Известия НАН Армении, Физика, т.59, №3, с.534–544 (2024)

УДК 538.915
DOI:10.54503/0002-3035-2024-59.4-534

НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ В МАЙОРАНОВСКИХ ЦЕПОЧКАХ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Т.С. АКОПЯН[1,2*]

[1]Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
[2]Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван, Армения

[*]e-mail: tigran.hakobyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 28 ноября 2024 г.)

Построены различные квантовые цепочки, состоящие из взаимодействующих майорановских фермионов с ароматами, которые инвариантны по отношению к вращениям и отражениям в пространстве ароматов. Пространство состояний распадается на отдельные сектора, которые характеризуются определенным набором четностей фермионов каждого аромата. Все рассматриваемые системы удовлетворяют условию Либа–Маттиса. В результате состояния с минимальной энергией в указанных секторах невырождены. Состояния, принадлежащие разным секторам, объединяются в антисимметричные по ароматам мультиплеты.

1. Введение

Одной из основных задач квантовых систем является исследование основного состояния и элементарных низкоэнергетических возбуждений. Квантовые свойства системы проявляются особенно четко на низкоэнергетическом уровне спектра. При нулевой температуре система переходит в основное состояние, структура которого гораздо более сложна и многогранна, чем в классическом случае. В большинстве случаев она не поддается точному анализу.

Среди классических моделей с взаимодействием Гейзенберга на решетках наиболее простой вид имеет основное состояние двухподрешеточных (bipartite) спиновых систем. Там оно обладает строгим антиферромагнитным порядком (порядком Ниля) и не вырождено, если не учитывать вырождение по полному спину. В таких системах решетка может быть разделена на две подрешетки, так что все взаимодействия внутри одной и той же подрешетки ферромагнитны, в то время как взаимодействия между различными подрешетками антиферромагнитны. Состояние Ниля соответствует однонаправленным спинам в каждой подрешетке, в то время как спины разных подрешеток противоположно направлены.

Квантовые флуктуации разрушают состояние Ниля, приводя к более сложному основному состоянию. Однако для двухподрешеточных спиновых систем основное состояние квантовой системы наследует многие важные свойства его классического аналога. В частности, квантовое основное состояние является невырожденным мультиплетом с полным спином, который совпадает со спином антиферромагнитного состояния Ниля [1, 2]. Кроме того, минимальная энергия в секторе, где суммарный спин имеет определенное значение, монотонно возрастает с ростом этого спина, а каждый уровень энергии не вырожден с точностью до мультиплета. В этом смысле не вырождено и общее основное состояние. Данное утверждение (теорема Либа–Маттиса) было установлено также и для ряда фермионных систем [2–5]. Оно важно потому, что дает важную информацию об основном состоянии и спектре двухподрешеточных спиновых систем без точного решения и численных расчетов.

Для случая более общих спиновых и фермионных систем с фрустрацией (т.е. не являющихся двухподрешеточными) теорема Либа–Маттиса не выполняется. Вместе с тем имеют место обобщения этой теоремы для определенных одномерных и квазиодномерных систем с фрустрацией. В частности, она обобщается для модели спиновой лестницы с диагональным взаимодействием [6], а также для той же модели с четырехспиновым взаимодействием [7]. Фрустрация решеточных систем может также быть вызвана наличием более широкой группы симметрии, чем обычная спиновая симметрия [8, 9]. Однако здесь также имеют место определенные обобщения данного утверждения для квантовых цепочек. Так, теорема Либа–Маттиса распространяется на антиферромагнитную цепочку Гейзенберга с унитарной симметрией и со спином, который описывается антисимметричным мультиплетом, а также на соответствующую фермионную систему [10, 11]. Для цепочки с ортогональной симметрией сохраняется невырожденность, а также определяются квантовые числа основного состояния в секторе с определенными четностями числа частиц каждого аромата [12, 13]. Важным свойством фермионной системы с такой симметрией является его естественная интерпретация посредством фермионов Майораны. Последние описываются эрмитовыми операторами и совпадают со своими античастицами.

Интерес к майорановским фермионам возник после того, как на концах сверхпроводящей цепочки (модель Китаева) были теоретически обнаружены образованные ими стабильные моды с нулевой энергией [14]. Стоит отметить, что недавно наипростейшая такая цепочка была реализована в эксперименте [15, 16]. В настоящее время нулевые граничные моды широко освещаются и исследуются в литературе ввиду того, что они зачастую являются индикатором топологической фазы, которая стабильна по отношению к локальным возмущениям, или той же фазы, которая защищена определенной симметрией (symmetry-protected topological phase). Последняя остается стабильной по отношению к локальным возмущениям, обладающим данной симметрией. Материалы, обладающие такими свойствами, широко применяются в квантовой информации и квантовых вычислениях [17].

