Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 2, 2025, стр. 52 – 64.

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕРОМОРФНЫХ ζ – ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

ДЖ.-Л. КЮ, Ж.-Г. ВАНГ, М. ЛИ

Чаншаский университет науки и технологий, Чанша, Хунань, КНР[1]
Первый педагогический университет Хунань, Чанша, Хунань, КНР
E-mails: *qiujiale2023@163.com; wangmath@163.com; minglimath@163.com*

Аннотация. В этой статье, мотивированной в основном аналитическими ζ-звездообразными функциями, мы вводим и исследуем класс $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ мероморфных ζ-звездообразных функций. Выводятся такие результаты, как свойство свертки, неравенства коэффициентов, свойство окрестности и частичные суммы для этого класса функций.

MSC2020 numbers: 30C45; 30C80.

Ключевые слова: мероморфная функция; ζ-звездообразная функция; свертка; дифференциальное подчинение.

1. Введение

Пусть $\mathbb{U}$ обозначает открытый единичный круг $\mathbb{U} := \{z : z \in \mathbb{C} \text{ and } |z| < 1\}$ и $\mathbb{U}^* := \mathbb{U}\backslash\{0\}$. Класс мероморфных функций, определенных в $\mathbb{U}^*$ и имеющих вид

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

обозначается через Σ.

Как обычно, для двух функций f, $g \in \Sigma$, свертка f и g определяется как

$$(f * g)(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}^*),$$

где

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}^*).$$

Для двух аналитических функций f и g в $\mathbb{U}$ мы говорим, что f подчинена g в $\mathbb{U}$, что записывается как $f(z) \prec g(z)$, если существует функция Шварца $\omega(z)$ (т. е. w аналитическая в $\mathbb{U}$ с $\omega(0) = 0$ и $|\omega(z)| < 1$ для каждого $z \in \mathbb{U}$), такая, что $f(z) = g(\omega(z)), z \in \mathbb{U}$.

[1]Настоящее исследование было поддержано *Фондом естественных наук провинции Хунань* в рамках гранта № 2022JJ30185 и *Национальным Фондом естественных наук* в рамках гранта № 12001063 и гранта № 12171055 КНР.

Пусть $\mathcal{A}$ — класс нормированных аналитических функций τ в $\mathbb{U}$, т. е.

$$\tau(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} d_n z^n.$$

Для $f \in \mathcal{A}$ пусть $\mathcal{S}^*(\alpha)$ — класс звездообразных функций порядка α, которые удовлетворяют условию

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1;\ z \in \mathbb{U}).$$

Ввиду свертки мы видим, что производную f' можно записать как

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left\{f(z) * \frac{z}{(1-z)^2}\right\}. \tag{1.2}$$

Мы отсылаем читателя к [1] – [5] для недавних исследований звездообразных функций порядка α. Для $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| \leq 1$, [6] (см. также [7]) привели следующее обобщение (1.2)

$$D_\zeta f(z) = \frac{1}{z}\left\{f(z) * \frac{z}{(1-\zeta z)(1-z)}\right\}. \tag{1.3}$$

На основе вышеприведенного наблюдения они определили класс $\mathcal{S}^*(\zeta, \alpha)$ ζ-звездообразных функций порядка α: для $f \in \mathcal{A}$ и заданного $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| \leq 1$ мы говорим, что f принадлежит $\mathcal{S}^*(\zeta, \alpha)$, если

$$\Re\left(\frac{zD_\zeta f(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1;\ z \in \mathbb{U}), \tag{1.4}$$

где D_ζ задается как в (1.3). Для недавних исследований аналитических ζ-звездообразных функций мы отсылаем читателя к [8] – [18].

