

ОБ УСЛОВНО УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

М. Г. ГРИГОРЯН, Л. Н. ГАЛОЯН

Ереванский государственный университет¹
E-mails: *gmarting@ysu.am*; *levongaloyan@ysu.am*

Аннотация. В работе доказано, что любую измеримую, почти всюду конечную функцию можно превратить в условно универсальную функцию относительно тригонометрической системы, изменяя её значения на множестве сколь угодно малой меры.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: ряд Фурье; универсальный тригонометрический ряд; универсальная функция; условно универсальная функция; сходимости почти всюду.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже условимся использовать следующие обозначения: $|E|$ – мера Лебега измеримого множества E , $\mathbf{N}$ – совокупность натуральных чисел, $L^p(E)$ ($p > 0$) – класс измеримых функций, суммируемых со степенью p на E , $L^0(E)$ – класс почти везде конечных измеримых функций на E и $M(E)$ – класс всех измеримых функций на E . Под сходимостью в $L^0(E)$ и в $M(E)$ будем понимать сходимости почти всюду на E .

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – ортонормированная система на $[a, b]$. Для коэффициентов Фурье функции $U \in L^1[a, b]$ по системе Φ мы будем использовать обозначение

$$c_k(U) = \int_a^b U(x) \varphi_k(x) dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

В частности, в случае тригонометрической системы положим

$$a_k(U) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos kx dx, \quad b_k(U) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \sin kx dx.$$

Пусть $S(E)$ – одно из пространств $L^p(E)$, $p \geq 0$ или $M(E)$.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА

Определение 1.1. *Ряд $\sum f_k$, где $f_k \in S(E)$, называется универсальным в $S(E)$, если для каждой функции $f \in S$ существует подпоследовательность натуральных чисел n_k такая, что подпоследовательность частичных сумм этого ряда с номерами n_k сходится к f в $S(E)$.*

Работа продолжает исследования авторов ([1]-[6]), связанных с существованием функций, ряды Фурье которых по тригонометрической системе универсальны в некоторых, определённых смыслах, в различных функциональных классах.

Существование функций и рядов, универсальных в том или ином смысле в различных классах функций, изучалось многими математиками, и публикации по этой тематике регулярно появляются в математической печати.

Понятие универсального ряда (как по классическим, так и по общим ортонормальным системам) восходит к работам Д. Меньшова [7], и А. Талаляна [8]. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками.

Первая работа, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду является работа [7] Д. Меньшова. Ряды вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ по любой полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, универсальные в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду были построены в работе [8] А. Талаляном. Гроссе-Эрдман [9] доказал существование универсального ряда Тейлора в классе всех непрерывных на $[-1, 1]$ функций с $f(0) = 0$.

Необходимо отметить, что первые примеры универсальных функций были построены Биркгофом [10] в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, Марцинкевичем [11] в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции (см. также [12]-[15]).

Определение 1.2. *Будем говорить, что функция $U \in L^1(E)$ для класса $S(E)$ относительно системы Φ :*

- а. универсальна**, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в $S(E)$,
- б. условно универсальна**, если существует последовательность $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, такая, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ универсален в $S(E)$.

Отметим, что в работах [16] – [19] были определены также и другие типы (почти универсальные, квази универсальные, универсальные в смысле знаков, универсальные в смысле перестановок) универсальных функций.

Замечание 1.1. *Поскольку по теореме А. Колмогорова ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится в $L^p[-\pi, \pi]$, где $p \in (0, 1)$, то не существует функции $U \in L^1[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой по тригонометрической системе был бы универсален в классе всех измеримых функций. Таким образом, не существует функции $U \in L^1[-\pi, \pi]$, универсальной для классов $L^0[-\pi, \pi]$ и $M[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы. Тем не менее, в работе доказывается следующая теорема:*

Теорема 1.1. *Существует интегрируемая функция U , которая является условно универсальной для класса $M[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы.*

Оказывается, что любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения её значений на некотором множестве сколь угодно малой меры можно превратить в условно универсальную функцию относительно тригонометрической системы.

