

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒԵԳԻՍ

Հակոբյան Վ.Ն. (գլխավոր խմբագիր), Սահակյան Ա.Վ. (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Աղալովյան Լ.Ա., Ավետիսյան Ա.Ս., Ավետիսյան Վ.Վ., Կարապետյան Կ.Ա., Ղազարյան Կ.Բ., Ղուկասյան Ա.Ա., Մխիթարյան Ս.Ս., Զիլավյան Ս.Հ., Սարգսյան Ս.Հ.

ՄԻՋԱԶԳԱՅԻՆ ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԽՈՐՀՈՒՐԴ

Ալտենբախ Հ. (Գերմանիա), Գաչկեիչ Ա.Ռ. (Ուկրաինա), Գորյաչևա Ի.Գ. (Ռուսաստան), Հասանյան Դ.Զ. (ԱՄՆ), Կապլունով Յու.Դ. (Մեծ Բրիտանիա), Կուդիշ Ի.Ի. (ԱՄՆ), Շավլակաձե Ն.Ն. (Վրաստան), Մարզոկա Պ. (ԱՄՆ), Մեյրանյան Ա.Պ. (Ռուսաստան), Մումբատյան Ս.Ա. (Ռուսաստան), Վատոյան Ա.Հ. (Ռուսաստան)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Акопян В.Н. (главный редактор), Саакян А.В. (зам. главного редактора), Аветисян А.С., Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Гукасян А.А., Джилавян С.А., Казарян К.Б., Карапетян К.А., Мхитарян С.М., Саркисян С.О.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Альтенбах Х. (Германия), Асанян Д.Дж. (США), Ватулян А.О. (Россия), Гачкевич А.Р. (Украина), Горячева И.Г. (Россия), Каплунов Ю.Д. (Великобритания), Кудиш И.И. (США), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Марзока П. (США), Сейранян А.П. (Россия), Сумбатян М.А. (Россия),

EDITORIAL BOARD

Hakobyan V.N. (editor-in-chief), Sahakyan A.V. (associate editor), Aghalovyan L.A., Avetisyan A.S., Avetisyan V.V., Ghazarjan K.B., Ghukasyan A.A., Jilavjan S.H., Karapetyan K.A., Mkhitaryan S.M., Sarkisyan S. H.

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Altenbach H. (Germany), Gachkevich (Ukraine), Goryacheva I.G. (Russia), Hasanyan D.J. (USA), Kaplunov J.D. (UK), Kudish I.I. (USA), Shavlakadze N.N. (Georgia), Marzocca P. (USA), Seyranyan A.P. (Russia), Sumbatyan M.A. (Russia), Vatulyan A.H. (Russia)

Технический редактор: Геворкян Г.З., Ответственный секретарь: Авдалян Ж.А.

E-mail: journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech

Հայաստանի	Республика Армения,	24/2, Baghramyan Ave.
Հանրապետություն, Երևան,	Ереван, 0019	Yerevan 0019
0019 Բաղրամյան պող. 24/2,	пр. Баграмяна 24 /2,	Republic of Armenia
Հեռ. 52-48-02	Тел. 52-48-02	Tel. 52-48-02

УДК 539.3

DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.4-3

**Օ ԿՈՆՏԱԿՏՆՈՄ ՎՅԱԻՄՈՎԵՅԻՄՈՒՄ ԻՄՊԱՄՔԱ ՄՈՒՆՎՈՐՄԱՆ ԳՐԱԿՆԱԿԱԿԱՆ
ՖՈՐՄԱ ԵՎ ՍՈՒՄԱՐՈՒՄ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ
ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ**

Այոպյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Ա.Ա., Գրիգորյան Ա.Մ.

Ключевые слова: контактная задача, полуплоскость, штамп, трение покоя

Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Grigoryan A.M.

**On Contact Interaction of a Stamp of Arbitrary Shape and a Half-Plane with a
Previously Unknown Contact Area in the Presence of Static Friction**

Key words: contact problem, punch, half plane, static friction

An analytical solution is obtained for the problem of a contact interaction of an absolutely rigid stamp of arbitrary shape with an elastic half-plane with a variable contact area in the presence of static friction. It is assumed that, in addition to the normal total load, the stamp is also affected by a moment under the influence of which the stamp can be turned. Simple formulas are derived for determining contact stresses and the relations for determining the angle of rotation of the stamp, the half-length and coordinate of midpoint of contact zone are obtained. As an example, two special cases are considered when the stamp has a parabolic shape and a special asymmetric shape. Calculations are given.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Ա.Ա., Գրիգորյան Ա.Մ.

**Նախապես անհայտ կոնտակտի տիրույթով ու հանգստի շփման հաշվառմամբ կամայական
տեսք ունեցող դրոշմի և կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության մասին**

Հիմնաբառեր` կոնտակտային խնդիր, դրոշմ, հանգստի շփում

Ստացված է կամայական տեսք ունեցող բացարձակ կոշտ դրոշմի և առաձգական կիսահարթության նախապես անհայտ կոնտակտի տիրույթով կոնտակտային փոխազդեցության խնդրի անալիտիկ լուծումը հանգստի շփման առկայության դեպքում: Ենթադրվում է, դրոշմի վրա բացի նորմալ կենտրոնացված բեռից ազդում է նաև մոմենտ, որի ազդեցության տակ դրոշմը կարող է շրջվել: Դուրս են բերված պարզ բանաձևեր կոնտակտային լարումների դրոշման համար և ստացված են առնչություններ, որոնք թույլ են տալիս որոշել դրոշմի պտտման անկյունը, կոնտակտի տիրույթի միջնակետի կոորդինատը ու նրա երկարությունը կեսը: Որպես օրինակ դիտարկված են երկու մասնավոր դեպքեր, երբ դրոշմը ունի պարաբոլի տեսք և երբ այն ունի դրոշմի ոչ համաչափ տեսք: Կատարված են թվային հաշվարկներ:

Получено аналитическое решение задачи о контактном взаимодействии абсолютно жёсткого штампа произвольной формы с упругой полуплоскостью при наличии трения покоя, когда длина области контакта неизвестна. При этом считается, что на штамп, помимо нормальной сосредоточенной нагрузки, действует также

момент, под воздействием которого штамп может поворачиваться. Выведены формулы для определения контактных напряжений и получены соотношения, позволяющие определить угол поворота штампа, полудлину и координату срединной точки контактной зоны. В качестве примеров рассмотрены два частных случая задачи, когда штамп имеет параболическую, и некую определенную несимметричную форму. Проведены численные расчёты.

Введение

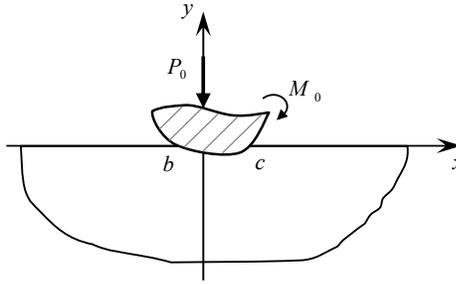
Известно, что детали различных машин во время их работы в некоторых областях контактируют между собой вследствие чего в этих областях возникают контактные напряжения, которые могут привести к частичному или полному разрушению машин. Поэтому определение закономерностей изменения размеров контактных областей этих деталей и контактных напряжений, действующих в этих областях, одна из важных проблем с точки зрения прочности и долговечности машин. Указанная проблема часто моделируется и сводится к решению контактных задач теории упругости с заранее неизвестной областью контакта, чем и обосновывается актуальность изучения контактных задач с заранее неизвестной областью контакта. Изучение контактных задач теории упругости имеет давнюю историю. Основополагающие результаты, полученные в этой области в течение долгих лет подытожены во многих работах и монографиях [1-6]. Заметим, что контактные задачи с заранее неизвестной областью контакта рассмотрены лишь в случаях гладкого контакта, когда касательные контактные напряжения отсутствуют, и в случае модели контакта с кулоновским трением, когда одно из контактирующих тел медленно движется относительно другого. Недавно, на основе сравнительного анализа моделей контакта со сцеплением и контактной модели Л.А.Галина, нами была предложена модель контакта с учетом трения покоя [7]. На основе этой модели нами были получены точные решения некоторых контактных задач [7,10]. Численный анализ этих решений показывает, что результаты, полученные с использованием этой модели, очень близки к решениям этих же задач, полученным с использованием модели контакта Л.А.Галина, и отличаются тем, что по модели Л.А.Галина касательные напряжения описываются негладкими функциями (имеют разлом), а по предложенной модели они описываются гладкими функциями.

Здесь же, в рамках модели контакта с учетом трения покоя, рассматривается плоская контактная задача о вдавливание абсолютно жёсткого штампа с произвольным основанием в упругую полуплоскость с заранее неизвестной областью контакта.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть в упругую полуплоскость с коэффициентами Ламе μ и λ , занимающую нижнюю полуплоскость $y \leq 0$ в декартовой системе координат Oxy и находящуюся в условиях плоской деформации, вдавливаются абсолютно жесткий штамп, основание которого описывается непрерывной гладкой функцией $y = q(x)$ ($q(0) = 0$). При этом на штамп кроме сосредоточенной нагрузки P_0 , линия действия которой проходит через точку $x = 0$, действует также момент M_0 , приводящий к повороту штампа. Будем полагать, что при этом возникает только один участок контакта, где

помимо нормальных контактных напряжений $\sigma_y(x, 0) = -P(x)$ действуют также касательные напряжения $\tau_{xy}(x, 0) = \tau(x)$, которые пропорциональны нормальному контактному давлению $P(x)$, действующему под штампом. При этом будем считать, что коэффициент пропорциональности зависит от разности координат точек соприкасающихся поверхностей и некой точки x_0 контактной зоны. Ввиду сделанных предположений зона контакта штампа с полуплоскостью, в общем случае, будет занимать некую, заранее неизвестную, область (b, c) (Фиг.1). Тогда коэффициент пропорциональности будет даваться формулой $f(x) = f \frac{x-x_0}{a}$, где $a = \frac{c-b}{2}$ - полудлина контактной зоны, $f(x)$ - коэффициент трения покоя, а f - его максимальное значение, которое меньше единицы.



Фиг.1

Требуется построить замкнутое решение поставленной задачи, получить формулы для определения нормального контактного давления и касательных контактных напряжений под штампом, угла поворота штампа γ , а также для концевых точек контактной зоны b, c и точки x_0 .

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} v(x, 0) = q(x) + \gamma x - \delta; \\ \tau(x) = f \frac{x-x_0}{a} P(x). \end{cases} \quad (b < x < c) \quad (1)$$

где $v(x, y)$ - нормальные смещения точек упругой полуплоскости, а δ - жёсткое смещение штампа.

Приступим к решению граничной задачи (1). Для этого используем формулу производной от вертикальных смещений точек контактной зоны полуплоскости на линии $y=0$, приведенной в [1]. Дифференцируя первое соотношение (1), подставляя в полученное уравнение значение производной от вертикальных

смещений и исключив из полученной системы $\tau(x)$, придем к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению второго рода с переменными коэффициентами относительно нормального контактного давления:

$$f \frac{x-x_0}{a} P(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_b^c \frac{P(s) ds}{s-x} = -q_1'(x) - \gamma_* \quad (b < x < c) \quad (2)$$

где

$$q_1(x) = \frac{4\mu q(x)}{\varkappa - 1}; \quad \gamma_* = \frac{4\mu\gamma}{\varkappa - 1}; \quad \alpha = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} > 2, ,$$

$\varkappa = 3-4\nu$ - постоянная Мусхелишвили, а ν - коэффициент Пуассона.

Уравнение (2) нужно рассматривать при условии равновесия штампа и непрерывности контактных напряжений в конечных точках зоны контакта, т. е. при условиях:

$$\int_b^c P(x) dx = P_0; \quad \int_b^c xP(x) dx = M_0; \quad \int_b^c \tau(x) dx = 0; \quad P(b) = P(c) = 0. \quad (3)$$

Заметим, что используя связь касательных напряжений с нормальным контактным давлением, из второго и третьего условий (3) для определения x_0 сразу получим формулу $x_0 = M_0 / P_0$. Приняв полученное значение для x_0 третье условие (3) будет выполняться автоматически.

Чтобы построить решение уравнения (2), в соотношениях (2) и (3) перейдем к новым переменным по формулам $\{s; x\} = \{\tau; t\} + k_0$ и, введя обозначения $P_*(t) = P(t+k_0)$ $q_{1*}'(t) = q_1'(k_0+t)$, запишем их в виде:

$$f_*(t) P_*(t) + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{P_*(\tau) d\tau}{\tau-t} = -q_{1*}'(t) - \gamma_* \quad (|t| < a) \quad (4)$$

$$\int_{-a}^a P_*(t) dt = P_0; \quad \int_{-a}^a t P_*(t) dt = k_0' P_0; \quad P_*(\pm a) = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$f_*(t) = f \frac{t+k_0'}{a}; \quad k_0 = \frac{b+c}{2}; \quad a = \frac{c-b}{2}; \quad k_0' = x_0 - k_0.$$

Как и в [7], для решения уравнения (4) введём в рассмотрение аналитическую во всей комплексной плоскости разрезанной вдоль интервала $(-a, a)$ комплексную функцию $\Phi(z)$ по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{P_*(\tau) d\tau}{\tau-z} \quad (6)$$

и, при помощи формул Племеля-Сохоцкого для интегралов типа Коши [3,11], уравнение (4) сведем к следующей задаче Римана с переменным коэффициентом:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g_*(t) \quad (|t| < a) \quad ; \quad (7)$$

$$\left(G(t) = \frac{f_*(t) - i\alpha}{f_*(t) + i\alpha}; \quad g_*(t) = -\frac{q'_{1*}(t) + \gamma_*}{f_*(t) + i\alpha} \quad (|t| < a) \right).$$

Здесь верхние знаки \pm над функциями, означают значения комплексной функции соответственно на верхнем и нижнем берегах интервала интегрирования.

Решение уравнения (7), ограниченное на обоих концах контактной зоны, будет даваться формулой [3,11]:

$$\Phi(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g_*(\tau) d\tau}{X_0^+(\tau)(\tau - z)}, \quad (8)$$

где функция $X_0(z)$ решение однородной задачи Римана (7), ограниченное на обоих концах интервала $(-a, a)$ и определяемое формулой

$$X_0(z) = (z + a)e^{\Gamma(z)}; \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

При этом выбрана та ветвь функции $G(t)$, аргумент которой в точке $t = -a$ находится в интервале $(0, 2\pi)$ [7], т.е.

$$\arg G(t) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{f_*(t)}{\alpha}.$$

Тогда, учитывая, что $|G(t)| = 1$ и имеют место тождества

$$\cos(\operatorname{arctg} t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \sin(\operatorname{arctg} t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

несложно установить, что

$$X_0^\pm(t) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2} (f_*(t) \mp i\alpha) e^{\psi(t)}}{\sqrt{\alpha^2 + f_*^2(t)}}, \quad (9)$$

где

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg}(f_*(\tau)/\alpha)}{\tau - t} d\tau.$$

Используя представление (8), при помощи соотношений Племеля-Сохоцкого, для определения контактного давления получим выражение:

$$P_*(t) = -\frac{[q_{1*}'(t) + \gamma_*] f t / a}{f_*^2(t) + \alpha^2} + \frac{\alpha \omega(t) e^{\psi_1(t, f)}}{\pi \sqrt{\alpha^2 + f_*^2(t)}} \int_{-a}^a \frac{[q_{1*}'(\tau) + \gamma_*] e^{-\psi_1(\tau, f)} d\tau}{\omega(\tau) \sqrt{\alpha^2 + f_*^2(\tau)} (\tau - t)}. \quad (10)$$

Касательные же контактные напряжения будут даваться по второй из формул (1).
Здесь введены обозначения:

$$\omega(t) = (t+a)^{1/2-\beta(t)} (a-t)^{1/2+\beta(t)}; \quad \beta(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{f_*(t)}{\alpha} \right);$$

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{f_*(\tau)}{\alpha} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{f_*(t)}{\alpha} \right)}{\tau - t} d\tau.$$

Теперь обратимся к определению неизвестных постоянных a , k_0 и γ_* . Для этого сравним поведения функции $\Phi(z)$ на бесконечности по формулам (6) и (8). По формуле (6) при $|z| \rightarrow \infty$, используя условия (5), будем иметь:

$$\Phi(z) = -\frac{P_0}{2\pi iz} - \frac{k_0' P_0}{2\pi iz^2} + O(z^{-3}),$$

а по формуле (8)

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \left(1 - \frac{c_1}{z} - \frac{a^2 - c_1^2 + 2c_2}{2z^2} + \left(\frac{a^2 c_1}{2} - \frac{c_1^3}{6} + c_1 c_2 - c_3 \right) \frac{1}{z^3} + O(z^{-4}) \right) \times$$

$$\times \int_{-a}^a \left[1 + \frac{\tau}{z} + \frac{\tau^2}{z^2} + \dots \right] \frac{g_*(\tau) d\tau}{X_0^+(\tau)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a t^{j-1} \operatorname{arctg} [f_*(t) / \alpha] dt \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Сравнивая эти два представления, для определения указанных постоянных, получим систему уравнений:

$$\int_{-a}^a \frac{g_*(\tau) d\tau}{X_0^+(\tau)} = 0; \quad \int_{-a}^a \frac{\tau g_*(\tau) d\tau}{X_0^+(\tau)} = P_0; \quad \int_{-a}^a \frac{\tau^2 g_*(\tau) d\tau}{X_0^+(\tau)} = k_0' P_0 + c_1 P_0 \quad (11)$$

Подставляя значения функций $X_0^+(t)$ и $g_*(t)$ в систему (11) придем к следующей системе трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a \frac{[q_{1*}'(\tau) + \gamma_*] e^{-\psi(\tau)} d\tau}{\sqrt{\alpha^2 + f_*^2(\tau)} \sqrt{a^2 - \tau^2}} &= 0; \\
\int_{-a}^a \frac{\tau [q_{1*}'(\tau) + \gamma_*] e^{-\psi(\tau)} d\tau}{\sqrt{\alpha^2 + f_*^2(\tau)} \sqrt{a^2 - \tau^2}} &= P_0; \\
\int_{-a}^a \frac{\tau^2 [q_{1*}'(\tau) + \gamma_*] e^{-\psi(\tau)} d\tau}{\sqrt{\alpha^2 + f_*^2(\tau)} \sqrt{a^2 - \tau^2}} &= (k_0' + c_1) P_0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Отметим, что в случаях, когда функция $q'(z)$ многочлен порядка m как представление контактного давления, так и систему уравнений (11) или (12) можно упростить, так как в этом случае удастся вычислить интегралы, входящие в эти формулы. Действительно, рассмотрим интеграл

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{[q_{1*}'(t) + \gamma_*] dt}{X_0(t)(t-z)},$$

где контур Λ содержит интервал $(-a, a)$. Пусть при больших значениях $|t|$ имеет место соотношение:

$$\begin{aligned}
\frac{q_{1*}'(t) + \gamma_*}{X_0(t)} &= Q_{m-1}(z) + \frac{a_{-1}}{t} + \frac{a_{-2}}{t^2} + \frac{a_{-3}}{t^3} + O(t^{-3}) \\
(Q_{m-1}(x) &= a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0).
\end{aligned} \tag{13}$$

Тогда, так как функция $X_0(z)$ аналитическая вне Λ , то справедливо соотношение [3]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{[q_{1*}'(\xi) + \gamma_*] d\xi}{X_0(\xi)(\xi-z)} = \frac{q_{1*}'(z) + \gamma_*}{X_0(z)} - Q_{m-1}(z).$$

Далее, стягивая в этой формуле Λ к разрезу $(-a; a)$ и учитывая, что функция $X_0(z)$ является решением однородной задачи Римана, а также используя равенство

$$q_{1*}'(t)[1 - G(t)] = \frac{2i\alpha q_{1*}'(t)}{ft/a + i\alpha} = -2i\alpha g_*(t),$$

найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g_*(\xi) d\xi}{X_0^+(\xi)(\xi-z)} = -\frac{1}{2i\alpha} \left[\frac{q_{1*}'(z) + \gamma_*}{X_0(z)} - Q_{m-1}(z) \right].$$

Откуда, по формулам Племеля-Сохоцкого, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g_*(\xi) d\xi}{X_0^+(\xi)(\xi-t)} = \frac{f_*(t)g_*(t)}{2i\alpha X_0^+(t)} + \frac{Q_{m-1}(t)}{2i\alpha} \quad (-a < t < a).$$

Подставляя полученное значение интегрального члена в (9), после некоторых выкладок, для контактного давления получим следующую простую формулу:

$$P_*(t) = \frac{Q_{m-1}(t) e^{v_1(t)} \omega(t)}{\sqrt{\alpha^2 + (ft/a)^2}}. \quad (14)$$

Теперь упростим систему (11). С этой целью вычислим интегралы, входящие в эту систему. С учетом того, что из (13) будем иметь

$$\frac{t^j [q_1'(t) + \gamma_*]}{X_0(t)} = t^j Q_{m-1}(z) + a_{-1}t^{j-1} + a_{-2}t^{j-2} + a_{-3}t^{j-3} + O(t^{j-3}); \quad (j=1,2,3),$$

как и выше, получим

$$\int_{-a}^a \frac{\xi^j g_*(\xi) d\xi}{X_0^+(\xi)(\xi-t)} = -\frac{\pi f_*(t) t^j g_*(t)}{\alpha X_0^+(t)} + \frac{\pi t^j}{\alpha} \left\{ Q_{m-1}(t) + \sum_{k=1}^j \frac{a_{-k}}{t^k} \right\} \quad (j=1,2,3).$$

Отсюда, принимая $t=0$, найдем:

$$\int_{-a}^a \frac{\xi^{j-1} g_*(\xi) d\xi}{X_0^+(\xi)} = \frac{\pi a_{-j}}{\alpha} \quad (j=1,2,3)$$

Подставляя полученные значения интегралов в (11), придем к системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{-1} = 0; \\ a_{-2} = \alpha P_0 / \pi \\ a_{-3} = \alpha P_0 (k'_0 + c_1) / \pi \end{cases} \quad (15)$$

2. Некоторые частные случаи

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда основание штампа описывается функцией $q(x) = Bx^2$. В указанном случае будем иметь:

$$q_{1*}' = 2B(t + k_0); \quad Q_{m-1}(t) = Q_0(t) = 2AB; \quad B_0 = 2k_0 + \frac{\gamma}{B}; \quad A = \frac{4\mu}{\alpha - 1};$$

$$a_{-1} = AB(B_0 + 2c_1); \quad a_{-2} = AB(a^2 + c_1(B_0 + c_1) + 2c_2);$$

$$a_{-3} = AB(3a^2(B_0 + 2c_1) + 3B_0(c_1^2 + 2c_2) + 2(c_1^3 + 6c_1c_2 + 6c_3)) / 6$$

и, следовательно, система (15) примет вид:

$$\begin{cases} B_0 + 2c_1 = 0 \\ (a^2 + c_1(B_0 + c_1) + 2c_2) = \alpha P_0 / AB\pi \\ (3a^2(B_0 + 2c_1) + 3B_0(c_1^2 + 2c_2) + 2(c_1^3 + 6c_1c_2 + 6c_3)) = 6\alpha P_0(k'_0 + c_1) / AB\pi \end{cases}$$

которая, после некоторых упрощений, запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 2k_0 + \gamma / B = -2c_1 \\ (a^2 - c_1^2 + 2c_2) = \alpha P_0 / AB\pi \\ 3c_3 - c_1^3 = 3\alpha P_0(k'_0 + c_1) / 2\pi AB \end{cases} \quad (16)$$

Численный анализ показывает, что система трансцендентных уравнений (16) имеет решение только в случае, когда точка x_0 совпадает со серединой точкой контактной зоны k_0 , т.е. когда $k'_0 = 0$, и следовательно, $c_1 = c_3 = 0$, $f_*(x) = fx/a$. Тогда система (16) упрощается и после некоторых преобразований ее можно написать в следующем виде:

$$\begin{cases} 2Bk_0 + \gamma = 0 \\ a^2(1 + 2c_2^*) = \alpha P_0 / AB\pi \\ x_0 - k_0 = 0; \\ c_2^* = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi \operatorname{arctg}[f\xi/\alpha] d\xi = \frac{1}{\pi} \left[(1 + \alpha^2/f^2) \operatorname{arctg}(f/\alpha) - \alpha/f \right]. \end{cases}$$

Откуда найдем:

$$k_0 = x_0 = M_0 / P_0; \quad \gamma / B = -2x_0 = -2M_0 / P_0;$$

$$a = \sqrt{\frac{\alpha P_0}{AB\pi(1 + 2c_2^*)}} = \sqrt{\frac{2(1 - \nu^2)P_0}{\pi BE(1 + 2c_2^*)}},$$

где E - модуль упругости материала полуплоскости.