2. Майорановские фермионы на цепочке с четырехчастичным взаимодействием и ортогональной симметрией

Обычные электроны обладают спином, что обеспечивает $\mathrm{SU}(2)$ инвариантность соответствующих изотропных проводящих систем (модели Хаббарда, t-J, и т. д.). Однако в определенных случаях возникают симметрии более высокого ранга, как в случае орбитального вырождения [18]. Можно также упомянуть ортогональную симметрию $\mathrm{SO}(5)$, объединяющую антиферромагнетизм и высокотемпературную сверхпроводимость [19, 20]. Более того, строятся искусственные квантовые системы на основе холодных атомов, захваченных в оптические решетки, обладающие унитарной симметрией [21, 22].

2.1. Гамильтониан взаимодействующей сверхпроводящей цепочки

Рассмотрим одномерную решеточную систему, состоящую из фермионов, которые характеризуются N различными квантовыми числами. Эти числа описывают различные ароматы, или проекции обобщенного спина при наличии расширенной симметрии. Фермионы задаются операторами рождения и уничтожения $c^{\pm}_{x,a}$, где $a = 1,2,\dots,N$ задает аромат, а $x = 1,2,\dots,L$ — положение фермиона в цепочке. Удобно сразу представить Гамильтониан модели через майорановские фермионы. Напомним, что один дираковский фермион выражается через два майорановских, или действительных фермиона [14]

$$c^{\pm}_{x,a} = \left(\gamma^{(1)}_{x,a} \mp \imath\gamma^{(2)}_{x,a}\right)\Big/2, \qquad (1)$$

которые удовлетворяют следующим антикоммутационным соотношениям:

$$\left\{\gamma^{(\lambda)}_{x,a}, \gamma^{(\lambda')}_{y,b}\right\} = 2\delta_{ab}\delta_{xy}\delta_{\lambda\lambda'}. \qquad (2)$$

Физические операторы выражаются через майорановские фермионы. Например, для одной частицы четность числа фермионов равна

$$\sigma = -\imath\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}, \qquad (3)$$

при этом случай $\sigma = -1$ соответствует дираковской частице, а $\sigma = 1$ – вакууму. Действуя по отдельности, майорановские операторы переводят частицы в дырки и наоборот: $\gamma^{(1)}c^{\pm}\gamma^{(1)} = c^{\mp}$.

Разделим гамильтониан одномерной системы на «свободную» и взаимодействующую части

$$H = H_0 + H_{\text{int}}. \qquad (4)$$

Здесь первый член

$$H_0 = -\imath\sum_{x,a,\lambda} s_{\lambda\bar{\lambda}}\gamma^{(\lambda)}_{x+1,a}\gamma^{(\bar{\lambda})}_{x,a} \qquad (5)$$

задает кинетику в системе, то есть скачки электрона вдоль соседних узлов решетки. Он также описывает рождение и уничтожение пары идентичных частиц, расположенных на соседних узлах. Черточка над $\lambda = 1,2$ переворачивает порядок двух частиц в майорановской паре: $\overline{1} = 2$, $\overline{2} = 1$. Матрица коэффициентов $s_{\lambda\lambda'}$ действительна, и в ней отсутствуют диагональные элементы. Как следствие этого, выражение H_0 через операторы $c^{\pm}$ также содержит действительные коэффициенты. Переход между ними задается формулой

$$s_{12} = t + r, \qquad s_{21} = -t + r, \qquad (6)$$

где t, r описывают соответственно амплитуды перехода и рождения пары.

Взаимодействие описывается четырехфермионным членом, который можно представить в компактном виде

$$H_{\text{int}} = \sum_{x,\lambda}\Big(u_{\lambda\lambda\lambda\lambda}(\Gamma^{(\lambda\lambda)}_{x+1,x})^2 + u_{\lambda\bar{\lambda}\lambda\bar{\lambda}}(\Gamma^{(\lambda\bar{\lambda})}_{x+1,x})^2 + u_{\lambda\bar{\lambda}\bar{\lambda}\lambda}\Gamma^{(\lambda\bar{\lambda})}_{x+1,x}\Gamma^{(\bar{\lambda}\lambda)}_{x+1,x} + u_{\lambda\lambda\bar{\lambda}\bar{\lambda}}\Gamma^{(\lambda\lambda)}_{x+1,x}\Gamma^{(\bar{\lambda}\bar{\lambda})}_{x+1,x}\Big), \qquad (7)$$