Теорема 1.2. *Существует интегрируемая функция U , со свойствами:*

- (1) *U является условно универсальной для класса $L^0[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы.*
- (2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [-\pi, \pi]$, с мерой $|E| \geq 2\pi - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[-\pi, \pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[-\pi, \pi]$ такую, что*

$$g(x) = f(x), \quad x \in E, \quad |a_k(g)| = |a_k(U)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad |b_k(g)| = |b_k(U)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из последней теоремы следует, что

Теорема 1.3. *Для любого положительного числа ε существует измеримое множество $E \subset [-\pi, \pi]$ с мерой $|E| \geq 2\pi - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[-\pi, \pi]$ можно найти такую функцию $g(x) \in L^1[-\pi, \pi]$, что $g(x) = f(x)$, $x \in E$, и $g(x)$ является условно универсальной для класса $M[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы.*

Замечание 1.2. Нетрудно видеть, что, каковы бы ни были число $p \in [1, \infty)$ и ограниченная ортонормированная система Φ , не существует функции $U \in L^1[-\pi, \pi]$, которая для класса $L^p[-\pi, \pi]$, $p \geq 1$, относительно системы Φ была бы условно универсальной. Однако (как доказали авторы в [4]), для классов L^p , $p \in (0, 1)$ относительно тригонометрической системы существуют как условно универсальные функции, так и универсальные функции в смысле знаков.

Интересно было бы выяснить ответ на следующий вопрос:

Вопрос 1. Существует ли функция $U \in L^1[-\pi, \pi]$, которая для класса $L^p[-\pi, \pi]$, $p \geq 1$ относительно тригонометрической системы (соответственно, относительно системы Уолша) была бы универсальной в смысле перестановок?

Замечание 1.3. Метод доказательства теоремы 1.3 позволяет получить новый подход для построения универсальных рядов: любую измеримую почти всюду конечную функцию, путем изменения ее значений на некотором множестве сколь угодно малой меры, можно превратить в такую функцию, что после выбора соответствующих знаков для членов ряда Фурье (как для тригонометрической, так и для системы Уолша) измененной функции можно достичь того, что полученный ряд уже будет универсальным в $M[-\pi, \pi]$.

При доказательстве теоремы 1.3 мы воспользуемся следующей леммой, доказанной авторами в работе [1].

Лемма 1.1. Пусть даны числа $n_0 \in \mathbf{N}$, $\varepsilon, \theta, \mu \in (0, 1)$ и ступенчатая функция $f(x)$. Тогда можно найти измеримое множество $E \subset [-\pi, \pi]$, функцию $g(x) \in L^1[-\pi, \pi]$ и полиномы по тригонометрической системе вида:

$$U(x) = \sum_{k=n_0}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad Q(x) = \sum_{k=n_0}^n \delta_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

удовлетворяющие условиям:

(1)

$$\delta_k = \pm 1, \quad k \in [n_0, n), \quad |E| > 2\pi - \varepsilon;$$

(2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U(x)| dx = \|U\|_{L^1} < \theta, \quad \|g(x)\|_{L^1} < 4\|f\|_{L^1};$$

(3)

$$g(x) = f(x), \quad x \in E, \quad \|g(x) - Q(x)\|_{L^1} < \mu.$$

Замечание 1.4. Нетрудно видеть, что в формулировке леммы 1.1 вместо ступенчатой функции можно взять любой тригонометрический полином $f(x)$.

