

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒԵԳԻԱ

Հակոբյան Վ.Ն. (գլխավոր խմբագիր), Սահակյան Ա.Վ. (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Աղալովյան Լ.Ա., Ավետիսյան Ա.Ս., Ավետիսյան Վ.Վ., Կարապետյան Կ.Ա., Ղազարյան Կ.Բ., Ղուկասյան Ա.Ա., Ջիրավյան Ս.Հ., Սարգսյան Ս.Հ.

ՄԻՋԱԶԳԱՅԻՆ ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԽՈՐՀՈՒՐԴ

Ալտենբախ Հ. (Գերմանիա), Գաչկեիչ Ա.Ռ. (Ուկրաինա), Գորյաչևա Ի.Գ. (Ռուսաստան), Հասանյան Դ.Ջ. (ԱՄՆ), Կապլունով Յու.Դ. (Մեծ Բրիտանիա), Կուդիշ Ի.Ի. (ԱՄՆ), Շավլակաձե Ն.Ն. (Վրաստան), Մարզոկա Պ. (ԱՄՆ), Մեյրանյան Ա.Պ. (Ռուսաստան), Մումբատյան Մ.Ա. (Ռուսաստան), Վատոյան Ա.Հ. (Ռուսաստան)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Акопян В.Н. (главный редактор), Саакян А.В. (зам. главного редактора), Аветисян А.С., Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Гукасян А.А., Джилавын С.А., Казарян К.Б., Карапетян К.А., Саркисян С.О.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Альтенбах Х. (Германия), Асанян Д.Дж. (США), Ватулян А.О. (Россия), Гачкевич А.Р. (Украина), Горячева И.Г. (Россия), Каплунов Ю.Д. (Великобритания), Кудис И.И. (США), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Марзока П. (США), Сейранян А.П. (Россия), Сумбатян М.А. (Россия)

EDITORIAL BOARD

Накобян В.Н. (editor-in-chief), Sahakyan A.V. (associate editor), Aghalovyan L.A., Avetisyan A.S., Avetisyan V.V., Ghazaryan K.B., Ghukasyan A.A., Jilavyan S.H., Karapetyan K.A., Sarkisyan S. H.

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Altenbach H. (Germany), Gachkevich A.R. (Ukraine), Goryacheva I.G. (Russia), Hasanyan D.J. (USA), Kaplunov J.D. (UK), Kudish I.I. (USA), Shavlakadze N.N. (Georgia), Marzocca P. (USA), Seyranyan A.P. (Russia), Sumbatyan M.A. (Russia), Vatulyan A.O. (Russia)

Технический редактор: Геворгян Г.З., Ответственный секретарь: Авдалян Ж.А.

E-mail: journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech

Հայաստանի	Республика Армения,	24/2, Baghramyan Ave.
Հանրապետություն, Երևան,	Ереван, 0019	Yerevan 0019
0019 Բաղրամյան պող. 24/2,	пр. Баграмяна 24 /2,	Republic of Armenia
Հեռ. 52-48-02	Тел. 52-48-02	Tel. 52-48-02

**АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО
НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ С УПРУГИМ СТРИНГЕРОМ НА ГРАНИЦЕ**

Аветисян С.А., Амирджанян А.А., Саакян А.В.

Ключевые слова: антиплоская деформация, неоднородный слой, стрингер, контактные напряжения, коэффициент концентрации напряжений, механические квадратуры.

Avetisyan S.A., Amirjanyan H.A., Sahakyan A.V.

Antiplane deformation of an elastic exponentially non-homogeneous layer with an elastic stringer at the boundary

Key words: antiplane deformation, non-homogeneous layer, stringer, contact stresses, stress concentration factor, mechanical quadratures.

Under antiplane deformation conditions, a numerical study of the stress-strain state of a layer whose shear modulus varies exponentially across its thickness was performed. The lower edge of the layer is rigidly clamped, and on the upper edge there is a thin elastic stringer subjected to external forces that ensure the fulfillment of antiplane deformation conditions. The dependence of tangential contact stresses and their concentration factors on the layer thickness and the exponent of layer heterogeneity was revealed.

Ավետիսյան Ս.Ա., Ամիրջանյան Հ.Ա., Սահակյան Ա.Վ.

Ցուցչային օրենքով անհամասեռ առաձգական շերտի հակահարթ դեֆորմացիան, երբ շերտի եզրին առկա է առաձգական վերադիր

Կատարվել է հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում գտնվող և ըստ հաստության ցուցչային օրենքով փոփոխվող սահքի մոդուլ ունեցող շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի թվային ուսումնասիրությունը: Շերտի ստորին եզրը կոշտ ամրակցված է, իսկ վերին եզրին ամրացված է բարակ առաձգական վերադիր, որը գտնվում է հակահարթ դեֆորմացիայի պայմանների կատարումը ապահովող արտաքին ուժերի ազդեցության տակ:

Բացահայտվել է շոշափող կոնտակտային լարումների և դրանց կոնցենտրացիայի գործակիցների կախվածությունը շերտի հաստությունից և շերտի անհամասեռության ցուցիչից:

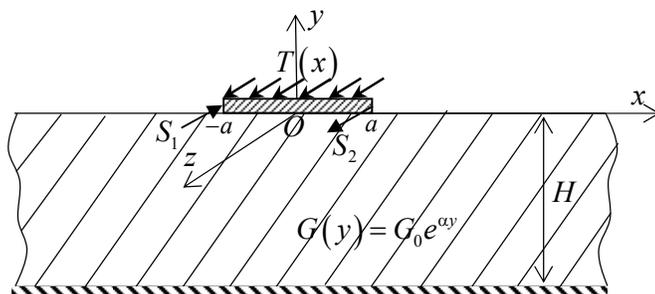
В условиях антиплоской деформации проведено численное исследование напряженно-деформированного состояния слоя, модуль сдвига которого по толщине изменяется по экспоненциальному закону. Нижняя грань слоя жестко закреплена, а на верхней грани имеется тонкий упругий стрингер, подверженный действию внешних усилий, обеспечивающих выполнение условий антиплоской деформации. Выявлена зависимость тангенциальных контактных напряжений и коэффициентов их концентрации от толщины слоя и показателя неоднородности слоя.

Введение. Контактные и смешанные задачи теории упругости при антиплоской деформации в идейном и методологическом аспектах тесно связаны с аналогичными задачами теории установившейся фильтрации жидкости в пористых средах, которые ранее были рассмотрены в работах [1-3]. В настоящей работе рассматривается одна смешанная граничная задача теории упругости при антиплоской деформации для слоя, модуль сдвига которого по глубине изменяется по экспоненциальному закону, а на верхней границе находится тонкий упругий стрингер, через который передается

нагрузка. Близость рассматриваемой задачи с задачами фильтрации обусловлена одинаковыми определяющими уравнениями.

В работе [4] была поставлена аналогичная задача в общей постановке, когда на границе неоднородного слоя имеется произвольное конечное число стрингеров. Выписаны определяющие системы уравнений, но отсутствует численный анализ.

Постановка задачи. Пусть имеем слой, который в прямоугольной системе координат $Oxyz$ занимает область $\Omega = \{-\infty < x, z < \infty; -H \leq y \leq 0\}$ и обладает модулем сдвига G , изменяющимся по глубине по закону $G = G_0 e^{\alpha y}$ ($-H \leq y \leq 0$). Нижняя грань $y = -H$ слоя Ω предполагается жёстко закреплённой, а к верхней грани прикреплен тонкий упругий полосовой стрингер конечной ширины $\omega = \{-a < x < a; y = 0; -\infty < z < \infty\}$. Стрингер имеет высоту $h \ll a$ и модуль сдвига G_s . Предположим, что на верхней грани $y = h$ полосы ω действуют касательные силы интенсивности $T(x)$, а по средней линии боковых граней $x = -a$ и $x = a$ полосы ω действуют касательные силы S_1 и S_2 соответственно. При этом все указанные силовые факторы действуют в направлении оси Oz и равномерно распределены по этой оси, тем самым обеспечивая выполнение условий антиплоской деформации (фиг.1).



Фиг. 1 Схематическое представление задачи

Требуется определить зависимость распределения контактных напряжений под стрингером и коэффициентов их концентрации на концах от показателя неоднородности α и толщины слоя H .

Вывод определяющей системы уравнений. Воспользуемся выражением для перемещений точек верхней грани $y = 0$ экспоненциально неоднородной полосы $\Omega_0 = \{-\infty < x < \infty; -H \leq y \leq 0\}$ [4]:

$$w(x) = \frac{2}{\pi G_0} \int_{-a}^a L(x-s) \tau(s) ds \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

$$L(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{th}(\mu H/2) \cos(\lambda x)}{\mu - \alpha \text{th}(\mu H/2)} d\lambda ; \quad \mu = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2} ,$$

Здесь $w(x)$ - перемещения точек грани $y = 0$ полосы Ω_0 в направлении оси Oz , $\tau(s)$ - неизвестные касательные напряжения, возникающие под стрингером. После дифференцирования по x будем иметь

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{2}{\pi G_0} \int_{-a}^a M(s-x) \tau(s) ds \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2)$$

$$M(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{th}(\mu H/2) \lambda \sin(\lambda x)}{\mu - \alpha \text{th}(\mu H/2)} d\lambda .$$

Далее запишем дифференциальное уравнение деформирования средней линии стрингера, с которой, по модели Мелана при антиплоской деформации [5,6], идентифицируется весь стрингер:

$$hG_s \frac{d^2 w_s(x)}{dx^2} = \tau(x) - T(x) \quad (-a < x < a), \quad (3)$$

где $w_s(x)$ - перемещение точек стрингера в направлении оси Oz . При этом условие равновесия стрингера имеет вид

$$\int_{-a}^a \tau(x) dx = V = S_2 - S_1 + \int_{-a}^a T(x) dx . \quad (4)$$

Интегрирование уравнения (3) даст

$$hG_s \frac{dw_s}{dx} = \frac{S_2 - S_1}{2} + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \text{sign}(x-s) [\tau(s) - T(s)] ds \quad (-a < x < a). \quad (5)$$

Теперь, удовлетворяя условию контакта стрингера с упругой полосой Ω_0 , записанному в виде равенства производных $\frac{dw(x)}{dx} = \frac{dw_s(x)}{dx}$, после простых преобразований относительно неизвестных касательных напряжений $\tau(x)$ получим определяющее интегральное уравнение:

$$\int_{-a}^a M(s-x) \tau(s) ds + \frac{\pi G_0}{4hG_s} \int_{-a}^a \text{sign}(s-x) \tau(s) ds = g(x) \quad (-a < x < a) \quad (6)$$

где

$$M(x) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda \text{th}(\mu H/2) \sin(\lambda x) d\lambda}{\mu - \alpha \text{th}(\mu H/2)}, \quad (7)$$

$$g(x) = \frac{\pi G_0}{4hG_s} \left[-S_1 + S_2 + \int_{-a}^a \text{sign}(s-x) T(s) ds \right] \quad (-a < x < a).$$

Выделим особенности поведения ядра $M(x)$. Нетрудно проверить, что подынтегральная функция интеграла Фурье (7) на бесконечности имеет поведение:

$$\frac{\lambda \operatorname{th}(\mu H/2)}{\mu - \alpha \operatorname{th}(\mu H/2)} = \frac{1}{2} \operatorname{sign} \lambda + \frac{\alpha}{4\lambda} + \frac{\alpha^2}{16\lambda^2} \operatorname{sign} \lambda + O\left(\frac{\alpha^4}{\lambda^4}\right) \quad (\lambda \rightarrow \pm\infty)$$

Учитывая, что интегралы Фурье от первых двух слагаемых понимаются в смысле обобщенных функций и равны [7]

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \sin(\lambda x) d\lambda = \frac{1}{2x}; \quad \frac{\alpha}{4} \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} d\lambda = \frac{\alpha\pi}{8} \operatorname{sign} x,$$

ядро $M(x)$ представим в виде:

$$M(x) = \frac{1}{2x} + \frac{\alpha\pi}{8} \operatorname{sign} x + \frac{1}{2} N(x) \quad (8)$$

$$N(x) = \int_0^\infty \frac{(4\lambda^2 + 2\lambda\alpha + \alpha^2) \operatorname{th}(\mu H/2) - (2\lambda + \alpha)\mu}{2\lambda(\mu - \alpha \operatorname{th}(\mu H/2))} \sin(\lambda x) d\lambda \quad (9)$$

Окончательно уравнение (6) перепишем в виде сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{-a}^a \left[\frac{1}{s-x} + \frac{\pi}{4} \left(\alpha + \frac{2G_0}{hG_s} \right) \operatorname{sign}(s-x) + N(s-x) \right] \tau(s) ds = 2g(x) \quad (|x| < a) \quad (10)$$

Отметим, что уравнение (10) должно рассматриваться совместно с условием равновесия стрингера (4).

Решение системы уравнений (10) и (4) построим при помощи метода механических квадратур.

Метод механических квадратур. Предварительно перейдем к безразмерным величинам и сведем интервал интегрирования к интервалу $(-1, 1)$. Получим

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi - \eta} + \frac{\pi}{4} (\alpha_* + 2\lambda_*) \operatorname{sign}(\xi - \eta) + N_*(\xi - \eta) \right] \tau_*(\xi) d\xi = f(\eta) \quad (|\eta| < 1) \quad (11)$$

$$\int_{-1}^1 \tau_*(\xi) d\xi = V_* \quad (12)$$

где

$$\alpha_* = \alpha a; \quad \lambda_* = \frac{aG_0}{hG_s}; \quad V_* = \frac{V}{aG_0}; \quad H_* = \frac{H}{a}; \quad \mu_* = \sqrt{\alpha_*^2 + 2\omega^2};$$

$$\tau_*(\xi) = \frac{\tau(a\xi)}{G_0}; \quad S_i^* = \frac{S_i}{aG_0} \quad (i=1,2); \quad T_*(\xi) = \frac{T(a\xi)}{G_0};$$

$$N_*(\zeta) = \int_0^\infty \frac{(4\omega^2 + 2\omega\alpha_* + \alpha_*^2) \operatorname{th}(\mu_* H_*/2) - (2\omega + \alpha_*)\mu_*}{2\omega(\mu_* - \alpha_* \operatorname{th}(\mu_* H_*/2))} \sin(\omega\zeta) d\omega;$$

$$f(\eta) = \frac{\pi\lambda_*}{2} \left[-S_1^* + S_2^* + \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(\xi - \eta) T_*(\xi) d\xi \right].$$

Уравнение (11) является сингулярным интегральным уравнением первого рода и, поэтому, его решение имеет корневую особенность на концах. Следовательно, решение системы (11)-(12) будем искать в виде:

$$\tau_*(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (13)$$

где $\varphi(\xi)$ - гильдеровская функция на отрезке $[-1,1]$.

Новую искомую функцию $\varphi(\xi)$ будем искать в виде интерполяционного многочлена Лагранжа по узлам в корнях многочлена Чебышева первого рода $T_n(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{X_p T_n(t)}{(t-u_p) U_{n-1}(u_p)} \quad T_n(u_p) = 0, \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (14)$$

где n - порядок аппроксимации, оптимальным выбором которого можно достичь желаемой точности решения, $U_n(t)$ - многочлен Чебышева второго рода, коэффициенты X_p ($p = \overline{1, n}$) подлежат определению.

Далее, воспользовавшись квадратурными формулами [8, 9]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)}{x-z} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(u_p)}{u_p - z} \left[1 - \frac{U_{n-1}(z)}{U_{n-1}(u_p)} \right] \quad z \in (-1,1)$$

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x-y) \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n \varphi(u_p) A(u_p, y) \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

$$A(u_p, y) = -\arcsin y + 2\sqrt{1-y^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(u_p) U_{m-1}(y)$$

и выбрав в качестве точек коллокации корни многочлена Чебышева второго рода $U_{n-1}(t_r) = 0$ ($r = \overline{1, n-1}$), систему уравнений (11)-(12) сведем к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{p=1}^n \left[\frac{1}{u_p - t_r} + \left(\frac{\alpha_*}{2} + \lambda_* \right) A(u_p, t_r) + N_*(u_p - t_r) \right] X_p = f(t_r) \quad (r = \overline{1, n-1}) \quad (15)$$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{p=1}^n X_p = V_*$$

Здесь

$$u_p = \cos \left[\frac{(2p-1)\pi}{2n} \right] \quad (p = \overline{1, n}); \quad t_r = \cos \left(\frac{\pi r}{n} \right) \quad (r = \overline{1, n-1})$$

Таким образом, решение задачи свелось к определению коэффициентов X_p , посредством которых искомую функцию $\varphi(\xi)$ можно восстановить по формуле (14) или по идентичной ей формуле

$$\varphi(t) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n X_p \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(t) T_m(u_p) \right] \quad (16)$$

Исходя из представления (13), нетрудно убедиться, что безразмерными коэффициентами концентрации контактных напряжений будут величины:

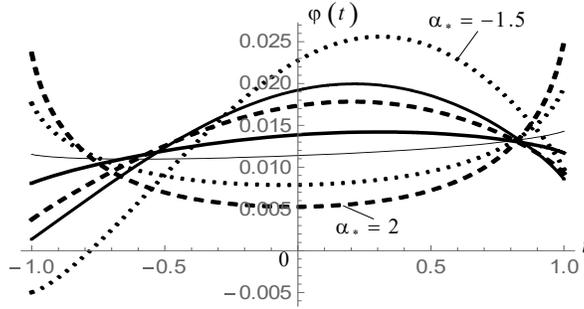
$$K_{-1} = \frac{\varphi(-1)}{\sqrt{2}}; \quad K_1 = \frac{\varphi(1)}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

Численный анализ. При численных расчетах для внешних силовых факторов приняты значения $S_1^* = 0.01$; $S_2^* = 0.02$; $T_*(\eta) = 0.001$; для отношения модулей сдвига полосы и стрингера и относительной толщины стрингера примем значения $G_0/G_1 = 0.01$ и $h_* = 0.1$. Далее эти величины будем считать неизменными, тогда неизменными будут и величины

$$\lambda_* = 0.1; \quad f(\xi) = 0.0001(5 + \xi); \quad V_* = 0.012.$$

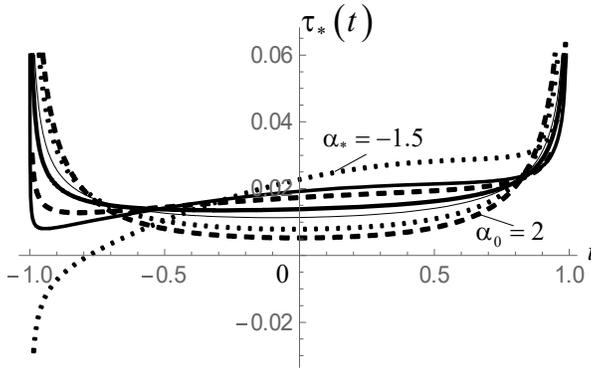
Будем проводить исследование зависимости распределения контактных напряжений и коэффициентов их концентрации на концах от значений показателя неоднородности α_* и относительной толщины упругого неоднородного слоя H_* .