где тензор $u_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ действителен вследствие эрмитовости гамильтониана, и для удобства введено новое обозначение для свертки двух майорановских фермионов, расположенных в разных узлах:

$$\Gamma^{(\lambda_1\lambda_2)}_{x,y} = \sum_a \gamma^{(\lambda_1)}_{x,a}\gamma^{(\lambda_2)}_{y,a} = \boldsymbol{\gamma}^{(\lambda_1)}_x \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(\lambda_2)}_y. \tag{8}$$

Системы вида (4), (5) и (7) обобщают модель Китаева на случай наличия взаимодействия между частицами. За последнее время возрос интерес к таким моделям (см. недавний обзор [23]). В частности, на взаимодействующих цепочках Китаева наблюдалась суперсимметрия [24], рассматривались критические свойства при наличии конкурирующих взаимодействий [25]. На основе взаимодействия между этими частицами строились квантовые вертели (quantum gates) [26], а также калибровочные теории на решетках [27]. Стоит еще отметить, что простое четырехмайорановское взаимодействие со случайными константами долгое время остается популярным объектом исследования [28], к примеру, в связи с черными дырами. Однако в данной работе случайные константы не рассматриваются.

2.2. Симметрии и другие преобразования фермионной цепочки

Для выявления структуры гамильтониана (4)–(7) рассмотрим группу глобальных вращений $\mathrm{SO}(N)$, генераторы которой задаются майорановскими фермионами

$$L_{ab} = \frac{\imath}{4}\sum_x \sum_{\lambda=1,2} [\gamma^{(\lambda)}_{x,a}, \gamma^{(\lambda)}_{x,b}]. \tag{9}$$

Отметим, что локально они идентичны генераторам преобразования Лоренца в спиновом пространстве, выраженным через матрицы Дирака. Тогда легко видеть, что система симметрична относительно вращений (9), поскольку все спиновые индексы там свертываются:

$$[H, L_{ab}] = 0. \tag{10}$$

Кроме то, система симметрична и по отношению к спиновым отражениям, которые переворачивают определенную проекцию спина

$$[H,\sigma_a] = 0: \quad \sigma_a = (-\imath)^L \prod_{x=1}^{L} \gamma^{(1)}_{x,a}\gamma^{(2)}_{x,a}, \quad \sigma_a \gamma^{(\lambda)}_{x,b}\sigma_a = (-1)^{\delta_{ab}}\gamma^{(\lambda)}_{x,b}. \tag{11}$$

С другой стороны, отражение σ_a — это оператор четности всех фермионов указанного аромата (3). В результате модель (4)–(7) обладает полной ортогональной симметрией $\mathrm{O}(N)$. В силу симметрии (11) пространство состояний разбивается на отдельные сектора, которые характеризуются 2^N различными наборами квантовых чисел операторов четности $\sigma_a = \pm 1$. Гамильтониан инвариантен внутри каждого такого сектора, который можно идентифицировать, просто указывая ароматы с нечетным числом фермионов в возрастающем (или убывающем) порядке: $V_{a_1 \ldots a_k}$, где $k \le N$. Это означает, что $\sigma_{a_1} = \ldots = \sigma_{a_k} = -1$, а для остальных ароматов $\sigma_a = 1$.

Во взаимодействующем члене присутствует четное число майорановских фермионов каждого из двух типов, что является следствием его инвариантности при обращении времени. Инвариантен при этом и билинейный член H_0. Напомним, что обращение времени бесспиновых майорановских фермионов задается комплексным сопряжением [29]:

$$THT = H, \qquad T\gamma^{(\lambda)}T = (-1)^{\delta_{\lambda,2}}\gamma^{(\lambda)}, \qquad T\imath T = -\imath. \tag{12}$$

Оно не затрагивает дираковские операторы. Очевидно, что, как и для любых бесспиновых частиц, $T^2 = 1$. $\mathrm{SO}(N)$ генераторы (9), а также отражения (11) также инвариантны: $TL_{ab}T = L_{ab}$ и $T\sigma_a T = \sigma_a$.