Замечание 1.5. Из условия 3 леммы вытекает, что выполняется также следующее условие:

$$\int_E |f(x) - Q(x)| dx < \mu.$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть F — множество всех полиномов по тригонометрической системе с рациональными коэффициентами. Перенумеруем элементы F и представим их в виде последовательности

$$(2.1) \quad F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Применим Лемму 1.1 (и замечания к ней), полагая в ее формулировке

$$n_0 = 1, \quad \varepsilon = 2^{-2}, \quad \theta = \eta = 2^{-3}, \quad f(x) = f_1(x).$$

Тогда определяются измеримое множество $E_1^{(1)} \subset [-\pi, \pi]$ с мерой $|E_1^{(1)}| > 2\pi - 2^{-2}$, функция $g_1(x)$ и полиномы по тригонометрической системе вида:

$$U_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_2-1} a_k^{(1)} \cos kx + b_k^{(1)} \sin kx, \quad Q_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_2-1} \delta_k^{(1)} (a_k^{(1)} \cos kx + b_k^{(1)} \sin kx),$$

где $\delta_k^{(1)} = \pm 1$, $k \in [M_1, M_2)$, ($M_1 = 1$), удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \|U_1^{(1)}\|_{L^1} &< 2^{-3}, \quad \|g_1^{(1)}\|_{L^1} < 4 \|f_1\|_{L^1}, \\ g_1^{(1)}(x) &= f_1(x), \quad x \in E_1, \quad \|g_1^{(1)} - Q_1^{(1)}\|_{L^1} < 2^{-3}. \end{aligned}$$

Снова применим Лемму 1.1 с замечанием 1.4, полагая в ее формулировке

$$n_0 = M_2, \quad \varepsilon = 2^{-3}, \quad \theta = \eta = 2^{-3}, \quad f(x) = f_1(x) - U_1^{(1)}(x).$$

Тогда определяются измеримое множество $E_1^{(2)} \subset [-\pi, \pi]$ с мерой $|E_1^{(2)}| > 2\pi - 2^{-3}$ и полиномы по тригонометрической системе вида:

$$U_1^{(2)}(x) = \sum_{k=M_2}^{M_3-1} a_k^{(1)} \cos kx + b_k^{(1)} \sin kx, \quad Q_1^{(2)}(x) = \sum_{k=M_2}^{M_3-1} \delta_k^{(1)} (a_k^{(1)} \cos kx + b_k^{(1)} \sin kx),$$

где $\delta_k^{(1)} = \pm 1$, $k \in [M_2, M_3)$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \|U_1^{(2)}\|_{L^1} &< 2^{-3}, \\ \int_{E_1^{(2)}} |(f_1(x) - U_1^{(1)}(x)) - Q_1^{(2)}(x)| dx &< 2^{-3}. \end{aligned}$$

Продолжая эти рассуждения, мы можем по индукции определить последовательности множеств $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)} \subset [-\pi, \pi]$, функций $\{g_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, и полиномов $\{U_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{U_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^\infty$ по тригонометрической системе вида:

(2.2)

$$U_n^{(1)}(x) = \sum_{k=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1} a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx, \quad U_n^{(2)}(x) = \sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx,$$

(2.3)

$$Q_n^{(1)}(x) = \sum_{k=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1} \delta_k^{(n)} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx),$$

$$Q_n^{(2)}(x) = \sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} \delta_k^{(n)} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx),$$

которые для каждого $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяют условиям:

(2.4)

$$\delta_k^{(n)} = \pm 1, \quad k \in [M_{2n-1}, M_{2n+1}),$$

(2.5)

$$\|U_n^{(1)}\|_{L^1} < 2^{-3(n+1)}, \quad \|g_n^{(1)}\|_{L^1} < 4 \|f_n\|_{L^1},$$

(2.6)

$$g_n^{(1)}(x) = f_n(x), \quad x \in E_n^{(1)}, \quad |E_n^{(1)}| > 2\pi - 2^{-2n},$$

(2.7)

$$\|g_n^{(1)} - Q_n^{(1)}\|_{L^1} < 2^{-3(n+1)},$$

(2.8)

$$\|U_n^{(2)}\|_{L^1} < 2^{-4n}, \quad |E_n^{(2)}| > 2\pi - 2^{-2n-1},$$

(2.9)

$$\int_{E_n^{(2)}} \left| f_n(x) - \sum_{j=1}^n (U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x)) \right| dx < 2^{-4n}.$$

Положим

(2.10)

$$a_0 = 1, \quad a_k = a_k^{(n)}, \quad b_k = b_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2n-1}, M_{2n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из (2.5) и (2.8) следует