На фиг. 2 представлены кривые распределения регулярной части безразмерных контактных напряжений $\varphi(t)$, рассчитанных при $H_* = 2$ и разных значениях показателя неоднородности $\alpha_* = \{-1.5, -1.2, -1, -0.5, 0, 1, 2\}$. Кривые, соответствующие указанным значениям показателя неоднородности, располагаются в порядке убывания значения на оси ординат, т.е. $\varphi(0)$.



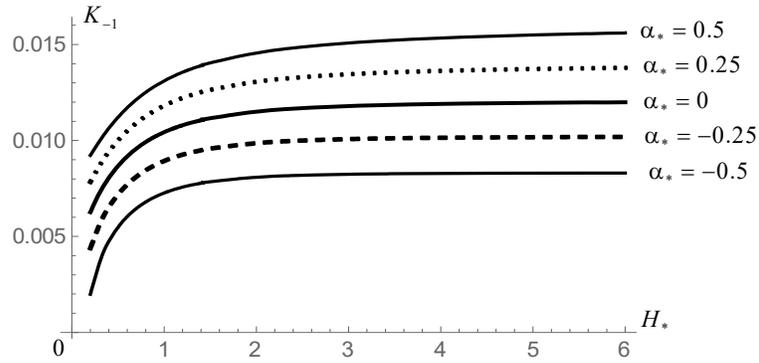
Фиг. 2 Кривые $\varphi(t)$ при $\alpha_* = \{-1.5, -1.2, -1, -0.5, 0, 1, 2\}$

На фиг. 3 представлены кривые распределения безразмерных контактных напряжений $\tau_*(t)$, рассчитанных при тех же значениях относительной толщины и показателя неоднородности. И здесь кривые, соответствующие указанным значениям показателя неоднородности, располагаются в порядке убывания значения на оси ординат, т.е. $\tau_*(0)$.



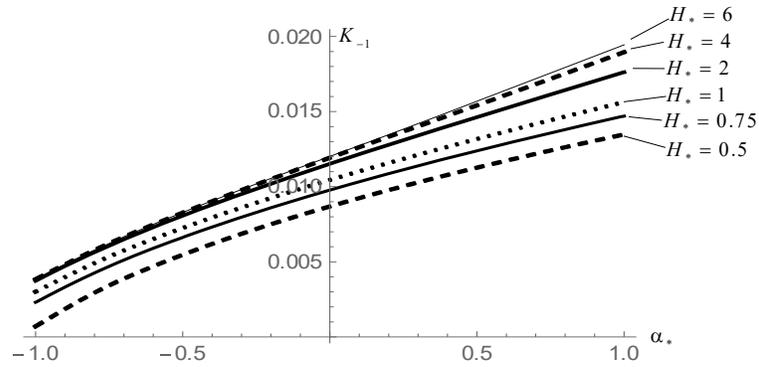
Фиг. 3 Кривые $\tau_*(t)$ при $\alpha_* = \{-1.5, -1.2, -1, -0.5, 0, 1, 2\}$

На фиг. 4 приведены кривые зависимости безразмерного коэффициента K_{-1} концентрации на левом конце зоны контакта струнгера со слоем от относительной толщины слоя H_* для различных значений показателя неоднородности $\alpha_* = \{-0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5\}$. Кривые для коэффициента K_{-1} отличаются от представленных лишь количественно, что обусловлено несимметричностью приложенных силовых факторов.



Фиг. 4 Зависимость коэффициентов концентрации напряжений от толщины слоя.

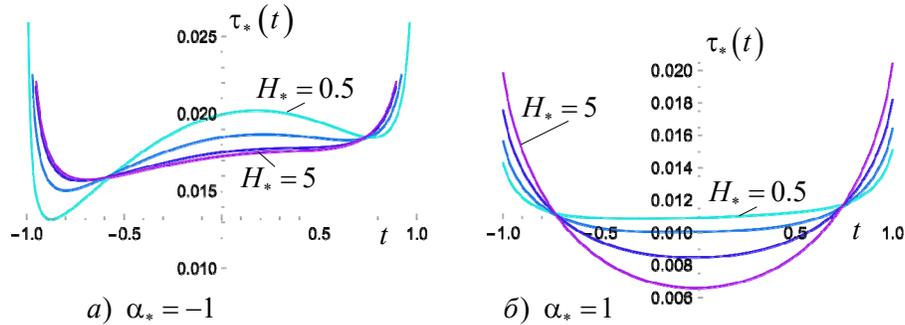
На фиг. 5 приведены кривые зависимости безразмерного коэффициента концентрации контактных напряжений у левого конца зоны контакта K_{-1} от показателя неоднородности α_* при различных значениях относительной толщины слоя $H_* = \{0.5, 0.75, 1, 2, 4, 6\}$. Качественно такие же кривые имеют место и для K_1 .



Фиг. 5 Зависимость коэффициентов концентрации напряжений от показателя неоднородности.

На фиг. 6а и фиг. 6б представлены кривые распределения контактных напряжений $\tau_*(t)$, рассчитанных при $\alpha_* = -1$ и $\alpha_* = 1$ для разных значений относительной толщины слоя $H_* = \{0.5, 0.8, 1.5, 5\}$. Кривые, соответствующие указанным значе-

ниям толщины слоя, на обеих фигурах располагаются опять-таки в порядке убывания значений $\tau_*(0)$.



Фиг. 6 Распределение контактных напряжений

Закключение. Из представленных графиков можно сделать следующие выводы:

1) для однородного слоя и слоя с уменьшающимся по глубине модулем сдвига ($\alpha_* \geq 0$) выбранные, положительно направленные, силовые факторы преобладают над отрицательно направленной силой S_1 и приводят к возникновению положительных контактных напряжений по всей зоне контакта, в то время как для слоя с достаточно большим показателем ($\alpha_* = -1.5$) увеличения модуля сдвига с глубиной эта закономерность нарушается (фиг.3);

2) увеличение толщины слоя приводит к увеличению коэффициентов концентрации напряжений на обоих концах зоны контакта независимо от показателя неоднородности (фиг. 4);

3) при любом значении относительной толщины слоя увеличение показателя неоднородности ($-1 \leq \alpha_* \leq 1$) приводит к увеличению коэффициентов концентрации, при этом чем меньше показатель неоднородности, тем быстрее, т.е. при меньших толщинах слоя, эти коэффициенты стремятся к предельным значениям при $H_* \rightarrow \infty$ (фиг. 5);

4) несимметричность распределения контактных напряжений, обусловленная приложенными нагрузками, наиболее проявляется у слоя, модуль сдвига которого увеличивается, чем у слоя с уменьшающимся, с таким же показателем, модулем сдвига. В первом случае кривые для $H_* = 1.5$ и $H_* = 5$ достаточно близки друг к другу, а во втором случае они существенно разнятся (фиг.6). Этот факт подтверждает вывод, сделанный в предыдущем пункте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян С.А. О двух смежных граничных задачах теории фильтрации и теории упругости для экспоненциально неоднородной полосы. Механика – 2013. Труды межд. школы-конф. мол. учёных, 1-4 октября 2013, Цахкадзор. С.40-44.
2. Mkhitarian S.M., Tokmajyan H.V., Avetisyan S.A., Grigoryan M.S.. On Steady-State Filtration of Fluid in Strip-Like and Wedge-Shaped Porous Ground Bases. Advanced Materials Research Vol. 1020 (2014). Pp.373-378.
3. Аветисян С.А., Мкртчян М.М. Об установившейся фильтрации жидкости в пористой экспоненциально неоднородной полосе при заданном режиме давления.//Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.68–79.
4. Аветисян С.А. Об одной смешанной задаче для упругого экспоненциально неоднородного слоя при антиплоской деформации. Сб. науч. трудов межд. конф. "Актуальные проблемы механики сплошной среды". 21-26 сентября 2015, Цахкадзор. Ереван, 2015 стр.15-19.
5. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. – Ingr. Arch., 1932, Bd. 3, No2, S. 123–129.
6. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. – В сб.: Механика деформируемого твердого тела, Ереван, Изд-во НАН Армении, 1993, стр. 129–143.
7. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. СМБ, М., «Наука», 1977, 288 с.
8. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070
9. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Quadrature formulas for integrals with a weak singularity in the kernel and a weight function of Jacobi polynomials with complex exponents. In Book: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. book series Advanced Structured Materials (STRUCTMAT, volume 185), Editors: H.Altenbach, S.Mkhitarian, V.Hakobyan, A.Sahakyan, 2023, p. 285- 298

Сведения об авторах:

Аветисян Сирануш Араратовна – м.н.с. Института механики НАН РА,
тел.: (374 95) 65 90 18. e-mail: siranushav@gmail.com

Амирджаниян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА,
тел.: (37410) 56-81-88. e-mail: amirjanyan@gmail.com

Саакян Аветик Варздатович – д.ф.м.н., зав. отделом, Институт механики НАН Армении,
тел.: (37494) 57-93-48. E-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Поступила в редакцию 25.01.2025

**О СМЕШАННОЙ 3D ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ
ПЛАСТИНКИ ИМЕЮЩАЯ ПЛОСКОСТЬ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ**

Агаловян Л.А., Япуджян В. Т.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, упругость, трехмерная задача, асимптотическое решение.

Aghalovyan L.A., Yapyujan V. T.

On mixed 3D problem of elasticity theory for an anisotropic plate with a plane of elastic symmetry

Key words: anisotropic plate, elasticity, 3D problem, asymptotic solution

The mixed 3D problem of elasticity theory is solved by the asymptotic method for an anisotropic rectangular plate, which has a plane of elastic symmetry. The normal displacement is subjected to the upper edge of the plate, the tangential stresses are equal to zero. The lower edge of the plate is rigidly fixed. For solving a problem of that class classical and refined plate theories are not applicable. By asymptotic method for solving singularly perturbed differential equations, the solution to the external problem is found, which coincides with the solution for the spatial layer. Cases are indicated when this solution becomes mathematically exact. An illustrative example, in which the weight of the plate is also taken into account, is given.

Աղալովյան Լ.Ա., Յափուջյան Վ. Տ.

**Առաձգականության սիմետրիայի հարթություն ունեցող անիզոտրոպ սալի համար
առաձգականության տեսության խառը 3D խնդրի մասին**

Հիմնաբառեր՝ անիզոտրոպ սալ, առաձգականություն, եռաչափ խնդիր, ասիմպտոտիկ լուծում

Անիզոտրոպ ուղղանկյուն սալի համար, որն ունի առաձգականության սիմետրիայի հարթություն, ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է առաձգականության տեսության խառը եռաչափ խնդիր: Սալի վերին նիստին հաղորդված է նորմալ տեղափոխություն, տանգենցիալ լարումները հավասար են զրոյի: Սալի ստորին նիստը կոշտ ամրակցված է: Այդ խնդրի լուծման համար սալերի դասական և ճշգրտված տեսությունները կիրառելի չեն: Մինգույար գրգռված դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշված է արտաքին խնդրի լուծումը, որը համընկնում է տարածական շերտի համար լուծման հետ: Նշված են այն դեպքերը, երբ այդ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ: Բերված է իլյուստրացիոն օրինակ, որում հաշվի է առնված նաև սալի կշիռը:

Для анизотропной пластинки, которая имеет плоскость упругой симметрии, асимптотическим методом решена смешанная трехмерная задача теории упругости. Верхней кромке пластинки сообщено нормальное перемещение, тангенциальные напряжения равны нулю. Нижняя кромка пластинки жестко закреплена. Для решения задачи этого класса классическая и уточненные теории пластин неприменимы. Асимптотическим методом решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений найдено решение внешней задачи, которое совпадает с решением для пространственного слоя. Указаны случаи, когда это решение становится математически точным. Приведен иллюстрационный пример, в котором учитывается также вес пластинки.

Введение. В классической и уточненных теориях пластин и оболочек рассматривается лишь один класс краевых задач теории упругости. Считается, что на лицевых поверхностях пластинки или оболочки заданы условия первой краевой задачи

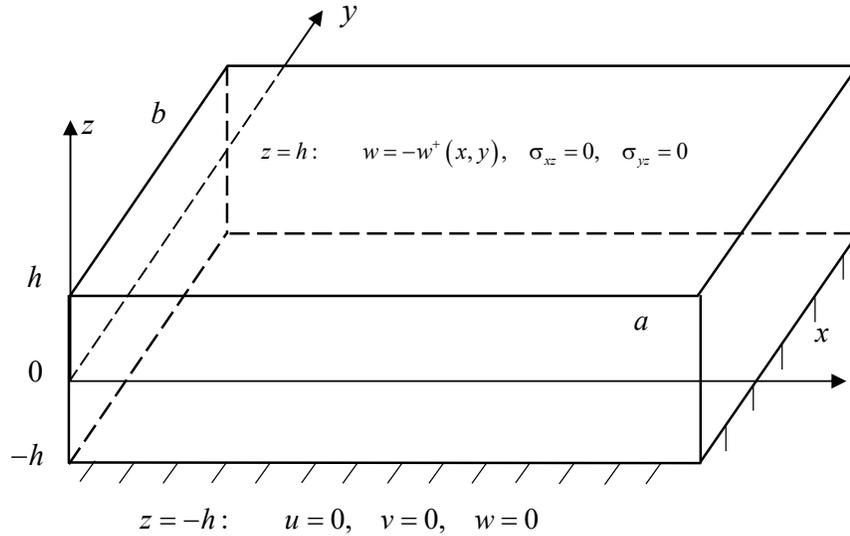
теории упругости, т.е. заданы значения соответствующих трех компонент тензора напряжений. Когда на лицевых поверхностях пластинки заданы значения компонент вектора перемещения или смешанные условия, гипотезы классической и уточненных теорий неприменимы [1,2].

Для решения подобных классов задач эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [3,4,5,6,7]. Найдена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, позволившая решать подобные классы задач для изотропных и ортотропных пластин [1,2]. Соответствующая статическая 3D смешанная задача для ортотропной пластинки решена в [8]. Найденная асимптотика позволяет найти решения также динамических задач теории упругости для тонких тел [9].

В данной работе асимптотическим методом решена 3D статическая смешанная задача теории упругости для пластинки, имеющей плоскость упругой симметрии (13 независимых постоянных упругости) [10].

1. Основные уравнения и соотношения, постановка задачи

Имеем анизотропную прямоугольную пластинку, которая занимает область $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, h \ll l, l = \min(a, b)\}$ (фиг. 1.)



Фиг. 1.

и имеет плоскость упругой симметрии xOy [10, Гл. 1, § 4].

Требуется найти решение уравнений равновесия теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{jz}}{\partial z} + F_j(x, y, z) = 0, \quad j = x, y, z, \quad (1)$$

при соотношениях упругости

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{16}\sigma_{xy}; \\
\varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{xy}; \\
\varepsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{36}\sigma_{xy}; \\
\varepsilon_{xy} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{zz} + a_{66}\sigma_{xy}; \\
\varepsilon_{xz} &= a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz}; \quad \varepsilon_{yz} = a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Решение должно удовлетворять следующим граничным условиям

$$\begin{aligned}
z = h: \quad & w = -w^+(x, y); \quad \sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{yz} = 0; \\
z = -h: \quad & u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Условия на боковых поверхностях пластинки пока не будем конкретизировать. Ими обусловлено появление пограничного слоя. Вопрос, связанный с пограничным слоем, обычно рассматривается отдельно.

2. Асимптотический метод решения задачи

Чтобы решить поставленную задачу, в уравнениях равновесия (1) и соотношениях упругости (2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{l}; \quad \zeta = \frac{z}{h}; \quad U = \frac{u}{l}; \quad V = \frac{v}{l}; \quad W = \frac{w}{l}, \tag{4}$$

в результате получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{jx}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{jz}}{\partial \zeta} + lF_j &= 0, \quad \varepsilon = \frac{h}{l}; \\
\frac{\partial U}{\partial \xi} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{16}\sigma_{xy}; \\
\frac{\partial V}{\partial \eta} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{xy}; \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{36}\sigma_{xy}; \\
\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{zz} + a_{66}\sigma_{xy}; \\
\frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} &= a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz}; \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Система (5) сингулярно возмущена малым параметром ε . Ее решение складывается из решений внешней задачи (I^{out}) и пограничного слоя (I^b):

$$I = I^{out} + I^b. \quad (6)$$

Решение внешней задачи будем искать в виде [1]

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i+s} I^{(s)} \quad s = \overline{0, N}, \quad (7)$$

где $q_i = -1$ для $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$, $q_i = 0$ для U, V, W , обозначение $s = \overline{0, N}$ означает, что в (7) по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование по целочисленным значениям s от нуля до числа приближений N .

Асимптотика (7) принципиально отличается от асимптотики тех же величин в классической теории пластин. Например, в задачах изгиба по классической теории пластин, имеем [1, 5]:

$$\begin{aligned} q = -2 \text{ для } \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}; \quad q = -1 \text{ для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz}; \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{zz}; \\ q = -2 \text{ для } U, V; \quad q = -3 \text{ для } W. \end{aligned} \quad (8)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решением, полученным асимптотикой (8), невозможно удовлетворить граничным условиям (3). Это следует также из гипотезы классической теории пластин относительно W . Принимается, что W не зависит от поперечной координаты z . Является очевидным, что при таком допущении невозможно удовлетворить условиям (3) относительно W .