Напомним класс мероморфных звездообразных функций порядка α, который обозначается $\mathcal{MS}^*(\alpha)$. Функция $f \in \mathcal{MS}^*(\alpha)$ удовлетворяет условиям $f \in \Sigma$ и

$$\Re\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1; z \in \mathbb{U}).$$

Заметим, что для каждой $f \in \Sigma$ ее производная f' может быть представлена как

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left\{f(z) * \frac{2z-1}{z(1-z)^2}\right\}. \tag{1.5}$$

Более подробное изучение мероморфных звездообразных функций можно найти в [19] – [29].

Основываясь по существу на классе $\mathcal{S}^*(\zeta, \alpha)$ и свойств свертки (1.5), мы вводим следующий класс мероморфных функций $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$, который является обобщением класса $\mathcal{MS}^*(\alpha)$.

Определение 1.1. Для $f \in \Sigma$ и заданного $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| \leq 1$ говорят, что функция f принадлежит классу $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ мероморфных ζ-звездообразных функций порядка α, если она удовлетворяет условию

$$\Re\left(-\frac{zd_\zeta f(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1;\ z \in \mathbb{U}), \tag{1.6}$$

где

$$d_\zeta f(z) := \frac{1}{z}\left\{f(z) * \frac{2z-1}{z(1-\zeta z)(1-z)}\right\} = \frac{1}{z}\{f(z) * h_\zeta(z)\}. \tag{1.7}$$

Замечание 1.1. Функция h_ζ в (1.7) имеет вид

$$h_\zeta(z) = \frac{2z-1}{z(1-\zeta z)(1-z)} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}\right)z^n \quad (z \in \mathbb{U}^*).$$

Для $f \in \Sigma$ вида (1.1) имеем

$$\begin{aligned} d_\zeta f(z) &= \frac{1}{z}\left\{-\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}\right)a_n z^n\right\} \\ &= \frac{1}{z}\left\{-\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}[n]_\zeta a_n z^n\right\} \quad (z \in \mathbb{U}^*), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned} [n]_\zeta &:= \frac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} \\ &= 1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^n-\zeta^{n+1} \quad (\zeta \neq 1). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Когда $\zeta = 1$, $d_1 f$ сводится к классической производной f'.

2. Предварительные результаты

Следующие леммы нужны для доказательства наших основных результатов.

Лемма 2.1. *Для $0 \le \alpha < 1$ и $|\zeta| \le 1$ последовательность $\{A_{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ определяется следующим образом*

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1|\,|\zeta-2|}, \\ A_{m+1} = 2(1-\alpha)\left|\dfrac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}}\right|\left(1+\sum\limits_{k=0}^{m-1}A_{k+1}\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $m \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}$. Тогда

$$A_{m+1} = \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1|\,|\zeta-2|}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{\left|2-\zeta-2\zeta^{m+1-k}+\zeta^{m+2-k}\right|+2(1-\alpha)\,|\zeta-1|}{|2-\zeta-2\zeta^{m+2-k}+\zeta^{m+3-k}|}.$$

Доказательство. Из (2.1) легко видеть, что

$$\left|2-\zeta-2\zeta^{m+1}+\zeta^{m+2}\right|A_m = 2(1-\alpha)\,|\zeta-1|\left(1+\sum_{k=0}^{m-2}A_{k+1}\right). \tag{2.2}$$

В силу (2.1) и (2.2) имеем, что

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{\left|2-\zeta-2\zeta^{m+1}+\zeta^{m+2}\right|+2(1-\alpha)\,|\zeta-1|}{|2-\zeta-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}|}. \tag{2.3}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}A_{m+1} &= \frac{A_{m+1}}{A_m}\cdot\frac{A_m}{A_{m-1}}\cdot\dots\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot A_1\\ &= \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1|\,|\zeta-2|}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{\left|2-\zeta-2\zeta^{m+1-k}+\zeta^{m+2-k}\right|+2(1-\alpha)\,|\zeta-1|}{|2-\zeta-2\zeta^{m+2-k}+\zeta^{m+3-k}|}.\end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы 2.1. □

Пусть $\mathcal{P}$ обозначает класс функций Каратаеодори. Функция $p\in\mathcal{P}$, если она аналитична в $\mathbb{U}$ с положительной действительной частью и нормирована:

$$p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n. \tag{2.4}$$

Лемма 2.2. ([30]) *Если функция $p\in\mathcal{P}$, то*

$$2p_2=p_1^2+\left(4-p_1^2\right)x \tag{2.5}$$

для некоторого x с $|x|\le 1$.