При этом нормальное давление будет даваться формулой:

$$P(x) = \frac{2ABe^{\nu_1(x-k_0)}\omega(x-k_0)}{\sqrt{\alpha^2 + (f(x-k_0)/a)^2}} = \frac{2\alpha P_0 e^{\nu_1(x-k_0)}\omega(x-k_0)}{a^2(1 + 2c_2^*)\pi\sqrt{\alpha^2 + (f(x-k_0)/a)^2}}. \quad (17)$$

В случае же гладкого контакта, когда $f = 0$, значения величин k_0 , x_0 и γ те же самые, что и наверху, $c_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots$), а для безразмерной величины $a_* = Ba$ получим формулу:

$$a_* = \sqrt{\frac{\alpha B P_0}{\pi A}} = \sqrt{\frac{2(1-\nu^2) P_0^{(1)}}{\pi}} \quad \left(P_0^{(1)} = \frac{B P_0}{E} \right).$$

Нормальное давление под штампа в рассматриваемом случае примет вид:

$$P(x) = \frac{2AB}{\alpha} \omega(x - k_0) = \frac{2P_0}{\pi a^2} \sqrt{(x-b)(c-x)}.$$

Если же на штамп действует только вдавливающая нормальная нагрузка P_0 , т.е.

$M_0 = 0$, то будем иметь $k_0 = x_0 = \gamma = 0$, $b = -a, c = a$ и следовательно

$$P(x) = \frac{2P_0}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда основание штампа имеет несимметричную форму. Для этого в соотношениях (4) и (5) перейдем к безразмерной координате, разделив исходную координату на единицу измерения длины. При этом все обозначения сохраняются с той лишь разницей, что P_0 в этом случае будет иметь размерность силы, деленной на квадрат единицы длины. Пусть основание штампа дается функцией $q(x) = Ax^2(x^2 + x + 1)$. При этом, для простоты сразу будем рассматривать случай, когда момент действующий на штамп такой, что точка x_0 совпадает со серединой точкой контактной зоны k_0 , т.е. когда $M_0 = k_0 P_0$. В этом случае $q'_1(x) = A_1 x(4x^2 + 3x + 2)$, где $A_1 = 4\mu A / (\alpha - 1)$. Тогда функция $q'_{1*}(t)$ будет даваться формулой $q'_{1*}(t) = A_1(t + k_0)(4(t + k_0)^2 + 3(t + k_0) + 2)$. Так как в рассматриваемом случае функция $q'_{1*}(t)$ голоморфная и на бесконечности имеет полюс третьего порядка, то интегралы, входящие в условия (11), можно вычислить. Действительно, легко установить, что при $|t| \rightarrow \infty$ справедливы соотношения:

$$\frac{[q'_{1*}(t) + \gamma_*]}{X_0(t)} = A_1 \left[Q_2(t) + \frac{a_{-1}}{t} + \frac{a_{-2}}{t^2} + \frac{a_{-3}}{t^3} + O(t^{-4}) \right],$$

где

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= Q_{m-1}(t) = (4t^2 + a_2 t + a_1 + 4c_2 + 2a^2); a_0 = (4k_0^3 + 3k_0^2 + 2k_0 + \gamma); \\ a_1 &= (12k_0^2 + 6k_0 + 2); a_2 = (12k_0 + 3); a_{-1} = [a_0 + a_2(c_2 + a^2/2)]; \\ a_{-2} &= (2c_2^2 + 2c_2 a^2 + a_1 c_2 + 3a^4/2 + a_1 a^2/2 + 4c_4); \\ a_{-3} &= (3a^4 a_2 + 8a_0 c_2 + 4a^2(a_0 + a_2 c_2) + 4a_2(c_2^2 + 2c_4))/8. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда, при помощи соотношений (19) удовлетворив условиям (15), для определения величин a , k_0 и γ придем к системе уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_2 (c_2^* + 1/2) a^2 = 0; \\ D_0 a^4 + a_1 (c_2^* + 1/2) a^2 = P_0^* \\ a_2 D_0 a^4 + 4a_0 (c_2^* + 1/2) a^2 = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где введены обозначения

$$c_j = a^j c_j^*; \quad c_4^* = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^3 \operatorname{arctg} \frac{f\xi}{\alpha} d\xi = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha^4}{f^4} \right) \operatorname{arctg} \frac{f}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{2f^3} - \frac{\alpha}{6f} \right];$$

$$P_0^* = \frac{\alpha P_0}{\pi A_1} = \frac{2(1-\nu^2) P_0^{(2)}}{\pi}; \quad P_0^{(2)} = \frac{P_0}{AE}; \quad D_0 = 3/2 + 2(c_2^*)^2 + 4c_4^* + 2c_2^*.$$

а c_2^* -имеет то же самое значение, что и выше.

Из первого и последнего уравнений системы (20) удалив a_0 получим:

$$a_2 a^4 \left(1/2 + 4c_4^* - 2c_2^* - 4(c_2^*)^2 \right) = 0. \quad (21)$$

Отсюда, учитывая, что второе и третье множители в (21) не равны нулю, найдем $a_2 = 0$ или $k_0 = -0.25$. Тогда из первого уравнения (20) для угла поворота штампа получим значение $\gamma = -4k_0^3 - 3k_0^2 - 2k_0 = 3/8$. При этом для определения полудлины контактной зоны a из второго уравнения (20) получим следующее биквадратное уравнение:

$$D_0 a^4 + \frac{5}{4} (c_2^* + 1/2) a^2 - P_0^* = 0,$$

положительное решение которого дается формулой:

$$a = \sqrt{\frac{-5(c_2^* + 1/2) + \sqrt{25(c_2^* + 1/2)^2 + 64D_0P_0^*}}{8D_0}}. \quad (22)$$

Отметим, что в случае гладкого контакта полудлина контактной зоны будет даваться формулой:

$$a = \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{25 + 384P_0^*}}{24}}$$

Для приведенного нормального контактного давления по формуле (14), учитывая второе соотношение (20) и переходя к первоначальным переменным, получим

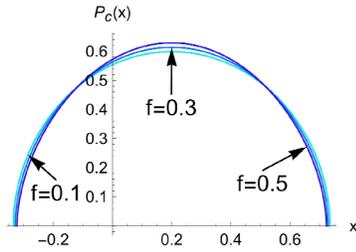
$$P(x) = \frac{A_1 Q_2 (x - k_0) e^{\psi_1(x - k_0)} \omega(x - k_0)}{\sqrt{\alpha^2 + (f(x - k_0)/a)^2}} =$$

$$= \frac{\alpha P_0 \left(4(x - k_0)^2 + a_1 + 4a^2 c_1^* + 2a^2 \right) e^{\psi_1(x - k_0)} (x - b)^{1/2 - \beta(x - k_0)} (c - x)^{1/2 + \beta(x - k_0)}}{\pi a^2 \left[D_0 a^2 + a_1 (c_2^* + 1/2) \right] \sqrt{\alpha^2 + (f(x - k_0)/a)^2}}.$$

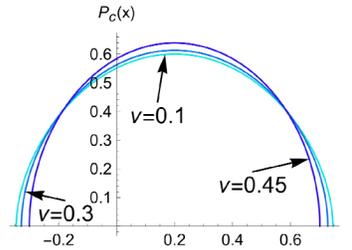
Численные расчеты

Проведены численные расчеты как для параболического штампа, так и для штампа несимметричной формы.

В случае параболического штампа изучены изменения безразмерного контактного давления $P_c(x) = P(x)/BE$ для различных значений коэффициента трения, когда $\nu = 0.3$, $P_0^{(1)} = 0.5$ и для различных значений коэффициента Пуассона, когда $f = 0.3$, $P_0^{(1)} = 0.5$.



Фиг.2а Распределение контактного давления $P_c(x)$ при различных f .

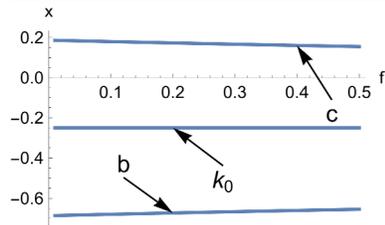


Фиг.2б Распределение контактного давления $P_c(x)$ при различных ν .

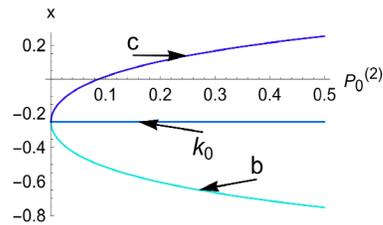
Полученные численные результаты приведены на фиг.2. Из них видно, что как полуудлина контактной зоны, так и нормальное контактное давление мало зависят от коэффициента трения. При увеличении же коэффициента Пуассона полуудлина контактной зоны уменьшается, а контактное давление в средней части контактной зоны увеличивается.

В случае же несимметричной, выше приведенной, формы штампа выяснены закономерности изменения координат конечных точек контактной зоны и контактных напряжений в зависимости от коэффициента трения f и значения параметра $P_0^{(2)}$, соответственно в случаях когда $P_0^{(2)} = 0,5$, $\nu = 0,3$ и $f = 0,3$, $\nu = 0,3$. Полученные численные результаты приведены на Фиг.3. Они

показывают, что при постоянном значении $P_0^{(2)}$ и ν , координаты конечных точек



Фиг.3а Изменение координаты конечных и средней точек контактной зоны b, c и k_0 в зависимости от f

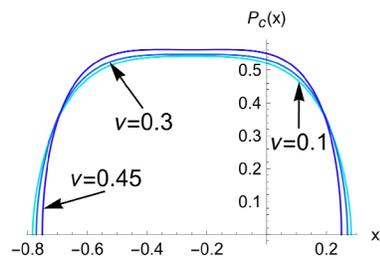


Фиг.3б Изменение координаты конечных и средней точек контактной зоны b, c и k_0 в зависимости от $P_0^{(2)}$

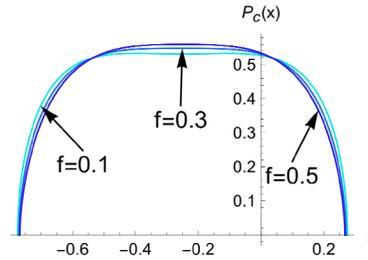
контактной зоны при возрастания f по абсолютной величине уменьшаются, т.е. уменьшается длина контактной зоны (Фиг.3а)

При увеличении же параметра $P_0^{(2)}$, как и следовало ожидать, размеры контактной зоны также увеличиваются (Фиг.3б).

На Фиг.4 приведены графики безразмерного контактного давления $P_c(x) = P(x)/AE$ в зависимости от коэффициентов Пуассона и трения соответственно в случаях, когда $P_0^{(2)} = 0.5$, $f = 0.3$ и $P_0^{(2)} = 0.5$, $\nu = 0.3$.

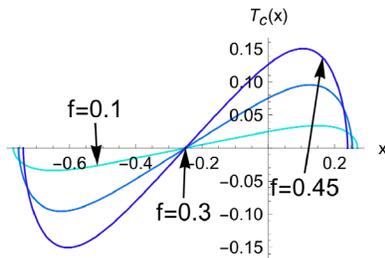


Фиг.4а Распределение контактного давления $P_c(x)$ при различных ν .

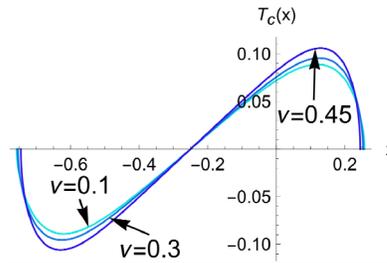


Фиг.4б Распределение контактного давления $P_c(x)$ при различных f .

Из приведенных графиков явствует, что при увеличении как коэффициента Пуассона, так и коэффициента трения зона контакта уменьшается, а контактное давление увеличивается, не нарушая равновесие штампа.



Фиг. 5а Распределение касательных контактных напряжений $T_c(x)$ при разных значениях f .



Фиг. 5б Распределение касательных контактных напряжений $T_c(x)$ при разных значениях ν .

На фиг. 5 приведены графики безразмерных касательных напряжений $T_c(x) = \tau(x)/E$ в зависимости от коэффициента трения в случае, когда $P_0^{(2)} = 0.5$, $\nu = 0.3$, и от коэффициента Пуассона, когда $P_0^{(2)} = 0.5$, $f = 0.3$. Они показывают, что при увеличении коэффициента трения касательные напряжения увеличиваются, а изменение коэффициента Пуассона мало влияет на касательные напряжения.

Заключение

Таким образом, методом сингулярных интегральных уравнений построено замкнутое решение задачи о контактом взаимодействии абсолютно жесткого штампа произвольной формы с упругой полуплоскостью с заранее неизвестной зоной контакта при наличии трения покоя. В общем случае получены формулы для контактных напряжений и уравнения для определения размеров контактной зоны и угла поворота штампа. Показано, что в случае, когда форма основания штампа дается полиномиальной функцией, то формулы, полученные для контактных напряжений, можно упростить и записать в простой форме. Рассмотрены два частных случая задачи, когда основание штампа имеет форму параболы и когда оно имеет несимметричную форму. Для указанных частных случаев проведены численные расчеты и определены закономерности изменения полудлины контактной зоны и контактных напряжений в зависимости от коэффициентов трения и Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.- М.:Наука, 1980.- 304с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947 - 270с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.-708с.
4. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно деформируемого основания. Киев-Одесса, «Вища Школа», 1982, 168 ст.

5. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев, Наукова Думка, 2006, 328с.
6. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies. Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
7. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости. // Известия НАН РА, Механика, т.76, № 2, 2023г, с. 20-31.
8. Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L., Amirjanyan H.A. On an indentation of a circular cylindrical punch into an elastic half-space under friction// Z Angew Math Mech., Volume104, Issue 5, May 2024, <https://doi.org/10.1002/zamm.202300743>
9. Hakobyan V.N. , Dashtoyan L.L., and Hakobyan L.V. On two contact problems for a half-plane with static friction // 2024 J. Phys.: Conf. Ser., vol. 2817, 012004, DOI 10.1088/1742-6596/2817/1/012004.
10. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Grigoryan A.M. On the contact of an absolutely rigid stamp with a half-plane taking into account static friction // 2024 J. Phys.: Conf. Ser., vol. 2817, 012004, DOI 10.1088/1742-6596/2817/1/012005.
11. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.- М.: Наука, 1977.- 640с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм – д.ф.-м.н., проф., гл. науч. сотр., vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн – к.ф.-м.н., вед. науч. сотр., amirjanyan@gmail.com

Григорян Арам – к.ф.-м.н., науч. сотр., grigoryan.aram4@gmail.com

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 13.12.2024

УДК 539.3

DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.4-18

STABILITY OF AN AXIALLY LOADED BI-MATERIAL BEAM WITH
INTERIOR HINGE RESTRAINED BY ELASTIC STRING

Ghazaryan K.B.

Keywords: bi-material beam, stability, interior hinge, elastic support

Ղազարյան Կ.Բ.

Առանցքային բեռնավորմամբ և առաձգական զսպանակով պահվող ներքին հողակապ ունեցող երկբաղադրիչ հեծանի կայունությունը

Բանալի բառեր. երկու նյութից կազմված հեծան, կայունություն, ներքին հողակապ, առաձգական հենարան:

Հնդվածում դիտարկվում է առանցքային բեռնավորմամբ և առաձգական զսպանակային հենարանով պահվող ներքին հողակապ ունեցող երկբաղադրիչ հեծանի խնդիրը: Հեծանի ծայրերում եզրային պայմանների չորս տարբեր կոմբինացիաների համար ստացվել են առանցքային սեղմման ուժի կրիտիկական արժեքները որոշող բնութագրիչ հավասարումները: Թվային վերլուծությամբ ուսումնասիրվել է կրիտիկական առանցքային ուժի կախվածությունը զսպանակային հենարանի կոշտությունից: Ցույց է տրված, որ ներքին հողակապի հենարանի կոշտությունը զգալիորեն մեծացնում է սեղմող ուժի կրիտիկական արժեքները:

Казарян К.Б.

Устойчивость аксиально нагруженной двухкомпонентной балки с внутренним шарниром, удерживаемым упругой пружиной

Ключевые слова: балка из двух материалов, устойчивость, внутренний шарнир, упругая опора

В статье рассматривается проблема устойчивости двухкомпонентной аксиально нагруженной балки с внутренним шарниром, удерживаемым упругой пружинной опорой. Для четырех различных комбинаций граничных условий на концах балки получены характеристические уравнения, определяющие критические значения силы осевого сжатия. На основе численного анализа изучены зависимости критической осевой силы от жесткости пружинной опоры. Показано, что жесткость опоры внутреннего шарнира значительно увеличивает критические значения сжимающей силы.

The paper discusses a stability problem for a bi-material axially loaded beam with an interior hinge restrained by an elastic spring support. For different four combinations of beam end conditions the characterizing equations are obtained defining critical values of axial compression force. Based on numerical analysis the dependence of critical axial force are studied versus the stiffnesses of spring support. It is shown that the stiffness of the hinge spring support significantly increases beam axial force critical values.

Introduction

The study of stability problems of beams systems is very important in structural design as they are the cornerstone for many structures. Due to technological needs homogeneous and non-homogeneous beams with interior hinges widely used in bolting, swivel designs and

suspension bridges. In this paper we specifically deal with static stability of compressed bi-material beams with interior hinge strengthened by elastically constraint supports. The main results of buckling of beams have been given in [1,2]. The stability of beams and plates with hinges are considered in [3-6]. The static stability problem of a compressed inhomogeneous infinite beam with periodically arranged supports is considered in [7]. The stability of multi span beams rested on rigid and elastic supports is studied in [8]. Free vibrations of beams with internal hinges and intermediate translational restraints are investigated in [9-11]. Forced vibrations of finite length meta beams with periodically arranged internal hinges are discussed in [12].

Statements of the problem, the basic equations and contact conditions.

In dimensionless Cartesian coordinates $x = z/L$ where all lengths are normalized to a beam length L we consider a stability of a bi-material beam with an interior hinge restrained by an elastic spring support (Fig.1,2) located at point $x = \beta$ ($0 < \beta < 1$). The beam is compressed by the axial force P applied at the ends of the beam. The four different combinations of beam conditions at the end points $x = 0, x = 1$ will be considered: beam both ends clamped, both ends pinned, one end clamped other end pinned, one end clamped other end sliding.

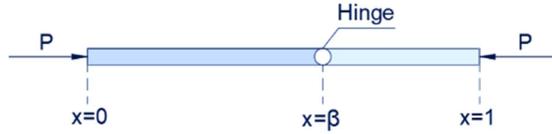


Fig.1 Axially loaded bi-material beam with elastically constraint hinge

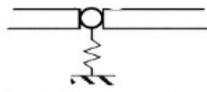


Fig.2 The elastically constraint hinge

In dimensionless Cartesian coordinates bi-material beam stability equations can be cast as

$$\begin{aligned}
 D_1 \frac{d^4 W_1}{dx^4} + PL^2 \frac{d^2 W_1}{dx^2} &= 0; & 0 < x < \beta \\
 D_2 \frac{d^4 W_2}{dx^4} + PL^2 \frac{d^2 W_2}{dx^2} &= 0; & \beta < x < 1
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Here $W_j(x)$ is the lateral deflections of the beam neutral axis at point x , D_j , are the flexural rigidities, $j = 1, 2$.

Solutions of the equations (1) are

$$\begin{aligned} W_1(x) &= C_1 \sin(p_1 x) + C_2 \cos(p_1 x) + C_3 x + C_4 \\ W_2(x) &= A_1 \sin(p_2 x) + A_2 \cos(p_2 x) + A_3 x + A_4 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{where } p_j = \sqrt{D_j^{-1} PL^2}$$

The hinge is strengthened by linear elastic restraint with spring constant c_0 .

The conditions at the hinge location point $x = \beta$ are:

moments are equal to zero

$$\frac{d^2 W_1(\beta)}{dx^2} = 0, \frac{d^2 W_2(\beta)}{dx^2} = 0 \quad (3)$$

continuity of displacements

$$W_1(\beta) = W_2(\beta) \quad (4)$$

and the balance of shear forces for the compressed beam

$$D_1 \frac{d^3 W_1(\beta)}{dx^3} + PL^2 \frac{dW_1(\beta)}{dx} - D_2 \frac{d^3 W_2(\beta)}{dx^3} - PL^2 \frac{dW_2(\beta)}{dx} = c_0 L^3 W_1(\beta) \quad (5)$$

The solutions satisfying conditions (3-5) can be cast as

$$\begin{aligned} W_1(x) &= C_1 \sin(p(x - \beta)) + C_3(x - \beta) + C_4 \\ W_2(x) &= A_1 \sin(p\gamma(x - \beta)) + \left(C_3 - \frac{C_4 \eta}{p^2 \gamma^2} \right) (x - \beta) + C_4 \end{aligned} \quad (6)$$

where $\gamma = \sqrt{D_1 D_2^{-1}}$, $\eta = c_0 D_2^{-1} L^3$ is the non-dimensional spring constant, $p = \sqrt{P_0}$, $P_0 = PL^2 D_1^{-1}$ is the non-dimensional normalized axial compressive force.

When the hinge is absent instead of contact conditions (5) we have the conditions of continuities of displacements, slopes, moments and the balance of shear forces

$$W_1(\beta) = W_2(\beta)$$

$$\frac{dW_1(\beta)}{dx} - \frac{dW_2(\beta)}{dx} = 0 \quad (7)$$

$$D_1 \frac{d^2W_1(\beta)}{dx^2} - D_2 \frac{d^2W_2(\beta)}{dx^2} = 0$$

$$D_1 \frac{d^3W_1(\beta)}{dx^3} + PL^2 \frac{dW_1(\beta)}{dx} - D_2 \frac{d^3W_2(\beta)}{dx^3} - PL^2 \frac{dW_2(\beta)}{dx} = 0 \quad (8)$$

Solutions satisfying these conditions can be written as

$$W_1(x) = C_1 \sin(p(x-\beta)) + C_2 \cos(p(x-\beta)) + C_3(x-\beta) + C_4 \quad (9)$$

$$W_2(x) = \gamma^{-1} C_1 \sin(p\gamma(x-\beta)) + C_2 \cos(p\gamma(x-\beta)) + C_3(x-\beta) + A_4$$

Clamped-clamped beam

At clamped ends $x = 0, x = 1$ we have the following boundary conditions

$$W_1(0) = 0, \frac{dW_1(0)}{dx} = 0, W_2(1) = 0, \frac{dW_2(1)}{dx} = 0 \quad (10)$$

Satisfying solutions (9) the boundary conditions (10) from non-triviality of all solutions the characteristic equation defining critical buckling force $p^2 = P_0$ find to be

$$\begin{aligned} & \gamma p \cos((\beta-1)\gamma p) \left(\sin(\beta p) (-\beta\eta + \eta + \gamma^2(-p^2)) + p \cos(\beta p) ((\beta-1)\beta\eta + \gamma^2 p^2) \right) + \\ & + \sin((\beta-1)\gamma p) \left(p \cos(\beta p) (\gamma^2 p^2 - \beta\eta) + \eta \sin(\beta p) \right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

When the hinge is absent instead of (10), using solutions (7) we have the following characteristic equation for the bi-material beam without the interior hinge

$$\begin{aligned} & \sin(\beta-1)\gamma p \left((\gamma^2 + 1) \sin(\beta p) - \gamma^2 p \cos(\beta p) \right) + \\ & + \gamma (\cos(\beta-1)\gamma p) (p \sin(\beta p) + 2 \cos(\beta p)) - 2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

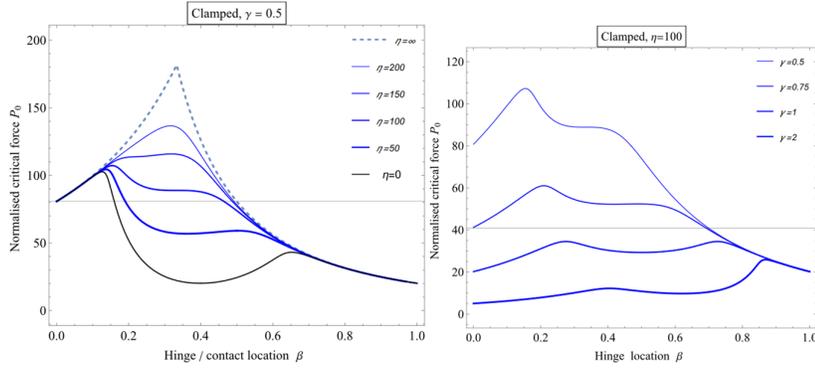


Fig.3a,3b. Critical buckling force P_0 versus β for bi-material clamped beam

On the Fig.3a the curves of normalized critical buckling force $P_0 = q^2$ corresponding to the smallest roots of the equation (11) dependence functions from hinge location parameter β are given for non-homogeneous beams $\gamma = 0.5$ versus for different values of spring stiffnesses η . Black curve corresponds to case when the hinge is not support. On Fig.3b the critical curves are plotted for non-homogeneous beams with different values of γ when the hinge spring stiffnesses $\eta = 100$. The optimum locations of the hinge correspond to points where critical forces are maximal. For comparison on the Fig. 4 the plots of normalized buckling force $P_0 = p^2$ versus contact location point for bi-material clamped beam in when interior hinge is absent.