Чтобы определить коэффициенты $I^{(s)}$ подставим (7) в (5) и приравняем в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{jx}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{jz}^{(s)}}{\partial \zeta} + F_j^{(s)} = 0, \quad j = x, y, z, \quad F_j^{(0)} = \frac{h^2}{l} F_j, \quad F_j^{(s)} = 0, \quad s \neq 0; \\ \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{12} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{13} \sigma_{zz}^{(s)} + a_{16} \sigma_{xy}^{(s)}; \\ \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{22} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{23} \sigma_{zz}^{(s)} + a_{26} \sigma_{xy}^{(s)}; \\ \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{23} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{33} \sigma_{zz}^{(s)} + a_{36} \sigma_{xy}^{(s)}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{16} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{26} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{36} \sigma_{zz}^{(s)} + a_{66} \sigma_{xy}^{(s)}; \\ \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{45} \sigma_{yz}^{(s)} + a_{55} \sigma_{xz}^{(s)}; \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{yz}^{(s)} + a_{45} \sigma_{xz}^{(s)}.\end{aligned}$$

Любая величина $Q^{(m)}$ системы (9) равна нулю, при $m < 0$.

Из системы (9), напряжения можно выразить через перемещения $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$. Первые четыре соотношения упругости составляют алгебраическую систему относительно $\sigma_{xx}^{(s)}, \sigma_{yy}^{(s)}, \sigma_{zz}^{(s)}, \sigma_{xy}^{(s)}$. Решив эту систему, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(\gamma_{13} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \gamma_{11} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \gamma_{12} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} - \gamma_{14} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \right) \\ \sigma_{yy}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(-\gamma_{23} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - \gamma_{21} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \gamma_{22} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + \gamma_{24} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \right); \\ \sigma_{zz}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(\gamma_{33} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \gamma_{31} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \gamma_{32} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} - \gamma_{34} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \right); \\ \sigma_{xy}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(-\gamma_{43} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - \gamma_{41} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \gamma_{42} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + \gamma_{44} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \right); \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{36} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{66} \end{vmatrix},\end{aligned}\tag{10}$$

где γ_{ij} является минором элемента, стоящего на пересечении i -того столбца и j -той строки определителя Δ .

Из остальных соотношений упругости определяются $\sigma_{xz}^{(s)}, \sigma_{yz}^{(s)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(s)} &= \frac{1}{\alpha_1} \left(a_{44} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{45} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + a_{44} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{45} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right); \\ \sigma_{yz}^{(s)} &= -\frac{1}{\alpha_1} \left(a_{45} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{55} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + a_{45} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{55} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right);\end{aligned}\tag{11}$$

$$\alpha_1 = (a_{44}a_{55} - a_{45}^2).$$

Подставив значения напряжений $\sigma_{xz}^{(s)}, \sigma_{yz}^{(s)}, \sigma_{zz}^{(s)}$ в уравнения равновесия (9), получим следующую систему уравнений для определения $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1} \left(a_{44} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} - a_{45} \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{45} \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right) &= \\ &= -F_x^{(s)} - \frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \eta}; \\ -\frac{1}{\alpha_1} \left(a_{45} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} - a_{55} \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{45} \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55} \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right) &= \\ &= -F_y^{(s)} - \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial \eta}; \\ \frac{1}{\Delta} \left(\gamma_{33} \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \gamma_{31} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \gamma_{32} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \gamma_{34} \left(\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right) &= \\ &= -F_z^{(s)} - \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-1)}}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из первых двух уравнений (12) вытекают уравнения для определения $U^{(s)}, V^{(s)}$, а из третьего уравнения для $W^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} = R_U^{(s)}, \quad R_U^{(s)} &= - \left(a_{55} F_x^{(s)} + a_{45} F_y^{(s)} + a_{55} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \right. \\ &\quad \left. + a_{55} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + a_{45} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \xi} + a_{45} \frac{\partial \sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}; \\ \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} = R_V^{(s)}, \quad R_V^{(s)} &= - \left(a_{45} F_x^{(s)} + a_{44} F_y^{(s)} + a_{45} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \right. \\ &\quad \left. + a_{45} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + a_{44} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \xi} + a_{44} \frac{\partial \sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} = R_w^{(s)}, \quad R_W^{(s)} = & -\frac{1}{\gamma_{33}} \left(\Delta \left(F_z^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & \left. + \gamma_{31} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \gamma_{32} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \gamma_{34} \left(\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right). \end{aligned}$$

В случае ортотропных пластин $a_{45} = 0$ и уравнения (12) относительно $U^{(s)}$ и $V^{(s)}$ независимы, из (13) же следует, что они независимы лишь для исходного приближения $s = 0$.

Решив уравнения (13) получим

$$\begin{aligned} U^{(s)} &= \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_U^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) d\zeta + \zeta A_1^{(s)}(\xi, \eta) + A_2^{(s)}(\xi, \eta); \\ V^{(s)} &= \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_V^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) d\zeta + \zeta B_1^{(s)}(\xi, \eta) + B_2^{(s)}(\xi, \eta); \\ W^{(s)} &= \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) d\zeta + \zeta C_1^{(s)}(\xi, \eta) + C_2^{(s)}(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (14)$$

Решение (14) содержит пока неизвестные функции $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}, C_i^{(s)}$, которые однозначно определяются из граничных условий (3), которые согласно (4) и (7) принимают вид:

$$\begin{aligned} \zeta = 1: \quad W^{(s)} = -w^{+(s)}, \quad w^{+(0)} = w^+ / l, \quad w^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0; \quad \sigma_{xz}^{(s)} = 0; \quad \sigma_{yz}^{(s)} = 0; \\ \zeta = -1: \quad U^{(s)} = 0; \quad V^{(s)} = 0; \quad W^{(s)} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя формулы (11), (14) и удовлетворив условиям (15), получим:

$$\begin{aligned} \left(a_{44} \int_0^1 R_U^{(s)} d\zeta - a_{45} \int_0^1 R_V^{(s)} d\zeta \right) + \left(a_{44} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{45} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)_{\zeta=1} + \\ + a_{44} A_1^{(s)} - a_{45} B_1^{(s)} = 0; \\ \left(a_{45} \int_0^1 R_U^{(s)} d\zeta - a_{55} \int_0^1 R_V^{(s)} d\zeta \right) + \left(a_{45} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{55} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)_{\zeta=1} + \\ + a_{45} A_1^{(s)} - a_{55} B_1^{(s)} = 0; \end{aligned}$$

$$\int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_U^{(s)} d\zeta - A_1^{(s)} + A_2^{(s)} = 0; \quad \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_V^{(s)} d\zeta - B_1^{(s)} + B_2^{(s)} = 0; \quad (16)$$

$$\int_0^1 d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)} d\zeta + C_1^{(s)} + C_2^{(s)} = -w^{+(s)}; \quad \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)} d\zeta - C_1^{(s)} + C_2^{(s)} = 0.$$

Решив эту систему, будем иметь:

$$\begin{aligned} A_1^{(s)} &= -\int_0^1 R_U^{(s)} d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1}; \quad B_1^{(s)} = -\int_0^1 R_V^{(s)} d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)_{\zeta=1}; \\ A_2^{(s)} &= -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_U^{(s)} d\zeta - \int_0^1 R_U^{(s)} d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1}; \\ B_2^{(s)} &= -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_V^{(s)} d\zeta - \int_0^1 R_V^{(s)} d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)_{\zeta=1}; \\ C_1^{(s)} &= -\frac{1}{2} \left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)} d\zeta - \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)} d\zeta \right); \\ C_2^{(s)} &= -\frac{1}{2} \left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)} d\zeta + \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)} d\zeta \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Имея значения функций $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}, C_i^{(s)}$, по формулам (10), (11) и (14) определятся все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения.

Найденное решение удовлетворяет уравнениям равновесия (1), соотношениям упругости (2) и граничным условиям (3) на лицевых поверхностях пластинки (внешние условия). Это решение практически является решением для пространственного слоя толщины $2h$. Как правило, оно не будет удовлетворять условиям на боковой поверхности пластинки.

3. Математически точное решение

Если функция $w^+(x, y)$ является алгебраическим многочленом, итерационный процесс обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена, в результате получим математически точное решение внешней задачи. Для иллюстрации сказанного, пусть

$$w^+ = l(a_0 + a_1\xi + a_2\eta); \quad F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = -\rho g, \quad (18)$$

где последним слагаемым $F_z = -\rho g$ учитывается вес пластинки.

Согласно (9), (10), (11), (13), (14), (17), (18) будем иметь

при $s = 0$

$$U^{(0)} = V^{(0)} = \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{yz}^{(0)} = 0;$$

$$W^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} (\zeta^2 - 1) - (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta)(\zeta + 1) \right);$$

$$\sigma_{xx}^{(0)} = \frac{\gamma_{13}}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} \zeta - \frac{1}{2} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta) \right);$$

$$\sigma_{yy}^{(0)} = -\frac{\gamma_{23}}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} \zeta - \frac{1}{2} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta) \right);$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \frac{\gamma_{33}}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} \zeta - \frac{1}{2} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta) \right);$$

$$\sigma_{xy}^{(0)} = -\frac{\gamma_{43}}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} \zeta - \frac{1}{2} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta) \right),$$

(19)

при $s = 1$

$$U^{(1)} = \frac{1}{4} (\beta_1 + a_1) \zeta^2 - \frac{1}{2} (\beta_1 - a_1) \zeta - \frac{1}{4} (3\beta_1 - a_1);$$

$$V^{(1)} = \frac{1}{4} (\beta_2 + a_2) \zeta^2 - \frac{1}{2} (\beta_2 - a_2) \zeta - \frac{1}{4} (3\beta_2 - a_2);$$

$$W^{(1)} = \sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0;$$

(20)

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \frac{(a_{44}\beta_1 - a_{45}\beta_2)}{2\alpha_1} (\zeta - 1); \quad \sigma_{yz}^{(1)} = -\frac{(a_{45}\beta_1 - a_{55}\beta_2)}{2\alpha_1} (\zeta - 1),$$

где

$$\beta_1 = (\gamma_{13}a_{55}a_1 - \gamma_{43}a_{55}a_2 - \gamma_{43}a_{45}a_1 - \gamma_{23}a_{45}a_2) / \Delta;$$

$$\beta_2 = (\gamma_{13}a_{45}a_1 - \gamma_{43}a_{45}a_2 - \gamma_{43}a_{44}a_1 - \gamma_{23}a_{44}a_2) / \Delta.$$

Все величины при $s \geq 2$ тождественно равны нулю, т. е. итерация обрывается на приближении $s = 1$, следовательно имеем математически точное решение:

$$u = h \left(\frac{1}{4} (\beta_1 + a_1) \zeta^2 - \frac{1}{2} (\beta_1 - a_1) \zeta - \frac{1}{4} (3\beta_1 - a_1) \right);$$

$$\begin{aligned}
v &= h \left(\frac{1}{4} (\beta_2 + a_2) \zeta^2 - \frac{1}{2} (\beta_2 - a_2) \zeta - \frac{1}{4} (3\beta_2 - a_2) \right); \\
w &= \frac{l}{2} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} (\zeta^2 - 1) - (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta) (\zeta + 1) \right); \\
\sigma_{xx} &= \frac{l}{h} \frac{\gamma_{13}}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} \zeta - \frac{1}{2} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta) \right); \\
\sigma_{yy} &= -\frac{l}{h} \frac{\gamma_{23}}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} \zeta - \frac{1}{2} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta) \right); \\
\sigma_{zz} &= \frac{l}{h} \frac{\gamma_{33}}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} \zeta - \frac{1}{2} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta) \right); \\
\sigma_{xy} &= -\frac{l}{h} \frac{\gamma_{43}}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}} \frac{h^2 \rho g}{l} \zeta - \frac{1}{2} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta) \right); \\
\sigma_{xz} &= \frac{(a_{44} \beta_1 - a_{45} \beta_2)}{2\alpha_1} (\zeta - 1); \quad \sigma_{yz} = -\frac{(a_{45} \beta_1 - a_{55} \beta_2)}{2\alpha_1} (\zeta - 1).
\end{aligned} \tag{21}$$

В частности, если учесть лишь влияние веса ($w^+ = 0$), будем иметь

$$\begin{aligned}
u &= v = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0; \\
w &= \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\gamma_{33}} h^2 \rho g (\zeta^2 - 1); \\
\sigma_{xx} &= \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{33}} h \rho g \zeta; \quad \sigma_{yy} = -\frac{\gamma_{23}}{\gamma_{33}} h \rho g \zeta; \\
\sigma_{zz} &= h \rho g \zeta; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\gamma_{43}}{\gamma_{33}} h \rho g \zeta.
\end{aligned} \tag{22}$$

Найденное решение внешней задачи, как правило не будет удовлетворять граничным условиям на боковых поверхностях пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя (I_b). Это решение можно построить автономно и сравнить его с решением внешней задачи, описанным в [1] способом. Этот вопрос для ортотропных пластин изучен авторами в [11]. Величины пограничного слоя экспоненциально убывают при удалении от боковой поверхности внутрь пластинки. Для пластин, имеющих плоскость упругой симметрии вопрос рассматривается аналогичным образом.

Закключение. Найдено асимптотическое решение трехмерной внешней задачи для анизотропной прямоугольной пластинки, которая имеет плоскость упругой сим-

метрии. На верхней лицевой поверхности пластинки заданы значения нормального перемещения, тангенциальные касательные напряжения равны нулю, а нижняя лицевая поверхность жестко закреплена. Определены все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения. Указаны случаи, когда найденное решение становится математически точным. В качестве иллюстрации сказанного, получено решение задачи, когда нормальное перемещение есть линейная функция от тангенциальных координат и учитывается также влияние веса пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория деформируемых тонкостенных систем. // В сб. Механика. 2009: Труды межд. школы – конференции молодых ученых. Ереван. Изд-во ЕГУАС, 2009. С. 5-35.
3. Friedrichs К.О. Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics // Bull. Amer. Math. Soc., 1955, Vol.61, p.485.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1968. 464 с.
5. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686.
6. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир. 1976. 455 с.
7. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981. 398 с.
8. Япуджян В.Т. Об одной смешанной 3D задаче теории упругости для ортотропной пластинки. // Доклады. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Т.123. №2. 2023. С. 31-37.
9. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. London. World Scientific. 2015. 376p.
10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е. Наука. М.. 1977. 416 стр.
11. Агаловян Л.А., Япуджян В.Т. О пограничном слое в смешанной 3D краевой задаче ортотропной пластинки. // Известия НАН РА. Механика. Т. 76. №3. 2023. С. 64-75.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН РА, д.ф.-м.н., зав. отделом Института механики НАН РА. Тел.: (+37410) 529630, E-mail: lagal@sci.am

Япуджян Варужан Тигранович – к.ф.-м.н., науч. сотр. Института механики НАН РА, Тел.: (+37444) 990250, E-mail: varuzhanyapujyan48@gmail.com

Поступила в редакцию 12.02.2025

**ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ СО СМЕЩЕНИЕМ
ЛЕВОГО КОНЦА ПРИ ЗАКРЕПЛЕННОМ ПРАВОМ КОНЦЕ С
МИНИМИЗАЦИЕЙ ИНТЕГРАЛА ГРАНИЧНОЙ ЭНЕРГИИ**

Барсегян В. Р.

Ключевые слова: неоднородный колебательный процесс, оптимальное граничное управление, интеграл граничной энергии, волновое уравнение, кусочно-постоянные характеристики, оптимальное управление колебаниями, разделение переменных.

Barseghyan V. R.

**Optimal Boundary Control of a Distributed Heterogeneous Vibration System with a Fixed Right End by
Shifting the Left End and Minimizing the Integral of the Boundary Energy**

Keywords. heterogeneous vibrations process, optimal boundary control, integral of boundary energy, wave equation, piecewise constant characteristics, optimal control of vibrations, separation of variables.

The article considers the problem of optimal boundary control of a distributed heterogeneous vibrations system described by one-dimensional wave equation with piecewise constant characteristics. It is assumed that the wave travel time through each homogeneous section is the same. Control is achieved by shifting the left end while the right end is fixed. The quality criterion is the integral of the boundary energy specified over the entire time interval. A constructive approach to build an optimal control action that transfers vibrations over a given time interval from the initial state to the final state is proposed.

Բարսեղյան Վ. Ռ.

**Ամրացված աջ եզրով ձախ եզրի տեղափոխությամբ անհամասեռ բաշխված պարամետրերով
տատանողական համակարգի օպտիմալ եզրային ղեկավարման խնդիր էներգիայի ինտեգրալի
մինիմալացմամբ**

Հիմնաբառեր՝ անհամասեռ տատանումներ, օպտիմալ եզրային ղեկավարում, եզրային էներգիայի ինտեգրալ, ալիքային հավասարում, կտոր առ կտոր հաստատուն բնութագրիչներ, տատանումների օպտիմալ ղեկավարում, փոփոխականների անջատում:

Դիտարկվում է անհամասեռ բաշխված պարամետրերով տատանողական համակարգի օպտիմալ եզրային ղեկավարման խնդիր, որը նկարագրվում է կտոր առ կտոր հաստատուն բնութագրիչներով միաչափ ալիքային հավասարմամբ: Ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր համասեռ հատվածում ալիքը անցնում է հավասար ժամանակում: Ղեկավարումը իրականացվում է ձախ եզրի տեղափոխությամբ, երբ աջ եզրը ամրացված է: Որակի հայտանիշը հանդիսանում է ամբողջ ժամանակահատվածի վրա տրված եզրային էներգիայի ինտեգրալը: Առաջարկված է տատանողական համակարգը տրված սկզբնական վիճակից վերջնական վիճակ տեղափոխող օպտիմալ ղեկավարող ազդեցության կառուցման կոնստրուկտիվ մոտեցում:

В статье рассмотрена задача оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением с кусочно-постоянными характеристиками. Предположено, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением левого конца при закрепленном правом конце. Критерием качества является интеграл граничной энергии, заданный на всем промежутке времени. Предложен конструктивный подход построения оптимального управляющего воздействия, переводящего колебания за заданный промежуток времени из начального состояния в конечное состояние.