Четырехфермионное взаимодействие (7) останется инвариантным при глобальной перестановке двух майорановских фермионов:

$$\gamma^{(1)} \leftrightarrow \gamma^{(2)}, \quad \text{или} \quad c^{\pm} \to \mp\imath c^{\mp}. \tag{13}$$

если тензор u будет удовлетворять условию

$$u_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = u_{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4}, \tag{14}$$

то есть зависеть лишь от вида взаимодействия $\left(u_{1111} = u_{2222},\, u_{1212} = u_{2121},\, \ldots\right)$. Они выражаются через соответствующие константы взаимодействия дираковских фермионов:

$$\begin{aligned} u_{\lambda\lambda\lambda\lambda} &= f + g - h - e, & u_{\lambda\bar{\lambda}\lambda\bar{\lambda}} &= f + g + h + e, \\ u_{\lambda\bar{\lambda}\bar{\lambda}\lambda} &= -f + g - h + e, & u_{\lambda\lambda\bar{\lambda}\bar{\lambda}} &= f - g - h + e. \end{aligned} \tag{15}$$

Совместное действие всех членов с коэффициентом f переставляет фермионы с разными ароматами на соседних узлах цепочки: $|a,b\rangle \to |b,a\rangle$. Результатом действия g-членов становится одновременная замена аромата пар одинаковых соседних фермионов: $|a,a\rangle \to |b,b\rangle$. Члены с h перемещают пару фермионов на соседний узел: $|ab,.\rangle \leftrightarrow |.,ab\rangle$, а взаимодействие типа e создает и уничтожает четыре соседние частицы, по две на узел: $|ab,ab\rangle \leftrightarrow |.,.\rangle$. Следует отметить, что генераторы группы вращений (9) также инвариантны относительно перестановки двух майорановских мод (13).

Свободная же часть гамильтониана H_0, как сам гамильтониан H, не инвариантна при обменном преобразовании (13). Легко видеть, что она останется инвариантной при антисимметричности тензора $s_{\lambda\lambda'}$, т. е. в отсутствие сверхпроводящего члена, соответствующего условию $r = 0$ (6). Следует отметить, что инвариантность при перестановке (13) важна для установления степени вырождения основного состояния простейших систем [30].

Унитарную группу $\mathrm{U}(N)$ в пространстве ароматов образуют генераторы группы вращений (9) совместно с тензором Фрадкина:

$$S_{ab} = \frac{\imath}{2}\sum_x (\gamma^{(1)}_{x,a}\gamma^{(2)}_{x,b} + \gamma^{(1)}_{x,b}\gamma^{(2)}_{x,a}) = \frac{\imath}{2}\sum_{x,\lambda}(-1)^{\bar{\lambda}}\gamma^{(\lambda)}_{x,a}\gamma^{(\bar{\lambda})}_{x,b}. \tag{16}$$

Рассмотрим условие, при котором система будет иметь унитарную симметрию. Это накладывает дополнительное ограничение на константы связи:

$$S_{ab} = \frac{\imath}{2}\sum_x (\gamma^{(1)}_{x,a}\gamma^{(2)}_{x,b} + \gamma^{(1)}_{x,b}\gamma^{(2)}_{x,a}) = \frac{\imath}{2}\sum_{x,\lambda}(-1)^{\bar{\lambda}}\gamma^{(\lambda)}_{x,a}\gamma^{(\bar{\lambda})}_{x,b}. \tag{17}$$

что соответствует условию $r = g = e = 0$ в (6) и (15). Действительно, для комплексных векторов только свертка $\bar{z}_a w_a$ унитарно инвариантна, чья действительная и мнимая части и задают два инварианта.

3. Невырожденность основного состояния в секторе с заданными фермионными четностями

Некоторые общие свойства основного состояния (невырожденность, симметрии и т. д.) для широкого круга квантовых решеточных моделей можно установить точно на основе вариационного принципа, если в системе удается найти базис, в котором недиагональные матричные элементы гамильтониана либо равны нулю, либо отрицательны. Такой базис был впервые построен для одномерной антиферромагнитной модели Гейзенберга со спином $1/2$ [31, 32], а затем — для двухподрешеточных систем [1,2]. Он отличается от обычного изинговского базиса знаковым множителем, который автоматически учитывается введением в рассмотрение обычных фермионных операторов [32]. В данной работе используется майорановское представление указанного базиса для гамильтониана (4).

Действуя на вакуум упорядоченными майорановскими операторами первого (или второго) типа, мы получим базис в пространстве фермионных состояний системы

$$\Psi^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n} = \gamma^{(1)}_{x_1, a_1} \ldots \gamma^{(1)}_{x_n, a_n} \mid 0\rangle. \tag{18}$$

Мульти-индексы возрастают слева направо, прочем условимся их упорядочить сначала по ароматам и лишь затем – по координатам. Например, для двух фермионов базис (18) состоит из состояний $\Psi^{xy}_{ab} = \gamma^{(1)}_{x,a}\gamma^{(1)}_{y,b} \mid 0\rangle$ при $a < b$, а также $\Psi^{xy}_{aa} = \gamma^{(1)}_{x,a}\gamma^{(1)}_{y,a} \mid 0\rangle$, где $x < y$. Далее, из определения **Error! Reference source not found.** ясно, что $\gamma^{(2)}_x \mid 0\rangle = \imath\gamma^{(1)}_x \mid 0\rangle$. Заметим также, что вышеопределённый базис инвариантен по отношению к обращению времени (18):

$$T\Psi^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n} = \Psi^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}. \tag{19}$$