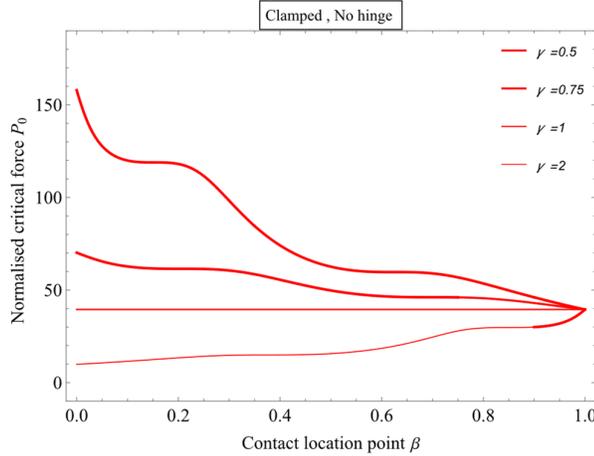


Fig. 4 Critical buckling force P_0 versus β for clamped bi-material beam without hinge

Pinned-pinned beam

At the pinned ends we have the following boundary conditions

$$W_1(0) = 0, \frac{d^2 W_1(0)}{dx^2} = 0, \quad W_2(1) = 0, \frac{d^2 W_2(1)}{dx^2} = 0 \quad (13)$$

The characteristic equation corresponding to these conditions can be founded as

$$(\beta\eta(1-\beta) - \gamma^2 p^2) \sin(p\gamma(1-\beta)) \sin(p\beta) = 0 \quad (14)$$

From (12) it follows that, when only the left uncoupled part of the beam buckles $P_0 = \pi^2/\beta^2$, when only the right uncoupled part buckles $P_0 = \pi^2/(\gamma(1-\beta))^2$.

When both parts buckle together $P_0 = \beta\eta(1-\beta)/\gamma^2$.

For beam without hinge the characteristic equation corresponding to conditions (11) can be written as

$$\gamma \sin(\beta p) \cos((\beta-1)\gamma p) + \cos(\beta p) \sin((1-\beta)\gamma p) = 0 \quad (15)$$

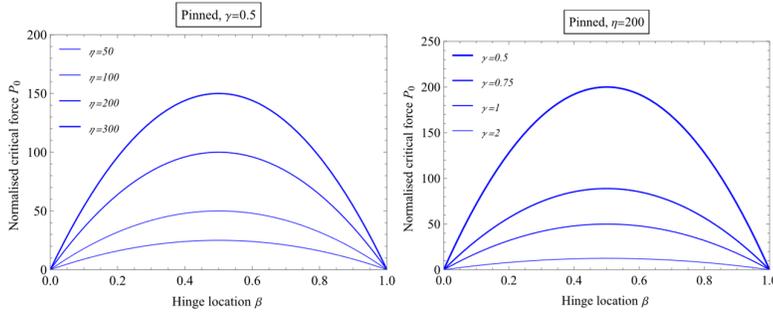


Fig.5a,5b. Critical buckling force P_0 versus β for bi-material pinned beam

The hinge optimum location where the critical buckling forces are maximal is at the midpoint $\beta = 0.5$

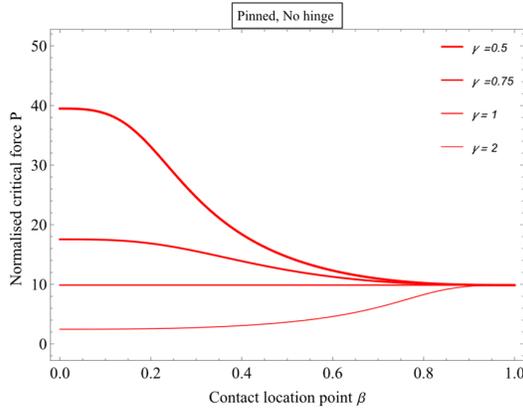


Fig. 6 Critical buckling force P_0 versus β for pinned bi-material beam without hinge

Clamped-pinned beam

At the one clamped and other pinned ends we have the following boundary conditions

$$W_1(0) = 0, \frac{dW_1(0)}{dx^2} = 0, W_2(1) = 0, \frac{d^2W_2(1)}{dx^2} = 0 \quad (16)$$

Corresponding to these conditions the characteristic equation defining critical force can be found as

$$\begin{aligned} &\gamma^2 p^2 \sin((1-\beta)\gamma p)(p \cos(\beta p) - \sin(\beta p)) + \\ &+ (\beta-1)\eta \sin((1-\beta)\gamma p)(\beta p \cos(\beta p) - \sin(\beta p)) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

For beam without hinge the characteristic equation can be cast as

$$\begin{aligned} &\gamma p^2 (\gamma \cos(\beta-1)\gamma p)(p \cos(\beta p) - \sin(\beta p)) + \\ &+ \sin(\beta-1)\gamma p (p \sin(\beta p) + \cos(\beta p)) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

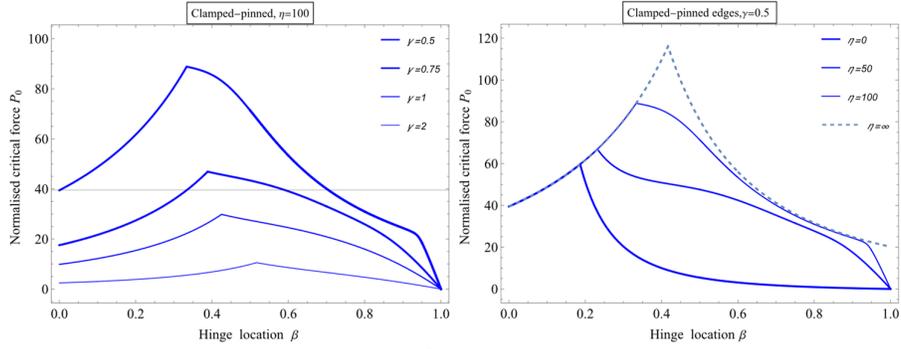


Fig. 7a, 7b. Critical buckling force P_0 versus β for bi-material clamped-pinned beam

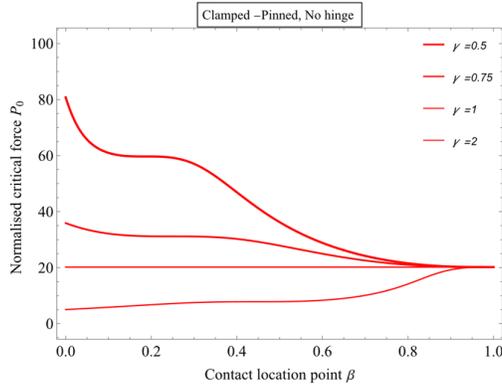


Fig. 8 Critical buckling force P_0 versus β for clamped-pinned bi-material beam without hinge

Clamped -sliding beam

At the one clamped and other sliding ends we have the following boundary conditions

$$W_1(0) = 0, \frac{dW_1(0)}{dx} = 0, \frac{dW_2(1)}{dx} = 0, \frac{d^3W_2(1)}{dx^3} = 0 \quad (19)$$

The characteristic equation defining critical force can be found as

$$\left(\gamma q \left((1-\beta)\eta - \gamma^2 q^2\right) \cos((1-\beta)\gamma q) - \eta \sin((1-\beta)\gamma q)\right) q \cos(\beta q) = 0 \quad (20)$$

For beam without hinge we have the following characteristic equation defining critical force

$$\sin(\beta p) \cos(\beta - 1)\gamma p + \gamma \cos(\beta p) \sin(\beta - 1)\gamma p = 0 \quad (21)$$

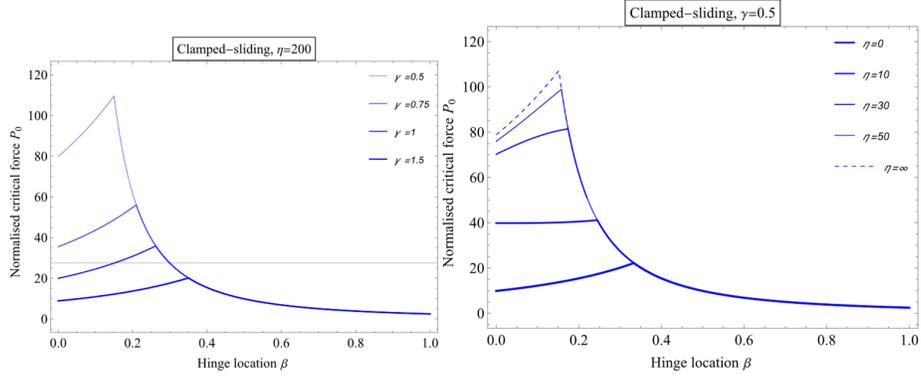


Fig9a,9b. Critical buckling force P_0 versus β for bi-material clamped-sliding beam

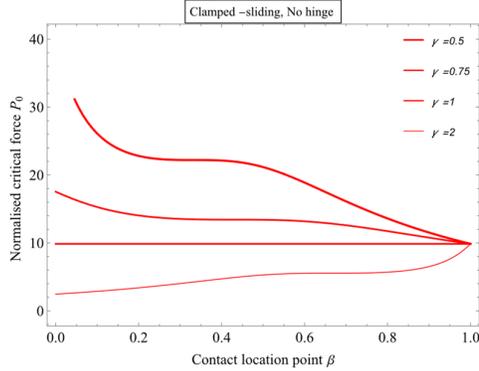


Fig. 10 Critical buckling force P_0 versus β for clamped-sliding bi-material beam without hinge

Results

As results from plots of Figures 3-10 for all considered boundary value problems the interior hinge weakens the bi-material beam in stability decreasing critical values of compressed force.

The stiffness of the hinge elastic support makes the beam more stable, increasing critical values of compressed force.

The critical values of the axial force for the bi-material beam with restrained interior hinge and the bi-material beam without hinge is mostly similar for sufficiently large values of the spring stiffnesses in all considered cases.

References

1. Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (2009), *Theory of elastic stability*. Courier Corporation.
2. Elishakoff, E., Li, Y., Starnes Jr, J. H., & Cheney, J. A. (2001), Non-classical problems in the theory of elastic stability. *Appl. Mech. Rev.*, 54(5), B86-B86.
3. Berchio, E., Falocchi, A., , Garrione, M. (2021), On the stability of a nonlinear nonhomogeneous multiply hinged beam. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 20(2), 908-940.
4. Liu, M., Yao, G. (2024), Nonlinear forced vibration and stability of an axially moving beam with a free internal hinge. *Nonlinear Dyn* **112**, 6877–6896
5. Wang, C. Y. (1992) , Stability of a column with two interior hinges, *Mechanics research communications* 19, no. 5: 483-488.
6. Xiang, Yang, C. M. Wang, and CY Wang. (2001, Buckling of rectangular plates with internal hinge. *International journal of structural stability and dynamics* 1, no. 02 169-179.
7. Avetisyan, A. S., Belubekyan, M. V., Ghazaryan, K. B. (2015). Stability of a beam with periodic supports. *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 68(3), 16-21.
8. Avetisyan, A., Ghazaryan, K., , Marzocca, P. (2023). Stability of a finite length multi-span beam resting on periodic rigid and elastic supports. *International Journal of Solids and Structures*, 281, 112410.
9. Ghazaryan, K., Jilavyan, S., Piliposyan, D., & Aznaurov, D. (2023), Band Gaps of Metastructure with Periodically Attached Piezoelectric Patches and Internal Hinges. In *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep* (pp. 101-113). Cham: Springer International Publishing.
10. Javier R. LGrossi. , R. O. (2012), A study on mode shapes of beams with internal hinges and intermediate elastic restraints, *Mecánica Computacional* , no. 13 (2012): 2593-2610.
11. Rattazzi, Alejandro R., Diana V. Bambill, and Carlos A. Rossit, 1 (2013), Free vibrations of beam system structures with elastic boundary conditions and an internal elastic hinge. *Chinese Journal of Engineering* 2013, no.: 624658.
12. Ghazaryan, K., Piliposyan G., S. Jilavyan , and G. Piliposian, (2024), Forced vibrations of a finite length meta beam with periodically arranged internal hinges and external supports. *European Journal of Mechanics, A/Solids* 103: 105194.

Information about autor

Karen Ghazaryan Department of dynamics of deformable systems and coupled fields,
Institute of mechanics of NAS of Armenia, Yerevan, E-mail: ghkarren@gmail.com

Received 02.12.2024

**СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР УДЛИНЕННОЙ ПАНЕЛИ С ОДНИМ
СВОБОДНЫМ КРАЕМ, ПЕРВОНАЧАЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ
НАПРАВЛЕНИЯМ: РАСТЯНУТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА И СЖАТОЙ В
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ**

Мартirosyan С. Р.

Ключевые слова: удлинённая прямоугольная пластинка, комбинированное нагружение, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, аналитический метод решения

Martirosyan S.R.

Supersonic flutter of an elongated panel with a free edge, initially loaded in two directions: stretched compressed along the gas flow and compressed in the perpendicular direction

Key words: rectangular elongated plate, combined loading, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method

By analyzing, as an example, a thin elastic elongated plate, initially loaded in two directions: stretched along supersonic the gas flow and compressed in the perpendicular direction, we study the influence of the initial stress state of the plate on the stability of the unperturbed equilibrium state of the dynamical system “plate – flow” under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge. An analytical solution of the problem of stability is obtained. An accurate assessment of the influence of initial efforts on the system's stability threshold is given in order to manage it.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ նախապես ձգված և միաժամանակ ուղղահայաց ուղղությամբ սեղմված, մեկ ազատ եզրով երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ երկարաձիգ ուղղանկյուն սալ, նախապես սեղմող և ձգող ուժեր, առաձգական կայունություն, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անսալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում շրջհոսման ուղղությամբ նախապես ձգված և միաժամանակ ուղղահայաց ուղղությամբ սեղմված մեկ ազատ եզրով առաձգական երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ-հոսք» դինամիկ համակարգի ոչ խոտորված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անսալիտիկ լուծումը: Գնահատված է նախնական ուժերի ազդեցությունը «սալ-հոսք» համակարգի կայունության շեմի վրա, այն ղեկավարելու նպատակով:

В статье, в линейной постановке, исследуется динамическая устойчивость тонкой упругой удлиненной прямоугольной пластинки с одним свободным краем при комбинированном нагружении. Предполагается, что обтекаемая сверхзвуковым потоком газа пластинка первоначально нагружена по двум направлениям: растягивающими силами по потоку и сжимающими силами в перпендикулярном направлении; поток набегает на свободный край пластинки, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и

моменты поворота. Получено аналитическое решение задачи устойчивости. Дана точная оценка влиянию первоначальных усилий на порог устойчивости системы, с целью управления им.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1 – 5].

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно удлиненной прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при следующих предположениях. Прямоугольная пластинка первоначально нагружена по двум направлениям: растягивающими силами по потоку газа и сжимающими силами в перпендикулярном направлении; сверхзвуковой поток газа набегаёт на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка–поток» с помощью алгоритма, подробно изложенного в [12].

Показано, что невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в виде дивергенции панели как эйлеровой, так и не эйлеровой, и в виде панельного флаттера. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [11].

Определена относительная толщина пластинки, обеспечивающая её прочность по критерию устойчивости колебаний.

Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных сжимающих и растягивающих сил, а также, относительной толщины пластинки на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно удлиненная прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$, $ab^{-1} < 0.33$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 8, 12, 14, 15].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих $N_x = 2h\sigma_x$ и сжимающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, равномерно распределённых, соответственно, по кромкам пластинки $x = 0$, $x = a$, и $y = 0$, $y = b$, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 5].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» $\delta p = -a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$, где

a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [6, 7]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$ [1, 5].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками δp , растягивающими σ_x и сжимающими σ_y усилиями в срединной поверхности пластинки, и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c , приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{pr.}$ и $(\sigma_y)_{cr.}$, где $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилия, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [9]; $(\sigma_y)_{cr.}$ – усилия, которые могут произвести «выпучивание» пластинки в отсутствии обтекания [13, 16].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [6, 7] в предположении малости интенсивности $m \partial^2 w / \partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c \partial^2 w / \partial t^2$ и $I_c \partial^2 w / \partial t^2$, учитываемых в граничных условиях [8], будет описываться соотношением [1, 2]:

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 8, 12, 14, 15]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и} \quad y = b; \quad (1.3)$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m.} \approx 33.85; \quad (1.4)$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.}, \quad \sigma_y < (\sigma_y)_{cr}. \quad (1.5)$$

А также, требуется определить относительную толщину пластинки $2ha^{-1}$, обеспечивающую её прочность по критерию устойчивости колебаний.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5). Задачу устойчивости (1.1) – (1.5) будем исследовать в случае достаточно удлинённых прямоугольных пластинок [1, 2, 12 – 15]:

$$\gamma = ab^{-1} < 0.33, \quad (1.6)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

В статье [12] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.5) для всех значений $\gamma \in [0, \infty]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки ($\sigma_x = \sigma_y = 0$). В статьях [14] и [15] исследована исходная задача устойчивости при условии $\sigma_x = 0$, $\sigma_y \neq 0$ и $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = 0$ соответственно, из сопоставления результатов которых следует, что растягивающие усилия σ_x приводят к существенному повышению устойчивости системы.

В работах [13] и [16] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для всех $\gamma \in [0, \infty]$ в статической постановке ($m_c = 0, I_c = 0$) по методу Эйлера при условии $\sigma_x = 0$, $\sigma_y \neq 0$, и $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$ соответственно; показано, что система «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от её параметров; установлена граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Заметим, что согласно обозначению (1.6) значению $\gamma = 0$ соответствует предельный случай прямоугольной пластинки – бесконечно удлинённая пластинка.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.3). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде суммы гармонических колебаний [1, 2, 12]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволин вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re } \lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda > 0$) [10]. Критическая скорость потока газа V_{cr} , характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re } \lambda = 0$) [1, 2, 10].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [16]:

$$r^4 - 2 \cdot (1 + \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1 - \beta_y^2) = 0, \quad (2.2)$$

α_n^3 – параметр, определяющий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3}, a_0^2 \rho_0 M_{2\cos\theta} D^{-1} \mu_n^{-3}); \quad (2.3)$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты, характеризующие усилия σ_x и σ_y соответственно, определяющие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{pr.}, \quad (\beta_x^2)_{pr.} = h(\sigma_x)_{pr.} D^{-1} \mu_n^{-2}; \quad (2.4)$$

$$\beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2h \sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_y^2)_{cr.}, \quad (\beta_y^2)_{cr.} = 2h(\sigma_y)_{cr.} D^{-1} \mu_n^{-2} \text{ (табл.1) [16];}$$

согласно условиям (1.4), (1.5).

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$\left(r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right) = 0; \quad (2.6)$$

где $q > 0$ – единственный действительный корень кубического уравнения [16]:

$$8 \cdot (q+1+\beta_x^2)(q^2 - 1 + \beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда, в соответствии с обозначением (2.3), очевидно, что параметр q характеризует скорость потока газа V : $q = q(V)$ при фиксированных значениях остальных параметров системы. А тогда, в силу условия (1.4), имеем $q \in (q(a_0 M_0), q(a_0 M_{2\cos m}))$.

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), переписанного в виде (2.5) и (2.6), можно показать, что

$$q = q(V) \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})) \subseteq (q(a_0 M_0), q(a_0 M_{2\cos m})), \quad (2.8)$$

$$q_0 = \left(-(1 + \beta_x^2) + 2\sqrt{(1 + \beta_x^2)^2 + 3(1 - \beta_y^2)} \right) / 3 \quad (2.9)$$

$$\text{при всех } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr} \text{ и } \beta_y^2 < \left(0.25(1 + \beta_x^2)^2 + 1 \right) \cap (\beta_y^2)_{cr}; \quad (2.10)$$

в силу очевидного условия $q > 0$ и известного требования к его корням $I_i[1, 2, 12]$:

$$r_1 < 0, r_2 < 0, r_{3,4} = \alpha \pm i\beta \in W, \alpha > 0, \quad (2.11)$$

являющимся решением квадратных уравнений (2.5) и (2.6) соответственно [16]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}, r_1 < 0, r_2 < 0; \quad (2.12)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}. \quad (2.13)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.12) и (2.13), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y). \quad (2.14)$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента β_y напряжения σ_y :

$(\beta_y^2)_{cr} = (\beta_y^2)_{cr}(n, \gamma, \nu)$ – решения дисперсионных уравнений исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания ($V = 0$) для $\gamma < 0.33$ при $n = 1$, $\beta_x^2 = 0$ и $m_c = 0, I_c = 0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} [1, 13, 16]:

при $\gamma < 80$ имеем

$$\begin{aligned} F_1(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = & \\ = & \left(\sqrt{1+\beta_y} (1-\beta_y-\nu)^2 + \sqrt{1-\beta_y} (1+\beta_y-\nu)^2 \right) sh\left(\pi n \gamma \left(\sqrt{1+\beta_y} - \sqrt{1-\beta_y} \right)\right) - \\ & - \left(\sqrt{1+\beta_y} (1-\beta_y-\nu)^2 - \sqrt{1-\beta_y} (1+\beta_y-\nu)^2 \right) sh\left(\pi n \gamma \left(\sqrt{1+\beta_y} + \sqrt{1-\beta_y} \right)\right) = 0 \end{aligned}$$

когда $\beta_y^2 < 1$;

$$F_2(n, \gamma, \nu) = (2 - \nu^2) sh(\sqrt{2}\pi n \gamma) - \nu^2 \sqrt{2}\pi n \gamma \cdot ch(\sqrt{2}\pi n \gamma) = 0, \text{ когда } \beta_y^2 = 1;$$

$$F_3(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = \sqrt{\beta_y - 1} (\beta_y + 1 - \nu)^2 \operatorname{sh}(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y + 1}) \cos(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y - 1}) - \\ - \sqrt{\beta_y + 1} (\beta_y - 1 + \nu)^2 \operatorname{ch}(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y + 1}) \sin(\pi n \gamma \sqrt{\beta_y - 1}) = 0, \text{ когда } \beta_y^2 > 1;$$

при $\gamma \geq 80$ имеем

$$F_4 = F_4(\nu, \beta_y^2) = \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2}\right)^2 - 2\nu \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2}\right) - (1 - \nu)^2 = 0, \text{ когда } \beta_y^2 < 1.$$

Заметим, что $\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{cr}} F_1(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = F_4(\nu, \beta_y^2)$ для всех n , когда $\gamma \geq \gamma_{cr} \approx 80$.

Таблица 1.

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.001	$5.31 \cdot 10^5$	$4.559 \cdot 10^5$	$4.255 \cdot 10^5$	$3.80 \cdot 10^5$	$3.04 \cdot 10^5$
0.010	$5.31 \cdot 10^3$	$4.559 \cdot 10^3$	$4.255 \cdot 10^3$	$3.80 \cdot 10^3$	$3.04 \cdot 10^3$
0.100	54.092	46.554	43.521	38.880	31.289
0.200	14.202	12.359	11.605	10.456	8.493
0.300	6.822	6.029	5.695	5.180	4.272
0.330	5.799	5.150	4.875	4.447	3.686

Отметим, что параметр $q \gg 1$ для всех $\gamma \leq 0.01$, откуда следует справедливость неравенства $q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} > 0$ в соотношениях (2.5), (2.6) и выполнение условий (2.11) при всех допустимых значениях параметров системы «пластинка–поток» [12,13]. Иначе, как показано в [1,2,12], соответствующие дисперсионные уравнения не имеют решения.

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \gamma \in (0, 0.33). \quad (2.15)$$

позволяющую по известному значению параметра $q = q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2)$ определить приведённую скорость потока газа $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$.

Учитывая условия (1.4), из выражения (2.15) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 / (12(1 - \nu^2))$ имеем [16]:

$$V(q) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (V(q_0) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m} \Psi) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}.) \Psi,$$

когда $V(q_0) \geq a_0 M_0$;

$$V(q) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}.) \Psi, \text{ когда } V(q_0) < a_0 M_0;$$

$$\Psi = 12(1 - \nu^2) a_0 \rho_0 E^{-1} (2ha^{-1})^{-3}, M_0 = \sqrt{2}, M_{2\cos m} \approx 33.85. \quad (2.16)$$

Далее, подставляя значения $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в выражения (2.16), получаем соответствующие интервалы $d(2ha^{-1}, \nu) = (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi$ допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.4) для стальных пластинок (табл. 2) [14].

Таблица 2.

$\begin{matrix} \nu \\ 2ha^{-1} \end{matrix}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.8, 1311.7)	(52.0, 1245.2)	(50.5, 1209.0)	(47.7, 1141.6)	(41.6, 996.3)
0.008	(23.1, 544.3)	(22.0, 516.4)	(21.5, 505.6)	(20.1, 473.3)	(17.6, 413.1)
0.010	(11.8, 283.5)	(11.2, 269.1)	(10.9, 261.3)	(10.3, 246.7)	(9.0, 215.3)
0.012	(6.85, 164.0)	(6.5, 155.7)	(6.3, 151.2)	(5.96, 142.7)	(5.2, 124.6)
0.014	(4.3, 101.5)	(4.09, 96.24)	(4.0, 94.24)	(3.75, 88.22)	(3.27, 77.0)
0.015	(3.5, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3).

3.1. Достаточно удлинённая прямоугольная пластинка ($\gamma \in (0, 0.33)$).