Лемма 2.3. ([31]) *Если функция $p\in\mathcal{P}$, то $|p_n|\le 2$, и неравенство точное.*

3. Основные результаты

Во-первых, мы выводим следующее свойство свертки для класса $\mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha)$.

Теорема 3.1. *Если $f\in\mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha)$ и $\theta\in(0,2\pi)$, то*

$$f*\left\{\frac{1+(1-2\alpha)e^{i\theta}}{z(1-z)}+\frac{(2z-1)(1-e^{i\theta})}{z(1-\zeta z)(1-z)}\right\}\neq 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Для функции $f\in\mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha)$ из (1.6) выводим, что

$$-\frac{zd_\zeta f(z)}{f(z)}\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z},$$

или эквивалентно,

$$-\frac{zd_\zeta f(z)}{f(z)}=\frac{1+(1-2\alpha)\omega(z)}{1-\omega(z)}, \tag{3.2}$$

где ω — функция Шварца в $\mathbb{U}$. Из (3.2) следует, что

$$-\frac{zd_\zeta f(z)}{f(z)}\neq\frac{1+(1-2\alpha)e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\quad(z\in\mathbb{U};\ 0<\theta<2\pi). \tag{3.3}$$

С помощью (1.7) имеем

$$zd_\zeta f(z)=f(z)*\frac{2z-1}{z(1-\zeta z)(1-z)}. \tag{3.4}$$

Заметим, что функция f может быть записана как

$$f(z)=f(z)*\frac{1}{z(1-z)}, \tag{3.5}$$

и нетрудно получить утверждение (3.1) из (3.3), (3.4) и (3.5). □

Докажем некоторые неравенства для первых коэффициентов функции f из класса $\mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha)$.

Теорема 3.2. *Пусть $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha)$. Тогда,*

$$|a_0| \le \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta-2|},$$

$$|a_1| \le \frac{4(1-\alpha)^2}{|(\zeta+1)(\zeta-2)^2|} + \frac{2(1-\alpha)}{|(\zeta+1)(\zeta-)|},$$

$$|a_2| \le \frac{8(1-\alpha)^3}{|(\zeta+1)(\zeta-2)^3(\zeta^2+\zeta+1)|} + \frac{4\,|\zeta+2|\,(1-\alpha)^2}{|(\zeta+1)(\zeta-2)^2(\zeta^2+\zeta+1)|} + \frac{2(1-\alpha)}{|(\zeta-2)(\zeta^2+\zeta+1)|}.$$

Доказательство. Для $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha)$, в силу (3.2), имеем

$$-\frac{zd_\zeta f(z)}{f(z)} = \varphi(\omega(z)) \quad (z \in \mathbb{U}),$$

где ω – функция Шварца, и

$$\varphi(z) = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}. \tag{3.6}$$

Учитывая связь функций Шварца и Каратеодори, существует функция $p \in \mathcal{P}$ такая, что

$$p(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{p(z)-1}{p(z)+1} \\ &= \frac{1}{2}p_1 z + \frac{1}{2}\left(p_2 - \frac{1}{2}p_1^2\right)z^2 + \frac{1}{2}\left(p_3 - p_1p_2 + \frac{1}{4}p_1^3\right)z^3 + \cdots . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Используя (3.6) и (3.7), легко видеть, что