Учитывая вышеизложенное, можно показать, что матричные элементы $\mathrm{O}(N)$-симметричного гамильтониана H отрицательны, либо зануляются при условии положительности констант, через которые выражаются коэффициенты h и [13]:

$$t, r, f, e, g, h > 0. \tag{20}$$

Заметим, что данное свойство нарушается для периодической цепочки, где связаны начальные и конечные узлы. Отрицательность базиса предполагает открытые граничные условия. А именно, в гамильтониане суммирование по узлам имеет вид: $\sum_{x=1}^{L-1} \ldots$, где L является размером системы.

Дираковский аналог базиса (18), выраженный через обычные фермионные операторы, был использован в работе [8] для $\mathrm{SU}(N)$ инвариантных спиновых цепочек, затем применен для ряда случаев, например, в одномерных фермионных решетках с той же симметрией [11].

Как отмечалось во введении, нахождение неположительного базиса для фрустрированных систем является в целом нерешенной проблемой. Заметим, что схожая (но не идентичная) проблема возникает и при применении метода Монте-Карло к квантовым системам. При расчете фермионных систем там возникает суммирование по быстро осциллирующим амплитудам, что в общем случае невозможно преодолеть выбором удобного базиса — так называемая проблема знака [33]. Интересно, что недавно эту проблему для определенных систем удалось решить переходом от обычных фермионов к фермионам Майораны [34, 35].

Последовательным действием членов гамильтониана (4) и (7) можно связать любые два базисных элемента в (18), которые имеют один и тот же набор квантовых чисел $\sigma_a = \pm 1$, которые характеризуют четность фермионов каждого аромата. Такие элементы образуют базис инвариантного сектора $V_{a_1 \ldots a_m}$. Тогда из вариационного принципа Перрона–Фробениуса следует, что основное состояние $\Omega_{a_1 \ldots a_m}$ в данном секторе не вырождено и разлагается по указанному базису со строго положительными коэффициентами [13]. Поэтому, как и сами базисные состояния (19), оно инвариантно по отношению к операции обращения времени:

$$T\Omega_{a_1 \ldots a_m} = \Omega_{a_1 \ldots a_m}. \tag{21}$$

На самом деле в условие указанного вариационного принципа входит неположительность лишь недиагональных матричных элементов гамильтониана. Диагональные же элементы могут иметь произвольное значение [1]. Вследствие этого приведенное утверждение верно и в том случае, если к гамильтониану прибавляется любая составляющая, которая диагональна в базисе (18): $H \to H + H_{\text{diag}}$. К качестве H_{diag} можно взять, например, число фермионов, или химический потенциал, четность фермионов, обобщенный потенциал Хаббарда и т.д.

Вместе с тем все сектора с одинаковым числом m вырождены, поскольку переходят друг в друга при произвольной перестановке ароматов, а все такие перестановки ортогональны и, следовательно, являются симметриями гамильтониана. Тогда все $\binom{N}{m}$ основных состояний $\Omega_{a_1 \ldots a_m}$ с различными сочетаниями индексов входят в один и то же $O(N)$ мультиплет. Поскольку каждое такое состояние не вырождено в своем секторе $V_{a_1 \ldots a_m}$, единственной возможностью является то, что все они объединяются в один антисимметричный мультиплет с указанной размерностью.

4. Другие виды взаимодействий между фермионами

Рассмотрим другие виды взаимодействия фермионов Майораны, для которых ненулевые матричные элементы в построенном базисе также отрицательны. Для этого свяжем дираковское и майорановское представления кинетических и сверхпроводящих членов в билинейном гамильтониане H_0, используя соотношения (1):

$$A_{x+1,x} = \boldsymbol{c}_{x+1}^{+}\cdot\boldsymbol{c}_x + \boldsymbol{c}_x^{+}\cdot\boldsymbol{c}_{x+1} = \frac{\imath}{2}\sum_{\lambda}(-1)^{\bar{\lambda}}\boldsymbol{\gamma}_{x+1}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\gamma}_x^{(\bar{\lambda})},$$
$$B_{x+1,x} = \boldsymbol{c}_{x+1}\cdot\boldsymbol{c}_x + \boldsymbol{c}_x^{+}\cdot\boldsymbol{c}_{x+1}^{+} = \frac{\imath}{2}\sum_{\lambda}\boldsymbol{\gamma}_{x+1}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\gamma}_x^{(\bar{\lambda})}. \tag{22}$$