Введение. Исследованию задач управления и оптимального управления распределенными колебательными системами с заданными начальными и конечными условиями посвящены многие работы, в частности, [1-6]. Задачам исследования и управления разнородных распределенных составных систем посвящены, в частности, работы [7-22]. Одной из первых задач управления распределенной колебательной системой, состоящей из двух кусочно-однородных сред была поставлена А.Г. Бутковским и исследована в работе [12]. В работах [13, 14] (и других работах этого же автора и его учеников) изучены задачи граничного управления колебаниями стержня, состоящего из разнородных участков. При исследовании этих задач использован метод Даламбера. В работе [2] рассмотрены задачи оптимального граничного управления смещениями на концах струны, основанными на минимизации интеграла граничной энергии, которые за произвольный, достаточно большой промежуток времени переводят процесс колебаний струны из произвольно заданного начального состояния в заданное финальное состояние. В указанных работах предложены различные методы решения задач управления и оптимального управления, например, метод Фурье, метод гармоник и метод моментов.

Задачи управления и оптимального граничного управления колебательными процессами, состоящими из двух разнородных участков с заданными начальными и конечными условиями функционала интеграла от квадратов граничных смещений, рассмотрены в работах [7-11]. Задачи оптимального управления с функционалом интеграла от квадратов производных граничных смещений, т.е. интеграла граничной энергии, пока еще недостаточно исследованы.

В настоящей работе рассмотрена задача оптимального граничного управления некоторой распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением, состоящей из двух разнородных участков, описывающих продольные колебания неоднородного стержня или поперечные колебания неоднородной струны с заданными начальными и конечными условиями. Предполагается, что длины разнородных участков колебательного процесса таковы, что время прохождения волны по каждому из участков одинаково.

Цель данной статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции оптимального граничного управления одномерными колебательными неоднородными процессами смещением левого конца при закрепленном правом конце, переводящего колебания за заданный промежуток времени из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Критерием качества является интеграл граничной энергии, заданный на всем промежутке времени. Построение осуществляется по следующей схеме. Задача сводится к задаче оптимального управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями, далее используется метод разделения переменных и методы теории оптимального управления конечномерными системами.

1. **Постановка задачи.** Рассматриваются колебания распределенной кусочно-однородной среды, расположенной вдоль отрезка $-l_1 \leq x \leq l$ и состоящей из двух участков: участка $-l_1 \leq x \leq 0$ и участка $0 \leq x \leq l$. Скорость прохождения волны по участкам обозначим $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}$, где $\rho_i = \text{const}$ - плотность, $k_i = \text{const}$ - модуль

Юнга, $i = 1, 2$. Предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l$, т.е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}. \quad (1.1)$$

Отметим, что описанным колебательным неоднородным процессом могут быть продольные колебания кусочно-однородного стержня (ρ_i - плотность, k_i -модуль упругости, $i = 1, 2$) или поперечные колебания кусочно-однородной струны (ρ_i - плотность, k_i -натяжение струны, $i = 1, 2$).

Пусть состояние распределенной кусочно-однородной среды (продольные колебания стержня или поперечные колебания струны), представлено функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$. Отклонение от состояния равновесия, т.е. колебания распределенной кусочно-однородной среды, описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.2)$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t)$$

$$a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0}. \quad (1.4)$$

Пусть заданы начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (1.5)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (1.6)$$

В формуле (1.3) функция $\mu(t)$ - управляющее воздействие (граничное управление).

Предполагается, что функция $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, а функции $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in C^2[-l_1, l]$, $\psi_0(x), \psi_T(x) \in C^1[-l_1, l]$.

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются следующие условия согласования.

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \varphi_0(-l_1), \quad \dot{\mu}(0) = \psi_0(-l_1), \quad \varphi_0(l) = \psi_0(l) = 0, \\ \mu(T) &= \varphi_T(-l_1), \quad \dot{\mu}(T) = \psi_T(-l_1), \quad \varphi_T(l) = \psi_T(l) = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Сформулируем следующую задачу оптимального граничного управления колебаниями системы (1.2) с заданными начальными (1.5) и конечными (1.6) значениями.

Требуется найти такое оптимальное управление $\mu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, (1.3), под воздействием которого колебательное движение системы (1.2) из заданного начального состояния (1.5) переходит в конечное состояние (1.6) и минимизирующее функционал

$$\int_0^T [\dot{\mu}(t)]^2 dt. \quad (1.8)$$

Критерием качества (1.8) является интеграл граничной энергии, заданный на всем промежутке времени.

2. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Для решения поставленной задачи перейдем к новой переменной [7-10, 22]

$$\xi = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1} x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}, \quad (2.1)$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (1.1), будем иметь, что отрезок $-l_1 \leq x \leq 0$ переходит к отрезку $-l \leq \xi \leq 0$. Для функции $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковые уравнения

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & -l \leq \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ a_1^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2)$$

с соответствующими граничными условиями

$$Q(-l, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

с начальными условиями

$$Q(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \leq x \leq l, \quad (2.4)$$

с конечными условиями

$$Q(\xi, T) = \varphi_T(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (2.5)$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1 \rho_1 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0-0} = a_2 \rho_2 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0+0}. \quad (2.6)$$

Отметим, что для удобства, после замены переменной (2.1) все функции оставлены в исходных обозначениях.

Так как граничные условия (2.3) неоднородны, решение уравнения (2.2) построим в виде суммы

$$Q(\xi, t) = V(\xi, t) + W(\xi, t), \quad (2.7)$$

где $V(\xi, t)$ - функция с граничными условиями

$$V(-l, t) = V(l, t) = 0, \quad (2.8)$$

требуемая определения, а функция $W(\xi, t)$ - решение уравнения (2.2) с условиями

$$W(-l, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = 0. \quad (2.9)$$

и имеет вид

$$W(\xi, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \mu(t). \quad (2.10)$$

Подстановка (2.7) в (2.2) с учетом (2.10), приводит к следующему уравнению для определения функции $V(\xi, t)$

$$\frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2} + F(\xi, t), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.11)$$

где

$$F(\xi, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{l} - 1 \right) \ddot{\mu}(t). \quad (2.12)$$

Функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет соответствующему условию сопряжения (2.6) в точке $\xi = 0$ соединения участков. Отметим, что из (1.7), согласно (2.1) и (1.1), будем иметь

$$\varphi_0(-l_1) = \varphi_0(-l), \quad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l),$$

$$\Psi_0(-l_1) = \Psi_0(-l), \quad \Psi_T(-l_1) = \Psi_T(-l). \quad (2.13)$$

Из начальных (2.4) и конечных (2.5) условий, с учетом условий (1.8) и (2.13) функция $V(\xi, t)$ должна удовлетворять следующим начальным

$$V(\xi, 0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_0(-l),$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_0(-l), \quad (2.14)$$

и конечным условиям

$$V(\xi, T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_T(-l),$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_T(-l). \quad (2.15)$$

Таким образом, решение исходной задачи сведено к задаче управления колебанием, описываемым неоднородным уравнением (2.11) с однородными граничными условиями (2.8), которая формулируется следующим образом:

требуется найти такое граничное оптимальное управление $\mu(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которого колебание, описываемое уравнением (2.11) с граничными условиями (2.8), переходит из заданного начального состояния (2.14) в конечное состояние (2.15) и минимизирующие функционал (1.8).

3. Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов. Учитывая, что граничные условия (2.8) однородны, решение уравнения (2.11) ищем в виде

$$V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k \xi}{l}, \quad V_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l V(\xi, t) \sin \frac{\pi k \xi}{l} d\xi. \quad (3.1)$$

Функции $F(\xi, t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ представим в виде рядов

Фурье, в базисе $\left\{ \sin \frac{\pi k \xi}{l} \right\}$ ($k=1, 2, \dots$), и, подставив их значения вместе с

$V(\xi, t)$ в уравнение (2.11), в соотношение (2.12), в условия (2.14) и (2.15), получим для каждого $k=1, 2, \dots$ следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2 \pi k}{l} \right)^2, \quad (3.2)$$

$$F_k(t) = -\frac{2a_2}{\lambda_k l} \ddot{\mu}(t), \quad (3.3)$$

с начальным

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_0(-l), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_0(-l), \quad (3.4)$$

и конечным условиями

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_T(-l), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_T(-l). \quad (3.5)$$

Здесь коэффициенты Фурье функции $F(\xi, t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(0)}$, $\varphi_k^{(T)}$, $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$, соответственно.

Общее решение уравнения (3.2) с условиями (3.4) имеет вид

$$V_k(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k (t - \tau) d\tau, \\ \dot{V}_k(t) = -\lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t + \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t + \int_0^t F_k(\tau) \cos \lambda_k (t - \tau) d\tau. \quad (3.6)$$

Учитывая начальные и конечные условия, из (3.6) получим, что функции $F_k(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T F_k(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{1k}(T), \quad \int_0^T F_k(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{2k}(T). \quad (3.7)$$

где

$$\tilde{C}_{1k}(T) = \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}(T) = \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k T,$$

Следуя [3-6,22], подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (3.3) в соотношения (3.7) и интегрируя по частям с учетом условий согласования (1.7), получим, что функция $\dot{\mu}(t)$ для каждого k должна удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T \dot{\mu}(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau = C_{1k}(T), \quad \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau = C_{2k}(T), \quad (3.8)$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{\psi_0(-l)}{\lambda_k} \sin \lambda_k T - \frac{l}{2a_2} \tilde{C}_{1k}(T), \quad k = 1, 2, \dots \\ C_{2k}(T) = \frac{\psi_T(-l)}{\lambda_k} - \frac{\psi_0(-l)}{\lambda_k} \cos \lambda_k T + \frac{l}{2a_2} \tilde{C}_{2k}(T), \quad (3.9)$$

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению такого граничного управления $\mu(t)$, $0 \leq t \leq T$, которое для каждого $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяет интегральным соотношениям (3.8) и доставляет минимум функционалу (1.8).

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \lambda_k (T - \tau) \\ \sin \lambda_k (T - \tau) \end{pmatrix}, \quad C_k(T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \end{pmatrix}, \quad U(\tau) = \dot{\mu}(\tau). \quad (3.10)$$

Отметим, что на практике обычно выбираются несколько первых n ($k = 1, \dots, n$) гармоник колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерными системами. Решение задачи будем строить придерживаясь этого подхода.

Тогда, учитывая введенные обозначения (3.10), для первых n гармоник соотношения (3.8) запишутся следующим образом:

$$\int_0^T H_n(\tau) U_n(\tau) d\tau = \eta_n, \quad (3.11)$$

где

$$U_n(\tau) = \dot{\mu}_n(\tau), \quad H_n(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\tau) \\ \bar{H}_2(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_1(T) \\ C_2(T) \\ \vdots \\ C_n(T) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

с размерностями $H_n(\tau) - (2n \times 1)$, $\eta_n - (2n \times 1)$.

Для произвольного числа первых n ($k = 1, \dots, n$) гармоник число интегральных соотношений в (3.8) равно $2n$, которым должна одновременно удовлетворять искомая функция управления $\mu(t)$.

Таким образом, интегральные условия (3.8) представлены условием (3.11).

Из полученного соотношения (3.11) следует справедливость следующего утверждения [23]. Для произвольного числа первых n гармоник динамический процесс, описываемый (3.2) с условиями (3.4), (3.5), вполне управляем на промежутке времени $[0, T]$ тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n (3.12), можно найти управление $U_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (3.11).

4. Построение решения задачи. Отметим, что левая часть условия (3.11) - линейная операция, порожденная функцией управления $U_n(\tau)$ на промежутке времени $[0, T]$, а функционал (1.8) можно рассматривать как квадрат нормы линейного нормированного пространства L_2 . Следовательно, задачу оптимального управления с интегральным условием (3.11) при функционале (1.8) для каждого n , $n = 1, 2, \dots$ можно рассматривать как проблему моментов [1, 23].

Поэтому построим решение задачи (1.8) и (3.8) при $k = 1, 2, \dots, n$ с помощью алгоритма решения проблемы моментов. Для решения конечномерной (при

$k = 1, 2, \dots, n$) проблемы моментов (1.8) и (3.8), следуя [23], нужно найти величины $p_k, q_k, k = 1, \dots, n$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^n [p_k C_{1k} + q_k C_{2k}] = 1, \quad (4.1)$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(4.1)} \int_0^T (h_n(\tau))^2 d\tau, \quad (4.2)$$

где

$$h_n(\tau) = \sum_{k=1}^n [p_k \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k \sin \lambda_k (T - \tau)]. \quad (4.3)$$

Для определения величин $p_k^0, q_k^0, k = 1, \dots, n$, минимизирующих (4.2), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f_n = \int_0^T (h_n(\tau))^2 d\tau + \beta_n \left\{ \sum_{k=1}^n [p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T)] - 1 \right\},$$

где β_n - неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по $p_k, q_k, k = 1, \dots, n$ функции f_n и приравнявая к нулю, с учетом обозначения (4.3), после присоединения к полученным уравнениям условия (4.1), получим замкнутую систему $2n+1$ алгебраических уравнений относительно стольких же неизвестных величин $p_k, q_k, k = 1, \dots, n, \beta_n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [a_{jk} p_j + b_{jk} q_j] &= -\frac{\beta_n}{2} C_{1k}(T), \\ \sum_{j=1}^n [d_{jk} p_j + e_{jk} q_j] &= -\frac{\beta_n}{2} C_{2k}(T), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\sum_{k=1}^n [p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T)] = 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

где

$$a_{jk} = \int_0^T \cos \lambda_j (T - \tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau,$$

$$b_{jk} = \int_0^T \sin \lambda_j (T - \tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau,$$

$$d_{jk} = \int_0^T \cos \lambda_j (T - \tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau,$$

$$e_{jk} = \int_0^T \sin \lambda_j (T - \tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau, \quad (4.5)$$

Пусть величины $p_k^0, q_k^0, k = 1, \dots, n$ и β_n^0 , являются решением замкнутой системы алгебраических уравнений (4.4). Тогда, согласно (4.2), (4.3) будем иметь

$$(\rho_n^0)^2 = \int_0^T (h_n^0(\tau))^2 d\tau, \quad (4.6)$$

$$h_n^0(\tau) = \sum_{k=1}^n [p_k^0 \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k^0 \sin \lambda_k (T - \tau)].$$

Оптимальная функция $\dot{\mu}_n^0(\tau)$ для любого $n = 1, 2, \dots$ представляется в виде:

$$\dot{\mu}_n^0(\tau) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_n^0(\tau).$$

Отсюда имеем

$$\mu_n^0(t) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \int_0^t h_n^0(\tau) d\tau + S, \quad t \in [0, T], \quad (4.7)$$

где S – постоянная интегрирования. Из (4.7) имеем, что $\mu_n^0(0) = S$, следовательно, учитывая условия согласования (1.7) и (2.13), получим $S = \varphi_0(-l)$.

Для вывода явного выражения оптимального управления $\mu_n^0(\tau), \tau \in [0, T]$, из (4.7), вычисляя соответствующие интегралы, будем иметь:

$$\mu_n^0(t) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} [-p_k^0 \sin \lambda_k (T - t) + q_k^0 \cos \lambda_k (T - t) + p_k^0 \sin \lambda_k T - q_k^0 \cos \lambda_k T] + \varphi_0(-l). \quad (4.8)$$

Заметим, что согласно (2.1) из (2.13) имеем, что $\varphi_0(-l) = \varphi_0(-l_1)$, т.е. при переходе к исходным переменным последнее слагаемое выражения функции $\mu_n^0(t)$ будет $\varphi_0(-l_1)$.

Таким образом, имея явный вид функции оптимального граничного управления $\mu_n^0(t), t \in [0, T]$, можно построить соответствующую функцию состояния $Q_n^0(\xi, t)$. Подставляя полученные выражения для оптимальных управлений $\mu_n^0(t), t \in [0, T]$, в (3.3), а полученное для $F_k^0(\tau)$ выражение – в (3.6), получим функцию $V_k^0(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, n$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь:

$$V_n^0(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi, \quad (4.9)$$

где

$$V_k^0(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^0(\tau) \sin \lambda_k (t - \tau) d\tau,$$

а с помощью формул (2.7) и (2.10) получим функцию $Q_n^0(\xi, t)$, которую назовем оптимальной функцией состояния колебательной системы для первых n гармоник. Функция $Q_n^0(\xi, t)$ запишется в виде

$$Q_n^0(\xi, t) = V_n^0(\xi, t) + \frac{1}{2l}(l - \xi)\mu_n^0(t). \quad (4.10)$$

Учитывая обозначения (2.1), согласно (4.9) и (4.10), оптимальная функция $Q_n^0(x, t)$ в исходных переменных, т.е. при $-l_1 \leq x \leq l$ представляется в виде:

$$Q_n^0(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \mu_n^0(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_n^0(t), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}. \quad (4.11)$$

Из полученных явных выражений (4.8)-(4.11) видно, что в силу непрерывности функции $\mu_n^0(t)$, $\tau \in [0, T]$ оптимальная функция состояния $Q_n^0(x, t)$ также является непрерывной и можно убедиться, что для функции $Q_n^0(x, t)$ выполняются условия сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков (1.4).