$$\varphi(\omega(z)) = 1 + (1-\alpha)p_1 z + (1-\alpha)p_2 z^2 + (1-\alpha)p_3 z^3 + \cdots . \tag{3.8}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} -\frac{zd_\zeta f(z)}{f(z)} =& 1 + (\zeta-2)a_0 z + \left[\left(\zeta^2-\zeta-2\right)a_1 - (\zeta-2)\,a_0^2\right]z^2 \\ &+ \left[\left(\zeta^3-\zeta^2-\zeta-2\right)a_2 - \left(\zeta^2-4\right)a_0a_1 + (\zeta-2)\,a_0^3\right]z^3 + \cdots . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Сравнивая коэффициенты в (3.8) и (3.9), находим, что

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1-\alpha}{\zeta-2}p_1, \\ a_1 &= \frac{(1-\alpha)^2}{(\zeta+1)(\zeta-2)^2}p_1^2 + \frac{1-\alpha}{(\zeta+1)(\zeta-2)}p_2, \\ a_2 &= \frac{(1-\alpha)^3}{(\zeta+1)(\zeta-2)^3(\zeta^2+\zeta+1)}p_1^3 + \frac{(\zeta+2)(1-\alpha)^2}{(\zeta+1)(\zeta-2)^2(\zeta^2+\zeta+1)}p_1p_2 + \\ &+ \frac{1-\alpha}{(\zeta-2)(\zeta^2+\zeta+1)}p_3. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Применив лемму 2.3 и (3.10), получим утверждение теоремы 3.2. $\square$

Ниже мы приводим оценки коэффициентов Тейлора функции $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ с $a_0 = 0$.

Теорема 3.3. *Пусть $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ с $a_0 = 0$. Тогда для $m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$|a_{m+2}| \leq \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1|\,|\zeta-2|} \prod_{k=0}^{m} \frac{\left|2-\zeta-2\zeta^{m+2-k}+\zeta^{m+3-k}\right| + 2(1-\alpha)\,|\zeta-1|}{|2-\zeta-2\zeta^{m+3-k}+\zeta^{m+4-k}|}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Для $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$, имеем

$$p(z) := \frac{-\dfrac{zd_\zeta f(z)}{f(z)} - \alpha}{1-\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in \mathcal{P}. \tag{3.12}$$

В силу (3.12),

$$-zd_\zeta f(z) = (1-\alpha)p(z)f(z) + \alpha f(z). \tag{3.13}$$

Из (1.8) (3.12) и (3.13) следует

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta} a_n z^n = (1-\alpha)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n\right)\left(\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right) + \\ + \alpha\left(\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Сравнивая коэффициенты z^{m+1} $(m \in \mathbb{N}_0)$ в равенстве (3.14), получим

$$-\frac{1-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}}{1-\zeta} a_{m+1} = (1-\alpha)(a_{m+1} + p_1 a_m + \cdots + p_m a_1 + p_{m+2}) + \alpha a_{m+1}. \tag{3.15}$$

В силу леммы 2.3, из (3.15) находим

$$|a_1| \leq \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1|\,|\zeta-2|},$$

и

$$|a_{m+1}| \leq 2(1-\alpha)\left|\frac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}}\right| \left(1+\sum_{k=0}^{m-1} |a_{k+1}|\right) \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{3.16}$$

Теперь определим последовательность $\{A_{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1|\,|\zeta-2|}, \\[2ex] A_{m+1} = 2(1-\alpha)\left|\dfrac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+2}+\zeta^{m+3}}\right| \left(1+\sum\limits_{k=0}^{m-1} A_{k+1}\right) \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases} \tag{3.17}$$