Подставляя общее решение (2.14) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.12) и (2.13), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ :

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2) \lambda^2 + A_3 = 0, \quad (3.1)$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \quad \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \quad \delta_n > 0, \quad \chi_n > 0, \quad (3.2)$$

δ_n и χ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_k и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) = \quad (3.3)$$

$$= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left(1 - \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) \right) B_1 B_2 -$$

$$- 2B_2 \left(q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pi n \gamma) sh(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) -$$

$$- 2B_1 \left(q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pi n \gamma) ch(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2);$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) = \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
&= 2(q+1+\beta_x^2) \left[(q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}) + (q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}) \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) \right] \cdot \\
&\cdot B_1 B_2 + 2B_2 \left[\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} (q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}) \operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1) + \right. \\
&+ 2B_1((2q-1)(q+1) + \beta_y^2 + q\beta_x^2) \operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1) \left. \right] \cos(\pi n\gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) + \\
&+ 2 \left[B_1 \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} (q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}) \operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1) + \right. \\
&+ (q+1+\beta_x^2)(q-1+\beta_y^2 + q\beta_x^2) \operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1) \left. \right] \sin(\pi n\gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma); \\
A_2 &= A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) = \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(q+1+\beta_x^2) \left(1 + \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) \right) B_1 B_2 - \\
&- 4(q+1+\beta_x^2) B_1 B_2 \operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1) \cos(\pi n\gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) + \\
&+ 2(3(q^2-1) - 2\beta_x^2 - \beta_x^4 + 2\beta_y^2) \operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1) \sin(\pi n\gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma); \\
A_3 &= A_3(q, n, \gamma, v, \beta_x^2, \beta_y^2) = \tag{3.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left\{ \left(q+1 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 + \right. \\
&+ 2\beta_x^2 \left(q - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \left. \right\} B_1 B_2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left\{ \left(q+1 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right)^2 - \right. \\
&- 2(q+1)v - (1-v)^2 + 2\beta_x^2 \left(q + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \left. \right\} B_1 B_2 \\
&\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) + \\
&+ 2B_2 \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) \left\{ [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - \right. \\
&- (2q^2-4q+1)(q+1) + (2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + 2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 - \\
&- \left. \left(q-1 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \beta_y^2 - 2((2q-1)(q+1) - q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + q\beta_x^2)v + \right. \\
&+ (q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2})v^2 \left. \right] \operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1) + \\
&+ 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)^3(q^2-1+\beta_y^2)} B_1 \operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1) \left. \right\} \cdot \cos(\pi n\gamma B_2) - \\
&- 2 \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) \left\{ B_1 [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \right. \\
&+ (2q^2-4q+1)(q+1) - (2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + 2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 + \\
&+ \left. \left(q-1 + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \beta_y^2 + 2((2q-1)(q+1) + q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + q\beta_x^2)v - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2})v^2] \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \\
& \cdot (3(q^2-1) - 2\beta_x^2 - \beta_x^4 + 2\beta_y^2) \cdot \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \} \sin(\pi n \gamma B_2); \\
& B_1 = \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}, \quad B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Легко показать, что при допустимых значениях (2.9) параметра $q = q(V)$ и коэффициентов (2.10): $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.}$, $\beta_y^2 < (0.25(1+\beta_x^2)^2 + 1) \cap (\beta_y^2)_{cr.}$,

$$B_1 = B_1(q, \beta_x^2, \beta_y^2) > 0, \quad B_2 = B_2(q, \beta_x^2, \beta_y^2) > 0, \quad (3.8)$$

откуда следует справедливость неравенств

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) > 0, \quad A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) > 0, \quad \gamma \in (0, 0.33). \quad (3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n \gamma)^2 \cdot (m_c a^2)^{-1}, \quad (3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), переписывается в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2) \chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \quad \delta_n > 0, \quad \chi_n > 0, \quad k_n > 0. \quad (3.11)$$

Будем полагать, что

$$k_n \in (0, 10]. \quad (3.12)$$

При больших значениях k_n происходит «жёсткий» переход через точку $\lambda_\infty = \pm\infty$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k .

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2 = \beta_y^2 = 0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [12].

3.2. Бесконечно удлиненная пластинка ($\gamma = 0$). Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности бесконечно удлиненной пластинки может быть получено из (1.1) путём предельного перехода $b \rightarrow \infty$. Тогда, вводя величину $\xi = xa^{-1}$, уравнения исходной задачи (1.1)–(1.3) переписываются в виде:

$$D \frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi^4} - (N_x a^2) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} + (a_0 \rho_0 a^3 V) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0, \quad w_1 = w_1(\xi, t); \quad (3.12)$$

$$D \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = (I_c a) \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi \cdot \partial t^2}; \quad D \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} - (N_x a^2) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = -(m_c a^3) \frac{\partial w_1}{\partial t^2}, \quad \xi = 0; \quad (3.13)$$

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = 0, \quad \xi = 1; \quad (3.14)$$

откуда очевидно, что в случае бесконечно удлиненной пластинки ($\gamma = 0$), нагруженной в двух направлениях силами $N_x \neq 0$ и $N_y \neq 0$, на устойчивость невозмущенного состояния равновесия системы оказывают влияние только лишь силы $N_x \neq 0$, направленные по потоку газа, в отличие от сил $N_y \neq 0$, направленных перпендикулярно потоку, аналогично, как и в статье [17].

Задача устойчивости (3.12) – (3.14) подробно исследована в [15]. Показано, что система, в случае растянутой по потоку газа бесконечно удлиненной пластинки ($\gamma = 0$), будучи неустойчивой вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) при $\beta_\xi^2 = 2h\sigma_\xi a^2 D^{-1} > (\beta_\xi^2)_{\min}$ становится устойчивой: $(\beta_\xi^2)_{\min}$ – монотонно убывающая функция от $2ha^{-1}$, которая на промежутке $2ha^{-1} \in [0.006; 0.015]$ убывает от 7.9 до 0.83. В дальнейшем, с увеличением скорости потока система (3.12) – (3.14) теряет устойчивость в виде эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели, а также, в виде панельного флаттера [15].

Исходную задачу устойчивости будем исследовать для $\gamma \in (0, 0.33)$.

Анализ устойчивости невозмущенного состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) при ограничениях (1.4) и (1.5) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.11), определяющего собственные движения системы “пластинка–поток” в пространстве её «важных» параметров $\mathfrak{T} = \{q(V), n, \gamma, v, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическую систему «пластинка–поток». Значения остальных параметров системы принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Как и в работах [12, 14, 15], введём в рассмотрение в пространстве параметров \mathfrak{T} системы «пластинка–поток» область устойчивости $\mathfrak{T}_0 (k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и области неустойчивости: $\mathfrak{T}_1 (A_3 < 0, \Delta > 0)$, $\mathfrak{T}_2 (k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и $\mathfrak{T}_3 (A_3 > 0, \Delta < 0)$, соответственно, эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера. Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, v, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \quad (4.1)$$

В области устойчивости \mathfrak{T}_0 уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущенного состояния равновесия; в области \mathfrak{T}_1 – имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых корня $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели; в области \mathfrak{T}_2 – имеет два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$) корня,

характеризующее более ярко выраженную дивергенцию панели – неэйлеровую дивергенцию; а в области \mathfrak{Z}_3 , по крайней мере, два корня уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер: пластинка совершает флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде [12, 14, 15].

Границами области устойчивости \mathfrak{Z}_0 системы в пространстве её параметров \mathfrak{Z} при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие условия аperiodической и колебательной неустойчивости соответственно [10–12]: характеристическое уравнение (3.11) на гиперповерхности $A_3 = 0$ имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности $\Delta = 0$ – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Переходы ($\mathfrak{Z}_0 \rightarrow \mathfrak{Z}_3$) и ($\mathfrak{Z}_2 \rightarrow \mathfrak{Z}_3$) определяют «опасные границы» областей \mathfrak{Z}_0 и \mathfrak{Z}_2 [11].

На границе $A_3 = 0$ области устойчивости \mathfrak{Z}_0 при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели \mathfrak{Z}_1 . Критические скорости $\{V_{cr.div.}\}$, определяемые подстановкой первого и третьего корней уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.15), разграничивают области \mathfrak{Z}_0 и \mathfrak{Z}_1 . При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k , вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к эйлеровой дивергенции панели. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений, приводящих к изменению плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости неэйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области \mathfrak{Z}_1 и \mathfrak{Z}_2 . При скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит «мягкий» переход из области \mathfrak{Z}_1 в область \mathfrak{Z}_2 . Критические скорости $V_{1,2}$ определяются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$ и $\Delta > 0$ в формулу (2.15).

На границе $\Delta = 0$ области устойчивости \mathfrak{Z}_0 при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а так же, на границе $\Delta = 0$ области \mathfrak{Z}_2 при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ теряет, соответственно, устойчивость в виде колебательной неустойчивости, либо переходит из состояния равновесия в состояние колебательной неустойчивости, либо из состояния неэйлеровой дивергенции в состояние колебательной неустойчивости: имеет место панельный флаттер.

Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}\}$, определяемые подстановкой первого корня уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.15), разграничивают области \mathfrak{T}_0 и \mathfrak{T}_3 при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, либо области \mathfrak{T}_2 и \mathfrak{T}_3 при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n$. В обоих случаях при $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям. Однако, следует отметить, что в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – изогнутая по форме пластинка – «выпученная». Переходы ($\mathfrak{T}_0 \rightarrow \mathfrak{T}_3$) и ($\mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_3$) определяют «опасные границы» областей \mathfrak{T}_0 и \mathfrak{T}_2 [11].

Следует отметить, что критические скорости $V_{cr.div.}$, $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой в формулу (2.15) искомым значений параметра $q \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm}))$.

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо-аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n)\} \in \mathfrak{T}$ для $\gamma \in (0, 0.33)$, параметризованных надлежащим образом.

Аналогично, как и в [14, 17], для наглядной иллюстрации динамики невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка – поток» в пространстве параметров \mathfrak{T} составлены цепочки переходов из области $\mathfrak{T}_l \subset \mathfrak{T}$ в область $\mathfrak{T}_m \subset \mathfrak{T}$ сопоставлением найдённых значений критических скоростей с данными таблицы 2. Здесь, так же, формы представления цепочек переходов существенно зависят от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок. В частности, цепочки переходов исходной системы в случае стальных пластинок относительной толщины $(2ha^{-1}) \in [0.006, 0.015]$ будут вида:

для $\gamma = 0.1$

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^2} \mathfrak{T}_1, \quad k_1 \in (0, 0.0257); \quad (5.1)$$

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{T}_2 \xrightarrow{V_0^{**}} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{T}_1, \quad k_1 \in [0.0257, 0.058];$$

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{T}_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{T}_3 \xrightarrow{V_0^{**}} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{T}_1, \quad k_1 \geq 0.058;$$

для $\gamma = 0.3$

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^2} \mathfrak{T}_1, \quad k_1 \in (0, 0.0687), \quad \beta_x^2 < 3 \quad (5.2)$$

и $k_1 \in (0, 0.5), \beta_x^2 \geq 3;$

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{T}_3 \xrightarrow{V_0^{**}} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{T}_1, \\ k_1 \in [0.0687, 0.5), \beta_x^2 < 3;$$

$$(\mathfrak{S}_0) \xrightarrow{V_{cr,div}^{(1)}} \mathfrak{S}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{S}_2 \xrightarrow{V_{cfl}} \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{V_0^{**}} \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cr,div}^{(2)}} \mathfrak{S}_1, k_1 \geq 0.5.$$

Как следует из выражений (5.1), для $\gamma = 0.1$ при малых k_1 ($k_1 < 0.058$) панельный флаттер отсутствует: система теряет только статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции, когда $k_1 \in (0; 0.0257)$, и в виде эйлеровой и неэйлеровой дивергенции, когда $k_1 \in [0.0257; 0.058)$. При этом, $V_0^* = V_{1,2}$.

В цепочках переходов (5.2) для $\gamma = 0.3$ при малых k_1 ($k_1 \in [0.0687; 0.5)$) имеет место переход $\mathfrak{S}_1 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cfl}} \mathfrak{S}_3$, а при больших $k_1 \geq 0.5$ – $\mathfrak{S}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{S}_2 \xrightarrow{V_{cfl}} \mathfrak{S}_3$. Здесь, также, $V_0^*(\gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2) = V_{1,2}(\gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2)$ для всех ν , β_x^2 и β_y^2 . При скоростях потока $V \geq V_{cr.fl.}$, когда $k_1 \in [0.0687, 0.5)$, начинает совершать флаттерные колебания «плоская» пластинка, а когда $k_1 \geq 0.5$ – «выпученная» (изогнутая) пластинка.

Отметим, что качественные характеристики динамики невозмущённого состояния равновесия системы одинаковы для всех $\gamma \in (0; 0.193]$ и $\gamma \in (0.193; 0.33)$: описываются цепочками переходов (5.1) и (5.2) соответственно. Однако её количественные характеристики различны – существенно зависят от γ .

Представления (5.1) и (5.2) наглядно указывают ещё на одну особенность в динамике невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток»: невозмущённое состояние равновесия системы будучи статически неустойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ при малых β_x^2 , становится устойчивым, когда $\beta_x^2 > (\beta_x^2)_{\min}$ (табл. 3) [16].

Таблица 3.

$2ha^{-1}$	0.006	0.010	0.012	0.015
$(\beta_x^2)_{\min}$, $\gamma = 0.1$	79.00	23.00	15.00	8.27
$(\beta_x^2)_{\min}$, $\gamma = 0.3$	9.60	1.98	1.17	0.62

Результаты численных расчётов показали, что для $\gamma \in (0, 0.33)$ критические скорости эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели, а также панельного флаттера являются возрастающими функциями от числа полуволн n : их наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Значения $V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ для $\gamma = 0.1$, $\nu = 0.3$. Таблица 4.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	5	10	15	20
0	77.318	83.490	89.623	95.737	101.852
15	77.319	83.503	89.646	95.769	101.893
30	77.320	83.512	89.668	95.797	101.938

В таблицах 4 – 7 и 8 – 11 представлены некоторые значения критических скоростей дивергенции и флаттера, соответственно, для $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 0.3$ при $n = 1$.

Критические скорости устойчивости V_0^* и неэйлеровой дивергенции $V_{1,2}$ являются монотонно возрастающими функциями от γ , β_x^2 , β_y^2 и от коэффициента Пуассона ν : с ростом ν возрастают, примерно, на 0.5 %– 5 % (табл. 4, 8).

Значения $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ для $\gamma = 0.1$ при $\nu = 0.3$. Таблица 5.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	1	5	10	15	20
0	0.283	0.684	2.334	4.501	6.776	9.148
1	0.276	0.676	2.328	4.494	6.767	9.140
5	0.250	0.650	2.299	4.467	6.732	9.105
10	–	0.616	2.263	4.425	6.695	9.061
20	–	0.552	2.196	4.356	6.621	8.985
30	–	–	2.126	4.282	6.541	8.902

Значения $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ для $\gamma = 0.1$ при $\nu = 0.3$. Таблица 6.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	1	5	10	15	20
0	484.256	486.175	493.837	503.448	513.009	522.593
5	484.250	486.172	493.835	503.443	513.007	522.584
10	484.247	486.170	493.834	503.440	513.006	522.577
20	484.241	486.166	493.831	503.431	513.003	522.566
30	484.237	486.160	493.827	503.418	512.995	522.561

Критические скорости эйлеровой дивергенции $V_{crdiv}^{(1)}$ и $V_{crdiv}^{(2)}$ являются возрастающими функциями от β_x^2 , а от β_y^2 и коэффициента Пуассона ν – медленно убывающими функциями: с ростом ν убывают, примерно, на 5 % – 30 % и на 0.5 % – 4 % соответственно (табл. 5 и 6):.

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ для $\gamma = 0.1$ при $\nu = 0.3$ и $k_1 \in [0.1, 5]$: Таблица 7.

$k_1 = 0.1$

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	1	5	10	15	20
0	92.746	93.698	97.528	102.368	107.284	112.254
5	92.784	93.738	97.577	102.425	107.334	112.303
10	92.823	93.777	97.604	102.465	107.374	112.345
20	92.886	93.852	97.692	102.547	107.458	112.431
30	92.974	93.922	97.773	102.628	107.543	112.519

$k_1 = 0.5$

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	1	5	10	15	20
0	124.088	125.168	129.269	124.461	139.745	144.967
5	124.152	125.200	129.357	124.557	139.795	145.015
10	124.204	125.244	129.406	134.615	139.839	145.077
20	124.299	125.336	129.503	134.718	139.948	145.189
30	124.390	125.434	129.597	134.820	140.050	145.300

$k_1 = 1$

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	1	5	10	15	20
0	134.182	135.275	139.653	145.616	150.622	156.087
5	134.231	135.324	139.688	145.676	150.676	156.171
10	134.273	135.374	139.754	145.727	150.731	156.223
20	134.364	135.465	139.853	145.830	150.838	156.342
30	134.460	135.557	139.954	145.933	150.943	156.461

$k_1 = 5$

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	1	5	10	15	20
0	149.045	150.225	154.967	160.901	166.844	172.797
5	149.087	150.275	155.017	160.971	166.899	172.849
10	146.129	150.317	155.067	161.005	166.952	172.910
20	146.228	150.409	155.160	161.108	167.060	173.022
30	149.312	150.501	155.261	161.207	167.166	173.134

Значения $V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ для $\gamma = 0.3, \nu = 0.3$. Таблица 8.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.5	1	2	3
0.0	90.306	96.053	102.000	113.360	124.989
2.0	90.452	96.250	102.076	113.723	125.407
3.5	90.460	96.321	102.188	113.898	125.729

Критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.1$ является монотонно возрастающей функцией от β_x^2, β_y^2 , коэффициента Пуассона ν и k_1 (табл. 7). В частности, с ростом коэффициента Пуассона ν возрастает, примерно, на 0.1–0.4 %. Из сопоставления данных таблиц 4 и 8 следует, что критическая скорость неэйлеровой дивергенции $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ является возрастающей функцией от γ .

Значения $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ для $\gamma = 0.3, \nu = 0.3$. Таблица 9.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	3.078	5.044	7.091	9.227	11.414	13.714	16.044
0.5	2.804	4.754	6.792	8.935	11.095	13.383	15.681
1.0	2.537	4.472	6.503	8.587	10.794	13.026	15.355
2.0	–	3.890	6.986	7.984	10.108	12.336	14.617
3.0	–	–	5.299	7.358	9.483	11.658	13.948
3.5	–	–	–	7.039	9.143	11.330	13.585

Значения $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ для $\gamma = 0.3, \nu = 0.3$. Таблица 10.

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	477.114	484.951	492.737	500.496	508.239	515.955	523.640
0.5	477.113	484.950	492.736	500.481	508.195	515.910	523.594
1.0	477.111	484.948	492.734	500.468	508.163	515.865	523.548
2.0	477.107	484.945	492.732	500.445	508.125	515.818	523.468
3.0	477.101	484.942	492.728	500.418	508.104	515.749	523.384
3.5	477.063	484.939	492.726	500.406	508.076	515.725	523.343

Критические скорости эйлеровой дивергенции $V_{crdiv}^{(1)}$ и $V_{crdiv}^{(2)}$ при $\gamma = 0.3$ – монотонно возрастающие функции от параметра β_x^2 ; монотонно убывающие функции от

параметров β_y^2 и коэффициента Пуассона ν : с ростом ν убывают, примерно, 1.14–1.15 раз и 1.065 – 1.73 раза соответственно (табл. 9 и 10).

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ для $\gamma = 0.3$, $\nu = 0.3$ и $k_1 \in [0.1; 5]$: Таблица 11.

$k_1 = 0.1$ (переход $\mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{T}_3$)

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	110.395	121.936	135.215	151.416	177.083	–	–
0.5	109.993	121.445	134.533	150.442	174.471	–	–
1.0	109.592	120.956	133.882	149.542	172.394	–	–
2.0	108.667	119.984	132.586	147.823	168.864	–	–
3.0	108.001	119.017	131.433	146.186	165.952	–	–
3.5	107.544	118.498	130.792	145.400	164.652	–	–

$k_1 = 0.5$ (переход $\mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{T}_{1,2} \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{T}_3$)

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	93.440	98.463	103.598	108.828	114.139	119.590	125.123
0.5	93.563	98.635	103.766	109.005	114.319	119.751	125.184
1.0	93.777	98.808	103.933	109.156	114.483	119.913	125.454
2.0	94.116	99.146	104.269	109.493	114.817	120.249	125.786
3.0	94.461	99.489	104.612	109.837	115.158	120.589	126.124
3.5	94.635	99.665	104.790	110.010	115.331	120.717	126.304

$k_1 = 1$

$\beta_y^2 \backslash \beta_x^2$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	104.242	108.805	113.454	118.129	122.896	127.694	132.543
0.5	104.544	109.111	113.788	118.480	123.225	128.052	132.911
1.0	104.910	109.467	114.109	118.817	123.580	128.397	133.273
2.0	105.511	110.102	114.766	119.493	124.261	129.099	134.008
3.0	106.109	110.722	115.406	120.154	124.942	129.790	134.715
3.5	106.412	111.039	115.738	120.503	125.294	130.142	135.102

$$k_1 = 5$$

$\beta_x^2 \backslash \beta_y^2$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	134.631	139.406	144.196	149.029	153.893	158.733	163.664
0.5	134.997	139.804	144.635	149.518	154.252	159.262	164.184
1.0	135.376	140.215	145.082	149.957	154.841	159.739	164.689
2.0	136.161	141.050	145.965	150.862	155.773	160.732	165.697
3.0	136.955	141.842	146.783	151.742	156.674	161.687	166.705
3.5	137.323	142.266	147.155	152.131	157.127	162.142	167.179

Приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3)$ является монотонно возрастающей функцией от параметров β_x^2, β_y^2 и $k_1 \in [0.5, 10]$ (табл. 11).. Можно показать, что $V_{cr.fl.} D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3)$, в отличие от больших k_1 , при малых $k_1 \in [0.0687; 0.5)$ является медленно убывающей функцией от k_1 , а от коэффициента Пуассона ν – медленно возрастающей функцией при всех $k_1 \geq 0.0687$: с ростом ν возрастает на 0.05% – 7%.

Из сопоставления данных таблиц 2, 3, 5 и 9 следует, что для достаточно удлинённых стальных пластинок, в частности, для $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 0.3$, при относительной толщине $2ha^{-1} > 0.01$ и $2ha^{-1} > 0.009$ соответственно, система «пластинка–поток» становится устойчивой вблизи $a_0 \sqrt{2}$ при всех значениях остальных параметров.

Итак, первоначальное напряжённое состояние достаточно удлинённой пластинки, нагруженной по двум направлениям: растягивающими силами N_x по потоку газа и сжимающими – N_y в перпендикулярном направлении к потоку, в целом, приводит к повышению устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы “пластинка–поток”. Можно утверждать, что в данной постановке основополагающее действие на устойчивость системы оказывают растягивающие силы N_x , повышая её.

Между тем, в сравнении с результатами работы [17], влияние сжимающих сил N_y на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы незначимо, ограничивается, всего лишь, незначительным изменением численных значений критических скоростей потока.

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой достаточно удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, в предположении, что пластинка первоначально нагружена по двум направлениям:

растягивающими силами, направленными по потоку газа и сжимающими силами, направленными перпендикулярно к потоку.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости: эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости. Определена относительная толщина пластинки, обеспечивающая её прочность по критерию устойчивости колебаний.

Здесь, также, как и в статье [17], оказалось, что первоначальные силы растяжения N_x , направленные по потоку, существенно влияют не только на величину критической скорости потока, но и на границу области устойчивости, в отличие от сжимающих сил N_y , направленных в перпендикулярном направлении к скорости потока газа, оказывающим влияние только на её величину.

Установлено, что при меньших значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что, в целом, имеет место повышение устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы: влияние сжимающих сил на устойчивость системы в данной постановке незначимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
7. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician//J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N 12. P. 1109–1118.
8. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
9. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
11. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.

12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
13. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2017, т. 70, № 4, с. 12-34.
14. M.V.Belubekyan, S.R.Martirosyan. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concentrated inertial masses and moments.// Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т.73, № 4, с. 58–74.
15. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (3), с. 64–82. DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.3 - 64.
16. Martirosyan S.R. Supersonic divergence of a panel with a free edge initially loaded in two directions tensile and compressive forces // 2022. Journal of Physics: Conference Series 2231 012030. IP address 93.187.163.146. DOI: 10.1088/1742–6596/2231/1/012030.
17. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной панели со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (1), с.40-55. DOI:10.54503/0002-3051-2024.77.1- 40.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 11.11.2024

**О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ КОНТАКТНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ СТРИНГЕРАМИ И УПРУГОЙ
БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ**

ՄԽԻՏԱՐՅԱՆ Ս.Մ., ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ Տ.Ա., ՄԿՐՏՉՅԱՆ Մ.Ս.

Ключевые слова: упругая бесконечная пластина, струнгер, контактная задача, интегральное уравнение.

Մkhitaryan S.M., Avetisyan S.A., Mkrtchyan M.S.