Заключение. В работе предложен конструктивный подход построения функции оптимального граничного управления одномерными неоднородными колебательными процессами смещением левого конца при закрепленном правом конце, переводящим колебания за заданный промежуток времени из заданного начального состояния в заданное конечное состояние с критерием качества, являющимся интегралом граничной энергии, заданным на всем промежутке времени. Результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления процессами разнородных колебаний в физических и технологических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. Абдукаримов М.Ф. Об оптимальном граничном управлении, производимом смещением процесса вынужденных колебаний на одном конце струны при свободном втором // Докл. АН Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 4. С. 280–286.
3. Barseghyan V.R. Control Problem of String Vibrations with Inseparable Multipoint Conditions at Intermediate Points in Time // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54, Issue 8, pp. 1216-1226.
4. Barseghyan V.R. The problem of optimal control of string vibrations // *International Applied Mechanics*, 56(4), (2020), 471–48, DOI: 10.1007/s10778-020-01030-w
5. Barseghyan V., Solodusha S. Optimal Boundary Control of String Vibrations with Given Shape of Deflection at a Certain Moment of Time. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021 // Lecture Notes in Computer Science*, 2021, vol 12755. pp 299-313.
6. Barseghyan V. and Solodusha S. On One Problem in Optimal Boundary Control for String Vibrations with a Given Velocity of Points at an Intermediate Moment of Time // *Conference Paper. Publisher: IEEE. 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*, pp. 343-349, 2021. Doi: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537514
7. Barseghyan V., Solodusha S. On the Optimal Control Problem for Vibrations of the Rod/String Consisting of Two Non-Homogeneous Sections with the Condition at an Intermediate Time. *Mathematics*. 2022, 10(23): 4444.
8. Барсегян В.Р. Задача граничного управления смещением на двух концах процессом колебания стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2023. № 2. С. 125-135.
9. Барсегян В.Р., Солодуша С.В. Граничные управления некоторой распределенной неоднородной колебательной системой с промежуточными условиями. *Итоги науки и техн. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. (ВИНИТИ РАН)*, 2023. Т. 226. С. 3–15.
10. Барсегян В.Р. О задачах граничного управления и оптимального управления распределенной неоднородной колебательной системой с заданными промежуточными условиями на функции состояния. *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **232** (2024), 13–29.
11. Barseghyan V.R., Solodusha S.V. Model of the Control Problem of the Thermal Effect of a Laser Beam on a Two-Layer Biomaterial. *Mathematics* 2024, 12, 374.
12. Львова Н.Н. Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой // *Автоматика и телемеханика*, 1973. № 10. С. 22–32.
13. Ильин В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков. *Доклады РАН*. 2011. Т.440, № 2. С.159–163.
14. Ильин В.А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // *Доклады РАН*. 2010. Т. 435, № 6. С. 732–735.
15. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // *Тр. ИММ УрОРАН*, 2011, Т. 17, № 1. С. 85–92.
16. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // *Ж. вычисл.*

- матем. и матем. физ.. 2009. Т. 49, № 5. С. 815–825. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009. Vol. 49. Issue 5, pp. 786–796.
17. Провоторов В.В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. 2012. Вып. 1. С. 62–71.
 18. Amara J. Ben, Beldi E. Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients // *SIAM J. Control Optim.*, 2019. Vol. 57, No. 5, pp. 3360–3387.
 19. Mercier D., Régnier V. Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses // *Collectanea Mathematica*. 2009. Vol. 60, No. 3, pp. 307–334.
 20. Кулешов А.А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 5. С. 594–597.
 21. Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады РАН, 2012, Т. 444. С. 488–491.
 22. Холодовский С.Е., Чухрий П.А. Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13, № 4. С. 42–50.
 23. Красовский, Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Сведения об авторе:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.

Тел.: (+374 91) 20 32 20 ;

E-mail: barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 04.03.2025

**СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ
ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НАЛИЧИИ ДАННЫХ О
ПЕРЕМЕЩЕНИИ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА**

Гулгазарян Л.Г., Амбарцумян П.Р.

Ключевые слова: 3D динамическая задача, асимптотический метод, трехслойная пластинка, датчики измерений.

Ghulghazaryan L.G., Hambardzumyan P.R.

Mixed Boundary-Value Problem of Forced Vibrations of a Three-Layered Plate in the Presence of Data about the Displacement of Contact Surface Points

Keywords: 3D dynamic problem, asymptotic method, , three-layered plate, measuring instrument.

The forced vibrations of three-layered orthotropic plate at full contact between the layers are considered, when mixed boundary conditions are set on the upper front surface of the plate, and the values of the displacement vector components are taken from the contact surface between the first and second layers, as data from measuring instruments. The amplitudes of vibrations are determined and the conditions for the occurrence of resonance are derived. The private solution of the corresponding dynamic equations and relations of the three-dimensional problem of elasticity theory is obtained by the asymptotic method.

Դուրղազարյան Լ.Գ., Համբարձումյան Փ.Ռ.

Եռաշերտ սալի ստիպողական տատանումների խառը եզրային խնդիր՝ կոնտակտի մակերևույթի կետերի տեղափոխությունների տվյալների առկայության դեպքում

Հիմնաբանք. 3D դինամիկ խնդիր, ասիմպտոտիկ մեթոդ, եռաշերտ սալ, չափիչ սարքեր.

Գիտարկված են եռաշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումները, երբ շերտերի միջև առկա է լրիվ կոնտակտ, վերին դիմային մակերևույթի վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ, իսկ տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների արժեքները վերցված են առաջին և երկրորդ շերտերի միջև կոնտակտի մակերևույթից, որպես չափիչ սարքերից ստացված տվյալներ: Դուրս են բերված ռեզոնանսի առաջացման պայմանները և արտածված են տատանման ամպլիտուդները: Ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառմամբ՝ ստացված է առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի համապատասխան դինամիկ հավասարումների և առնչությունների մասնավոր լուծումը:

Рассмотрены вынужденные колебания трехслойной ортотропной пластинки при полном контакте между слоями, когда на верхней лицевой поверхности пластинки заданы смешанные граничные условия, а значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между слоями, как данные измерительных приборов. Определены амплитуды колебаний и выведены условия возникновения резонанса. Асимптотическим методом получено частное решение соответствующих динамических уравнений и соотношений трехмерной задачи теории упругости.

Введение. В современной инженерии в качестве оптимальных конструктивных элементов используются упругие тонкие многослойные пакеты, состоящие из балок, пластин или оболочек. В строительных конструкциях, мониторинг перемещений точек между слоями и возникающих в конструкциях деформаций и напряжений важен для оценки механических свойств и поведения материалов в условиях эксплуатации, а также помогает рано выявить потенциальные проблемы и снизить риск аварийных ситуаций. Это особенно актуально для критических конструкций, таких как авиационные и космические компоненты, где безопасность играет решающую роль.

Таким образом, умение оценивать и предсказывать напряженно-деформированное состояние многослойных конструкций не только повышает их производительность и безопасность, но и способствует развитию инженерных наук и технологий в целом. Знание напряженно-деформированного состояния многослойных конструкций является критически важным аспектом в инженерных и технических приложениях, особенно когда необходимо оценить деформации и напряжения на нижней поверхности конструкции, а по каким-либо причинам прямое измерение этих параметров невозможно.

В фундаментальных исследованиях Э.И. Григолока [1], Я.М. Григоренко [2] и J.N. Reddy [3] с помощью гипотез разработаны методы расчета многослойных элементов конструкций и их математических моделей. Асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений оказался эффективным при определении напряженно-деформированных состояний слоистых пакетов, когда верхняя поверхность свободна, данные измерений сняты с поверхности контакта между различными слоями, а также при наличии вязкого сопротивления [4-6]. На основе уравнений пространственной задачи теории упругости получены асимптотические решения неклассических краевых задач о колебаниях ортотропных пакетов, при различных условиях контакта между слоями, обзор которых представлен в работе [7].

В данной работе решена внешняя динамическая задача трехслойной ортотропной пластинки, когда значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между первым и вторым слоями с помощью установленных измерительных датчиков. На верхней лицевой поверхности заданы смешанные граничные условия, а между слоями заданы условия полного контакта.

1. Постановка задачи. Рассматриваются вынужденные колебания трехслойной ортотропной пластинки (рис. 1), $D = \{(x, y, z), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h, \min(a, b) = l, h = h_1 + h_2 + h_3 \ll l\}$, где $h_i, i = 1, 2, 3$ толщины слоев пластины. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропных сред при неклассических краевых условиях [8-9].

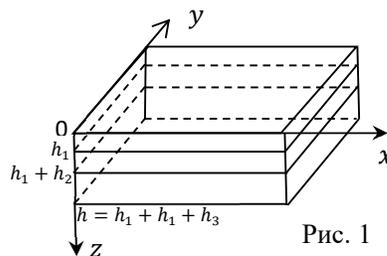


Рис. 1

Имеем:

уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(j)}}{\partial z} = \rho^{(j)} \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$(x, y, z; u, v, w), j = I, II, III;$

уравнения состояния (соотношения упругости) для ортотропного тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} &= a_{11}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{12}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{13}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, & \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} &= a_{66} \sigma_{xy}^{(j)}, \\ \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} &= a_{12}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{22}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, & \frac{\partial w^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z} &= a_{55} \sigma_{xz}^{(j)}, \\ \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} &= a_{13}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{33}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, & \frac{\partial w^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial z} &= a_{44} \sigma_{yz}^{(j)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\rho^{(j)}$ – плотности слоев, $a_{ik}^{(j)}$ – постоянные упругости ($a_{ik}^{(j)} = a_{ki}^{(j)}$), j – номер слоя.

На лицевой поверхности $z = 0$ заданы условия:

$$\sigma_{xz}^I(x, y, 0, t) = 0, \quad \sigma_{yz}^I(x, y, 0, t) = 0, \quad W^I(0) = 0. \quad (1.3)$$

На поверхности контакта между первым и вторым слоями известны значения перемещений точек поверхности контакта, как данные датчиков или других измерительных средств:

$$u^I(x, y, h_1, t) = u^{II}(x, y, h_1, t) = u^+(x, y) \exp(i\Omega t) \quad (u, v, w), \quad (1.4)$$

где Ω – частота вынужденных колебаний точек поверхности контакта между первым и вторым слоями пластинки.

На поверхности контакта между слоями должны выполняться условия полного контакта:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^I(x, y, h_1, t) &= \sigma_{xz}^{II}(x, y, h_1, t) & (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}), \\ u^I(x, y, h_1, t) &= u^{II}(x, y, h_1, t) & (u, v, w). \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{II}(x, y, h_1 + h_2, t) &= \sigma_{xz}^{III}(x, y, h_1 + h_2, t) & (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}), \\ u^{II}(x, y, h_1 + h_2, t) &= u^{III}(x, y, h_1 + h_2, t) & (u, v, w). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В [8] показано, что сформулированная неклассическая краевая задача всегда имеет решение.

2. Общее асимптотическое решение задачи. В уравнениях (1.1), (1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \\ U^j &= u^j/l, \quad V^j = v^j/l, \quad W^j = w^j/l, \quad j = I, II, III. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q^{(j)} = Q^{(j)}(\xi, \zeta) \exp(i\Omega t), \quad j = I, II, III, \quad (2.2)$$

где $Q^{(j)}$ – любое из напряжений и перемещений. В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром $\varepsilon = h/l$ система относительно $Q^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}^{(j)}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^{(j)} (\Omega_*)^2 U^{(j)} &= 0, \quad (x, y, z; U, V, W), \\ \frac{\partial U^{(j)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{12}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{13}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, \quad \frac{\partial U^{(j)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial \xi} = a_{66}^{(j)} \sigma_{xy}^{(j)}, \\ \frac{\partial V^{(j)}}{\partial \eta} &= a_{12}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{22}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, \quad \frac{\partial W^{(j)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(j)} \sigma_{xz}^{(j)}, \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial W^{(j)}}{\partial \zeta} &= a_{13}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{33}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, \quad (2.3) \\ \frac{\partial W^{(j)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^{(j)}}{\partial \zeta} &= a_{44}^{(j)} \sigma_{yz}^{(j)}, \quad \Omega_*^2 = h^2 \Omega^2, \quad j = I, II, III. \end{aligned}$$

Решение внешней задачи будем искать в виде асимптотического представления

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(j)} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{\alpha\beta}^{(j,s)}, \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad s = \overline{0, N}, \quad (2.4) \\ (U^{(j)}, V^{(j)}, W^{(j)}) &= \varepsilon^s (U^{(j,s)}, V^{(j,s)}, W^{(j,s)}), \quad j = I, II, III. \end{aligned}$$

$s = \overline{0, N}$ здесь и далее означает, что по немоу (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах целочисленных значений $0, N$.

Подставив (2.4) в (2.3) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε , получим новую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 \rho^{(j)} U^{(j,s)} &= 0, \quad (x, y, z; U, V, W) \\ \frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j,s)} + a_{12}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j,s)} + a_{13}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j,s)}, \\ \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \eta} &= a_{12}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j,s)} + a_{22}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j,s)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j,s)}, \\ \frac{\partial W^{(j,s)}}{\partial \zeta} &= a_{13}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j,s)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j,s)} + a_{33}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j,s)}, \quad \frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(j,s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(j)} \sigma_{xz}^{(j,s)}, \\ \frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(j,s)}}{\partial \zeta} &= a_{44}^{(j)} \sigma_{yz}^{(j,s)}, \quad \frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \xi} = a_{66}^{(j)} \sigma_{xy}^{(j,s)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из системы (2.5) все напряжения можно выразить через перемещения по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(j,s)} &= -A_{23}^{(j)} \frac{\partial W^{(j,s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^{(j)} \frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^{(j)} \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{yy}^{(j,s)} &= -A_{13}^{(j)} \frac{\partial W^{(j,s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^{(j)} \frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^{(j)} \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{zz}^{(j,s)} &= A_{11}^{(j)} \frac{\partial W^{(j,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(j)} \frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(j)} \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{xy}^{(j,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(j)}} \left[\frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad \sigma_{xz}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}} \left[\frac{\partial U^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial \xi} \right], \\ \sigma_{yz}^{(j,s)} &= \frac{1}{a_{44}^{(j)}} \left[\frac{\partial V^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad j = I, II, III, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^{(j)} &= \frac{a_{11}^{(j)} a_{22}^{(j)} - a_{12}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}}, \quad A_{22}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{23}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}}, \quad A_{33}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{13}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}}, \\ A_{12}^{(j)} &= \frac{a_{12}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{23}^{(j)} a_{13}^{(j)}}{\Delta^{(j)}}, \quad A_{13}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)} a_{23}^{(j)} - a_{12}^{(j)} a_{13}^{(j)}}{\Delta^{(j)}}, \quad A_{23}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)} a_{13}^{(j)} - a_{12}^{(j)} a_{23}^{(j)}}{\Delta^{(j)}}, \\ \Delta^{(j)} &= a_{11}^{(j)} a_{22}^{(j)} a_{33}^{(j)} + 2a_{12}^{(j)} a_{13}^{(j)} a_{23}^{(j)} - a_{22}^{(j)} a_{13}^{(j)2} - a_{11}^{(j)} a_{23}^{(j)2} - a_{33}^{(j)} a_{12}^{(j)2}. \end{aligned}$$

Для определения функций $U^{(j,s)}, V^{(j,s)}, W^{(j,s)}$, ($j = I, II, III$) получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(j)} \rho^{(j)} (\Omega_*)^2 U^{(j,s)} = R_U^{(j,s)}, \quad (U, V, W; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}) \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} R_U^{(j,s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(j,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55}^{(j)} \left[\frac{\partial \sigma_{xx}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad j = I, II, III, \\ R_V^{(j,s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(j,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44}^{(j)} \left[\frac{\partial \sigma_{xy}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$R_W^{(j,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(j)}} \left[A_{23}^{(j)} \frac{\partial^2 U^{(j,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^{(j)} \frac{\partial^2 V^{(j,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{xz}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{yz}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right],$$

$j = I, II, III., \quad Q^{(j,n)} \equiv 0 \text{ при } n < 0.$

Решениями уравнений (2.7) являются:

$$U^{(j,s)} = C_{u1}^{(j,s)}(\xi, \eta) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(j)} \rho^{(j)}} \zeta + C_{u2}^{(j,s)} \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(j)} \rho^{(j)}} \zeta + \bar{U}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$(U, V, W; a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)}, \frac{1}{A_{11}^{(j)}}), \quad (2.9)$

$\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ - частные решения уравнений (2.7).

После удовлетворения условий (1.3), (1.4), компоненты вектора перемещения для первого слоя определяются по формулам ($0 \leq \zeta \leq \zeta_1, \zeta_1 = \frac{h_1}{h}$):

$$U^{(I,s)} = \left(U^+ - \bar{U}^{(I,s)}(\zeta_1) \right) \cdot \frac{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^I \rho^I} \zeta}{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^I \rho^I} \zeta_1} -$$

$$\frac{1}{\Omega_* \sqrt{a_{55}^I \rho^I}} \left[\frac{\partial \bar{U}^{(I,s)}(0)}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(I,s-1)}(0)}{\partial \xi} \right] \cdot \frac{\sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^I \rho^I} (\zeta - \zeta_1)}{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^I \rho^I} \zeta_1} + \bar{U}^{(I,s)}(\zeta),$$

$(U, V; \xi, \eta; a_{55}, a_{44})$

$$W^{(I,s)} = \left(W^+ - \bar{W}^{(I,s)}(0) \right) \cdot \frac{\sin \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} \zeta}{\sin \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} \zeta_1} +$$

$$+ \bar{W}^{(I,s)}(0) \frac{\sin \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} (\zeta - \zeta_1)}{\sin \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} \zeta_1} + \bar{W}^{(I,s)}(\zeta).$$

Для второго слоя ($\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2, \zeta_2 = \frac{h_1+h_2}{h}$):

$$U^{(II,s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{II}}{\rho^{II}}} \left(\sigma_{xz}^{(II,s)}(\zeta_1) - \tilde{\sigma}_{xz}^{(II,s)}(\zeta_1) \right) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}} (\zeta - \zeta_1) +$$

$$\left(U^{+(s)} - \bar{U}^{(II,s)}(\zeta_1) \right) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}} (\zeta - \zeta_1) + \bar{U}^{(II,s)}(\zeta), \quad (2.11)$$

$(x, y, z; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}; U, V, W),$

для третьего слоя ($\zeta_2 \leq \zeta \leq 1$):

$$U^{(III,s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{III}}{\rho^{III}}} \left(\sigma_{xz}^{(III,s)}(\zeta_2) - \tilde{\sigma}_{xz}^{(III,s)}(\zeta_2) \right) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{III} \rho^{III}} (\zeta - \zeta_2) +$$

$$\left(U^{(II,s)}(\zeta_2) - \bar{U}^{(III,s)}(\zeta_2) \right) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{III} \rho^{III}} (\zeta - \zeta_2) + \bar{U}^{(III,s)}(\zeta), \quad (2.12)$$

$$(x, y, z; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}; U, V, W),$$

где

$$\tilde{\sigma}_{xz}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^j} \left[\frac{\partial \bar{U}^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad j = II, III.$$

Решения будут конечными, если будут выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^I \rho^I} \zeta_1 &\neq 0, \quad (a_{55}, a_{44}) \\ \sin \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} \zeta_1 &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким образом, условия

$$\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^I \rho^I} \zeta_1 = 0, \quad (a_{55}, a_{44}), \quad \sin \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} \zeta_1 = 0 \quad (2.14)$$

являются условиями возникновения резонанса. Чтобы избежать возникновения резонанса необходимо физико-механические и геометрические параметры пластины выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия (2.13), т.е. частота вынужденных колебаний не удовлетворяла условиям резонанса (2.14).