Далее мы применим принцип математической ндукции для доказательства неравенства

$$|a_{m+1}| \leq A_{m+1} \quad (m \in \mathbb{N}_0). \tag{3.18}$$

Очевидно, что $|a_1| \le A_1$. Теперь, допустив, что $|a_{j+1}| \le A_{j+1}$ ($j = 0, 1, \dots, m$; $m \in \mathbb{N}_0$), из (3.16) и (3.17) находим, что

$$\begin{aligned}|a_{m+2}| \le & 2(1-\alpha)\left|\frac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+3}+\zeta^{m+4}}\right|\left(1+\sum_{k=0}^{m}|a_{k+1}|\right)\\ \le & 2(1-\alpha)\left|\frac{\zeta-1}{2-\zeta-2\zeta^{m+3}+\zeta^{m+4}}\right|\left(1+\sum_{k=0}^{m}A_{k+1}\right) = A_{m+2} \quad (m \in \mathbb{N}_0).\end{aligned}$$

В силу леммы 2.1

$$A_{m+2} = \frac{2(1-\alpha)}{|\zeta+1|\,|\zeta-2|}\prod_{k=0}^{m}\frac{\left|2-\zeta-2\zeta^{m+2-k}+\zeta^{m+3-k}\right|+2(1-\alpha)\,|\zeta-1|}{\left|2-\zeta-2\zeta^{m+3-k}+\zeta^{m+4-k}\right|}. \tag{3.19}$$

Из (3.18) и (3.19), получим (3.11). Теорема 3.3 доказана. □

Теорема 3.4. *Если функция* $f \in \Sigma$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left|\frac{2-\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}\right|+\left|\frac{2\alpha-(2\alpha-1)\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}\right|\right)|a_n| \le 2(1-\alpha), \tag{3.20}$$

тогда $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$.

Доказательство. Легко провернить, что условие $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ эквивалентно условию

$$\left|-\frac{zd_\zeta f(z)}{f(z)}-1\right| < \left|-\frac{zd_\zeta f(z)}{f(z)}-(2\alpha-1)\right|.$$

Если f удовлетворяет условию (3.20), тогда

$$\begin{aligned}&\left|\frac{-\dfrac{zd_\zeta f(z)}{f(z)}-1}{-\dfrac{zd_\zeta f(z)}{f(z)}-(2\alpha-1)}\right| = \left|\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2-\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}a_nz^n}{(2\alpha-2)\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2\alpha-1+\dfrac{1-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}\right)a_nz^n}\right|\\ &= \frac{\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2-\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}a_nz^n\right|}{\left|(2\alpha-2)\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2\alpha-(2\alpha-1)\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}a_nz^n\right|}\\ &< \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\dfrac{2-\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}\right||a_n|}{(2-2\alpha)-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\dfrac{2\alpha-(2\alpha-1)\zeta-2\zeta^{n+1}+\zeta^{n+2}}{1-\zeta}\right||a_n|} \le 1.\end{aligned}$$

Теорема 3.4 доказана. □

Теорема 3.5. *Пусть* $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ *с* $0 \le \zeta \le 1$. *Тогда*

$$\left|a_1 - a_0^2\right| \le \frac{\zeta(1-\alpha)^2+2(1-\alpha)(2-\zeta)}{(1+\zeta)(2-\zeta)^2}.$$

Доказательство. В силу (2.5), и (3.10), имеем:

$$\begin{aligned}\left|a_1 - a_0^2\right| &= \left|\frac{(1-\alpha)^2}{(\zeta+1)(\zeta-2)^2}p_1^2 + \frac{1-\alpha}{(\zeta+1)(\zeta-2)}p_2 - \frac{(1-\alpha)^2}{(\zeta-2)^2}p_1^2\right| \\ &= \left|\frac{-2\zeta(1-\alpha)^2 + (\zeta-2)(1-\alpha)}{2(\zeta+1)(\zeta-2)^2}p_1^2 + \frac{1-\alpha}{2(\zeta+1)(\zeta-2)}x\left(4-p_1^2\right)\right|.\end{aligned}$$