Очевидно, левые части полученных уравнений положительны в базисе (18). Поэтому, любая квадратичная форма с положительными коэффициентами, составленная из операторов (22), также будет иметь положительные коэффициенты. Это относится, например, к форме, заданной на четырех соседних узлах:

$$f'A_{x+3,x+2}A_{x+1,x} + g'A_{x+3,x+2}B_{x+1,x} + h'B_{x+3,x+2}A_{x+1,x} + e'B_{x+3,x+2}B_{x+1,x}. \tag{23}$$

Видно, что отдельные члены, составляющие вышеуказанный оператор, эрмитовы ввиду антикоммутативности различных фермионов. Построенное на его основе взаимодействие будет иметь отрицательные матричные элементы

$$H_{\text{int}}^{(4)} = \sum_{x,\lambda,\lambda'} w_{\lambda\lambda'}(\boldsymbol{\gamma}_{x+3}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\gamma}_{x+2}^{(\bar{\lambda})})(\boldsymbol{\gamma}_{x+1}^{(\lambda')}\cdot\boldsymbol{\gamma}_x^{(\bar{\lambda}')}). \tag{24}$$

Здесь коэффициенты задаются следующей матрицей:

$$w_{\lambda\lambda'} = (-1)^{\bar{\lambda}+\bar{\lambda}'}f' + (-1)^{\bar{\lambda}}g' + (-1)^{\bar{\lambda}'}h' + e' = \begin{pmatrix} f'+g'+h'+e' & -f'+g'-h'+e' \\ -f'-g'+h'+e' & f'-g'-h'+e' \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $f', g', h', e' > 0$, и мы убрали несущественный нормировочный множитель $1/4$. Следует отметить, что взаимодействие (24) не является наиболее общим с желаемым свойством: можно также включить в рассмотрение фермионные взаимодействия без предварительной симметризации, примененной в формуле (22), как сделано в двухузловом случае (7). Однако в данном контексте это привело бы к еще более сложной структуре гамильтониана.

Стоит отметить, что оператор $A_{x+1,x} + B_{x+1,x} = \imath\boldsymbol{\gamma}_{x+1}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}_x^{(2)}$ также положителен в выбранном базисе. Он является наипростейшим среди всех майорановских операторов такого типа.

Рассмотрим еще одно взаимодействие, когда оба множителя, составляющие локальные члены в сумме (24), определены на одной и той же паре соседних узлов $x,\ x+1$. В этом случае

$$H'_{\text{int}} = \sum_{x,\lambda,\lambda'} w'_{\lambda\lambda'}(\boldsymbol{\gamma}_{x+1}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\gamma}_x^{(\bar{\lambda})})(\boldsymbol{\gamma}_{x+1}^{(\lambda')}\cdot\boldsymbol{\gamma}_x^{(\bar{\lambda}')}) = \sum_{x,\lambda}\Big(w'_{\lambda\lambda}(\Gamma_{x+1,x}^{(\lambda\bar{\lambda})})^2 + w'_{\lambda\bar{\lambda}}\Gamma_{x+1,x}^{(\lambda\bar{\lambda})}\Gamma_{x+1,x}^{(\bar{\lambda}\lambda)}\Big). \tag{26}$$

где наложено ограничение $g' = h'$ на параметры, что обеспечивает симметричность тензора

$$w'_{\lambda\lambda'} = \begin{pmatrix} f'+e'-2g' & e'-f' \\ e'-f' & f'+e'-2g' \end{pmatrix}, \qquad w'_{\lambda\lambda'} = w'_{\lambda'\lambda}. \tag{27}$$

Это условие необходимо для обеспечения эрмитовости гамильтониана H'_{int}. При этом указанная матрица принимает вид $w = (f'+e'-2g')I + (e'-f')X$, где $I,\ X$ являются соответственно единичной матрицей и x-матрицей Паули.

Заметим, что H'_{int} имеет структуру, аналогичную ранее рассмотренному взаимодействию (7). Оба они совпадут при наложении еще одного дополнительного условия на параметры взаимодействия, которое получается после учета уравнений (15) и (25):

$$f = h = f'/2, \qquad g = e = e'/2, \qquad g' = 0. \tag{28}$$

Конечно, всегда можно совместить четырехфермионные взаимодействия (7) и (26) с целью получения одного, более общего гамильтониана $H''_{\text{int}} = H_{\text{int}} + H'_{\text{int}}$, но он не будет таким же компактным, как (26).