Полученное решение, как правило, не удовлетворяет граничным условиям на боковой поверхности пакета. Для устранения возникшей неувязки необходимо иметь решение для пограничного слоя, которое при удалении от боковой поверхности во внутрь пакета убывает экспоненциально.

3. Частное решение. С точки зрения практических применений полученных результатов, наиболее используемыми являются случаи, когда внешнее воздействие или постоянное или меняется линейно от тангенциальных координат. В этих случаях итерационный процесс определения искомых величин обрывается и получается математически точное решение во внешней задаче.

Рассмотрим частный случай, когда внешнее воздействие постоянно:

$$u = u^+ = const, \quad (U, V, W)$$

Тогда асимптотические решения прервутся уже в первом приближении и компоненты вектора перемещения примут вид:

$$\begin{aligned} u^j &= l U^{(j,0)} \exp(i\Omega t), \quad (U, V, W), \\ \sigma_{xx}^j &= \varepsilon^{-1} \cdot \sigma_{xx}^{(j,0)} \exp(i\Omega t), \quad (x, y, z,) \quad j = I, II, III. \end{aligned}$$

Для первого слоя:

$$\begin{aligned} u^I &= l \cdot U^+ \cdot \frac{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^I \rho^I} \zeta}{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^I \rho^I} \zeta_1} \exp(i\Omega t), \\ &\quad (u, v; U, V; a_{55}, a_{44}) \\ w^I &= l \cdot W^+ \cdot \frac{\sin \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} \zeta}{\sin \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} \zeta_1} \exp(i\Omega t). \end{aligned}$$

$$\sigma_{xx}^I = -\varepsilon^{-1} \cdot W^+ \cdot A_{23}^I \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^I}{A_{11}^I}} \cdot \frac{\cos \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} \zeta}{\sin \Omega_* \sqrt{\rho^I / A_{11}^I} \zeta_1} \exp(i\Omega t),$$

$$(x, y, z, A_{23}^I, A_{13}^I, -A_{11}^I)$$

$$\sigma_{xz}^I = -\varepsilon^{-1} \cdot U^+ \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^I}{a_{55}^I}} \frac{\sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^I} \rho^I \zeta}{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^I} \rho^I \zeta_1} \exp(i\Omega t),$$

$$(x, y; U, V; a_{55}, a_{44})$$

$$\sigma_{xy}^I = 0,$$

Для второго слоя:

$$u^{II} = (l \cdot U^+ \cdot \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II}} \rho^{II} (\zeta - \zeta_1) + \frac{l}{\Omega_*} \cdot \sqrt{\frac{a_{55}^{II}}{\rho^{II}}} \sigma_{xz}^{(I,0)}(\zeta_1) \times$$

$$\sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II}} \rho^{II} (\zeta - \zeta_1)) \exp(i\Omega t), \quad \left(x, y, z; u, v, w; U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}} \right).$$

$$\sigma_{xx}^{II} = \varepsilon^{-1} A_{23}^{II} \cdot (W^+ \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}} \cdot \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}} (\zeta - \zeta_1) -$$

$$\frac{1}{A_{11}^{II}} \sigma_{zz}^{(I,0)}(\zeta_1) \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}} (\zeta - \zeta_1)) \exp(i\Omega t), \quad (xx, yy; A_{23}^{II}, A_{13}^{II}),$$

$$\sigma_{zz}^{II} = \varepsilon^{-1} \cdot (-A_{11}^{II} \cdot W^+ \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}} \cdot \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}} (\zeta - \zeta_1) +$$

$$\sigma_{zz}^{(I,0)}(\zeta_1) \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}} (\zeta - \zeta_1)) \exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{xy}^{II} = 0,$$

$$\sigma_{xz}^{II} = \varepsilon^{-1} \cdot (-U^+ \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{II}}{a_{55}^{II}}} \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II}} \rho^{II} (\zeta - \zeta_1) +$$

$$\sigma_{xz}^{(I,0)}(\zeta_1) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II}} \rho^{II} (\zeta - \zeta_1)) \exp(i\Omega t),$$

$$(x, y; U, V; a_{55}, a_{44})$$

Для третьего слоя:

$$u^{III} = l \cdot (U^{(III,0)}(\zeta_2) \cdot \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{III}} \rho^{III} (\zeta - \zeta_2) + \frac{1}{\Omega_*} \cdot \sqrt{\frac{a_{55}^{III}}{\rho^{III}}} \sigma_{xz}^{(II,0)}(\zeta_2) \times$$

$$\sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{III}} \rho^{III} (\zeta - \zeta_2)) \exp(i\Omega t), \quad \left(x, y, z; u, v, w; U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}} \right),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{III} &= \varepsilon^{-1} A_{23}^{III} (W^{(II,0)}(\zeta_2) \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} \cdot \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} (\zeta - \zeta_2) - \\
&\quad \frac{1}{A_{11}^{III}} \sigma_{zz}^{(II,0)}(\zeta_2) \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} (\zeta - \zeta_2)) \exp(i\Omega t), \quad (xx, yy; A_{23}^{III}, A_{13}^{III}), \\
\sigma_{zz}^{III} &= \varepsilon^{-1} (A_{11}^{III} \cdot W^{(II,0)}(\zeta_2) \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} \cdot \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} (\zeta - \zeta_2) + \\
&\quad \sigma_{zz}^{(II,0)}(\zeta_2) \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} (\zeta - \zeta_2)) \exp(i\Omega t), \\
\sigma_{xy}^{III} &= 0, \\
\sigma_{xz}^{III} &= \varepsilon^{-1} \cdot (-U^{(II,0)}(\zeta_2) \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{a_{55}^{III}}} \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{III} \rho^{III}} (\zeta - \zeta_2) + \\
&\quad \sigma_{xz}^{(II,0)}(\zeta_2) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{III} \rho^{III}} (\zeta - \zeta_2)) \exp(i\Omega t), \\
&\quad (x, y; U, V; a_{55}, a_{44})
\end{aligned}$$

Заключение. В рассмотренной задаче изучено напряженно-деформированное состояние трехслойной пластинки, при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта между первым и вторым слоями.

Выведены условия возникновения резонанса. Проанализировав условия (2.14), приходим к выводу, что если измерительные приборы для считывания данных о перемещениях точек поверхности установлены между первым и вторым слоями, то в условия резонанса входят только параметры первого слоя, а на напряженно-деформированное состояние пластинки влияют параметры всех слоев.

Проводя мониторинг по данным измерительных приборов и следя за изменением напряженно-деформированного состояния пакета во времени, можно определить моменты, когда будет нарушена прочность контактной поверхности между некоторыми слоями пластинки, в результате чего произойдет разрыв или контакт будет неполный.

Литература

1. Григолюк Э. И., Коган Е. А. В кн.: Механика оболочек и пластин в XXI веке. Межвуз. науч. сб. Саратовский гос. техн. ун-т. 1999. С. 3-30. // Grigolyuk E.I., Kogan E.A., In book: Mechanics of shells and plates at XXI century. Interuniversity scientific collection. Saratov state university. 1999. 3-30p.
2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. Киев. Наукова думка. 1991. 216с. // Grogirenko Ya.M., Vasilenko A.T., Ponkratova N.D. Problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies. Kyiv. Naukova Dumka. 1991. 216p.
3. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. CRC Press. Boca Raton, FL, Second Edition. 2004. P. 831.

4. Гулгазарян Л.Г., Амбарцумян П.Р., Динамическая трёхмерная задача теории упругости двуслойной пластинки при наличии вязкого сопротивления, Доклады НАН Армении, 2020, Т.120, N3, 181-190с // Ghulghazaryan L.G., Hambardzumyan P.R. (2020) The Dynamic Three-Dimensional Problem of the Theory of Elasticity of a Two-Layer Plate in the Presence of Viscous Resistance. Reports of NAS RA. 120 (3). 181-190. http://elib.sci.am/2020_3/04_3_2020.pdf
5. Aghalovyan L. A., Ghulghazaryan L. G., Kaplunov J. D. et al. 3D dynamic analysis of layered elastic shells. - J. Math. Sciences. 2023. V. 273. P. 999-1015. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06560-5> .
6. Амбарцумян П. Р. Вынужденные колебания двухслойной пластинки при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта. Доклады НАН Армении. 2023. Т. 120. № 3. С. 181-190.// Hambardzumyan P.R. Forced vibrations of a double-layer plate in the presence of data about the movement of contact surface points. Reports of NAS RA. 2023. V.120. № 3. 181-190p.
7. Aghalovyan L.A. On the classes of problems for deformable one-layer and multilayer thin bodies solvable by the asymptotic method // Mechanics of composite materials.- 2011.- Vol. 47, № 1.- PP. 59-72.
8. Aghalovyan L. A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore, London. World Scientific. 2015. 376 p.
9. Агаловян Л.А, Агаловян М.Л., Тагворян В.В. О решениях динамических трёхмерных задач теории упругости по моделированию землетрясений // Изв. НАН РА.Механика. – 2018. – Т. 71.– N 4. – С. 17–29.

Сведения об авторах:

Автор для корреспонденции:

Гулгазарян Лусине Гургеновна, д.ф.м.н, профессор, в.н.с. Института механики НАН Армении, зав.кафедрой математики и методики ее преподавания АГПУ им. Х. Абовяна

Tel.(+37491) 302554, (+37455) 302554

E-mail: lusina@mail.ru, ghulghazaryanlusine08@aspu.am

Амбарцумян Парандзем Рафиковна - преподаватель и соискатель кафедры Математики и методики ее преподавания Армянского государственного педагогического университета имени Х. Абовяна.

Тел.: (+374-77) 684856

E-mail: hambardzumyanparandzem@mail.ru, hambardzumyanparandzem05@aspu.am

Поступила в редакцию 18.03.2025

**СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР ПАНЕЛИ УМЕРЕННЫХ РАЗМЕРОВ,
НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: РАСТЯНУТОЙ ПО ПОТОКУ
ГАЗА И СЖАТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ, ПРИ
НАБЕГАНИИ ПОТОКА НА ЕЕ СВОБОДНЫЙ КРАЙ**

Мартirosян С. Р.

Ключевые слова: аэроупругая устойчивость, растягивающие и сжимающие силы, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, аналитическое решение, дивергенция панели, панельный флаттер

Martirosyan S.R.

Supersonic flutter of a moderate sized panel loaded in two directions: stretched along the gas flow and compressed in the perpendicular direction, when the flow runs into its free edge

Key words: aeroelastic stability, tensile and compressive forces, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method, panel divergence and flutter

By analyzing, as an example, a thin elastic plate of a moderate sized, initially loaded in two directions: stretched along supersonic the gas flow and compressed in the perpendicular direction, we study the influence of the initial stress state of the plate on the stability of the unperturbed equilibrium state of the dynamical system “plate – flow” under the assumption that the flow runs into the free edge of the panel, on which there are concentrated inertial masses and moments. An analytical solution of the problem of stability is obtained. An accurate assessment of the influence of initially loading forces on the stability of the system is given.

Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Գերձայնային զազի հոսքի ուղղությամբ ձգված և միաժամանակ հոսքին ուղղահայաց ուղղությամբ սեղմված ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին, սալի ազատ եզրին հոսքի վրավազքի դեպքում

Հիմնաբառեր` առաձգական կայունություն, ուղղանկյուն սալ, ձգող և սեղմող ուժեր, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ, դիվերգենցիա, ֆլատեր

Ուսումնասիրված է գերձայնային զազի հոսքում մեկ ազատ եզրով ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը, պայմանավորված ձգված շրջհոսման ուղղությամբ և միաժամանակ սեղմված ուղղահայաց ուղղությամբ ուժերով, «սալ–հոսք» դինամիկ համակարգի ոչխտորոված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացած իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: «Սալ–հոսք» համակարգի կայունության վրա նախնական ուժերի ազդեցությանը տրված է խիստ գնահատական:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния тонкой упругой прямоугольной пластинки умеренных размеров, первоначально нагруженной по двум направлениям силами растяжения и сжатия, соответственно, по потоку газа и в перпендикулярном ему направлении, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток» в предположении, что сверхзвуковой поток газа набегаёт на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота. Получено аналитическое решение задачи устойчивости. Дана точная оценка влиянию первоначальных сил на устойчивость системы.

Введение. В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния прямоугольной пластинки умеренных размеров с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, в предположении, что первоначально пластинка нагружена растягивающими и сжимающими силами по двум направлениям, соответственно, по потоку газа и в перпендикулярном ему направлении.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка–поток» с помощью алгоритма, подробно изложенного в [13].

Показано, что при меньших значениях отношения длины пластинки (сторона по потоку) к её ширине невозмущённое состояние равновесия системы теряет как статическую устойчивость, так и динамическую, соответственно, в виде эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели, и в виде панельного флаттера, в отличие от пластинок с большим отношением сторон, примерно равным единице, при котором имеет место потеря статической устойчивости в виде эйлеровой дивергенции панели, а неэйлерова дивергенция и панельный флаттер отсутствуют. Найдены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [12].

Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных сил растяжения и сжатия на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы в зависимости от её «существенных» параметров и относительной толщины пластинки.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Данная статья является обобщением работ [13,15,16] и продолжением [19]. Рассмотрение подобных задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1– 5, 8, 9].

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$, $ab^{-1} \in [0.33; 1.96)$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённого состояния равновесия пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 8, 13].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих $N_x = 2h\sigma_x$ и сжимающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, равномерно

распределённых по кромкам пластинки, соответственно, $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 5].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызывает избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» $\delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$, где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [6, 7]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$ [1, 5].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками δp , растягивающими σ_x и сжимающими σ_y усилиями в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами I_c поворота, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{pr.}$ и $(\sigma_y)_{cr.}$, где $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [10]; $(\sigma_y)_{cr.}$ – усилия, которые могут произвести «выпучивание» пластинки в отсутствие обтекания ($V = 0$) при условии $\sigma_x = 0$ [1, 15].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [6, 7] в предположении малости интенсивности $m \partial^2 w / \partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c \partial^2 w / \partial t^2$ и $I_c \partial^2 w / \partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 5, 19]:

$$D \Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 8, 13, 19]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a \text{ и } w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.3)$$

ν – коэффициент Пуассона.

Задача устойчивости динамической системы (1.1)–(1.3) состоит:

1) в нахождении критической скорости V_{cr} – наименьшей скорости потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m.} \approx 33.85; \quad (1.4)$$

приводящей к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.}, \quad \sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}, \quad (1.5)$$

когда все параметры системы заданы, кроме скорости потока V ;

2) в определении относительной толщины пластинки $(2ha^{-1})_{\min}$, которая обеспечивала бы её прочность по критерию устойчивости колебаний, когда форма, материал пластинки и все параметры потока известны.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.5) по Ляпунову [11] сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.5) будем исследовать в случае прямоугольных пластинок умеренных размеров [1, 2, 13, 16]:

$$\gamma = ab^{-1} \in [0.33; 1.96), \quad (1.6)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

В работе [13] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.3) для всех значений $\gamma \in [0, \infty]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки ($\sigma_x = \sigma_y = 0$). В работе [16] исследована исходная задача устойчивости, при условии $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0$. Показано, что растягивающие усилия σ_x приводят к существенному повышению устойчивости системы. В работе [17] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для всех $\gamma \in [0, \infty]$ в статической постановке ($m_c = 0, I_c = 0$) по методу Эйлера. Показано, что возмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от её существенных параметров. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Определены критические скорости дивергенции

панели и локализованной дивергенции. Установлено, что при определённом соотношении усилий, растягивающих σ_x и сжимающих σ_y , наблюдается эффект их «взаимной компенсации», наиболее ярко проявленный в случае пластинок, у которых $\gamma \geq 0.5$. В работе [19] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для $\gamma \in [0; 0.33)$.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.5). Сведём поставленную задачу устойчивости к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде суммы гармонических колебаний [1, 2, 13, 19]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1)–(1.5) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re } \lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda > 0$) [11]. Критическая скорость потока газа V_{cr} , характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re } \lambda = 0$) [1, 2, 11].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [17, 19]:

$$r^4 - 2 \cdot (1 + \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1 - \beta_y^2) = 0, \quad (2.2)$$

α_n^3 – параметр, определяющий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3}, a_0^2 \rho_0 M_{2 \cos m} D^{-1} \mu_n^{-3}); \quad (2.3)$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты, характеризующие усилия σ_x и σ_y соответственно, определяющие консервативную составляющую нагрузки [1, 17]:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{pr.}, \quad (\beta_x^2)_{pr.} = h(\sigma_x)_{pr.} D^{-1} \mu_n^{-2}; \quad (2.4)$$

$$\beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2h \sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_y^2)_{cr.}, \quad (\beta_y^2)_{cr.} = 2h(\sigma_y)_{cr.} D^{-1} \mu_n^{-2} \text{ (табл.1);}$$

согласно условиям (1.4), (1.5).

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов, что тождественно группе уравнений [17, 19]:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$\left(r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right) = 0; \quad (2.6)$$

где $q > 0$ – единственный действительный корень кубического уравнения:

$$8 \cdot (q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда, в соответствии с обозначением (2.3), очевидно, что параметр $q \in R$ характеризует скорость потока газа V при фиксированных значениях остальных параметров системы: $q = q(V) \in (q(a_0 M_0), q(a_0 M_{2\cos m}))$ в силу условия (1.4).