(2.11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|U_n^{(1)} + U_n^{(2)}\|_{L^1} < \infty.$$

Определим функцию $U(x)$ следующим образом:

(2.12)

$$U(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^2 U_n^{(j)}(x) \right).$$

Из (2.11) следует, что $U(x) \in L^1[-\pi, \pi]$. Далее рассмотрим ряд

$$(2.13) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Из (2.2), (2.10) и (2.11) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| 1 + \sum_{k=1}^{M_{2n+1}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - U(x) \right\|_{L^1} \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \|U_m^{(1)} + U_m^{(2)}\|_{L^1} = 0.$$

Следовательно (2.13) является рядом Фурье функции U :

$$a_0(U) = 1, \quad a_k = a_k(U), \quad b_k = b_k(U), \quad k \geq 1.$$

Положим:

$$(2.14) \quad \delta_k = 1, \quad k \in \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [M_{2n-1}, M_{2n}),$$

и

$$(2.15) \quad \delta_k = \delta_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2n}, M_{2n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ясно, что (см. (2.14), (2.15)) $\delta_k = \pm 1$, $k \geq 1$. Докажем, что ряд

$$(2.16) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k (a_k(U) \cos kx + b_k(U) \sin kx)$$

универсален в пространстве $L^0[-\pi, \pi]$.

Пусть $f(x)$ произвольная функция из $L^0[-\pi, \pi]$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности (2.1) такую, что

$$(2.17) \quad |\{x \in [-\pi, \pi) : |f(x) - 1 - f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k-1}\}| \geq 2\pi - 2^{-k-2}, \quad k \geq 1.$$

Положим

$$(2.18) \quad H_k = \{x \in [-\pi, \pi) : |f(x) - 1 - f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k-1}\}.$$

$$(2.19) \quad G_k = \left\{ x \in E_{n_k}^{(2)} : \left| f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right| \leq 2^{-k-1} \right\}.$$

Имеем (см. (2.17) и (2.18))

$$(2.20) \quad |H_k| \geq 2\pi - 2^{-k-2}, \quad k \geq 1.$$

Далее, из (2.9) и (2.19) следует

$$2^{-k-1} \left| E_{n_k}^{(2)} \setminus G_k \right| \leq \int_{E_{n_k}^{(2)} \setminus G_k} \left| f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right| dx \leq$$

$$\int_{E_{n_k}^{(2)}} \left| f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right| dx \leq 2^{-4k}.$$

Отсюда и из (2.8) вытекает

$$(2.21) \quad |G_k| \geq |E_{n_k}^{(2)}| - 2^{-2k-1} \geq 2\pi - 4^{-k}, \quad k \geq 1.$$

Положим

$$(2.22) \quad G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} H_k \cap G_k \right)$$

Ясно, (см. (2.20)-(2.22))

$$(2.23) \quad |G| = 2\pi.$$

Учитывая соотношения (2.17), (2.19) и (2.22) находим, что на множестве G (т.е почти всюду) имеет место:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) - 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right) = 0.$$

Отсюда и из (2.2), (2.3), (2.14) – (2.16) почти всюду на $[-\pi, \pi]$ будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{m=1}^{M_{2n_k+1}-1} \delta_m(a_m(U) \cos mx + b_m(U) \sin mx) \right) = f(x), \quad x \in G.$$

Первая часть теоремы 1.2 доказана.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Пусть ε – любое положительное число.