Вместе с тем общая структура взаимодействующего члена (24) и (26) напрямую не распространяется на случай, когда четыре частицы Майораны оказываются расположенными на трех соседних узлах цепочки. Причиной этого, легко убедиться, является несовместимость двух требований к гамильтониану: эрмитовости и отсутствия недиагональных положительных матричных элементов. С другой стороны, попытка выделения эрмитовой составляющей приводит к выражению

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'} w_{\lambda\lambda'}\Big[(\gamma^{(\lambda)}_{x+1}\cdot\gamma^{(\bar\lambda)}_{x})(\gamma^{(\lambda')}_{x}\cdot\gamma^{(\bar\lambda')}_{x-1}) + (\gamma^{(\lambda')}_{x}\cdot\gamma^{(\bar\lambda')}_{x-1})(\gamma^{(\lambda)}_{x+1}\cdot\gamma^{(\bar\lambda)}_{x})\Big] = \sum_{\lambda} w_{\lambda\lambda}\gamma^{(\lambda)}_{x+1}\cdot\gamma^{(\lambda)}_{x-1}, \tag{29}$$

которое, в принципе, можно с изменением знака добавить к локальному члену билинейной составляющей гамильтониана H_0 (4).

Конструкция (24) легко обобщается на случай $2n$-фермионного взаимодействия. В случае шести фермионов, расположенных по одному на соседних узлах цепочки, соответствующее выражение приобретает вид

$$H^{(6)}_{\text{int}} = \sum_{x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} w_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\gamma^{(\lambda_1)}_{x+3}\cdot\gamma^{(\bar\lambda_1)}_{x+2})(\gamma^{(\lambda_2)}_{x+1}\cdot\gamma^{(\bar\lambda_2)}_{x})(\gamma^{(\lambda_3)}_{x-1}\cdot\gamma^{(\bar\lambda_3)}_{x-2}). \tag{30}$$

Коэффициенты образуют тензор третьего ранга, который представим в виде

$$w_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \sum_{s_1,s_2,s_3=0,1} \iota(-1)^{s_1\bar\lambda_1+s_2\bar\lambda_2+s_3\bar\lambda_3} f_{s_1s_2s_3}, \qquad f_{s_1s_2s_3} \geq 0. \tag{31}$$

Эти формулы представляют трехлинейную форму от операторов (22) с положительными коэффициентами $f_{s_1s_2s_3}$. Обобщение для $H^{(2n)}_{\text{int}}$ при n>3 очевидно.

5. Заключение

В работе построены модели, состоящие из взаимодействующих фермионов Майораны с ароматами на открытой цепочке и обладающие симметрией по отношению к вращениям и отражениям в пространстве ароматов. Указанные системы обобщают сверхпроводящую цепочку Китаева на случай наличия взаимодействия и дополнительного квантового числа — аромата. В результате симметрии все пространство состояний каждой такой системы распадается на отдельные сектора, которые характеризуются набором четностей фермионов каждого аромата. Конструкция соответствующих гамильтонианов подобрана таким образом, что в выделенном базисе все они лишены положительных элементов, расположенных вне диагонали. Данное свойство обеспечивает единственность состояния с наименьшей энергией внутри каждого сектора. В то же время основные состояния, принадлежащие разным секторам, объединяются в антисимметричные (по ароматам) мультиплеты ортогональной группы. Рассмотрены взаимодействия четырех фермионов, расположенных на двух и четырех соседних узлах решетки, а также шестифермионное взаимодействие на шести соседних узлах. Все указанные взаимодействия подобраны таким образом, что их выражения приобретают наиболее простой вид в майорановском представлении.