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), переписанного в виде (2.5) и (2.6), можно показать, что

$$q = q(V) \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})) \subseteq (q(a_0 M_0), q(a_0 M_{2\cos m})), \quad (2.8)$$

$$q_0 = \left(-(1+\beta_x^2) + 2\sqrt{(1+\beta_x^2)^2 + 3(1-\beta_y^2)} \right) / 3 \quad (2.9)$$

$$\text{при всех } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr} \text{ и } \beta_y^2 < \left(0; 0.25(1+\beta_x^2)^2 + 1 \right) \cap \left(0; (\beta_y^2)_{cr} \right); \quad (2.10)$$

в силу очевидного условия $q > 0$ и известного требования к её корням r_i [1,2,13,17]:

$$r_1 < 0, r_2 < 0, r_{3,4} = \alpha \pm i\beta \in W, \alpha > 0, \quad (2.11)$$

являющимися решением квадратных уравнений (2.5) и (2.6) соответственно [17, 19]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}, r_1 < 0, r_2 < 0; \quad (2.12)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}, r_{3,4} \in W. \quad (2.13)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.12) и (2.13), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y). \quad (2.14)$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента β_y , характеризующего напряжение σ_y : $(\beta_y^2)_{cr} = (\beta_y^2)_{cr}(n, \gamma, \nu)$ – решения дисперсионных уравнений исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания для $\gamma \in [0.33; 1.96)$ при $n=1$, $\beta_x^2=0$ и $m_c=0, I_c=0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} [15,19]:

$$\begin{aligned} F_1(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = & \\ = & \left(\sqrt{1+\beta_y} (1-\beta_y - \nu)^2 + \sqrt{1-\beta_y} (1+\beta_y - \nu)^2 \right) sh \left(\pi n \gamma \left(\sqrt{1+\beta_y} - \sqrt{1-\beta_y} \right) \right) - \\ & - \left(\sqrt{1+\beta_y} (1-\beta_y - \nu)^2 - \sqrt{1-\beta_y} (1+\beta_y - \nu)^2 \right) sh \left(\pi n \gamma \left(\sqrt{1+\beta_y} + \sqrt{1-\beta_y} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

когда $\beta_y^2 < 1$;

$$F_2(n, \gamma, \nu) = (2 - \nu^2) sh(\sqrt{2}\pi n \gamma) - \nu^2 \sqrt{2}\pi n \gamma \cdot ch(\sqrt{2}\pi n \gamma) = 0, \text{ когда } \beta_y^2 = 1;$$

$$F_3(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = \sqrt{\beta_y - 1} (\beta_y + 1 - \nu)^2 \operatorname{sh}(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y + 1}) \cos(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y - 1}) - \\ - \sqrt{\beta_y + 1} (\beta_y - 1 + \nu)^2 \operatorname{ch}(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y + 1}) \sin(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y - 1}) = 0, \text{ когда } \beta_y^2 > 1.$$

Таблица 1.

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.33	5.799	5.150	4.875	4.447	3.686
0.40	4,245	3.815	3.625	3.332	2.797
0.50	3.058	2.792	2.672	2.479	2.114
0.60	2.416	2.237	2.153	2.015	1.745
0.70	2.032	1.903	1.841	1.735	1.523
0.74	1.921	1.806	1.751	1.654	1.458
0.80	1.785	1.687	1.639	1.555	1.379
0.90	1.616	1.539	1.500	1.431	1.282
1.00	1.496	1.434	1.401	1.342	1.212
1,20	1.341	1.297	1.273	1.228	1.124
1.80	1.149	1.126	1.113	1.086	1.016
1.96	1.125	1.105	1.092	1.067	1.004

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «сушественных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \gamma \in [0.33; 1.96]. \quad (2.15)$$

позволяющую по известному значению параметра $q = q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2)$ определить приведённую скорость потока газа $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$.

Таблица 2.

$2ha^{-1} \backslash \nu$	0.125	0.3	0.5
0,006	(54.81, 1311.78)	(50.52, 1208.98)	(41.63, 996.35)
0,007	(34.45, 811.07)	(32.00, 753.37)	(26.15, 615.52)
0,008	(23.12, 544.34)	(21.48, 505.62)	(17.55, 413.10)
0,009	(16.22, 381.76)	(15.06, 354.59)	(12.31, 289.71)
0,010	(11.84, 283.45)	(10.91, 261.25)	(8.99, 215.32)
0,011	(8.89, 209.40)	(8.09, 190.36)	(6.75, 158.91)
0,012	(6.85, 164.01)	(6.32, 151.20)	(5.20, 124.60)
0,013	(5.39, 126.87)	(5.01, 117.84)	(4.09, 96.28)
0,014	(4.31, 101.46)	(4.00, 94.24)	(3.27, 76.99)
0,015	(3.51, 84.04)	(3.23, 77.33)	(2.67, 63.81)

Учитывая условия (1.4), из выражения (2.15) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 / (12(1 - \nu^2))$ имеем [17,19]:

$$V(q)D^{-1}(a_0\rho_0a^3) \in (V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0a^3), a_0M_{2\cos m})\Psi \subseteq (a_0M_0, a_0M_{2\cos m})\Psi,$$

когда $V(q_0) \geq a_0M_0$;

$$V(q)D^{-1}(a_0\rho_0a^3) \in (a_0M_0, a_0M_{2\cos m})\Psi, \text{ когда } V(q_0) < a_0M_0;$$

$$\Psi = 12(1 - \nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2ha^{-1})^{-3}, M_0 = \sqrt{2}, M_{2\cos m} \approx 33.85. \quad (2.16)$$

Далее, подставляя значения $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в выражения (2.16), получаем соответствующие интервалы $d(2ha^{-1}, \nu) = (a_0M_0, a_0M_{2\cos m}) \cdot \Psi$ допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}(a_0\rho_0a^3)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.4) для стальных пластинок (табл. 2) [16, 18].

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.5).

Подставляя общее решение (2.14) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.12) и (2.13), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ [19]:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2) \lambda^2 + A_3 = 0, \quad (3.1)$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \delta_n > 0, \chi_n > 0, \quad (3.2)$$

δ_n и χ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) = \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left(1 - e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma} \right) B_1 B_2 - \quad (3.3)$$

$$- 2B_2 \left(q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pi n \gamma} sh(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) -$$

$$- 2B_1 \left(q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pi n \gamma} ch(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2);$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) = \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
&= 2(q+1+\beta_x^2) \left[q - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + (q + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}) e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n \gamma} \right] B_1 B_2 + \\
&+ 2B_2 \left[\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} \left(q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) sh(\pi n \gamma B_1) + \right. \\
&+ 2B_1 \left. \left((2q-1)(q+1) + \beta_y^2 + q\beta_x^2 \right) ch(\pi n \gamma B_1) \right] \cos(\pi n \gamma B_2) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n \gamma} + \\
&+ 2 \left[B_1 \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} \left(q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) ch(\pi n \gamma B_1) + \right. \\
&+ \left. (q+1+\beta_x^2)(q-1+\beta_y^2 + q\beta_x^2) sh(\pi n \gamma B_1) \right] \sin(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n \gamma); \\
A_2 &= A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) = \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(q+1+\beta_x^2) \left(1 + \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n \gamma) \right) B_1 B_2 - \\
&- 4(q+1+\beta_x^2) B_1 B_2 ch(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n \gamma) + \\
&+ 2(3(q^2-1) - 2\beta_x^2 - \beta_x^4 + 2\beta_y^2) sh(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n \gamma); \\
A_3 &= A_3(q, n, \gamma, v, \beta_x^2, \beta_y^2) = \tag{3.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left\{ \left(q+1 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 + \right. \\
&+ 2\beta_x^2 \left(q - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \left. \right\} B_1 B_2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left\{ \left(q+1 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right)^2 - \right. \\
&- 2(q+1)v - (1-v)^2 + 2\beta_x^2 \left(q + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \left. \right\} B_1 B_2 \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n \gamma) + \\
&+ 2B_2 \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n \gamma) \left\{ [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - \right. \\
&- (2q^2-4q+1)(q+1) + (2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + 2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 - \\
&- \left. \left(q-1 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \beta_y^2 - 2((2q-1)(q+1) - q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + q\beta_x^2)v + \right. \\
&+ \left. (q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2})v^2 \right] sh(\pi n \gamma B_1) + \\
&+ 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)^3(q^2-1+\beta_y^2)} B_1 ch(\pi n \gamma B_1) \left. \right\} \cdot \cos(\pi n \gamma B_2) - \\
&- 2 \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n \gamma) \left\{ B_1 \left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \right. \right. \\
&+ (2q^2-4q+1)(q+1) - (2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + 2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 + \\
&+ \left. \left. \left(q-1 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \beta_y^2 + 2((2q-1)(q+1) + q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + q\beta_x^2)v - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2})v^2] ch(\pi n \gamma B_1) + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \\
& \cdot (3(q^2-1) - 2\beta_x^2 - \beta_x^4 + 2\beta_y^2) \cdot sh(\pi n \gamma B_1) \} \sin(\pi n \gamma B_2); \\
B_1 = & \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}, \quad B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Легко показать, что при допустимых значениях (2.9) параметра $q = q(V)$ и коэффициентов (2.10): $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.}$, $\beta_y^2 < (0; 0.25(1+\beta_x^2)^2 + 1) \cap (0; (\beta_y^2)_{cr.})$, характеризующих напряжения σ_x и σ_y , для всех $\gamma \in [0.33; 1.96)$ справедливо:

$$B_1 = B_1(q, \beta_x^2, \beta_y^2) > 0, \quad B_2 = B_2(q, \beta_x^2, \beta_y^2) > 0. \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) > 0, \quad A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) > 0. \quad (3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n \gamma)^2 \cdot (m_c a^2)^{-1}, \quad (3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), переписывается в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2) \chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \quad \delta_n > 0, \quad \chi_n > 0, \quad k_n > 0. \quad (3.11)$$

Будем полагать, что

$$k_n \in (0, 10]. \quad (3.12)$$

При больших значениях k_n , примерно $k_n \geq 14$, при скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ переход из левой части комплексной плоскости собственных значений λ_k системы в правую часть происходит через точку $\lambda_\infty = \pm \infty$, вызывающий «жёсткое» изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к неустойчивости: имеет место аperiodическая неустойчивость [1, 2].

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2 = \beta_y^2 = 0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [13].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) при ограничениях (1.4) и (1.5) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.11), описывающего собственные движения системы «пластинка–поток» в пространстве её «существенных» параметров $\mathfrak{S} = \{q(V), n, \gamma, v, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическую систему «пластинка–поток». Значения остальных параметров системы принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Как и в работах [13, 14, 18, 19], введём в рассмотрение в пространстве параметров \mathfrak{S} системы «пластинка–поток» область устойчиво-

сти $\mathfrak{S}_0 (k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и области неустойчивости: $\mathfrak{S}_1 (A_3 < 0, \Delta > 0)$, $\mathfrak{S}_2 (k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и $\mathfrak{S}_3 (A_3 > 0, \Delta < 0)$; соответственно, эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \quad (4.1)$$

В области устойчивости \mathfrak{S}_0 уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого состояния равновесия; в области \mathfrak{S}_1 – имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых корней $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели; в области \mathfrak{S}_2 – имеет два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$) корня, характеризующих более ярко выраженную дивергенцию панели – неэйлеровую дивергенцию; в области \mathfrak{S}_3 , по крайней мере, два корня уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер, при котором пластинка совершает флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде [1,2,13].

Границами области устойчивости \mathfrak{S}_0 системы в пространстве её параметров \mathfrak{S} при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие, соответственно, условия аperiodической и колебательной неустойчивости [11–13]: характеристическое уравнение (3.11) на гиперповерхности $A_3 = 0$ имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности $\Delta = 0$ – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Переходы ($\mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}_3$) и ($\mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$) определяют «опасные границы» областей \mathfrak{S}_0 и \mathfrak{S}_2 [12].

На границе $A_3 = 0$ области устойчивости \mathfrak{S}_0 при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели \mathfrak{S}_1 . Критические скорости $\{V_{cr.div.}\}$, определяемые подстановкой первого и третьего корней уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.15), разграничивают области \mathfrak{S}_0 и \mathfrak{S}_1 . При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k , вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к эйлеровой дивергенции панели. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений, при-

водящих к изменению плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости неэйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области \mathfrak{T}_1 и \mathfrak{T}_2 . При скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит «мягкий» переход из области \mathfrak{T}_1 в область \mathfrak{T}_2 . Критические скорости $V_{1,2}$ определяются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$ и $\Delta > 0$ в формулу (2.15).

На границе $\Delta = 0$ области устойчивости \mathfrak{T}_0 при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а также, на границе $\Delta = 0$ области \mathfrak{T}_2 при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ теряет устойчивость в виде колебательной неустойчивости: имеет место панельный флаттер. При этом, система переходит в состояние колебательной неустойчивости из состояния равновесия или из состояния неэйлеровой дивергенции соответственно. Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}\}$, определяемые подстановкой первого корня уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.15), разграничивают области \mathfrak{T}_0 и \mathfrak{T}_3 при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ или области \mathfrak{T}_2 и \mathfrak{T}_3 при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$. В обоих случаях при $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям. Однако, в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – изогнутая пластинка – «выпученная».

Критические скорости $V_{cr.div.}$, $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой искомого значения параметра $q \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm}))$ в формулу (2.15).

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n)\} \in \mathfrak{T}$ для $\gamma \in [0.33; 1.96)$, параметризованных надлежащим образом.

Численные результаты наиболее представительных из этого семейства кривых, приведённые в таблицах 3 – 14, показали, что при фиксированных значениях остальных параметров системы критические скорости эйлеровой и неэйлеровой дивергенции, а также, флаттера являются монотонно возрастающими функциями от числа полуволн n : их наименьшему значению соответствует $n = 1$.

В этом случае, так же, как и в [16, 18], можно выделить три интервала параметра γ : $\gamma \in [0.33; 0.74)$, $\gamma \in [0.74; 1.3)$ и $\gamma \in [1.3; 1.96)$, в которых качественные характеристики возмущённого движения системы, примерно, одинаковы, в отличие от количественных характеристик, существенно зависящих от γ .

Для наглядной иллюстрации динамики возмущённого движения системы составим цепочки переходов из области $\mathfrak{T}_l \subset \mathfrak{T}$ в область $\mathfrak{T}_k \subset \mathfrak{T}$, применительно к

интервалу сверхзвуковых скоростей (1.4), сопоставляя найдённые значения критических скоростей с данными таблицы 2, аналогично, как и в [14, 18, 19]. Ясно, что формы представления цепочек существенно зависят от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок. Цепочки переходов в случае стальных пластинок относительной толщины $(2ha^{-1}) \in [0.006, 0.015]$, когда $\gamma \in [0.33; 1.96)$, в частности, для $\gamma = 0.5; 0.8; 1.0$ и $\gamma \geq 1.3$ будут вида:

$$\gamma = 0.5$$

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^2} \mathfrak{T}_1, \quad k_1 \in (0, 0.37); \quad (5.1)$$

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{T}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{T}_1,$$

$$k_1 \in [0.37, 1.16);$$

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{T}_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{T}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{T}_1,$$

$$k_1 \geq [1.16; 10];$$

$$\gamma = 0.8$$

$$\mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^2} \mathfrak{T}_1, \quad \beta_x^2 = 0 \text{ и } \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1, \quad \beta_x^2 > 0; \quad (5.2)$$

$$\gamma = 1$$

$$\mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \text{ при всех } \beta_x^2 \geq 0; \quad (5.3)$$

$$\gamma \in [1.3; 1.96)$$

$$\mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_{div} \subset \mathfrak{T}_1, \quad \gamma \in [1.3; \gamma_*); \quad (5.4)$$

$$\mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{loc.div}} \mathfrak{T}_{loc.div.} \subset \mathfrak{T}_1, \quad \gamma \in [\gamma_*; 1.96); \quad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_{div.} \cup \mathfrak{T}_{loc.div.};$$

при всех допустимых значениях остальных параметров. Значение $\gamma_* = \gamma((\beta_x^2)_*)$ (табл. 3) разграничивает подобласти области статической неустойчивости: дивергенции панели ($\mathfrak{T}_{div.}$) и локализованной дивергенции ($\mathfrak{T}_{loc.div.}$).

Здесь, в соответствии с обозначением (3.10), $k_1 = \chi_1 \cdot \delta_1^{-1} = I_c \pi^2 \gamma^2 \cdot (m_c a^2)^{-1}$.

Таблица 3.

γ_*	1.3	1.4	1.6	1.8	1.96
$(\beta_x^2)_*$ при $v = 0.3$	2.2	2.1	2.0	1.8	0

Заметим, что качественные характеристики поведения возмущённого движения системы (1.1) – (1.5) при всех значениях $\gamma \in [0.33, 1.96)$ такие же, как и в [16].

Иными словами, силы N_y , направленные перпендикулярно скорости потока, оказывают исчезающе малое влияние на разбиение пространства параметров системы, в отличие от сил N_x , направленных по потоку газа, аналогично случаю, рассмотренному в [18].

5.1. В интервале $\gamma \in [0.33; 0.74]$ для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006; 0.01]$ невозмущённое состояние равновесия системы, будучи неустойчивым при малых $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{\min} = (\beta_x^2)_{\min}(\gamma, 2ha^{-1})$ вблизи $a_0\sqrt{2}$, становится устойчивым, когда $\beta_x^2 \geq (\beta_x^2)_{\min}$ (табл.4), в отличие от пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in (0.01; 0.015]$, для которых оно устойчиво при всех $\beta_x^2 \geq 0$ и при всех допустимых значениях остальных параметров системы.

Таблица 4. Значения $(\beta_x^2)_{\min}$ при $\gamma \in [0.33, 0.74]$ и $2ha^{-1} \in [0.006; 0.01]$.

$\gamma \backslash 2ha^{-1}$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.73
0.006	4.2	2.3	1.28	0.49	0.011
0.010	0.52	0.01	0	0	0

При малых $k_1 \in (0, 0.37)$ невозмущённое состояние равновесия системы теряет устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели при скоростях потока $V \geq V_{cr.div}^{(1)}$ и $V \geq V_{cr.div}^{(2)}$ (табл. 5, 7): неэйлерова дивергенция и панельный флаттер отсутствуют.

При умеренных $k_1 \in [0.37, 1.16)$ и больших значениях $k_1 \geq [1.16; 10]$ – теряет как статическую устойчивость в виде эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели при скоростях потока $V \geq V_{cr.div}^{(1)}$ (табл. 5), $V \geq V_{1,2}$ (табл. 6) и $V \geq V_{cr.div}^{(2)}$ (табл. 7), так и динамическую устойчивость при скоростях $V \geq V_{cr.fl.}$ (табл. 8, 9) в виде панельного флаттера, становясь устойчивым при $V \geq V_0$ и $V \geq V_0^*$ (табл. 6, 10, 11) соответственно. При этом, когда $k_1 \in [0.37; 1.16)$, имеет место переход от покоя к флаттерным колебаниям $(\mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cfl}} \mathfrak{S}_3)$ – начинает совершать автоколебания плоская по форме пластинка, а когда $k_1 \geq [1.16; 10]$ – $(\mathfrak{S}_2 \xrightarrow{V_{cfl}} \mathfrak{S}_3)$ – начинает совершать автоколебания «выпученная» – изогнутая по форме пластинка.