Положим

$$(2.24) \quad E = \bigcap_{k=k_0}^{\infty} E_k^{(1)}, \quad k_0 = [-\log_2 \varepsilon] + 1.$$

Ясно, что (см. (2.6))

$$(2.25) \quad |E| > 2\pi - \varepsilon.$$

Пусть $f(x)$ произвольная функция из $L^1[-\pi, \pi]$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ($k_1 > k_0$) из последовательности

(2.1) такую, что

$$(2.26) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - 1 - \sum_{n=1}^N f_{k_n} \right\|_{L^1} = 0,$$

где

$$(2.27) \quad \|f_{k_n}\|_{L^1} < 2^{-8n}, \quad n \geq 2.$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, функции $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$ и $g_0(x), g_1(x), \dots, g_{q-1}(x)$ удовлетворяющие для всех $1 \leq l < q$ условиям:

$$(2.28) \quad \begin{aligned} g_l(x) &= f_{k_l}(x), \quad x \in E, \\ \|g_l\|_{L^1} &< 2^{-2(l+1)}, \\ \left\| \sum_{j=1}^l \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(1)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\|_{L^1} &< 2^{-2(l+1)}, \end{aligned}$$

где

$$U_n(x) = U_n^{(1)}(x) + U_n^{(2)}(x).$$

Натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ выберем таким образом, чтобы элемент f_{ν_q} из последовательности (2.1) удовлетворял условию:

$$(2.29) \quad \left\| \left\{ \sum_{j=1}^{q-1} \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(1)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\} - f_{\nu_q} \right\|_{L^1} \leq 2^{-4(q+3)}.$$

В силу (2.28) и (2.29) имеем

$$(2.30) \quad \|f_{\nu_q}\|_{L^1} \leq 2^{-3(q+1)}.$$

Положим

$$(2.31) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x) + [g_{\nu_q}^{(1)}(x) - f_{\nu_q}(x)],$$

Из (2.6), (2.24) и (2.31) вытекает

$$(2.32) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E, \quad q \geq 1.$$

Учитывая соотношения (2.5), (2.7) – (2.9), (2.11), (2.29), (2.30) для всех $q \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^q \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(1)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\|_{L^1} \leq \\ & \leq \left\| \left\{ f_{k_q} - \sum_{j=1}^{q-1} \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(1)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\} - f_{\nu_q} \right\|_{L^1} + \end{aligned}$$

$$+ \|Q_{\nu_q}^{(1)}\|_{L^1} + \left(\sum_{n=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q} (\|U_n^{(1)}\|_{L^1} + \|U_n^{(2)}\|_{L^1}) \right) < 2^{-2q-2}.$$

Из (2.27), (2.30) и (2.31) для каждого $q \geq 1$ следует

$$(2.33) \quad \|g_q\|_{L^1} \leq \|f_{k_q}\|_{L^1} + \|g_{\nu_q}^{(1)}\|_{L^1} + \|f_{\nu_q}\|_{L^1} \leq 2^{-2q-2}.$$

Ясно, что по индукции определяются функции $\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ ($g_1(x) = f_{k_1}(x)$) и полиномы $\{H_{\nu_q}(x)\}$, удовлетворяющие условиям (2.29)-(2.33) для всех $q \geq 1$. Из (2.33) вытекает, что

$$\sum_{q=0}^{\infty} \|g_q\|_{L^1} < \infty.$$

Определим функцию $g(x)$ и последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}$ следующим образом

$$(2.34) \quad g(x) = \sum_{q=0}^{\infty} g_q(x), \quad g_0(x) = 1$$

$$(2.35) \quad \varepsilon_k = \delta_k^{(\nu_q)}, \quad k \in [M_{2\nu_{q-1}}, M_{2\nu_q}), \quad \varepsilon_k = 1, \quad k \notin [M_{2\nu_{q-1}}, M_{2\nu_q}), \quad q = 1, 2, \dots$$

Из (2.26)-(2.28), (2.31), (2.32), (2.34) вытекает $g(x) \in L^1[0, 1]$, $g(x) = f(x)$, $x \in E$.