Работа выполнена в научно-исследовательской лаборатории теоретической физики Института физики ЕГУ и финансировалась Комитетом по высшему образованию и науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения в рамках программ 21AG-1C047 и 24FP-1F039 Комитета по высшему образованию и науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. **E.H. Lieb, D. Mattis**. J. Math. Phys., **3**, 749, (1962).
2. **E.H. Lieb**. Phys. Rev. Lett., **62,** 1201 (1989).
3. **T. Xiang, N. d'Ambrumenil**. Phys. Rev. B, **46**, 599 (1992).
4. **T. Xiang, N. d'Ambrumenil.** Phys. Rev. B, **46,** 11179 (1992).
5. **A. Angelucci, S. Sorella**. Phys. Rev. B, **54**, R12657(R) (1996).
6. **T. Hakobyan**. Phys. Rev. B, **75**, 214421 (2007).
7. **T. Hakobyan**. Phys. Rev. B, **78**, 012407 (2008).
8. **I. Affleck, E.H. Lieb**. Lett. Math. Phys., **12,** 57 (1986).
9. **Y.-Q. Li**. Phys. Rev. Lett., **87**, 127208 (2001).
10. **T. Hakobyan**. Nucl. Phys. B, **699**, 575 (2004).
11. **T. Hakobyan**. SIGMA, **6**, 024 (2010).
12. **T. Hakobyan**. Nucl. Phys. B, **898**, 248 (2015).
13. **T. Hakobyan**. Phys. Rev. B, **102**, 085128 (2020).
14. **A. Kitaev**. Physics-Uspekhi, **44**, 131 (2001).
15. **T. Dvir, etc**. Nature **614**, 445 (2023).
16. **K. Wright**. Physics, **16**, 24 (2023).
17. **B. Zeng, X. Chen, D.-L. Zhou, X.-G. Wen**. Quantum Information Meets Quantum Matter – From Quantum Entanglement to Topological Phase in Many-Body Systems. Springer New York, 2019.
18. **Y.Q. Li, M. Ma, D.N. Shi, F.C. Zhang**. Phys. Rev. Lett., **80,** 3527 (1998).
19. **S.-C. Zhang**. Science, **275**, 1089 (1997).
20. **E. Demler, W. Hanke, S.-C. Zhang**. Rev. Mod. Phys., **76,** 909 (2004).
21. **C. Honerkamp, W. Hofstetter**. Phys. Rev. Lett., **92**, 170403 (2004).
22. **M.A. Cazalilla, A.M. Rey**. Rep. Prog. Phys., **77**, 124401 (2014).
23. **A. Rahmani, M. Franz**. Rep. Prog. Phys., **82**, 084501 (2019).
24. **U. Miura**, **K. Totsuka**. e-print arXiv:2410.13354 (2024).
25. **N. Chepiga**. Phys. Rev. B, **108**, 054509 (2023).
26. **M. Ezawa**. Phys. Rev. B, **110,** 045417 (2024).
27. **J.-J. Miao**. SciPost Phys., **14**, 111 (2023).
28. **S. Sachdev, J. Ye**. Phys. Rev. Lett., **70,** 3339 (1993).
29. **R. Verresen, N.G. Jones, F. Pollmann**. Phys. Rev. Lett., **120**, 057001 (2018).
30. **Z.-C. Wei, X.-J. Han, Z.-Yu. Xie, T. Xiang**. Phys. Rev. B, **92,** 161105 (2015).
31. **W. Marshall**. Proc. R. Soc. A, **232**, 48 (1955).

32. **E.H. Lieb, T.D. Schultz, D.C. Mattis**. Ann. Physics, **16**, 407 (1961).
33. **G. Pan, Z.Y. Meng**. The Encyclopedia of Condensed Matter Physics, **1**, 879 (2024).
34. **Z.C. Wei, C. Wu, Y. Li, S. Zhang, T. Xiang**. Phys. Rev. Lett., **116**, 250601 (2016).
35. **Z.C. Wei, C. Wu, Y. Li, S. Zhang, T. Xiang**. Phys. Rev. Lett., **117**, 267002 (2016).

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԻ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅՈՒՆԸ ՊՏՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՄԲ ԵՎ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՄԲ ՕԺՏՎԱԾ ՄԱՅՈՐԱՆԱՅԻ ՇՂԹԱՆԵՐԻ ԱՌԱՆՁԻՆ ՍԵԿՏՈՐՆԵՐՈՒՄ

Տ.Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Կառուցվում են հավելյալ քվանտային թվով (բուրմունքով) օժտված փոխազդող Մայորանայի ֆերմիոններից կազմված տարբեր տիպի շղթաներ, որոնք ինվարիանտ են պտույտների և արտացոլումների նկատմամբ: Բոլոր դիտարկված համակարգերը բավարարում են Լիբ-Մաթիսի պայմանին: Արդյունքում, բուրմունքով որոշակի ֆերմիոնային զույգությամբ սեկտորներում նվազագույն էներգիայի վիճակները այլասերված չեն: Տարբեր սեկտորների վիճակները կազմում են անտիսիմետրիկ մուլտիպլետներ այդ քվանտային թվերի նկատմամբ:

SECTORIAL GROUND-STATE NONDEGENERACY IN MAJORANA CHAINS WITH INTERACTION AND ORTHOGONAL SYMMETRY

T.S. HAKOBYAN

Various quantum chains consisting of interacting Majorana fermions with flavors are constructed. These systems are invariant with respect to the rotations and reflections in the flavor space. The entire space of states splits into sectors characterized by a specific set of fermionic parities related to different flavors. All systems under consideration satisfy the Lieb-Mattis condition. As a result, the lowest-energy states within individual sectors are nondegenerate. The sectorial ground states are combined into antisymmetric (in flavor numbers) multiplets.