On the exact solution of one class of problems of contact interaction between stringers and elastic infinite plate

Keywords: elastic infinite plate, stringer, contact problem, integral equation

In modified formulation, when the elastic horizontal displacements of the stringers points are given previously, problems of the contact interaction between two identical stringers of finite or semi-infinite lengths, as well a periodic system of stringers, symmetrically located relative to each other, and an elastic infinite plate, are considered. In order to minimize bending effects, it is considered that the stringers are reinforced on both front surfaces of the elastic plate symmetrically relative to its median plane. Within the framework of Melan model for stringers and the generalized plane stress state of the plate, the problems discussed are reduced to Fredholm integral equations of the first kind with symmetric logarithmic kernels. With the help of spectral relations for integrals with logarithmic kernels containing Chebyshev polynomials, exact solutions of these equations are constructed. Then the tangential contact stresses under the stringers and other force factors that must be applied to the stringers are determined to ensure a predetermined mode of the displacements of their points. For two problems their numerical analysis is carried out.

Մխիտարյան Ս.Մ., Ավետիսյան Տ.Ա., Մկրտչյան Մ.Ս.

Առաձգական անվերջ սալի և ստրինգերների միջև կոնտակտային փոխազդեցության խնդրների մի դասի ճշգրիտ լուծման մասին

Հիմնաբառեր. առաձգական անվերջ սալ, ստրինգեր, կոնտակտային խնդիր, ինտեգրալ հավասարում:

Մոդիֆիկացված դրվածքով, երբ նախապես տրվում է ստրինգերների կետերի հորիզոնական տեղափոխությունների ռեժիմը, դիտարկվում են միմյանց նկատմամբ համաչափ դասավորված երկու միատեսակ վերջավոր կամ կիսաանվերջ երկարության ստրինգերների, ինչպես նաև ստրինգերների պարբերական համակարգի և առաձգական անվերջ սալի միջև կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրներ: Որպեսզի ծռման էֆեկտները հանգեցվեն նվազագույնի, ենթադրվում է, որ առաձգական սալի երկու դիմային մակերևույթների վրա համաչափ սալի միջին հարթության նկատմամբ, ստրինգերներ են ամրակցված: Ստրինգերների համար Մելանի մոդելի և սալի ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի շրջանակներում քննարկվող խնդիրները բերվում են սիմետրիկ լոգարիթմական կորիզներով Ֆրեդհոլմի առաջին սերի ինտեգրալ հավասարումների: Լոգարիթմական կորիզներով ինտեգրալների համար սպեկտրալ առնչությունների օգնությամբ, որոնք պարունակում են Չեբիշևի բազմանդամներ, կառուցվում են այդ հավասարումների ճշգրիտ լուծումները: Այնուհետև որոշվում են ստրինգերների տակ գործող կոնտակտային լարումները, ստրինգերներին կիրառված այն ուժային գործոնները, որոնք ապահովվում են ստրինգերների նախապես տրված տեղափոխությունների ռեժիմը: Կատարված է երկու խնդիրների թվային վերլուծություն:

В модифицированной постановке, когда наперед задаются упругие горизонтальные перемещения точек струнгеров, рассматриваются задачи о контактном взаимодействии симметрично расположенных

друг относительно друга двух одинаковых стрингеров конечных или полубесконечных длин, а также периодической системы стрингеров с упругой бесконечной пластиной. Чтобы изгибные эффекты свести к минимуму, считается, что стрингеры подкреплены на обеих лицевых поверхностях упругой пластины, симметрично относительно ее срединной плоскости. В рамках модели Мелана для стрингеров и обобщенного плоского напряженного состояния пластины обсуждаемые задачи сведены к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с симметрическими логарифмическими ядрами. При помощи спектральных соотношений для интегралов с логарифмическими ядрами, содержащих многочлены Чебышева, построены точные решения этих уравнений. Затем определены касательные контактные напряжения под стрингерами и те силовые факторы, которые должны быть приложены к стрингеру, чтобы обеспечить заранее заданный режим перемещений их точек. Для двух задач проведен численный анализ.

Введение. Контактные задачи о взаимодействии стрингеров с массивными деформируемыми телами имеют теоретическое и практическое значение. В теоретическом аспекте эти задачи с идейной и методологической точки зрения тесно связаны с классическими контактными задачами теории упругости, представляют их обобщение и развитие. В практическом аспекте такие задачи непосредственно связаны с важными в инженерной практике вопросами о передаче нагрузок от тонкостенных элементов к массивным телам различных геометрических форм и с необходимостью исследования концентрации напряжений вокруг этих элементов, разработки методов снижения уровня концентрации. Результаты исследований в указанном направлении востребованы в механике композитов. Они позволяют повысить прочностные характеристики инженерных конструкций, усиленных или армированных тонкостенными элементами.

Контактные задачи о взаимодействии стрингеров с массивными упругими телами берут свое начало от известной работы Мелана [1], где рассмотрены две задачи о передаче горизонтальной сосредоточенной силы от бесконечного стержня-стрингера к упругой полубесконечной или бесконечной пластине. Здесь же предложена модель одномерного упругого континуума или одноосного напряженного состояния стрингера. Впоследствии существенное продвижение в этой области достигнуто в работах Койтера [2], где рассмотрена задача о контакте полубесконечного стрингера с полубесконечной упругой пластиной, Муки и Стернберга [3,4], где пересмотрена постановка задач Мелана и исследована задача о передаче нагрузки от растягивающего поперечного стержня-стрингера к упругой полубесконечной пластине, Буфлера [5], где исходя из двумерных уравнений теории упругости обоснована модель Мелана для стрингера. Основные результаты по исследованию задач контактного взаимодействия между стрингерами и массивными упругими телами, полученные до 1976 г., а также обзор методов решения таких задач подытожены в коллективной монографии [6]. В этом направлении укажем также на монографии [7–10].

В перечисленных и в других аналогичных по тематике работах обычно обсуждается такая постановка задач, когда в рамках модели Мелана требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами и осевые напряжения в сечениях по наперед заданным внешним силам, действующим на стрингеры. Но при исследовании вопросов жесткости системы стрингер-упругое основание, исходя из практической необходимости обеспечения конструктивно допустимых величин для осевых перемещений точек стрингеров представляет также теоретический и практический интерес и такая постановка задач, когда заранее задается режим осевых упругих перемещений точек стрингеров и требуется определить, по дифференциальному уравнению их деформирования, действующие на

стрингеры соответствующие силовые факторы, генерирующие наперед заданный режим перемещений точек стрингеров.

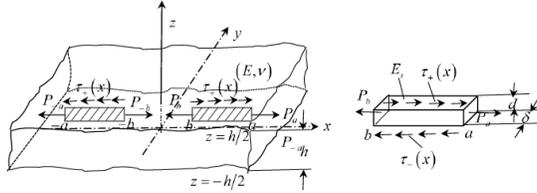
В такой модифицированной постановке, продолжая начатые в [11–13] исследования, в настоящей работе рассматривается один класс задач о контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров конечных или полубесконечных длин, а также периодической системы стрингеров, симметрично расположенных друг относительно друга, с упругой бесконечной пластиной. Считается, что стрингеры также симметрично, относительно срединной плоскости пластины, расположены на ее обеих лицевых поверхностях. В рамках модели Мелана [1] и обобщенного плоского напряженного состояния пластины выведены определяющие интегральные уравнения (ОИУ) и другие уравнения. Эти ОИУ представляют собой ИУ Фредгольма первого рода с симметрическими логарифмическими ядрами. При помощи спектральных соотношений для логарифмического ядра, содержащих многочлены Чебышева с аргументом в виде неполного эллиптического интеграла первого рода и с обычным аргументом построены точные решения ОИУ. Эти соотношения методами теории логарифмического потенциала в сочетании с методами конформных отображений установлены в [14].

В результате, определены касательные контактные напряжения под стрингерами и другие силовые факторы, которые должны быть приложены к стрингерам, чтобы обеспечить заранее заданный режим перемещений их точек. Для двух обсуждаемых задач проведен численный анализ.

Научная новизна статьи заключается в следующем:

- а) рассматриваются задачи контактного взаимодействия между стрингерами и упругой бесконечной пластиной, которые, вообще, мало исследованы;
- б) эти задачи рассматриваются в новой модифицированной постановке, когда наперед задаются горизонтальные перемещения точек стрингеров, а затем определяются необходимые силовые факторы, приложенные к стрингерам и обеспечивающие заданный режим перемещений;
- в) в предложенной модифицированной постановке контактные задачи о взаимодействии стрингеров с массивными упругими телами представляют обобщение и развитие классических контактных задач теории упругости;
- д) обсуждаемые в статье контактные задачи допускают точные (замкнутые) решения.

1. Постановка задач и вывод основных уравнений. Пусть упругая бесконечная пластина толщины h в правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ занимает область $\Pi = \{-\infty < x, y < \infty; -h/2 < z < h/2\}$ и обладает модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Пусть, далее, на своей верхней $z = h/2$ и нижней $z = -h/2$ лицевых поверхностях, симметрично относительно срединной плоскости $z = 0$, вдоль оси Ox по совокупности симметрично расположенных относительно начала координат O отрезков $L = [-a, -b] \cup [b, a]$, усилена двумя одинаковыми стрингерами модуля Юнга E_s , высоты d и ширины δ ($d, \delta \ll b - a$) (фиг.1).



Фиг. 1

Будем считать, что стрингеры по своим верхним граням вдоль их срединных линий в направлении оси Ox нагружены касательными силами интенсивности $\tau_+(x)$, причем $\tau_+(-x) = -\tau_+(x)$ ($x \in L$). На своих же концевых сечениях $x = \pm a$, $x = \pm b$ стрингеры также симметрически нагружены горизонтальными сосредоточенными силами $P_{\pm a}, P_{\pm b}$ ($\bar{P}_{-a} = -\bar{P}_a, \bar{P}_{-b} = -\bar{P}_b$). Кроме того, наперед зададимся горизонтальными по оси Ox перемещениями точек стрингеров $u_s(x)$ в виде функции $f(x)$, т.е. положим

$$u_s(x) = f(x); f(-x) = -f(x) \quad (x \in L); \quad f(x) \in C^2(L);$$

где $C^2(L)$ – функциональное пространство дважды непрерывно дифференцируемых на L функций.

При указанном выше нагружении упругой бесконечной тонкой пластины ($h \ll b - a$) изгибные эффекты можно свести к минимуму и, поэтому, можем считать, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. В рамках этого предположения относительно пластины и модели Мелана для стрингеров, как одномерных упругих континуумов, требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами $\tau_-(x)$, причем

$$\tau_-(-x) = -\tau_-(x) \quad (x \in L),$$

а также действующие на стрингеры необходимые силовые факторы $P_{\pm a}, P_{\pm b}, \tau_+(x)$, которые обеспечивают заранее заданный режим упругих перемещений точек стрингеров в виде дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$. Нужно определить также жесткие перемещения стрингеров.

Приступив к выводу ОИУ и других основных уравнений поставленной задачи, предварительно запишем выражения перемещений точек упругой бесконечной пластины от приложенной в ее точке $M_0(x_0, y_0)$ горизонтальной сосредоточенной силы величины X , отнесенной к единице высоты пластины. С этой целью воспользуемся комплексными потенциалами $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для этой сосредоточенной силы X [15] (стр.198, ф-лы (3)):

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{X}{2\pi(1+\chi)} \ln(z-z_0); & \psi(z) &= \frac{\chi X}{2\pi(1+\chi)} \ln(z-z_0) + \\ &+ \frac{\bar{z}_0 X}{2\pi(1+\chi)} \frac{1}{z-z_0}; & z &= x+iy; \quad z_0 = x_0+iy_0; \quad \chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При этом комплексная комбинация перемещений будет определяться по формуле (там же, стр.11, ф-ла (1))

$$2\mu(u+iv) = \chi\varphi(z) - z\varphi'(z) - \psi(z); \quad \mu = E/2(1+\nu); \quad (2.2)$$

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ –компоненты упругих перемещений точек пластины соответственно по осям Ox и Oy . Теперь, приняв во внимание, что согласно описанному выше способу нагружения пластины, следует заменить X на $2X$, после простых преобразований из (2.1) и (2.2) находим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathfrak{G}_0 X \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} + \mathfrak{G}_1 X \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}; \\ v(x, y) &= \mathfrak{G}_1 X \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}; \quad \mathfrak{G}_0 = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{2\pi E}; \quad \mathfrak{G}_1 = \frac{(1+\nu)^2}{2\pi E} \end{aligned}$$

$$(-\infty < x, y < \infty)$$

Отсюда, когда горизонтальная сосредоточенная сила X приложена в точке $M_0(x_0, 0)$ оси абсцисс, для компонент упругих перемещений точек этой же оси получим

$$u(x, 0) = \mathfrak{G}_0 X \ln \frac{1}{|x-x_0|} + C; \quad v(x, 0) = 0; \quad C = \mathfrak{G}_1 X \quad (-\infty < x < \infty).$$

Далее, по принципу линейной суперпозиции в сочетании с моделью контакта по линии [4], для горизонтальных упругих перемещений точек пластины $u(x, 0)$, расположенных на оси Ox , от распределенных касательных напряжений $\tau_-(x)$ ($x \in L$) будем иметь

$$u(x, 0) = \mathfrak{G}_0 \frac{\delta}{h} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_-(s) ds \quad (-\infty < x < \infty)$$

Так как $\tau_-(-x) = -\tau_-(x)$ ($x \in L$), то окончательно получим

$$u(x, 0) = \mathfrak{G}_0 \frac{\delta}{h} \int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \tau_-(s) ds \quad (0 < x < \infty). \quad (2.3)$$

Обратимся теперь к стрингерам, ограничиваясь, ввиду симметрии, только правым стрингером по отрезку $[b, a]$. По модели Мелана [1,10] дифференциальное уравнение его деформирования имеет вид

$$dE_s \frac{d^2 u_s}{dx^2} = \frac{\delta}{h} [\tau_-(x) - \tau_+(x)] \quad (b \leq x \leq a), \quad (2.4)$$

где $u_s = u_s(x)$ – упругие перемещения точек стрингера по оси Ox . Далее введем в рассмотрение осевые усилия $S = S(x)$ в сечении стрингера x и будем считать, что из-за существенной малости высоты стрингера d относительно его длины $b - a$ осевые напряжения $\sigma_x = \sigma_x(x)$ по высоте стрингера распределены равномерно.

Тогда

$$S(x) = d\delta\sigma_x(x) \quad (b \leq x \leq a)$$

и, приняв во внимание закон Гука для стрингера, будем иметь

$$\sigma_x = E_s \varepsilon_s = E_s \frac{du_s}{dx} \quad (b \leq x \leq a).$$

Следовательно, для определения $S(x)$ из (2.4) получим следующую простейшую граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dx} = \frac{\delta^2}{h} [\tau_-(x) - \tau_+(x)] \quad (b < x < a), \\ S(x)|_{x=b} = P_b, \quad S(x)|_{x=a} = P_a. \end{cases} \quad (2.5)$$

Отсюда находим

$$S(x) = \frac{\delta^2}{h} \int_b^x [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds + P_b \quad (b \leq x \leq a).$$

Полагая здесь $x = a$, при помощи второго граничного условия из (2.5) придем к условию равновесия правого стрингера

$$\frac{\delta^2}{h} \int_b^a [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds = P_a - P_b. \quad (2.6)$$

Далее, при помощи (2.3), реализуем условие контакта

$$u_s(x) = u(x, 0) = f(x) \quad (b \leq x \leq a),$$

между стрингерами и упругой пластиной. В результате для определения неизвестных касательных контактных напряжений под стрингерами $\tau_-(x)$ получим следующее ОИУ Фредгольма первого рода:

$$\Theta_0 \frac{\delta}{h} \int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \tau_-(s) ds = f(x) \quad (b < x < a). \quad (2.7)$$

Для полноты постановки задачи необходимо еще задать равнодействующую P касательных контактных напряжений $\tau_-(x)$:

$$\frac{\delta^2}{h} \int_b^a \tau_-(s) ds = P. \quad (2.8)$$

После решения ОИУ (2.7) при условии (2.8) можно определить действующие на струнгеры необходимые силовые факторы $\tau_+(x)$, P_a и P_b . А именно, из (2.4) сразу находим

$$\tau_+(x) = \tau_-(x) - dhE_s f''(x)/\delta \quad (b < x < a). \quad (2.9)$$

Кроме того, будем иметь

$$S(x) = d\delta\sigma_x = \delta dE_s f'(x) \quad (b \leq x \leq a), \quad (2.10)$$

а также

$$\sigma_x(x) = E_s f'(x), \quad P_a = \delta dE_s f'(a), \quad P_b = \delta dE_s f'(b). \quad (2.11)$$

Равнодействующая же T_+ касательных сил $\tau_+(x)$, при помощи (2.6) и (2.8), определится по формуле

$$T_+ = \frac{\delta^2}{h} \int_b^a \tau_+(s) ds = P - P_a + P_b.$$

Таким образом, после решения ОИУ (2.7) – (2.8) основные силовые факторы, действующие на струнгеры, определяются по формулам (2.9) – (2.11).

Теперь в выведенных уравнениях перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a; \quad k = b/a; \quad \varphi_{\pm}(\xi) = \vartheta_0 \delta \tau_{\pm}(a\xi)/h;$$

$$g(\xi) = f(a\xi)/a; \quad S_0(\xi) = S(a\xi)/d\delta E_s; \quad \sigma_x^{(s)}(\xi) = \sigma_x(a\xi)/E_s;$$

$$P_a^{(0)} = P_a/d\delta E_s; \quad P_b^{(0)} = P_b/\delta dE_s, \quad k \leq \xi, \eta \leq 1.$$

В результате, ОИУ (2.7) преобразуется к виду

$$\int_k^1 \ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \varphi_-(\eta) d\eta = g(\xi) \quad (k < \xi < 1), \quad (2.12)$$

а формулы (2.9) – (2.11) – соответственно, к видам

$$\varphi_+(\xi) = \varphi_-(\xi) - \lambda g''(\xi); \quad \lambda = \delta d \vartheta_0 E_s / ah; \quad g''(\xi) = f''(x)|_{x=a\xi};$$

$$S_0(\xi) = g'(\xi); \quad \sigma_x^{(0)}(\xi) = g'(\xi); \quad g'(\xi) = f'(x)|_{x=a\xi}; \quad (2.13)$$

$$P_a^{(0)} = g'(1); \quad P_b^{(0)} = g'(k).$$

Условие же (2.8) перейдет в следующее условие:

$$\int_k^1 \varphi_-(\eta) d\eta = P_0 \quad (P_0 = \vartheta_0 P / a\delta). \quad (2.14)$$

Далее, в изложенной выше постановке, рассмотрим также контактную задачу о взаимодействии двух одинаковых полубесконечных стрингеров с упругой пластиной. Пусть теперь упругая бесконечная пластина Π на своей верхней и нижней лицевых поверхностях вдоль оси Ox , симметрично относительно своей срединной плоскости $z = 0$, по совокупности отрезков $L = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ усилена двумя одинаковыми и симметрически расположенными полубесконечными стрингерами. Как и выше, будем считать, что стрингеры на своих верхних гранях вдоль их срединных линий симметрично нагружены касательными силами интенсивности $\tau_+(x)$, причем $\tau_+(-x) = -\tau_+(x)$ ($x \in L$), а на своих концевых сечениях $x = \pm a$ нагружены горизонтальными сосредоточенными силами $P_{\pm a}$ ($\bar{P}_{-a} = -\bar{P}_a$) также симметрично нагружены. Кроме того будем считать, что наперед задан режим упругих перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x) \in C^2(L)$, т.е.

$$u_s(x) = f(x) \quad (x \in L), \quad f(-x) = -f(x), \quad f(x) = O(1) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

При прежних предположениях относительно пластины и стрингеров требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами $\tau_-(x)$ ($\tau_-(-x) = -\tau_-(x)$ $x \in L$), а также силовые факторы $P_a, \sigma_x(x)$ и $\tau_+(x)$, которые должны обеспечить наперед заданный режим упругих горизонтальных перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x)$.

Приступив к выводу основных уравнений сформулированной задачи, согласно (2.3) для упругих горизонтальных перемещений точек пластины, расположенных на оси Ox , будем иметь

$$u(x) = \vartheta_0 \frac{\delta}{h} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_-(s) ds = \vartheta_0 \frac{\delta}{h} \int_a^{\infty} \ln \frac{x+s}{|x-s|} \tau_-(s) ds \quad (2.15)$$

$$(0 < x < \infty).$$

Далее, реализуя условие контакта

$$u_s(x) = u(x) = f(x) \quad (a \leq x < \infty),$$

при помощи (2.15) придем к следующему ОИУ рассмотренной задачи:

$$\vartheta_0 \frac{\delta}{h} \int_a^{\infty} \ln \frac{x+s}{|x-s|} \tau_-(s) ds = f(x) \quad (a < x < \infty). \quad (2.16)$$

Обращаясь к стрингерам, отметим, что в данном случае во введенных выше величинах и обозначениях формулы (2.4), (2.9) и (2.10) будут иметь место на интервале (a, ∞) , а граничная задача (2.5) заменится следующей граничной задачей:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\delta^2}{h} [\tau_-(x) - \tau_+(x)] & (a < x < \infty) \\ S(x)|_{x=a} = P_a; \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Здесь принято во внимание, что на бесконечности осевые напряжения $\sigma_x(x)$ и, следовательно, осевые усилия $S(x)$ в сечениях правого полубесконечного стрингера исчезают. Решение граничной задачи (2.17) при первом граничном условии запишется в виде

$$S(x) = \frac{\delta^2}{h} \int_a^x [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds + P_a \quad (a \leq x < \infty),$$

Откуда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{\delta^2}{h} \left[\int_a^\infty \tau_-(s) ds - \int_a^\infty \tau_+(s) ds \right] + P_a = 0.$$

Из этого равенства определим равнодействующую T_+ касательных сил $\tau_+(x)$:

$$T_+ = \frac{\delta^2}{h} \int_a^\infty \tau_+(s) ds = P_a + P; \quad P = \frac{\delta^2}{h} \int_a^\infty \tau_-(s) ds. \quad (2.18)$$

Этот же результат сразу можно получить из (2.9), когда $a < x < \infty$, проинтегрируя обе его части от a до ∞ . Формулы же (2.10) и (2.11) в случае обсуждаемой задачи примут вид

$$\begin{aligned} S(x) &= \delta dE_s f'(x); & \sigma_x(x) &= E_s f'(x); & P_a &= \delta dE_s f'(a) \\ \tau_+(x) &= \tau_-(x) - hdE_s f'(x)/\delta & & & & (a \leq x < \infty). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Теперь в (2.16), (2.18) и (2.19) перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\xi = a/x, \quad \eta = a/s, \quad 0 \leq \xi, \eta < 1; \quad \psi_\pm(\xi) = \frac{\vartheta_0 \delta}{h} \tau_\pm(a/\xi)/\xi^2;$$

$$h(\xi) = f(a/\xi)/a; \quad \sigma_x^{(0)}(\xi) = \sigma_x(a/\xi)/E_s; \quad S_0(\xi) = S(a/\xi)/\delta dE_s;$$

$$T_+^{(0)} = \vartheta_0 T_+ / \delta a; \quad P_0 = \vartheta_0 P / \delta a; \quad P_a^{(0)} = \vartheta_0 P_a / \delta a; \quad \lambda_0 = \vartheta_0 dE_s / a.$$

В результате, ОИУ (2.16) примет вид

$$\int_0^1 \ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \psi_-(\eta) d\eta = h(\xi) \quad (0 < \xi < 1), \quad (2.20)$$

а (2.18) и (2.19) – соответственно, вид

$$T_a^{(0)} = P_a^{(0)} + P_0; \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)}(\xi) &= S_0(\xi) = f'(x)|_{x=a/\xi} = -\xi^2 h'(\xi); P_a^{(0)} = \lambda_0 f'(a) = -\lambda_0 h'(1); \\ \psi_+(\xi) &= \psi_-(\xi) - \lambda_0 [\xi^4 h''(\xi) + 2\xi^3 h'(\xi)] = \psi_+(\xi) - \lambda_0 a f''(x)|_{x=a/\xi}.\end{aligned}\quad (2.22)$$

Таким образом основными уравнениями рассматриваемой задачи будут ОИУ (2.20), (2.21) – (2.22).

Перейдем к периодической контактной задаче о взаимодействии двух одинаковых и относительно начала координат симметрически расположенных стрингеров с упругой бесконечной пластиной, когда пластина на своей верхней и нижней лицевых поверхностях вдоль оси Ox также симметрично относительно своей срединной плоскости усилена периодической системой стрингеров. Будем считать, что при тех же предположениях, что и выше, часть фигуры 1, содержащая два одинаковых стрингера на совокупности отрезков $L = [-a, -b] \cup [b, a]$ оси Ox , периодически с периодом $2l$ ($a < l$) повторяется в правом и левом направлениях.

Приступив к выводу ОИУ только что описанной задачи, сначала при помощи формулы (2.3) определим упругие перемещения точек пластины в направлении оси Ox , расположенных на этой же оси, от периодической с периодом $2l$ системы касательных и кососимметрически распределенных сосредоточенных сил единичных величин:

$$\tau_-(x) = \text{sign } x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nl) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака, а функция $\text{sign } x$ ($x \in L$), определенная на совокупности отрезков L , периодически, с периодом $2l$, продолжена на всю числовую ось.