В силу (2.4), (2.5), (2.14), (2.15), (2.28), (2.34), (2.35) для всех $q > k_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=0}^{M_{2\nu_q}-1} \varepsilon_k (a_k(U) \cos kx + b_k(U) \sin kx) - g \right\|_{L^1} \leq \sum_{j=q}^{\infty} \|g_j(x)\|_{L^1} + \\ & + \left\| \sum_{j=1}^{q-1} \left[g_j - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} U_n - U_{\nu_j}^{(2)} + Q_{\nu_j}^{(1)} \right) \right] \right\|_{L^1} < 2^{-q-1}, \end{aligned}$$

и, следовательно, $\varepsilon_k a_k(U) = a_k(g)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\varepsilon_k b_k(U) = b_k(g)$, $k = 1, 2$. Обозначая через $\beta_k = \varepsilon_k \delta_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ и используя соотношения (2.14) и (2.15) заключаем

$$\delta_k a_k(U) = \beta_k a_k(g), \quad \delta_k b_k(U) = \beta_k b_k(g), \quad \beta_k = \pm 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда и из того, что ряд (2.16) универсален в пространстве $L^0[-\pi, \pi]$ приходим к выводу, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (a_k(g) \cos kx + b_k(g) \sin kx)$$

универсален в пространстве $L^0[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы, следовательно функция g является условно универсальной для класса $L^0[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы. Теорема 1.2 доказана.

Abstract. The paper proves that any measurable, almost everywhere finite function can be transformed into a conditionally universal function with respect to the trigonometric system by changing its values on a set of arbitrarily small measure.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On the universal functions”, *Journal of Approximation Theory*, **225**, 191 – 208 (2018).
- [2] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On Fourier series that are universal modulo signs”, *Studia Mathematica*, **249**, no. 2 (2019).
- [3] M. G. Grigoryan, “Functions universal with respect to the classical systems”, *Advances in Operator Theory*, **5**, no. 4, 1414 – 1433 (2020).
- [4] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы,” *Известия РАН Сер. матем.*, **85**:2, 73 – 94 (2021).
- [5] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, почти универсальные в смысле знаков относительно тригонометрической системы и системы Уолша,” *Матем. заметки*, **115**:6, 395 – 400 (2024).
- [6] M. G. Grigorian, “On Universal Fourier series in the Walsh system”, *Siberian Mathematical Journal*, **63**:3, 868 – 882 (2022).
- [7] Д. Е. Меньшов, “О частичных суммах тригонометрических рядов”, *Мат. Сборник*, **20**:2, 197 – 238 (1947).
- [8] А. А. Талалаян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частичных сумм общих ортогональных рядов”, *Известия АН СССР. Математика*, **10**:3, 17 – 34 (1957).
- [9] K. G. Grosse-Erdmann, “Holomorphe Monster und Universelle Funktionen”, *Mitteilungen des Mathematischen Seminars G.*, **176**, 1 – 84 (1987).
- [10] G. D. Birkhoff, “Démonstration d’un théorème élémentaire sur les fonctions entières”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **189**, 473 – 475 (1929).
- [11] J. Marcinkiewicz, “Sur les nombres dérivés,” *Fundamenta Mathematicae*, **24**, 305 – 308 (1935).
- [12] V. G. Krotov, “Smoothness of the universal Marcinkiewicz functions and universal trigonometric series”, *Izvestiya VUZov. Matematika*, no. 8, 26 – 33 (1991).
- [13] G. R. MacLane, “Sequences of derivatives and normal families”, *Journal of Analysis and Mathematics*, **2**, 72 – 87 (1952).
- [14] W. Luh, “Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets”, *Analysis*, **6**, 191 – 207 (1986).
- [15] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:1, 41 – 60 (1999).
- [16] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, “On the universal function for the class $L^p[0, 1]$, $p \in (0, 1)$ ”, *Journal of Functional Analysis*, **270**, no. 8, 3111 – 3133 (2016).
- [17] M. G. Grigoryan, “On the universal and strong property related to Fourier-Walsh series”, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, **11**, no. 3, 698 – 712 (2017).
- [18] М. Г. Григорян, “Функции, с универсальными рядами Фурье-Уолша”, *Матем. Сб.*, **211**:6, 107 – 131 (2020).
- [19] М. Г. Григорян, “Об универсальных (в смысле знаков) рядах Фурье по системе Уолша”, *Матем. Сб.*, **215**:6, 717 – 742 (2024).

Поступила 20 ноября 2024

После доработки 23 декабря 2024

Принята к публикации 28 декабря 2024