Принята к публикации 12 декабря 2024