Справедливо равенство:

$$V_0 \text{ при } k_1 \in [0.37, 1.16) = V_{1,2} \text{ при } k_1 \in [1.16; 10]. \quad (5.5)$$

Приведённые скорости $V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_0^* D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ в цепочках переходов (5.1) исчисляются подстановкой второго корня уравнений $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ соответственно в формулу (2.15).

В отличие от критических скоростей V_0 , $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$, скорости $V_{cr.div.}^{(1)}$, $V_{cr.div.}^{(2)}$ и V_0^* меньше в пластинах с большим значением коэффициента Пуассона ν , примерно, в 1.74 раза, 1.2 раза и 1.07–1.25 раз. А, скорости V_0 , $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ – больше, примерно, в 1.2 раза и в 1.1 – 1.25 раз соответственно.

Таблица 5. Значения $V_{cr.div.}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.5$, $\nu = 0.3$

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.3	0.5	1.0	1,5	2.0
0	11.706	15.416	18.264	25.214	32.680	40.444
0.5	9.442	13.126	15.646	22.365	29.530	36.986
1.0	7.176	10.745	13.183	19.625	26.496	33.750
1.5	–	–	10.705	16.962	23.488	30.557

Таблица 6. Значения $V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.5$, $\nu = 0.3$.

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.3	0.5	1.0	1,5	2.0
0	120.387	130.740	137.691	155.232	173.217	191.632
0.5	120.502	131.084	138.210	156.234	174.640	193.505
1.0	120.581	131.389	138.685	157.148	175.954	195.279
1.5	–	–	139.119	157.932	177.158	196.909

Таблица 7. Значения $V_{cr.div.}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.5$, $\nu = 0.3$.

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.3	0.5	1.0	1,5	2.0
0	458.481	468.929	475.758	492.462	508.795	524.647
0.5	458.788	469.052	475.798	492.319	508.423	523.900
1.0	459.034	469.168	475.851	492.147	508.175	523.153
1.5	–	–	475.816	492.005	508.101	522.440

Таблица 8. Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.5, \nu = 0.3, k_1 = 0.5; 0.8; 1.$

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	140.253	161.284	179.460	–	–	–
0.5	136.544	155.889	171.913	–	–	–
1.0	133.201	151.609	166.064	–	–	–
1.5	–	–	161.338	–	–	–

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	123.946	138.484	148.564	174.653	215.415	–
0.5	123.659	135.990	145.963	171.794	207.712	–
1.0	121.338	135.456	143.416	168.985	201.488	–
1.5	–	–	142.851	168.274	197.121	–

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	121.884	133.822	142.208	166.270	181.583	234.199
0.5	121.057	132.917	141.248	163.504	178.608	225.297
1.0	120.765	132.418	140.502	162.282	176.305	220.202
1.5	–	–	139.962	162.165	174.865	216.538

Таблица 9. Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.5, \nu = 0.3$ и $k_1 = 5; 10.$

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	133.079	141.620	147.366	162.124	177.598	193.831
0.5	135.968	144.553	150.327	165.358	180.899	197.415
1.0	138.836	147.466	153.189	168.573	184.181	200.981
1.5	–	–	166.192	171.728	187.660	204.530

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	144.376	152.560	158.255	172.546	187.062	202.257
0.5	147.851	156.291	162.025	176.618	191.574	207.045
1.0	151.111	159.804	165.574	181.096	195.810	211.641
1.5	–	–	169.108	184.293	199.945	216.090

Таблица 10. Значения $V_0^* D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.5, \nu = 0.3$ и $k_1 = 0.5; 0.8; 1$.

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	245.563	239.409	230.207	–	–	–
0.5	251.527	247.102	241.005	–	–	–
1.0	257.032	253.884	249.315	–	–	–
1.5	–	–	256.722	–	–	–

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	270.215	268.617	265.031	260.274	259.682	–
0.5	276.053	278.041	280.938	280.454	279.460	–
1.0	280.204	283.926	284.411	286.661	281.307	–
1.5	–	–	290.325	292.632	288.780	–

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	275.042	280.662	283.318	286.497	286.456	271.900
0.5	280.901	285.349	288.275	292.987	293.900	285.581
1.0	284.820	290.282	293.235	297.129	300.563	295.394
1.5	–	–	297.951	305.070	307.815	304.001

Таблица 11. Значения $V_0^* D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.5, \nu = 0.3$ и $k_1 = 5; 10$.

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	251.654	261.606	268.062	283.539	298.395	312.561
0.5	256.231	266.874	273.179	289.283	304.744	319.282
1.0	260.809	270.874	278.093	294.538	310.597	325.737
1.5	–	–	282.524	300.044	315.032	332.211

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	233.756	243.919	250.415	266.756	282.610	297.842
0.5	238.280	248.503	255.274	272.197	288.549	304.544
1.0	242.341	253.087	260.133	277.641	294.594	311.205
1.5	–	–	264.756	282.845	300.397	317.368

Критическая скорость $V_{cr.fl.}$ является возрастающей функцией от k_1 в интервале $k_1 \in [1.16; 10]$. $V_{cr.fl.}$ с ростом k_1 возрастает на 5 – 10% : вибрации повышают устойчивость системы «пластинка–поток» [9].

Отметим, что обтекание приводит к «падению» критического значения коэффициента $(\beta_y^2)_{cr} = (\beta_y^2)_{cr}(n, \gamma, \nu)$ (табл. 1), примерно, в 1.6 – 1.8 раз.

Из сопоставления данных таблиц 5 – 11 с данными таблицы 2, следует, что менее устойчивым является невозмущённое состояние равновесия систем с пластинками относительной толщины $2ha^{-1} < 0.009$, как и в [18].

В интервале $\gamma \in [0.74; 1.96)$ невозмущённое состояние равновесия системы устойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ для всех $2ha^{-1} \in [0.006; 0.015]$. И, поскольку, начиная с значения $\gamma = 0.74$, справедливы неравенства $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ при всех допустимых значениях остальных параметров системы «пластинка–поток, то её невозмущённое состояние равновесия в интервале $\gamma \in [0.74; 1.96)$ теряет только статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели либо в виде локализованной дивергенции: неэйлерова дивергенция и панельный флаттер отсутствуют [16, 17].

5.2. При значениях $\gamma \in [0.74; 0.8)$ дисперсионное уравнение $A_3 = 0$ при всех $\beta_x^2 \geq 0$ и $\beta_y^2 \geq 0$ имеет три корня: имеет место дивергенция панели при скоростях потока $V \geq V_{cr.div}^{(1)}$ и $V \geq V_{cr.div}^{(2)}$. А, при значениях $\gamma \in [0.8; 1.3)$ – один корень: теряет устойчивость при скоростях потока $V \geq V_{cr.div}$. (табл. 12, 13).

Таблица 12. Значения $V_{cr.div} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.8, \nu = 0.3$.

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.3	0.5	1.0	1.5	2.0
0	54.089	69.200	79.651	107.235	135.940	165.653
0.3	42.224	55.367	64.970	89.285	114.680	141.297
0.5	34.407	47.009	65.571	78.536	102.561	127.640
1.0	18.526	28.711	36.034	54.917	75.807	97.495

Таблица 13. Значения $V_{cr.div} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 1, \nu = 0.125; 0.3; 0.5$.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.5
0	523.999 128.462 73.683	577.560 166.066 99.742	611.225 191.409 117.919	665.171 229.894 145.231	701.241 256.653 163.249	792.021 321.715 211.243
0.1	518.252 114.718 66.569	566.368 149.243 91.674	599.753 172.153 111.079	649.203 208.017 134.543	683.533 231.714 152.683	768.200 291.275 197.168
0.3	506.234 91.698 52.256	546.975 120.178 76.052	574.944 139.237 91.426	616.614 169.124 115.048	646.166 189.197 131.134	713.460 240.611 172.280
0.5	494.768 71.408 41.268	526.875 95.974 61.781	547.821 111.679 75.525	577.260 137.452 96.764	596.305 155.121 110.708	636.171 199.850 148.219
0.7	483.845 53.280 29.832	506.159 73.987 47.423	515.670 88.217 58.806	513.727 112.310 79.165	173.308 125.874 91.858	222.788 164.886 –

Из данных таблиц 12 и 13 следует, что приведённое значение критической скорости дивергенции $V_{cr.div} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ является монотонно возрастающей функцией от β_x^2 : возрастает в 3–5.3 раза и в 2.5–3 раза соответственно; убывающая функция от β_y^2 : убывает в 1.7–3 раза и 2–2.4 раза соответственно; меньше в пластинках с большим значением коэффициента Пуассона ν , соответственно, в 2.3 раза и 2–8.5 раз.

В этом случае обтекание приводит к «падению» критического значения коэффициента $(\beta_y^2)_{cr}$ (табл. 1), примерно, в 2 раза.

5.3. В интервале $\gamma \in [1.3, 1.96)$ невозмущённое состояние равновесия системы при значениях $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_*$ (табл. 3) теряет устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели ($\mathfrak{Z}_{div.}$), а при значениях $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_*$ – в виде локализованной дивергенции ($\mathfrak{Z}_{loc.div.}$). Гиперповерхность $\gamma_* = \gamma((\beta_x^2)_*, \beta_y^2, \nu)$ разграничивает область \mathfrak{Z}_1 на подобласти: $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_{div.} \cup \mathfrak{Z}_{loc.div.}$. Функция $\gamma_* = \gamma((\beta_x^2)_*, \beta_y^2, \nu)$ зависит от параметров β_y^2 и ν исчезающе мало.

Из данных таблицы 3 очевидно, что с ростом β_x^2 граница $\gamma_* = \gamma((\beta_x^2)_*)$ смещается в сторону меньших значений параметра γ , приводя к сужению подобласти $\mathfrak{Z}_{div.}$

и расширению $\mathfrak{V}_{div.}$ – к повышению устойчивости системы, по сравнению с ненагруженной панелью [13].

Начиная со значения $\gamma = 1.96$, при скоростях потока $V \geq V_{locdiv.}$ и при всех $\beta_x^2 < 2$, $\beta_y^2 \leq 0.7$ и ν невозмущённое состояние равновесия системы теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции – дивергенции, локализованной в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки, подобно полубесконечной пластине–полосе ($\gamma = \infty$) [13, 16].

Из данных таблиц 5 – 13 и из представлений (5.1) – (5.3) следует, что менее устойчивы системы с большим коэффициентом Пуассона ν и с меньшим значением относительной толщины $2ha^{-1}$. При больших β_x^2 и малых β_y^2 , с ростом γ устойчивость системы повышается.

При определённом соотношении растягивающих N_x и сжимающих N_y сил, имеет место эффект их «взаимной компенсации», наиболее ярко проявленный в случае пластинок, когда $\gamma \geq 0.74$ (табл. 14).

Таблица 14.

γ	0.33	0.5	0.8	1.0	≥ 1.96
$\varphi_c = \beta_{xc}^2 \cdot (\beta_{yc}^2)^{-1}$	0.143	0.370	0.625	0.833	1–2

При $\varphi < \varphi_c$ существенное влияние на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы оказывают сжимающие силы N_y : с ростом N_y устойчивость системы понижается; а при $\varphi \geq \varphi_c$ – силы растяжения N_x , с ростом которых устойчивость системы повышается.

Как следует из данных таблицы 14, в случае достаточно широких пластин ($\gamma \geq 1.96$) отношение $\varphi_c = \beta_{xc}^2 \cdot (\beta_{yc}^2)^{-1} \in [1; 2]$. Соответственно, при равных значениях коэффициентов напряжений $\beta_x^2 = \beta_y^2 \in [0; 0.5)$ и при $1 < \varphi_c \leq 2$, когда $\beta_x^2 = \beta_y^2 \geq 0.5$, критические скорости $V_{loc.div.}$ в точности равны критическим скоростям локализованной дивергенции панели с ненагруженными краями ($\beta_x^2 = \beta_y^2 = 0$) [13].

С ростом параметра γ , влияние растягивающих сил N_x на устойчивость – на критические скорости дивергенции панели становится более ощутимым, в сравнении со сжимающими силами N_y (табл. 5, 12, 13). Очевидно, что при $\gamma \in [0.74, 1.96)$ первоначальное статическое нагружение панели по двум направлениям в виде растягивающих N_x и сжимающих N_y сил, направленных, соответственно, по потоку и перпендикулярно скорости потока газа, приводит к существенному

повышению устойчивости системы, в сравнении с системой, с первоначально ненагруженной панелью [13].

Заметим, что качественные характеристики поведения возмущённого движения системы (1.1) – (1.5) в интервале $\gamma \in [0.74; 1.96)$ такие же, как и в [16]: здесь, как и в [18], силы N_y , направленные перпендикулярно скорости потока, не оказывают существенного влияния на качественные характеристики возмущённого движения системы, в отличие от сил N_x , направленных по потоку газа.

6. Основные результаты и заключение. В статье получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, первоначально нагруженной по двум направлениям: растягивающими силами по потоку газа и сжимающими, направленными перпендикулярно к потоку, в предположении, что сверхзвуковой поток газа набегает на её свободный край, при наличии на нём сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости: эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели, панельного флаттера и локализованной дивергенции. Показано, что на структуру разбиения существенное влияние оказывают силы, направленные по потоку газа.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости.

Установлено, что при малых значениях отношения интенсивностей приложенных инерционных моментов поворота и масс потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока газа, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям. А при умеренных и больших значениях отношения интенсивностей – имеем переход из области неэйлеровой дивергенции в область флаттерных колебаний, при котором начинает колебаться «выпученная» – изогнутая по форме пластинка. При этом критическая скорость флаттера является монотонно возрастающей функцией от интенсивности приложенных моментов поворота: вибрации существенно повышают устойчивость системы.

Найдено соотношение первоначально приложенных сил растяжения и сжимающих сил, при котором происходит «взаимная компенсация» их влияния на устойчивость системы.

В целом, можно утверждать, что в отличие от достаточно удлиненных пластинок, в случае пластинок умеренных размеров влияние первоначальных сил растяжения, приложенных наряду с сжимающими силами, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы значимо: растягивающие силы приводят к существенному повышению устойчивости, по сравнению с ненагруженной панелью и с панелью, нагруженной сжимающими силами и силами растяжения, направленными по потоку газа и в перпендикулярном направлении соответственно.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
6. Ильющин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
7. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician//J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N 12. P. 1109–1118.
8. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
9. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // ДАН СССР. 1956. Т.110 (3).
10. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
11. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
13. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12–42.
14. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concentrated inertial masses and moments // Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2020. V. 73(4). P. 58–74.
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер панели со свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов. // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74 (2), с. 33–59.
16. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (4), с.52 – 73. DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.4-52.

17. Martirosyan S.R. Supersonic divergence of a panel with a free edge initially loaded in two directions tensile and compressive forces // 2022. Journal of Physics: Conference Series 2231 012030. IP address 93.187.163.146. DOI: 10.1088/1742-6596/2231/1/012030.
18. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки умеренных размеров со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (2), с. 25–46. DOI:10.54503/0002-3051-2024.77.2- 25.
19. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной панели со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: растянутой по потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (4), с. 27-47. DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.4-27.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 24.02.2025

СОДЕРЖАНИЕ 2025 г., том 78 №1

Аветисян С.А., Амирджанян А.А., Саакян А.В. Антиплоская деформация упругого экспоненциально неоднородного слоя с упругим стрингером на границе.....3

Агаловян Л.А., Япуджян В.Т. О смешанной 3D задаче теории упругости для анизотропной пластинки имеющая плоскость упругой симметрии..... 13

Барсегян В.Р. Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системой со смещением левого конца при закрепленном правом конце с минимизацией интеграла граничной энергии.....24

Гулгазарян Л.Г., Амбарцумян П.Р. Смешанная краевая задача о вынужденных колебаниях трехслойной пластинки при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта37

Мартirosyan С. Р. Сверхзвуковой флаттер панели умеренных размеров, нагруженной по двум направлениям: растянутой по потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении, при набегании потока на ее свободный край.....46

CONTENTS 2025, v. 78 №1

Avetisyan S.A., Amirjanyan H.A., Sahakyan A.V. Antiplane deformation of an elastic exponentially non-homogeneous layer with an elastic stringer at the boundary3

Aghalovyan L.A., Yapunyan V. T. On mixed 3D problem of elasticity theory for an anisotropic plate with a plane of elastic symmetry 13

Barseghyan V. R. Optimal Boundary Control of a Distributed Heterogeneous Vibration System with a Fixed Right End by Shifting the Left End and Minimizing the Integral of the Boundary Energy24

Ghulghazaryan L.G., Hambardzumyan P.R. Mixed Boundary-Value Problem of Forced Vibrations of a Three-Layered Plate in the Presence of Data about the Displacement of Contact Surface Points37

Martirosyan S.R. Supersonic flutter of a moderate sized panel loaded in two directions: stretched along the gas flow and compressed in the perpendicular direction, when the flow runs into its free edge46

Ավետիսյան Ս.Ա., Ամիրջանյան Հ.Ա., Սահակյան Ա.Վ. Ցուցչային օրենքով անհամասեռ առաձգական շերտի հակահարթ դեֆորմացիան, երբ շերտի եզրին առկա է առաձգական վերադիր3

Աղայրվյան Լ.Ա., Յավուջյան Վ. Տ. Առաձգականության սիմետրիայի հարթություն ունեցող անիզոտրոպ սալի համար առաձգականության տեսության խառը 3D խնդրի մասին 13

Բարսեղյան Վ.Ռ. Ամրացված աջ եզրով ձախ եզրի տեղափոխությամբ անհամասեռ բաշխված պարամետրերով տատանողական համակարգի օպտիմալ եզրային դեկավարման խնդիր էներգիայի ինտեգրալի մինիմալացմամբ24

Ղուլդազարյան Լ.Գ., Համբարձումյան Փ.Ռ. Եռաշերտ սալի ստիպողական տատանումների խառը եզրային խնդիր՝ կոնտակտի մակերևույթի կետերի տեղափոխությունների տվյալների առկայության դեպքում37

Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ ձգված և միաժամանակ հոսքին ուղղահայաց ուղղությամբ սեղմված ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին, սալի ազատ եզրին հոսքի վրավազքի դեպքում46

Сдано в производство 28.03.2025 г.
Формат 70 x 100¹/₁₆ . Печ. лист –4.5
Заказ № 1376. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24