Поступив совершенно аналогично сделанному в [16], после выделения расходящейся части ряда в виде суммы постоянных, подобных постоянным в решении задачи Фламана в перемещениях, для этих перемещений в случае распределенных касательных кососимметрических сил интенсивности $\tau_-(x)$, причем

$$\tau_-(x) = -\tau_-(x) \quad (x \in L); \quad \tau_-(x + 2l) = \tau_-(x);$$

получим

$$\begin{aligned}u(x) &= \mathfrak{G}_0 \frac{\delta}{h} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\pi(x-s)}{2l} \right|} \tau_-(s) ds = \\ &= \mathfrak{G}_0 \frac{\delta}{h} \int_b^a \ln \frac{\sin \left(\frac{\pi(x+s)}{2l} \right)}{\left| \sin \left(\frac{\pi(x-s)}{2l} \right) \right|} \tau_-(s) ds \quad (0 < x < \infty).\end{aligned}\quad (2.23)$$

Далее, опять зададимся горизонтальными упругими перемещениями $u_s(x)$ в виде функции $f(x)$, причем $f(-x) = -f(x)$ ($x \in L$). И запишем условие контакта

$$u_s(x) = u(x) = f(x) \quad (x \in L), \quad (2.24)$$

где $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая периодическая с периодом $2l$ функция. Теперь, после реализации условия контакта (2.24) при помощи (2.23), ограничиваясь только стрингером по отрезку $[b, a]$, относительно $\tau_-(x)$ придем к следующему ОИУ:

$$\mathfrak{G}_0 \frac{\delta}{h} \int_b^a \ln \frac{\sin\left(\frac{\pi(x+s)}{2l}\right)}{\left|\sin\frac{\pi(x-s)}{2l}\right|} \tau_-(s) ds = f(x) \quad (b < x < a). \quad (2.25)$$

ОИУ (2.25) должно рассматриваться при условии

$$\frac{\delta}{h} \int_b^a \tau_-(s) ds = P, \quad (2.26)$$

где P – заданная, т.е. известная величина.

Если теперь перейти к безразмерным величинам, полагая

$$\xi = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2l}, \quad \eta = \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2l}; \quad \varphi_-(\xi) = \frac{2\mathfrak{G}_0\delta}{h} \frac{1}{1+\xi^2} \tau_-\left(\frac{2l}{\pi} \operatorname{arctg} \xi\right);$$

$$g(\xi) = \frac{1}{l} f\left(\frac{2l}{\pi} \operatorname{arctg} \xi\right); \quad c = \operatorname{tg} \frac{\pi b}{2l}; \quad d = \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2l}; \quad c \leq \xi, \eta \leq d;$$

то ОИУ (2.25) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_c^d \ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \varphi_-(\eta) d\eta = g(\xi) \quad (c < \xi < d), \quad (2.27)$$

а условие (2.26) – вид

$$\int_c^d \varphi_-(\eta) d\eta = P_0^- \left(P_0^- = \frac{\pi \mathfrak{G}_0 P}{\delta l} \right). \quad (2.28)$$

Очевидно, что заменой переменных ξ на $d\xi$, η на $d\eta$ ОИУ (2.27) можно свести к ОИУ (2.12), где $k = c/d$.

Итак, решение данной периодической контактной задачи сводится к решению ОИУ (2.27) – (2.28).

В рассматриваемой задаче действующие на стрингеры силовые факторы, обеспечивающие наперед заданные упругие перемещения в виде функции $f(x)$,

определяются формулами (2.7) – (2.11). При этом входящие в них функции считаются периодически продолженными вне L с периодом $2l$.

3.Решение определяющего уравнения. Так как все рассмотренные выше задачи фактически описываются единым ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром, то здесь построим лишь решение ОИУ (2.12). Это решение, как в [17,18], построим методом спектральных интегральных соотношений, содержащих ортогональные многочлены Чебышева.

В данном случае имеются ввиду следующие соотношения [14]:

$$\int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \frac{T_n(Y) ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \lambda_n T_n(X);$$

$$X = \cos \vartheta, \quad \vartheta = \frac{\pi}{K'} \int_1^{x/b} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}; \quad (k = b/a);$$

$$Y = \cos \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{K'} \int_1^{s/b} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}; \quad (0 \leq \vartheta, \varphi < \pi);$$

$$\lambda_0 = \pi K/a; \quad \lambda_n = (an)^{-1} K' \operatorname{th}(\pi n K/K') (n=1,2,\dots),$$

где $T_n(X)$ – многочлены Чебышева первого рода аргумента X , $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода модуля k , а $K' = K(k')$ ($k' = \sqrt{1-k^2}$). Отметим, что ϑ и φ можно выразить через неполный эллиптический интеграл первого рода. Действительно, в выражении ϑ положим $x/a = \xi = \cos \vartheta$ и от переменной интегрирования u перейдем к переменной $t = 1/u$. В результате, после простых преобразований, воспользовавшись известным интегралом из [19] (стр.260, ф-ла 3.152.10), будем иметь

$$\vartheta = \frac{\pi}{K'} \int_1^{\xi/k} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}} = \frac{\pi}{K'} \int_{k/\xi}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2)}} =$$

$$= \frac{\pi}{K'} F \left(\arcsin \left(\frac{\sqrt{\xi^2-k^2}}{k'\xi} \right), k' \right) = \frac{\pi}{K'} \int_{k/\xi}^{\sqrt{\xi^2-k^2}/k'\xi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2t^2)}};$$

где $F(\lambda, q)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода [19], а $k \leq \xi \leq 1$.

Отметим еще, что из обычных условий ортогональности многочленов $T_n(x/a)$ на интервале $-a < x < a$ подстановкой $\xi = x/a = \cos \vartheta$, где ϑ выражается второй

формулой из (3.1), после элементарных преобразований получим следующие условия ортогональности многочленов $T_n(X)$:

$$\int_{-a}^a T_m(X)T_n(X) \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \begin{cases} K'/a & (m=n=0); \\ K'/2a & (m=n \neq 0); \\ 0 & (m \neq n). \end{cases} \quad (3.3)$$

Теперь, приступив к решению ОИУ (2.12), его решение представим в виде бесконечного ряда

$$\Phi_-(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(X) \quad (k < \xi < 1) \quad (3.4)$$

с неизвестными пока коэффициентами X_n . Далее (3.4) подставим в левую часть ОИУ (2.12), поменяем порядок интегрирования и суммирования и воспользуемся спектральными соотношениями (3.1), где формально положим $b=k$, $a=1$. В результате получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n X_n T_n(X) = g(\xi) \quad (k < \xi < 1).$$

Отсюда при помощи условий ортогональности многочленов $T_n(X)$, т.е. при помощи (3.3), находим

$$X_0 = g_0/\lambda_0 K', \quad X_n = 2g_n/\lambda_n K' \quad (n=1,2,\dots);$$

$$g_n = \int_k^1 \frac{g(\xi) T_n(X) d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}} \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (3.5)$$

Теперь заметим, что горизонтальные упругие перемещения точек стрингеров в виде функции $f(x)$ состоят из чисто упругих перемещений в виде функции $f_0(x)$

$$\text{и из одинаковых горизонтальных жестких смещений величины } \Delta, \text{ так что}$$

$$f(x) = f_0(x) + \Delta \operatorname{sign} x \quad (x \in [-a, -b] \cup [b, a]; f_0(-x) = -f_0(x)).$$

Отсюда

$$g(\xi) = g_0(\xi) + \Delta_0, \quad g_0(\xi) = f_0(a\xi)/a, \quad \Delta_0 = \Delta/a \quad (k < \xi < 1).$$

Следовательно, из (3.5)

$$g_n = g_n^{(0)} + \Delta_0 \delta_n K', \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & (n=0); \\ 0 & (n=1,2,\dots); \end{cases} \quad X_0 = (g_n^{(0)} + \Delta_0 K')/\lambda_0 K',$$

$$g_n^{(0)} = \int_k^1 \frac{g_0(\xi) T_n(X) d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}} \quad (n=0,1,2,\dots); \quad X_n = 2g_n^{(0)}/\lambda_n K' \quad (n=1,2,\dots). \quad (3.6)$$

Далее (3.4) подставим в условие (2.14), отсюда находим $X_0 = P_0/K'$. Тогда из (3.6) получим

$$\Delta_0 = \Delta/a = (\lambda_0 P_0 - g_0^{(0)})/K'. \quad (3.7)$$

Перейдем к решению ОИУ (2.20), представим его решение в виде бесконечного ряда

$$\psi_-(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n T_{2n-1}(\xi) \quad (0 < \xi < 1). \quad (3.8)$$

С неизвестными коэффициентами Y_n . Теперь (3.8) подставим в левую часть (2.20), опять поменяем порядок интегрирования и суммирования, а затем воспользуемся спектральными соотношениями [20]

$$\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \frac{T_{2n-1}(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2n-1} T_{2n-1}(\xi) \quad (0 < \xi < 1).$$

Далее, как и выше, при помощи условий ортогональности $T_{2n-1}(\xi)$ определим коэффициенты Y_n .

$$Y_n = \frac{4(2n-1)}{\pi^2} h_n; \quad h_n = \int_0^1 h(\xi) \frac{T_{2n-1}(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.9)$$

Так как функция $h(\xi)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, то полагая в интеграле из (2.6) $\xi = \cos \vartheta$ и дважды произведя интегрирование по частям, можно показать, что по крайней мере

$$Y_n = O\left(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}\right) (\varepsilon > 0) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, ряд (3.8) равномерно сходящийся.

Теперь, исходя из (3.8), по формуле (2.18) вычислим равнодействующую P_0 безразмерных касательных контактных напряжений $\psi_-(\xi)$:

$$P_0 = \int_0^1 \psi_-(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{Y_n}{2n-1}. \quad (3.10)$$

А касательные контактные напряжения в размерных величинах будут выражаться формулой

$$\tau_-(x) = \frac{a^2 h}{\vartheta_0 \delta x} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n T_{2n-1}\left(\frac{a}{x}\right) \quad (a < x < \infty).$$

4. Числовые результаты. Для численной реализации полученных выше аналитических формул с целью выявления закономерности изменения характерных физических величин рассматриваемых выше контактных задач, формулы для

коэффициентов $g_n^{(0)}$ из (3.6) и формулу для коэффициентов h_n из (3.9) преобразуем в формулы для коэффициентов косинус-рядов Фурье. Это позволит для вычисления коэффициентов Фурье применить весьма эффективный метод тригонометрической интерполяции в сочетании с методом наименьших квадратов [21].

С этой целью обращаясь к коэффициентам $g_n^{(0)}$, в интеграле из (3.6) положим

$$X = \cos \vartheta \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi),$$

где ϑ – выражается формулой (3.2). По этой формуле

$$d\vartheta = \frac{\pi}{K'} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}} \quad (k < \xi < 1). \quad (4.1)$$

Далее установим функциональную зависимость между переменными ξ и ϑ , для чего, согласно (3.2), будем иметь [19], полагая $\vartheta = \sin \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{K'}{\pi} \vartheta &= F \left(\arcsin \left(\frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{k' \xi} \right), k' \right) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \\ &= \int_0^{\sin \vartheta} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'\tau^2)}}, \quad \vartheta = \arcsin \left(\frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{k' \xi} \right) \quad (k \leq \xi \leq 1). \end{aligned}$$

Отсюда, приняв во внимание определение эллиптической синус функции Якоби $\operatorname{sn}(u, k)$ [19] (стр.924), можно записать

$$u = \frac{K'}{\pi} \vartheta, \quad \sin \vartheta = \operatorname{sn}(u, k') = \operatorname{sn} \left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k' \right) = \frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{k' \xi}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{k' \xi} = \operatorname{sn} \left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k' \right),$$

откуда

$$\xi = \chi(\vartheta) = \frac{k}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k' \right)}} \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi). \quad (4.2)$$

В результате

$$g_n^{(0)} = \frac{K'}{\pi} \int_0^{\pi} g_0(\chi(\vartheta)) \cos(n\vartheta) d\vartheta \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.3)$$

Отметим, что для вычисления значений функции $\operatorname{sn}(u, k)$ ($-K \leq u \leq K$) можно воспользоваться ее известным представлением в виде синус-ряда Фурье [19] (стр.925, ф-ла 8.146.1)

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k'\right) = \frac{2\pi}{k'K'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}} \sin\left((2n-1)\frac{\vartheta}{2}\right) \quad q = e^{-\pi K/K'}; \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi. \quad (4.4)$$

Так как здесь

$$\frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}} \sim q^{n-1/2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

то сходимость синус-ряда Фурье (4.4) можно ускорить при помощи следующего преобразования:

$$\frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}} = q^{n-1/2} + \left(\frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}} - q^{n-1/2} \right) = q^{n-1/2} + \frac{q^{3n-3/2}}{1-q^{2n-1}}.$$

Следовательно, (4.4) можно представить в форме

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k'\right) = \frac{2\pi}{k'K'} \left[\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1/2} \sin\left((2n-1)\frac{\vartheta}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{3n-3/2}}{1-q^{2n-1}} \sin\left((2n-1)\frac{\vartheta}{2}\right) \right] \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

Но сумму первого ряда можно легко найти. А именно.

$$A(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1/2} \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\vartheta\right) = \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (qe^{i\vartheta})^{n-1/2} - \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{-i\vartheta})^{n-1/2} \right].$$

Далее воспользовавшись формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, после элементарных преобразований находим

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k'\right) = \frac{2\pi}{k'K'} A(\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{3n-3/2}}{1-q^{2n-1}} \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\vartheta\right)$$

$$A(\vartheta) = \frac{2q(1+q)\sin(\vartheta/2)}{1+q^2-q\cos\vartheta} \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

Далее перейдем к коэффициентам h_n из (3.9) и в интеграле положим $\xi = \cos \vartheta$ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$), будем иметь.

$$Y_n = \frac{4(2n-1)}{\pi^2} h_n, \quad h_n = \int_{\pi}^{\pi/2} h(\cos \vartheta) \cos(2n-1)\vartheta \quad (n=1, 2, \dots), \quad (4.5)$$

Численный анализ проведем для первых двух задач. В первой задаче примем $g_0(\xi) = \xi^p$ ($p=0, 1, 2, \dots$); $k=0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9$; $P_0=0.001$. (4.6)

В качестве $g(\xi)$ примем также простейшие линейные комбинации функций ξ^p , т.е. простейшие многочлены от ξ . Приняв во внимание (4.2), будем иметь

$$g_0(\xi) = g_0(\chi(\vartheta)) = \left(k / \sqrt{1-k'^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k'\right)} \right)^p \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi). \quad (4.7)$$

Теперь при помощи элементарных преобразований коэффициенты $g_n^{(0)}$ из (3.6) можем представить формулой

$$g_n^{(0)} = \frac{K'}{\pi} \int_0^\pi g_0(\chi(\vartheta)) \cos(n\vartheta) d\vartheta \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (4.8)$$

как обычные косинус-коэффициенты Фурье функции (4.7). Эти коэффициенты (4.8) далее вычисляются по формуле (4-11.30) из [21] (стр.243).

Во второй задаче примем

$$h(\xi) = \xi^{2p} = (\cos \vartheta)^{2p} \quad \left(p=1,2,\dots, 0 < \xi < 1; 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right).$$

Тогда из (3.9)

$$h_n = h_n^{(2p)} = \int_0^1 \xi^{2p} \frac{T_{2n-1}(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta)^{2p} \cos(2n-1)\vartheta d\vartheta.$$

Далее, подставляя сюда выражение $(\cos \vartheta)^{2p}$ из [19] (стр.39, ф-ла 1.320.5), находим

$$h_n^{(2p)} = \frac{1}{2^{2p}} \left[2(2n-1) \sum_{j=0}^{p-1} \binom{2p}{j} \frac{(-1)^{n+p-j-1}}{(2n-1)^2 - 4(p-j)^2} + \binom{2p}{p} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right]. \quad (4.9)$$

$(p=1,2,\dots, n=1,2,\dots)$

В результате

$$Y_n = \frac{4(2n-1)}{\pi^2} h_n^{(2p)} \quad (p, n=1,2,\dots). \quad (4.10)$$

Теперь безразмерные касательные контактные напряжения под правым полубесконечным стрингером будут выражаться формулой (3.8), где коэффициенты Y_n даются формулами (4.10-4.9). Равнодействующая же этих напряжений вычисляется по формуле (3.10).

Вычисленные по формулам (4.7)-(4.8) числовые значения коэффициентов $g_n^{(0)}$ при $k=0.5$ и для различных p приведены в таблице 1, а при $p=1$ и для различных k - в таблице 2. В обоих случаях эти коэффициенты, как коэффициенты Фурье, при возрастании индекса n несколько колеблясь по абсолютной величине убывают.

Далее, приняв во внимание выражения коэффициентов X_n из (3.6), по формуле (3.4) рассчитаем функцию $\varphi_-(\xi)$ в двух случаях

$$I. p_1 = 1, p_2 = 4; g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$$

$$II. p_1 = 3, p_2 = 7; g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$$

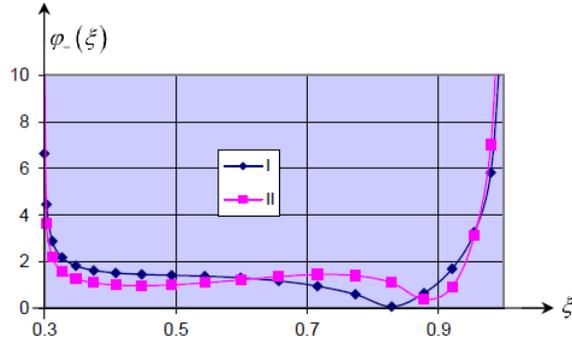
По формулам (3.6) и (3.4) вычислены значения безразмерных касательных напряжений $\varphi_-(\xi)$ под правым стрингером и на их основе построены графики изменения $\varphi_-(\xi)$ (фиг.2).

Таблица 1 Значения $g_n^{(0)}$ при $k = 0.5$ для различных p

$n \backslash p$	0	1	2	3	5	7	10
0	2.44134	1.82663	1.44298	1.19496	0.90989	0.75732	0.62733
1	0	-0.30815	-0.46149	-0.53292	-0.56696	-0.54997	-0.50731
2	0	0.00514	0.04462	0.09276	0.17641	0.23165	0.27485
3	0	0.00177	0.00186	-0.00348	-0.02738	-0.05845	-0.10182
4	0	0.00161	0.00060	-0.00019	0.0013	0.00815	0.02561
5	0	-0.00062	-0.00087	-0.00084	-0.00047	-0.00082	-0.00442
6	0	0.00183	0.00153	0.00137	0.00114	0.00093	0.0011
7	0	-0.00061	-0.00092	-0.00107	-0.00118	-0.00117	-0.00107
8	0	0.00183	0.001526	0.001374	0.001261	0.001232	0.001194

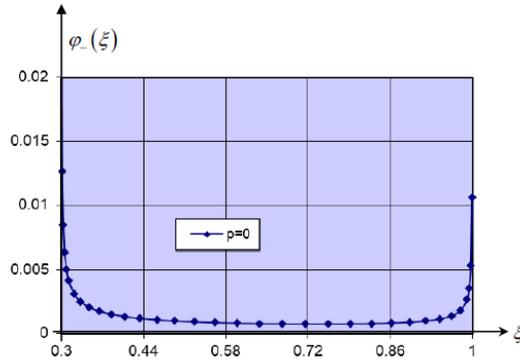
Таблица 2 Значения $g_n^{(0)}$ при $p = 1$, для различных k

$n \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9
0	1.85523	1.85179	1.84613	1.82663	1.79101	1.7177
1	-0.89353	-0.67281	-0.52113	-0.30815	-0.15813	-0.04518
2	0.190825	0.085139	0.039458	0.005147	-0.00172	0.000271
3	-0.02161	-0.00051	0.003003	0.001773	0.000247	-8.7E-05
4	-0.00156	-0.00118	0.000327	0.001614	0.001789	0.001714
5	0.000989	-0.00052	-0.00084	-0.00062	-0.00032	-9E-05
6	0.001338	0.001918	0.001923	0.001835	0.001782	0.001713
7	-0.00165	-0.00135	-0.00104	-0.00061	-0.00031	-9E-05
8	0.002218	0.002016	0.001917	0.001831	0.001782	0.001713



Фиг.2

При принятых $g_0(\xi)$, как линейных комбинаций ξ^{p_1} и ξ^{p_2} , ход изменения $\varphi_-(\xi)$ представляется более наглядно. На фиг.3 показан ход изменения $\varphi_-(\xi)$ при $p=0$ и $k=0.3$.



Фиг.3

Значения Δ_0 при $p_1=1$, $p_2=4$, $g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$ и для различных k приведены в таблице 3, а значения Δ_0 при $k=0.5$ и $g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$, для различных p_1 и p_2 приведены в таблице 4.

Во второй контактной задаче, связанной с полубесконечными стрингерами, также в двух случаях:

$$I. p_1 = 6, p_2 = 10; h(\xi) = \xi^{2p_1} - 5\xi^{2p_2};$$

$$II. p_1 = 6, p_2 = 10; h(\xi) = \xi^{2p_1} - 10\xi^{2p_2}$$

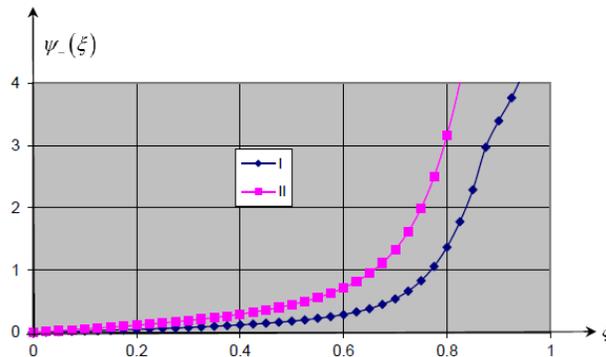
по формулам (3.8) и (4.9)-(4.10) произведены численные расчеты. По полученным числовым результатам построены графики распределения безразмерных касательных напряжений $\psi_-(\xi)$ под правым полубесконечным стрингером (фиг.4).

Таблица 3 Значения Δ_0 при $p_1 = 1, p_2 = 4, g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$, для различных k

k	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9
Δ_0	0.41603	0.51983	0.63056	0.9435	1.47697	2.37186

Таблица 4 Значения Δ_0 при $k = 0.5$, для разных p_1 и p_2 , где $g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$.

$g_0(\xi)$	$p_1 = 1, p_2 = 4$	$p_1 = 2, p_2 = 5$	$p_1 = 3, p_2 = 6$	$p_1 = 4, p_2 = 7$
Δ_0	0.943502	0.90789	0.867848	0.828199



Фиг.4

Заклучение. При помощи спектральных соотношений для интегралов с логарифмическими ядрами, содержащих многочлены Чебышева, построено замкнутое решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром. Таковым является определяющее уравнение трех задач о контактом взаимодействии симметрично расположенных друг относительно друга двух одинаковых стрингеров конечных или полубесконечных длин, а также периодической системы стрингеров с упругой бесконечной пластиной, если рассматривать их в модифицированной постановке, когда наперед задаются упругие горизонтальные перемещения точек стрингеров. Получены формулы для определения касательных контактных напряжений под стрингерами и величины жесткого перемещения стрингеров, а также тех силовых факторов, которые должны быть приложены к стрингерам, чтобы обеспечить заранее заданный режим перемещений их точек.

Для двух задач проведен численный анализ, на основе которого построены таблицы для жесткого перемещения стрингеров и графики распределения контактных напряжений под ними для разных значений входных параметров задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ing.-Arch., 1932, Bd3, No2, S.123–129.
2. Koiter W.I.T. On the Diffusion of Load from Stiffener into a Sheet. Quart. J.Mech. and Appl. Math. 1955, v.8, No 2, pp.164–178.
3. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от краевого ребра жесткости к листу (пересмотр задачи Мелана). Прикл. мех. Труды амер.Общ.инж-мех., серия Е. 1967, т.34, №3, с.233–242.
4. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягивающего поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. Мех. Труды амер. Общ. Инж-мех., серия Е, 1968, т. 35, №4, с.124–135.
5. Bifulco H. Zur Krafteileitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen. Östr. Ing.-Arch., 1964, No 3–4, S.284–292.
6. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976, 493 с.
7. Nakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies. Springer, 2023, 380p. DOI/10.1007/978-3-031-16023-3.
8. Механика контактных взаимодействий. Под редакцией И.И. Воровича и В.М.Александрова. М.: Физматлит, 2001, 670 с.
9. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983, 296с.
10. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983, 488 с.
11. Mkhitarian S.M., Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S. On two Problems of Contact Interaction of Stringers with an Elastic Half-Plane. Construction Technologies and architecture. ISSN 2674-1237, v. 2, pp. 19-30.
12. Григорян М.С., Мхитарян С.М. О точном решении одного класса задач о контактном взаимодействии стрингеров с упругими телами. Известия НАН РА, Механика, 2022, т.75, No 1-2, с.48-66.
13. Аветисян С.А. О взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной по экспоненциальному закону полосой. Доклады НАН РА, 2022, т. 122, №2 с.141-152.
14. Мхитарян С.М. О собственных функциях интегрального оператора, порожденного логарифмическим ядром на двух интервалах, и их приложении к контактным задачам. Известия АН Армянской ССР. Механика, 1982, т.35, №6, с.3–18.
15. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
16. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949, 270с.
17. Mkhitarian S.M., Mkrtchyan M.S., Kanetsyan E.G. On a method for solving Prandtl's integrodifferential equation applied to problems of continuum mechanics using polynomial approximations. Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM), 2017, vol.97, Issue 6, pp.639–654.
18. Mkhitarian S.M., Mkrtchyan M.S., Kanetsyan E.G. Hypersingular Integral Equation Arising in the Boundary Value Problems of the Elasticity Theory. The Quart. J. of

Mechanics and Appl. Math. Febr. 2020, vol.73, Issue 1, pp. 51–73, <https://doi.org/10.1093/qimem/hbz022>.

19. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.
20. Попов Г.Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактному задачам. Прикл. Мат. и Мех. 1963, т.27, вып.5, с.821–832.
21. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961, 524 с.

Сведения об авторах:

Мхитарян Сурен Манукович, член-корр. НАН РА, профессор, главный научный сотрудник ин-та Механики НАН Армении., E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru .

Аветисян Сирануш Араратовна, младший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, E-mail: siranushav@gmail.com.

Мкртчян Мушег Сережаевич, – к.ф.м.н., вед. науч.сотр. Института механики НАН РА, Тел.: +374 98 801956, E-mail: muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

Поступила в редакцию 04.07.2024

ON THE CHARACTER OF FORCED VIBRATIONS OF PLATES HAVING
A PLANE OF ELASTIC SYMMETRY

Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V., Tovmasyan A.B.

Keywords: the anisotropic plate, 3D vibrations, resonance, asymptotic solution.

The spatial problem on forced vibrations of composite plates, having a plane of elastic symmetry, is solved. It is considered that on the facial surface of the plate normal and tangential loads act, which change harmonically over time, and the lower facial surface of the plate is rigidly fixed. For solving such type of problems, the hypotheses of classical and refined theories of plates and shells are not applicable. A fundamentally new asymptotics for the components of the stress tensor and the displacement vector was established, which made it possible to find an asymptotic solution to the problem, which becomes mathematically exact if the external loads are algebraic polynomials from tangential coordinates. The conditions for the occurrence of resonance are derived. It is shown that in such a plate the vibrations are purely flat and anti-flat (transverse). The amplitudes of these oscillations have been determined. The amplitudes of these oscillations are determined. The conditions for the occurrence of resonance are derived, and the values of resonance frequencies are determined.

Աղալովյան Լ.Ա., Աղալովյան Մ.Լ., Չաքարյան Տ.Վ., Թովմասյան Ա.Բ.

Առաձգական սիմետրիայի հարթություն ունեցող սալի ստիպողական տատանումների բնույթի մասին

Հիմնաբառեր. անիզոտրոպություն, սալ, 3D տատանումներ, ռեզոնանս, ասիմպտոտիկ լուծում:

Առաձգական սիմետրիայի հարթություն ունեցող սալերի համար լուծված է ստիպողական տատանումների տարածական խնդիր: Համարվում է, որ սալի դիմային մակերևույթի վրա ազդում են նորմալ և տանգենցիալ, ժամանակի ընթացքում հարմոնիկ փոփոխվող ուժեր: Ստորին դիմային մակերևույթը կոշտ ամրակցված է: Սալերի դասական և գոյություն ունեցող ճշգրտված տեսությունները սովյալ խնդրի լուծման համար կիրառելի չեն: Գտնված է լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների համար դասականից սկզբունքորեն տարբերվող ասիմպտոտիկա, որը թույլ է տվել գտնել խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը: Այդ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ, երբ արտաքին ազդող ուժերը տանգենցիալ կոորդինատներից հանրահաշվական բազմանդամներ են: Ցույց է տրված, որ տատանումները հանդիսանում են գուտ հարթ և հակահարթ: Որոշված են տատանումների ամպլիտուդները, արտաձված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները, որոշված են ռեզոնանսային հաճախությունները:

Агаловян Л.А., Агаловян М.Л., Закарян Т.В., Товмасын А.Б.

О характере вынужденных колебаний пластин имеющих плоскость упругой симметрии

Ключевые слова: анизотропная пластина, 3D колебания, резонанс, асимптотическое решение.

Решена пространственная задача о вынужденных колебаниях композитных пластин, имеющих плоскость упругой симметрии. Считается, что на лицевую поверхность пластины действуют нормальные и тангенциальные нагрузки, которые по времени изменяются гармонически, а нижняя лицевая поверхность пластины жестко закреплена. Классическая и существующие уточненные теории пластин для решения задачи неприменимы. Установлена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений

и вектора перемещения, позволившая найти асимптотическое решение задачи, которое становится математически точным если внешние нагрузки являются алгебраическими многочленами от тангенциальных координат. Выведены условия возникновения резонанса. Показано, что в такой пластине колебания являются сугубо плоскими и антиплоскими (поперечными). Определены амплитуды этих колебаний. Выведены условия возникновения резонанса, определены значения резонансных частот.

Introduction

Depending on the winding angle or reinforcement method, often the corresponding composite material is anisotropic and has a plane of elastic symmetry [1,2]. There are relatively few works devoted to the study of stress-strain states and the solution of static and dynamic problems of plates with a plane of elastic symmetry (13 independent constants of elasticity).

The classical and refined theories of plates and shells consider only one class of problems: it is assumed that the values of the corresponding components of the stress tensor are given on the facial surfaces of the plates and shells (the first boundary value problem of the theory of elasticity). These theories are not applicable for solving the second (the values of the components of the displacement vector are given on the facial surfaces) and mixed boundary value problems. As it follows from mathematically precise solutions of individual even simple such problems, normal displacement depends on the transverse coordinate, which contradicts to one of the basic conditions of classical theory. Below it will be shown, that in similar problems the components of the stress tensor have the same intensity, which is absent in the classical theory of plates and shells.

In last decades for solving spatial static and dynamic problems of plates and shells, especially anisotropic ones, an effective turned out the asymptotic method for solving singularly perturbed differential equations. The first works in this area are the works [3-6]. Asymptotic theories of isotropic plates and shells [6,7] and anisotropic plates and shells [8] have been constructed. A fundamentally new asymptotics, in comparison with the classical theory, for the components of the stress tensor and displacement vector has been established [8, 9], which allow to find solutions to the second and mixed static and dynamic boundary value problems for single-layered and multilayered plates. To the solution of the static spatial problems of single-layered and multilayered isotropic and orthotropic plates and shells are devoted the monographs [7, 8, 10]. The method turned out particularly effective for solving dynamic problems of orthotropic plates and shells [8, 11-14].

Waves, localized and interface oscillations in isotropic thin bodies by asymptotic method were studied in [15-18]. The asymptotic method was used in [19,20] to study the stress-strain states of layered structures.

In this paper are studied forced vibrations of anisotropic plates, which have a plane of elastic symmetry. The asymptotic solution for a three-dimensional dynamic mixed problem of theory of elasticity on forced vibrations of an anisotropic plate is obtained.

1. Statement of the problem, basic equations and relationships

It is required to find in the area $D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, 2h \ll l, l = \min(a, b)\}$, which is occupied by a plate (Fig. 1) solutions to the equations of motion of the three-dimensional problem of elasticity theory:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

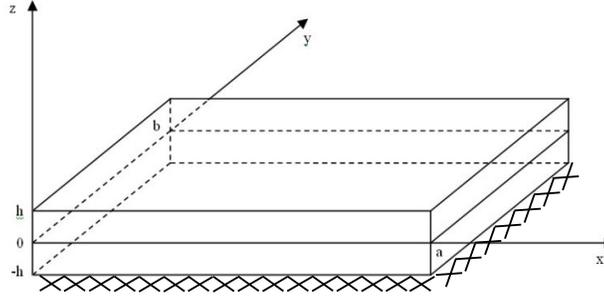


Fig.1. The structure of plate

and the relations of an anisotropic body, which have a plane of elastic symmetry [1,2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{16}\sigma_{xy} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{xy} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{36}\sigma_{xy} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{zz} + a_{66}\sigma_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

at the following boundary conditions at $z = h$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, h, t) &= \sigma_{xz}^+(\xi, \eta) \exp(i\Omega t), \\ \sigma_{yz}(x, y, h, t) &= \sigma_{yz}^+(\xi, \eta) \exp(i\Omega t), \\ \sigma_{zz}(x, y, h, t) &= -\sigma_{zz}^+(\xi, \eta) \exp(i\Omega t), \\ \xi &= \frac{x}{l}, \eta = \frac{y}{l}, \zeta = \frac{z}{h}, \end{aligned} \quad (3)$$

and at $z = -h$

$$u(x, y, -h, t) = 0, \quad v(x, y, -h, t) = 0, \quad w(x, y, -h, t) = 0 \quad (4)$$

where Ω – the frequency of forced action.

The conditions on the lateral surfaces of the plate we will not specify for now; by them is caused the appearance of boundary layer .

2. The asymptotic solution of the problem.

The solution of the formulated problem will be sought in the form

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) &= \sigma_{ij}(\xi, \eta, \zeta) \exp(i\Omega t), \alpha, \beta = x, y, z, i, j = 1, 2, 3, \\ u(x, y, z, t) &= u_x(\xi, \eta, \zeta) \exp(i\Omega t), (u, v, w; u_x, u_y, u_z)\end{aligned}\quad (5)$$

Substituting (5) in equations (1) and elasticity relations (2) and in the newly obtained system, moving to dimensionless coordinates and displacements

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad U = \frac{u_x}{l}, \quad V = \frac{u_y}{l}, \quad W = \frac{u_z}{l}, \quad (6)$$

as a result we will obtain the system singularly perturbed by the small parameter $\varepsilon = \frac{h}{l}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 W &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} &= a_{12} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{13} \sigma_{33} + a_{16} \sigma_{12}, \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{23} \sigma_{33} + a_{26} \sigma_{12}, \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{13} + a_{23} \sigma_{22} + a_{33} \sigma_{33} + a_{36} \sigma_{12}, \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= a_{44} \sigma_{23} + a_{45} \sigma_{13}, \\ \frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} &= a_{45} \sigma_{23} + a_{55} \sigma_{13}, \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} &= a_{16} \sigma_{11} + a_{26} \sigma_{22} + a_{36} \sigma_{33} + a_{66} \sigma_{12}, \\ \Omega_*^2 &= \rho h^2 \Omega^2,\end{aligned}\quad (7)$$

The solution of the singularly perturbed system (7) is the sum of the solutions of the external problem (I^{out}) and the boundary layer (I_b)[8]: $I = I^{\text{out}} + I_b$.

The solution to the external problem we will seek out in the form of

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{\text{out}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), i, j = 1, 2, 3, s = \overline{0, N} \\ (U^{\text{out}}, V^{\text{out}}, W^{\text{out}}) &= \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}),\end{aligned}\quad (8)$$

where notation $s = \overline{0, N}$ means summation by repeating (umbral) index s from 0 to number of approximations N . From (8) it follows that the stresses must have the same intensity.

By substituting (8) into (7) and in each equation equating coefficients at the same powers ε , we will obtain the following consistent system for determining unknown functions $\sigma_{ij}^{(s)}, U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 U^{(s)} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 V^{(s)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 W^{(s)} &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11}\sigma_{11}^{(s)} + a_{12}\sigma_{22}^{(s)} + a_{13}\sigma_{33}^{(s)} + a_{16}\sigma_{12}^{(s)}, \\
\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{12}\sigma_{11}^{(s)} + a_{22}\sigma_{22}^{(s)} + a_{23}\sigma_{33}^{(s)} + a_{26}\sigma_{12}^{(s)}, \\
\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{13}\sigma_{11}^{(s)} + a_{23}\sigma_{22}^{(s)} + a_{33}\sigma_{33}^{(s)} + a_{36}\sigma_{12}^{(s)}, \\
\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{44}\sigma_{23}^{(s)} + a_{45}\sigma_{13}^{(s)}, \\
\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{45}\sigma_{23}^{(s)} + a_{55}\sigma_{13}^{(s)}, \\
\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{16}\sigma_{11}^{(s)} + a_{26}\sigma_{22}^{(s)} + a_{36}\sigma_{33}^{(s)} + a_{66}\sigma_{12}^{(s)},
\end{aligned} \tag{9}$$

From the elasticity relations of system (9) all stresses can be expressed through displacements by formulas

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_5} \left(a_{44} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{45} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{13*}^{(s)} \right), \\
\sigma_{23}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_5} \left(-a_{45} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + a_{55} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{23*}^{(s)} \right), \\
\sigma_{33}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(A_{33} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{33*}^{(s)} \right), \quad \sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left(A_{13} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{11*}^{(s)} \right), \\
\sigma_{22}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(A_{23} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{22*}^{(s)} \right), \quad \sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left(A_{36} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{12*}^{(s)} \right), \\
\sigma_{13*}^{(s)} &= a_{44} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{45} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad \sigma_{23*}^{(s)} = -a_{45} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + a_{55} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\
\sigma_{33*}^{(s)} &= \frac{\partial}{\partial \xi} (A_{13} U^{(s-1)} + A_{63} V^{(s-1)}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (A_{63} U^{(s-1)} + A_{23} V^{(s-1)}), \\
\sigma_{11*}^{(s)} &= \frac{\partial}{\partial \xi} (A_{11} U^{(s-1)} + A_{16} V^{(s-1)}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (A_{16} U^{(s-1)} + A_{12} V^{(s-1)}), \\
\sigma_{22*}^{(s)} &= \frac{\partial}{\partial \xi} (A_{12} U^{(s-1)} + A_{26} V^{(s-1)}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (A_{26} U^{(s-1)} + A_{22} V^{(s-1)}), \\
\sigma_{12*}^{(s)} &= \frac{\partial}{\partial \xi} (A_{16} U^{(s-1)} + A_{66} V^{(s-1)}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (A_{66} U^{(s-1)} + A_{26} V^{(s-1)}), \\
\sigma_{ij}^{(m)} &= 0, \quad U^{(m)} = V^{(m)} = W^{(m)} = 0 \quad \text{at } m < 0
\end{aligned} \tag{10}$$

where

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{55} & 0 \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & 0 & 0 & a_{66} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{36} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{66} \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$\Delta_5 = a_{44}a_{55} - a_{45}^2$, $\Delta = \Delta_3\Delta_5$, $A_{33} = \Delta_4\Delta_5$,
 A_{ij} – cofactor, corresponding to element a_{ij} of determinant Δ .

By substituting $\sigma_{13}^{(s)}, \sigma_{23}^{(s)}$ into two first equations of system (9), for determining $U^{(s)}, V^{(s)}$ we will obtain the system

$$\begin{aligned} a_{44} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} - a_{45} \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta_5 \Omega_*^2 U^{(s)} &= R_u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ -a_{45} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta_5 \Omega_*^2 V^{(s)} &= R_v^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} R_u^{(s)} &= -\Delta_5 \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - a_{44} \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + a_{45} \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}, \\ R_v^{(s)} &= -\Delta_5 \left(\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) + a_{45} \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55} \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}, \end{aligned}$$

By substituting the value of $\sigma_{33}^{(s)}$ into the third equation of system (9), for determination of $W^{(s)}$ we will obtain the equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \Omega_*^2 W^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_4 \Delta_5} R_w^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} R_w^{(s)} &= -\Delta_5 \left(\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{\Delta_3} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} (A_{13} U^{(s-1)} + A_{63} V^{(s-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} (A_{63} U^{(s-1)} + A_{23} V^{(s-1)}) \right], \end{aligned}$$

From the system (12) it follows that from the very beginning ($s = 0$) displacements $U^{(s)}, V^{(s)}$ are dependent, independent is the equation for $W^{(s)}$. And for orthotropic plates ($a_{45} = 0, \Delta_5 = a_{55} a_{44}$) they are independent, to them are correspond the shear vibrations ($a_{44} = \frac{1}{G_{23}}, a_{55} = \frac{1}{G_{13}}, G_{13}, G_{23}$ – modulus of shear). To the equation (13) correspond the longitudinal vibrations. We can state that for plates with a plane of elastic symmetry, shear vibrations are dependent from the very beginning, but they in the initial approximation do not depend on longitudinal vibrations. For orthotropic plates, in the initial approximation, all three vibrations are independent.

From system (12) $V^{(s)}$ can be expressed through $U^{(s)}$ by formula

$$\begin{aligned} V^{(s)} &= -\frac{1}{a_{45} \Omega_*^2} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{a_{55}}{a_{45}} U^{(s)} + R_v^{*(s)} \end{aligned} \quad (14)$$

$$R_v^{*(s)} = \frac{1}{\Delta_5 \Omega_*^2} \left(\frac{a_{55}}{a_{45}} R_u^{(s)} + R_v^{(s)} \right)$$

and for determining $U^{(s)}$ taking into account (14) we will obtain the equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U^{(s)}}{\partial \zeta^4} + (a_{44} + a_{55}) \Omega_*^2 \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta_5 \Omega_*^2 U^{(s)} &= \bar{R}_u^{(s)} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\bar{R}_u^{(s)} = \frac{1}{\Delta_5} \left(a_{55} \frac{\partial^2 R_u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta_5 \Omega_*^2 R_u^{(s)} + a_{45} \frac{\partial^2 R_v^{(s)}}{\partial \zeta^2} \right)$$

The solution to the equation (15) is $U^{(s)} = U_0^{(s)} + U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$, where $U_\tau^{(s)}$ – is particular solution. The characteristic equation of the homogeneous equation (15) is

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (a_{44} + a_{55}) \Omega_*^2 \lambda^2 + \Delta_5 \Omega_*^4 &= 0, \\ \text{or } k^2 + (a_{44} + a_{55}) k + \Delta_5 &= 0, k = \left(\frac{\lambda}{\Omega_*} \right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

The roots of this equation are

$$k_{1,2} = \frac{-(a_{44}+a_{55}) \pm \sqrt{(a_{44}+a_{55})^2 - 4\Delta_5}}{2} = \frac{-(a_{44}+a_{55}) \pm \sqrt{(a_{44}-a_{55})^2 + 4a_{45}^2}}{2}$$

Since $\Delta_5 > 0 \Rightarrow k_{1,2} < 0$, $\lambda_{1,2} = \pm b_1 \Omega_* i$, $\lambda_{3,4} = \pm b_2 \Omega_* i$ consequently

$$U_0^{(s)} = D_1^{(s)} \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_2^{(s)} \sin b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(s)} \cos b_2 \Omega_* \zeta + D_4^{(s)} \sin b_2 \Omega_* \zeta \quad (17)$$

$$b_{1,2} = \sqrt{\frac{(a_{44}+a_{55}) \mp \sqrt{(a_{44}-a_{55})^2 + 4a_{45}^2}}{2}}$$

According to (14),(17) we have

$$V^{(s)} = D_1^{(s)} d_1 \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_2^{(s)} d_1 \sin b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(s)} d_2 \cos b_2 \Omega_* \zeta + D_4^{(s)} d_2 \sin b_2 \Omega_* \zeta + \bar{V}_\tau^{(s)} \quad (18)$$

$$d_1 = \frac{1}{a_{45}} (b_1^2 - a_{55}), \quad d_2 = \frac{1}{a_{45}} (b_2^2 - a_{55})$$

$$\bar{V}_\tau^{(s)} = -\frac{1}{a_{45} \Omega_*^2} \frac{\partial^2 U_\tau^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{a_{55}}{a_{45}} U_\tau^{(s)} + \frac{1}{\Delta_5 \Omega_*^2} \left(\frac{a_{55}}{a_{45}} R_u^{(s)} + R_v^{(s)} \right)$$

According to (10),(17), (18)

$$\sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_5} (D_1^{(s)} d_{11} \sin b_1 \Omega_* \zeta - D_2^{(s)} d_{11} \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(s)} d_{12} \sin b_2 \Omega_* \zeta - D_4^{(s)} d_{12} \cos b_2 \Omega_* \zeta + \sigma_{13\tau}^{(s)}) \quad (19)$$

$$\sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_5} (D_1^{(s)} d_{21} \sin b_1 \Omega_* \zeta - D_2^{(s)} d_{21} \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(s)} d_{22} \sin b_2 \Omega_* \zeta - D_4^{(s)} d_{22} \cos b_2 \Omega_* \zeta + \sigma_{23\tau}^{(s)})$$

$$d_{11} = \Omega_* b_1 (b_1^2 - a_{55} - a_{44}), \quad d_{12} = \Omega_* b_2 (b_2^2 - a_{55} - a_{44})$$

$$d_{21} = \Omega_* b_1 (a_{45} - a_{55} d_1), \quad d_{22} = \Omega_* b_2 (a_{45} - a_{55} d_2)$$

$$\sigma_{13\tau}^{(s)} = a_{44} \frac{\partial U_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{45} \frac{\partial V_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{13*}^{(s)},$$

$$\sigma_{23\tau}^{(s)} = -a_{45} \frac{\partial U_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + a_{55} \frac{\partial V_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{23*}^{(s)},$$

The solution to the equation (13) is

$$W^{(s)} = W_0^{(s)} + W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$W_0^{(s)} = D_5^{(s)} \cos \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_* \zeta + D_6^{(s)} \sin \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_* \zeta \quad \text{at } \frac{\Delta_3}{\Delta_4} > 0, \quad (20)$$

$$W_0^{(s)} = D_5^{(s)} \operatorname{ch} \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_* \zeta + D_6^{(s)} \operatorname{sh} \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_* \zeta \quad \text{at } \frac{\Delta_3}{\Delta_4} < 0, \quad (21)$$

$$\sigma_{33}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_* A_{33} \left(-D_5^{(s)} \sin \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_* \zeta + D_6^{(s)} \cos \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_* \zeta \right) + \sigma_{33\tau}^{(s)}, \quad \text{at } \frac{\Delta_3}{\Delta_4} > 0, \quad (22)$$

$$\sigma_{33}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_* A_{33} \left(D_5^{(s)} \operatorname{sh} \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_* \zeta + D_6^{(s)} \operatorname{ch} \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_* \zeta \right) + \sigma_{33\tau}^{(s)}, \quad \text{at } \frac{\Delta_3}{\Delta_4} < 0, \quad (23)$$

$$\sigma_{33\tau}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left(A_{33} \frac{\partial W_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{33*}^{(s)} \right),$$

The general solution of the external problem contains 6 yet unknown functions $D_1^{(s)}(\xi, \eta) - D_6^{(s)}(\xi, \eta)$, which are uniquely determined using boundary conditions (3),(4).

3.The determination of unknown functions of the solution

For determining the values of $D_1^{(s)}, D_2^{(s)}, D_3^{(s)}, D_4^{(s)}$ we satisfy conditions (3),(4) with respect to $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, u, v$. Using formulas (8), (17) - (19) we have

$$\begin{aligned} D_1^{(s)} d_{11} c_1 - D_2^{(s)} d_{11} c_2 + D_3^{(s)} d_{12} c_3 - D_4^{(s)} d_{12} c_4 &= e_1^{(s)} \\ D_1^{(s)} d_{21} c_1 - D_2^{(s)} d_{21} c_2 + D_3^{(s)} d_{22} c_3 - D_4^{(s)} d_{22} c_4 &= e_2^{(s)} \\ D_1^{(s)} c_2 - D_2^{(s)} c_1 + D_3^{(s)} c_4 - D_4^{(s)} c_3 &= e_3^{(s)} \\ D_1^{(s)} d_1 c_2 - D_2^{(s)} d_1 c_1 + D_3^{(s)} d_2 c_4 - D_4^{(s)} d_2 c_3 &= e_4^{(s)} \end{aligned} \quad (24)$$

Where

$$\begin{aligned} e_1^{(s)} &= \Delta_5 \sigma_{13}^{+(s)} - \sigma_{13*}^{(s)}, \quad e_2^{(s)} = \Delta_5 \sigma_{23}^{+(s)} - \sigma_{23*}^{(s)}, \\ \sigma_{13}^{+(0)} &= \varepsilon \sigma_{13}^+, \quad \sigma_{13}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0 \\ e_3^{(s)} &= -U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1), \quad e_4^{(s)} = -\bar{V}_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \\ c_1 &= \sin b_1 \Omega_*, \quad c_2 = \cos b_1 \Omega_*, \quad c_3 = \sin b_2 \Omega_*, \quad c_4 = \cos b_2 \Omega_* \end{aligned}$$

By Cramer's formula

$$D_j^{(s)} = \frac{\Delta_{ju}^{(s)}}{\Delta_u}, \quad j=1,2,3,4 \quad (25)$$

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} d_{11} c_1 & -d_{11} c_2 & d_{12} c_3 & -d_{12} c_4 \\ d_{21} c_1 & -d_{21} c_2 & d_{22} c_3 & -d_{22} c_4 \\ c_2 & -c_1 & c_4 & -c_3 \\ d_1 c_2 & -d_1 c_1 & d_2 c_4 & -d_2 c_3 \end{vmatrix} = (d_2 - d_1)(d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}) \cos 2b_1 \Omega_* \cos 2b_2 \Omega_*$$

$\Delta_{ju}^{(s)}$ is obtained from Δ_u by replacing j-th column with column from free terms $e_i^{(s)}$, $i = 1,2,3,4$.

According to (25) we have

$$\begin{aligned} D_1^{(s)} &= \frac{c_1}{\delta_1} (e_1^{(s)} d_{22} - e_2^{(s)} d_{12}), \quad D_2^{(s)} = \frac{c_2}{\delta_1} (e_1^{(s)} d_{22} - e_2^{(s)} d_{12}), \\ D_3^{(s)} &= \frac{c_3}{\delta_2} (e_1^{(s)} d_{21} - e_2^{(s)} d_{11}), \quad D_4^{(s)} = \frac{c_4}{\delta_2} (e_1^{(s)} d_{22} - e_2^{(s)} d_{12}), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}) \cos 2b_1 \Omega_* \\ \delta_2 &= (d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}) \cos 2b_2 \Omega_* \end{aligned}$$

At $\cos 2b_1 \Omega_* = 0$ or $\cos 2b_2 \Omega_* = 0$ the resonance will occur. The resonant frequencies are

$$\Omega = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{\pi}{b_1 \rho}} (2n - 1), \quad \Omega = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{\pi}{b_2 \rho}} (2n - 1), \quad n \in N.$$

Using (20), (22) and satisfying to conditions (3), (4) relatively σ_{zz}, w , we will obtain the system

$$\begin{aligned} D_5^{(s)} c_5 - D_6^{(s)} c_6 &= e_5^{(s)} \\ -D_5^{(s)} c_6 + D_6^{(s)} c_5 &= e_6^{(s)} \end{aligned} \quad (27)$$

from which it follows

$$\begin{aligned} D_5^{(s)} &= \frac{e_5^{(s)} c_5 + e_6^{(s)} c_6}{\cos 2 \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_*}, & D_6^{(s)} &= \frac{e_6^{(s)} c_5 + e_5^{(s)} c_6}{\cos 2 \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_*}, \\ e_5^{(s)} &= -W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1), & e_6^{(s)} &= -\frac{\Omega_* \Delta}{A_{33}} \sqrt{\frac{\Delta_4}{\Delta_3}} \left(\sigma_{33}^{+(s)} + \sigma_{33\tau}^{(s)} \right)_{\zeta=1} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\sigma_{33}^{+(0)} = \varepsilon \sigma_{33}^+, \quad \sigma_{33}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0$$

$$c_5 = \cos \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_*, \quad c_6 = \sin \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_*, \quad \text{at } \frac{\Delta_3}{\Delta_4} > 0$$

The resonant frequencies are

$$\Omega = \frac{1}{2h} \left(\frac{\Delta_4}{\Delta_3} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} (2n - 1), \quad n \in \mathbb{N}$$

To the case (21), (23) correspond

$$\begin{aligned} D_5^{(s)} &= \frac{e_5^{(s)} c_5 + e_6^{(s)} c_6}{\text{ch} 2 \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_*}, & D_6^{(s)} &= \frac{e_6^{(s)} c_5 - e_5^{(s)} c_6}{\text{ch} 2 \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_*}, & e_5^{(s)} &= -W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1), \\ e_6^{(s)} &= -\frac{\Omega_* \Delta}{A_{33}} \sqrt{\left| \frac{\Delta_4}{\Delta_3} \right|} \left(\sigma_{33}^{+(s)} + \sigma_{33\tau}^{(s)} \right)_{\zeta=1} \\ c_5 &= \text{ch} \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_*, & c_6 &= \text{sh} \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_*, & \text{at } \frac{\Delta_3}{\Delta_4} < 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Since $\text{ch} 2 \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_* \neq 0$ there is no resonance, i.e. longitudinal vibrations in this case aren't resonant.

4. On mathematically precise solutions

If functions in σ_{xz}^+ , σ_{yz}^+ , σ_{zz}^+ included in the boundary conditions (3) are polynomials from ξ, η , the iteration breaks at the certain approximation, which depends on the degree of polynomial. As a result, we will have the mathematically exact solution in the external problem. Particularly, at $\sigma_{xz}^+ = \text{const}$, $\sigma_{yz}^+ = \text{const}$, $\sigma_{zz}^+ = \text{const}$ the process breaks at initial approximation. For this case we have

$$\begin{aligned} u &= lU^{(0)} \exp(i\Omega t), & v &= lV^{(0)} \exp(i\Omega t), \\ \sigma_{xz} &= \varepsilon^{-1} \sigma_{13}^{(0)} \exp(i\Omega t), & \sigma_{yz} &= \varepsilon^{-1} \sigma_{23}^{(0)} \exp(i\Omega t) \\ U^{(0)} &= D_1^{(0)} \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_2^{(0)} \sin b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(0)} \cos b_2 \Omega_* \zeta + D_4^{(0)} \sin b_2 \Omega_* \zeta \\ V^{(0)} &= D_1^{(0)} d_1 \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_2^{(0)} d_1 \sin b_1 \Omega_* \zeta + \\ &+ D_3^{(0)} d_2 \cos b_2 \Omega_* \zeta + D_4^{(0)} d_2 \sin b_2 \Omega_* \zeta \end{aligned} \quad (30)$$

$$\sigma_{13}^{(0)} = \frac{1}{\Delta_5} \left(D_1^{(0)} d_{11} \sin b_1 \Omega_* \zeta - D_2^{(0)} d_{11} \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(0)} d_{12} \sin b_2 \Omega_* \zeta - D_4^{(0)} d_{12} \cos b_2 \Omega_* \zeta \right),$$

$$\sigma_{23}^{(0)} = \frac{1}{\Delta_5} \left(D_1^{(0)} d_{21} \sin b_1 \Omega_* \zeta - D_2^{(0)} d_{21} \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(0)} d_{22} \sin b_2 \Omega_* \zeta - D_4^{(0)} d_{22} \cos b_2 \Omega_* \zeta \right)$$

$$D_1^{(0)} = \frac{\Delta_5 c_1 \varepsilon}{\delta_1} (\sigma_{13}^+ d_{22} - \sigma_{23}^+ d_{21})$$

$$D_2^{(0)} = \frac{\Delta_5 c_2 \varepsilon}{\delta_1} (\sigma_{13}^+ d_{22} - \sigma_{23}^+ d_{12})$$

$$D_3^{(0)} = \frac{\Delta_5 c_3 \varepsilon}{\delta_2} (\sigma_{13}^+ d_{21} - \sigma_{23}^+ d_{11})$$

$$D_4^{(0)} = \frac{\Delta_5 c_4 \varepsilon}{\delta_2} (\sigma_{13}^+ d_{21} - \sigma_{23}^+ d_{11})$$

for the remaining values we have

$$w = lW^{(0)} \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{xx} = \varepsilon^{-1} \sigma_{11}^{(0)} \exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{xy} = \varepsilon^{-1} \sigma_{12}^{(0)} \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{yy} = \varepsilon^{-1} \sigma_{22}^{(0)} \exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{zz} = \varepsilon^{-1} \sigma_{33}^{(0)} \exp(i\Omega t),$$

$$\text{at } \frac{\Delta_3}{\Delta_4} > 0$$

$$W_0^{(0)} = D_5^{(0)} \cos \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_* \zeta + D_6^{(0)} \sin \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_* \zeta,$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = \frac{A_{33}}{\Delta} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{11}^{(0)} = \frac{A_{13}}{\Delta} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad (31)$$

$$\sigma_{22}^{(0)} = \frac{A_{23}}{\Delta} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{12}^{(0)} = \frac{A_{36}}{\Delta} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta},$$

$$D_5^{(0)} = \frac{e_6^{(0)} c_6}{\cos 2 \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_*}, \quad D_6^{(0)} = \frac{e_6^{(0)} c_5}{\cos 2 \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_*},$$

$$e_6^{(0)} = \frac{\Delta \Omega_*}{A_{33}} \varepsilon \sigma_{33}^+ \sqrt{\frac{\Delta_4}{\Delta_3}}, \quad c_5 = \cos \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_*, \quad c_6 = \sin \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_4}} \Omega_*$$

$$\text{at } \frac{\Delta_3}{\Delta_4} < 0$$

$$W_0^{(0)} = D_5^{(0)} \operatorname{ch} \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_* \zeta + D_6^{(0)} \operatorname{sh} \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_* \zeta,$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = \frac{A_{33}}{\Delta} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{11}^{(0)} = \frac{A_{13}}{\Delta} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad (32)$$

$$\sigma_{22}^{(0)} = \frac{A_{23}}{\Delta} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{12}^{(0)} = \frac{A_{36}}{\Delta} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta},$$

$$D_5^{(0)} = \frac{e_6^{(0)} c_6}{\operatorname{ch} 2 \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_*}, \quad D_6^{(0)} = \frac{e_6^{(0)} c_5}{\operatorname{ch} 2 \sqrt{\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right|} \Omega_*},$$

$$e_6^{(0)} = -\frac{\Delta\Omega_*}{A_{33}} \varepsilon\sigma_{33}^+ \sqrt{\frac{|\Delta_4|}{|\Delta_3|}}, \quad c_5 = ch \sqrt{\frac{|\Delta_3|}{|\Delta_4|}} \Omega_*, \quad c_6 = sh \sqrt{\frac{|\Delta_3|}{|\Delta_4|}} \Omega_*.$$

Obtained in the work the solution to the external problem satisfies the equations of motion, elasticity relations and boundary conditions (3), (4) on the facial surfaces of the plate. It, as a rule, will not satisfy the boundary conditions on the lateral surface of the plate. The arising discrepancy, according to the asymptotic method for solving singularly perturbed differential equations, is eliminated by constructing the solution for the boundary layer [3, 21]. All component of stresses and displacements decrease rapidly (exponentially) with distance from the lateral surface into the inside of the plate. This solution is constructed separately (autonomously) and is conjugated with the solution to the external problem in the manner described in [6,8], we do not stop on this. In elasticity theory this is known as end effects [22].

Conclusions

The asymptotic solution to the spatial dynamic problem of forced vibrations of anisotropic plates, which have a plane of elastic symmetry, is determined. One of the facial surfaces of the plate is rigidly fixed, and the opposite facial surface is subject to normal and tangential loads, which are harmonically changed over time. It is shown, that for solving this class of problems (the second and mixed boundary value problems of elasticity theory) the hypotheses of classical and refined theories of plates are not applicable. The asymptotics for all components of the stress tensor and displacement vector was established, which made it possible to find the asymptotic solution to the three-dimensional problem.

All components of the stress tensor expressed in terms of the components of the displacement vector. For determining the tangential components of the displacement vector, the system of two ordinary differential equations of the second order is derived, which is reduced to the solution of the ordinary differential equation of the fourth order. To it corresponds plane shear vibrations, which in the case of orthotropic plates break down into two independent shear vibrations. For determining the normal component of the displacement vector, the ordinary differential equation of the second order is derived; to which are correspond the longitudinal vibrations.

Analytical solutions to all equations have been found. The conditions for the occurrence of resonance have been established, and the values of the resonant frequencies have been determined. The case of anisotropy has been established at which in the longitudinal vibrations of the plate resonance is impossible.

References

1. Lekhnitsky S. G. Theory of Elasticity of Anisotropic Body. - Moscow: Nauka, 1977. - 416 p.
2. Malmayster A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. The Strength of Polymer and Composite Materials.- Riga: Zinatne, 1980. - 572 p.
3. Friedrichs K. O. Asimptotic Phenomena in Mathematical Physics. //Bull. Amer. Math. Soc. - 1955. -Vol.61 - P.485.

4. Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates.// Comm. Pure and Appl. Math. - 1961. -Vol. 14.- №1. – P. 114-122.
5. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells // Proc. Roy. Soc. Ser. A.-1962. -Vol. 266.- №1325.- P. 143-161.
6. Goldenweiser A.L. Derivation of an Approximate Theory of Bending of a Plate by the Method of Asymptotic Integration of the Equations of the Theory of Elasticity // J. Appl. Math. Mech. - 1962. -Vol. 26.- Issue. 4. - P. 1000-1025 .
7. Goldenweiser A.L. Theory of Thin Elastic Shells. Moscow: Nauka.- 1976.- 512 p.
8. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells —Singapore. World Scientific Publishing. - 2015. - 376 p. (Russian Edition: Moscow, Nauka, Fizmatlit. - 1997. - 414 p.).
9. Aghalovyan L.A. On the Structure of Solution of One Class of Plane Problems of the Theory of Elasticity of Anisotropic Body //The Inter-Universities Collection Mechanics: Yerevan: Publishing House of Yerevan State University - 1982. - Issue 2. - P. 7-12.
10. Aghalovyan L.A., Gevorkyan R.S. Non-Classical Boundary Value Problems of Anisotropic Layered Beams, Plates and Shells.- Yerevan: Publishing House "Gitutyun" of NAS RA. -2005. - 468 p.
11. Aghalovyan L.A. On the Asymptotic Method for Solving Dynamic Mixed Problems of Anisotropic Strips and Plates //Proceedings of the Universities of the Russian Federation. North-Caucasian Region. Natural Sciences. - 2000. - №. 3. - P.8-11.
12. Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V. Asymptotic Solution of the First 3D Dynamic Elasticity Theory Problem on Forced Vibrations of a Three-Layer Plate with an Asymmetric Structure // Mechanics of Composite Materials. - 2019. - Vol. 55.- № 1. - P. 3-18 .
13. Aghalovyan L.A., Ghulgazaryan L.G. On the Determination of Solutions of One Class of Dynamic Spatial Problems of the Mathematical Theory of Elasticity for Orthotropic Shells // Scientific Notes of the Armenian State Pedagogical University named after Kh. Abovyan. - 2012. - №2 (17). - P. 29-42.
14. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V. Asymptotic Analysis of the Forced Oscillations of Double-Layered Plates with Viscous Resistance//Mechanics of Solids. - 2020. -Vol.55. -№5. -P.1062-1070.
15. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., and Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San-Diego: Academic Press. -1998. -226p.
16. Mikhasev G.I., Tovstik P.E. Localized Vibrations and Waves in Thin Shells. Asymptotic methods.- Moscow: Fizmatlit - 2009. -292 p.
17. Vilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu. Edge and Interface Resonance Phenomena in Elastic Bodies. - Moscow: Fizmatlit - 2010 - 280 p. (in Russian).
18. Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A. Dispersion of Elastic Waves in a Strongly Inhomogeneous Three-Layered Plate. //International Journal of Solids and Structures.- 2017. -113. -P. 169-179.

19. Altenbach H., Eremeyev V.A., Naumenko K. On the Use of the First Order Shear Deformation Plate Theory for the Analysis of Three-layer Plates with Thin Soft Core Layer.// ZAMM-J. Appl. Math. Mech./ Zeitsch. Ange. Mathe. Mech. - 2015. - 95(10). - P. 1004-1011.
20. Boutin C. Linear Pantographic Sheets. Asymptotic Micro-macro Models Identification.//Mathematics and Mechanics of Complex Systems. - 2017. - 5(2). - P.127-162.
21. Naife A.Kh. The Perturbations Methods.- Moscow: “Mir”-1976. - 455 p.
22. Timoshenko S.P., Goodyer J. Theory of Elasticity. -Moscow: “Nauka” - 1979. -560 p.

Information about the authors:

Aghalovyan Lenser Abgar- Dr. of Sc., Professor, Head of Department of Thin-Walled Systems, Institute of Mechanics of NAS Armenia
Marshal Bagramyan ave.24/2, 0019, Yerevan, Armenia
Tel.(+37410)529630, E-mail: lagal@sci.am

Aghalovyan Mher Lenser- Dr. of Sc., Lecturer, Armenian State University of Economics, Leading Researcher, Institute of Mechanics of NAS Armenia,
Nalbandyan St. 128, 025 Yerevan, Armenia
Tel.(+37493)055070, E-mail: mheraghalovyan@yahoo.com

Zakaryan Tatevik Vladik-PhD, Researcher, Institute of Mechanics of NAS Armenia,
Marshal Bagramyan ave.24/2, 0019, Yerevan, Armenia
Tel.(+37494)638882, E-mail: zaqaryantatevik@mail.ru

Tovmasyan Artur Babken- PhD, Researcher, Institute of Mechanics of NAS Armenia,
Marshal Bagramyan ave.24/2, 0019, Yerevan, Armenia
Tel.(+37497)319999

Received 20.12.2024



ՄՅԻՏԱՐՅԱՆ ՏՄՐԵՆ ՄԱՆՈՒԿՈՎԻՇ
(1939-2024)

Ушел из жизни выдающийся ученый, умелый организатор науки, чуткий педагог и активный гражданин, член корреспондент НАН РА, доктор физико-математических наук, профессор Сурен Манукович Мхитарян.

Фундаментальные научные исследования профессора С.М.Мхитаряна, направленные на развитие аналитических и численных методов решения контактных и смешанных краевых задач теорий упругости, вязкоупругости и ползучести, получение замкнутых решений для новых задач из этого класса, несомненно внесли существенный вклад в развитие механики деформируемого твердого тела.

Профессором С.М. Мхитаряном было опубликовано более 150 научных статей как в республиканских, так и в авторитетных зарубежных периодических изданиях. Особо следует отметить книгу «Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками», изданную в 1983 году издательством «Наука», которая является настольной книгой многих отечественных и зарубежных исследователей.

Обширна и научно-педагогическая деятельность профессора С.М.Мхитаряна. Более тридцати лет он был руководителем научного направления контактных и смешанных задач теории упругости и вязкоупругости в Институте механики НАН РА. Совместно с научной деятельностью проф. С.М.Мхитарян преподавал в различных ВУЗ-ах республики. Более десяти лет С.М.Мхитарян возглавлял кафедру высшей математики Национального университета архитектуры и строительства Армении. Под его научным руководством и непосредственном консультативном участии защищены более 25 диссертаций.

Профессор С.М.Мхитарян долгие годы являлся членом редакционной коллегии журнала Известия НАН Армении «Механика».

Редколлегия журнала «Известия НАН Армении. Механика», научная общественность Армении глубоко скорбят по поводу невозможной утраты.

ГОДИЧНОЕ СОДЕРЖАНИЕ 2024 г., том 77

1. **Аветисян А. С., Аветисян Л. В.** Регулирование локализацией волновой энергии по толщине пьезоэлектрического волновода: задача оптимального управления трехкомпонентной электроупругой волной №1-7
2. **Аветисян А.С., Казарян К.Б.** Отражение и преломление многокомпонентных электро-магнито-упругих волн от границы раздела двух пьезоэлектриков класса *бтт* с различной поляризацией среды №2-68
3. **Аветисян В.В.** Оптимальное по энергозатратам управление электромеханическим манипулятором №3-58
 - **Аветисян Л. В** см.1
 - **Аветисян С.А.** см. 21
4. **Агаловян Л.А., Агаловян М.Л., Закарян Т.В., Товмасын А.Б.** О характере вынужденных колебаний пластин имеющих плоскость упругой симметрии .№4-70
 - **Агаловян М.Л.** см. 4
5. **Агаян К.Л., Атоян Л.А.** Упруго-спиновые волны в двухфазной ферромагнитной конструкции с магнитным экраном №2-3
6. **Акопян В.Н., Амирджанян А.А.** Вынужденные колебания полубесконечной пластины с коллинеарными трещинами и жесткими включениями..... №2-10
7. **Акопян В.Н., Амирджанян А.А.** Вынужденные колебания полубесконечной пластины с системой параллельных к границе коллинеарных трещин..... №3-3
8. **Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Григорян А.М.** О контактном взаимодействии штампа произвольной формы и полуплоскости с заранее неизвестной областью контакта при наличии трения покоя. №4-3
9. **Акопян Л.В., Даштоян Л.Л.** Контактная задача для плоскости с периодической системой трещина-включение с учетом сил трения под включением..... №11-8
 - **Амбарцумян А.Г.** см.19
 - **Амирджанян А.А** см. 6,7,8
 - **Атоян Л.А.** см.5
10. **Ваграм Наслетникович Акопян (к 70-летию со дня рождения)** №1-3
 - **Варданын И.А** см.19
 - **Григорян А.М** см. 8
 - **Даштоян Л.Л.** см.9
 - **Закарян Т.В.** см. 4
11. **Казарян К. Б.** Расширение запретных зон частот в балке с периодическими внутренними шарнирами, внешними опорами и присоединенными массами №3-18
12. **Казарян К.Б.** Устойчивость аксиально нагруженной двухкомпонентной балки с внутренним шарниром, удерживаемым упругой пружиной №4-18
13. **Казарян К.Б., Казарян Р.А., Терзян С.А.** Локализованные колебания однородной струны с конечным числом периодически расположенных рассеивателей..... №1-30

- Казарян К.Б. см.2
 - Казарян Р.А. см.13
14. **Мартиросян С. Р.** Сверхзвуковой флаттер панели умеренных размеров с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении№2-25
 15. **Мартиросян С. Р.** Сверхзвуковой флаттер удлиненной панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: растянутой по потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении№4-27
 16. **Мартиросян С. Р.** Сверхзвуковой флаттер удлиненной панели со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении№1-40
 17. **Мартиросян С.Р.** О динамической устойчивости широкой панели с одним свободным краем, нагруженной по двум направлениям: сжатой по сверхзвуковому потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении№3-42
 18. **Междум Альбертович Сумбатян (к 70-летию со дня рождения)**..... №1-5
 19. **Микилян М.А., Амбарцумян А.Г., Варданян И.А.** Влияние магнитного поля на критическую скорость сверхзвукового флаттера диэлектрической пластины.....№2-47
 20. **Мкртчян М. М., Мкртчян М.С.** О напряженном состоянии кусочно-однородного слоя, взаимодействующего с коллинеарной системой трещин и стрингером при антиплоской деформации28
 - Мкртчян М.С. см. 20,21
 21. **Мхитарян С.М., Аветисян С.А., Мкртчян М.С.** О точном решении одного класса задач контактного взаимодействия между стрингерами и упругой бесконечной пластиной 48
 22. **Мхитарян Сурен Манукович**..... 82
 23. **Саакян А.В.** Иной подход к задаче контактного взаимодействия штампа с упругой полуплоскостью при наличии трения между ними 56
 - Терзян С.А. см.13
 - Товмасын А.Б. см.4

СОДЕРЖАНИЕ 2024 г., том 77 №4

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Григорян А.М. О контактном взаимодействии штампа произвольной формы и полуплоскости с заранее неизвестной областью контакта при наличии трения покоя..... 3

Казарян К.Б. Устойчивость аксиально нагруженной двухкомпонентной балки с внутренним шарниром, удерживаемым упругой пружиной..... 18

Мартirosyan С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: растянутой по потоку газа и сжатой в перпендикулярном направлении 27

Мхитарян С.М., Аветисян С.А., Мкртчян М.С. О точном решении одного класса задач контактного взаимодействия между стрингерами и упругой бесконечной пластиной..... 48

Агаловян Л.А., Агаловян М.Л., Закарян Т.В., Товмасын А.Б. О характере вынужденных колебаний пластин имеющих плоскость упругой симметрии 70

Мхитарян Сурен Манукович..... 83

СОДЕРЖАНИЕ 2024 г., том 77 84

CONTENTS 2024, v. 77 №4

Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Grigoryan A.M. On Contact Interaction of a Stamp of Arbitrary Shape and a Half-Plane with a Previously Unknown Contact Area in the Presence of Static Friction..... 3

Ghazaryan K.B. Stability of an Axially Loaded Bi-Material Beam with Interior Hinge Restrained by Elastic String 18

Martirosyan S.R. Supersonic Flutter of an Elongated Panel with a Free Edge, Initially Loaded in Two Directions: Stretched Compressed along the Gas Flow And Compressed in the Perpendicular Direction..... 27

Mkhitaryan S.M., Avetisyan S.A., Mkrтчyan M.S. On the Exact Solution of One Class of Problems of Contact Interaction Between Stringers and Elastic Infinite Plate 48

Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V., Tovmasyan A.B. On the Character of Forced Vibrations of Plates Having a Plane of Elastic Symmetry 70

Mkhitaryan Suren Manuk..... 83

CONTENTS 2024, v. 77 84

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2024, հ.77, №4

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա., Գրիգորյան Ա.Մ. Նախապես անհայտ կոնտակտի տիրույթով ու հանգստի շփման հաշվառմամբ կամայական տեսք ունեցող դրոշմի և կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության մասին ..3

Ղազարյան Կ.Բ. Առանցքային բեռնավորմամբ և առաձգական զսպանակով պահվող ներքին հողակապ ունեցող երկբաղադրիչ հեծանի կայունությունը.....18

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ նախապես ձգված և միաժամանակ ուղղահայաց ուղղությամբ սեղմված, մեկ ազատ եզրով երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին27

Մխիթարյան Ս.Մ., Ավետիսյան Ս.Ա., Մկրտչյան Մ.Ս. Առաձգական անվերջ սալի և ստրինգերների միջև կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրների մի դասի ճշգրիտ լուծման մասին.....48

Աղալովյան Լ.Ա., Աղալովյան Մ.Լ., Զաքարյան Տ.Վ., Թովմասյան Ա.Բ. Առաձգական սիմետրիայի հարթություն ունեցող սալի ստիպողական տատանումների բնույթի մասին.....70

Մխիթարյան Սուրեն Մանուկի.....83

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2024, հ.7784

Сдано в производство 27.03.2024 г.
Формат 70 x 100¹/₁₆ . Печ. лист – 3 3/8
Заказ № 1301. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24