Допустим $c = |p_1| \in [0,2]$ и $t = |x| \leq 1$. Тогда

$$\left|a_1 - a_0^2\right| \leq \frac{2\zeta(1-\alpha)^2 + (2-\zeta)(1-\alpha)}{2(\zeta+1)(\zeta-2)^2}c^2 + \frac{1-\alpha}{2(\zeta+1)(2-\zeta)}\left(4-c^2\right)t.$$

Положив

$$\Psi_\zeta(c,t) = \frac{2\zeta(1-\alpha)^2 + (2-\zeta)(1-\alpha)}{2(\zeta+1)(\zeta-2)^2}c^2 + \frac{1-\alpha}{2(\zeta+1)(2-\zeta)}\left(4-c^2\right)t,$$

легко проверить, что

$$\frac{\partial \Psi_\zeta}{\partial t} = \frac{1-\alpha}{2(1+\zeta)(2-\zeta)}\left(4-c^2\right) \geq 0.$$

Таким образом,

$$\max\{\Psi_\zeta(c,t)\} = \Psi_\zeta(c,1) = \frac{\zeta(1-\alpha)^2}{(1+\zeta)(2-\zeta)^2}c^2 + \frac{2(1-\alpha)}{(1+\zeta)(2-\zeta)} =: \Phi_\zeta(c).$$

Следовательно, $\max\{\Phi_\zeta(c)\} = \Phi_\zeta(1)$ for $0 \leq \zeta \leq 1$ и

$$\left|a_1 - a_0^2\right| \leq \Phi_\zeta(1) = \frac{\zeta(1-\alpha)^2 + 2(1-\alpha)(2-\zeta)}{(1+\zeta)(2-\zeta)^2}.$$

Теорема 3.5 доказана. □

Вдохновленные значительными результатами [32] и [33], основанными на понятии окрестности аналитических функций, мы вводим δ-окрестность мероморфных функций следующим образом:

$$\begin{aligned} N_\delta(f) := \Bigg\{ g \in \Sigma : g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{и} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{1-\alpha}|a_n - b_n| < \delta \quad (\delta \geq 0)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Теорема 3.6. *Если $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha)$ и*

$$\frac{f(z) + \varepsilon z^{-1}}{1+\varepsilon} \in \mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha) \quad (\varepsilon \in \mathbb{C};\ |\varepsilon| \leq \delta;\ \delta > 0), \tag{3.22}$$

тогда $N_\delta(f) \subset \mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha)$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 3.4, мы видим, что $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta,\alpha)$ эквивалентно условию

$$\left|\frac{-\dfrac{zd_\zeta f(z)}{f(z)} - 1}{-\dfrac{zd_\zeta f(z)}{f(z)} - (2\alpha-1)}\right| < 1 \quad (z \in \mathbb{U}^*), \tag{3.23}$$

откуда следует, что функция $g \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\dfrac{zd_\zeta g(z)}{g(z)} + 1}{\dfrac{zd_\zeta g(z)}{g(z)} + (2\alpha - 1)} \neq \sigma \quad (z \in \mathbb{U}^*;\ \sigma \in \mathbb{C},\ |\sigma| = 1),$$

что можно переписать как

$$\frac{(g * h)(z)}{z^{-1}} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{U}^*), \tag{3.24}$$

где

$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}^*) \tag{3.25}$$

с

$$h_n = \frac{1 + \dfrac{1 - 2\zeta^{n+1} + \zeta^{n+2}}{1 - \zeta} - \left(2\alpha - 1 + \dfrac{1 - 2\zeta^{n+1} + \zeta^{n+2}}{1 - \zeta}\right)\sigma}{2(1 - \alpha)\sigma}. \tag{3.26}$$

Из (1.9) и (3.26) следует, что

$$\begin{aligned} |h_n| &\leq \frac{1 + \left|\dfrac{1 - 2\zeta^{n+1} + \zeta^{n+2}}{1 - \zeta}\right| + \left|2\alpha - 1 + \dfrac{1 - 2\zeta^{n+1} + \zeta^{n+2}}{1 - \zeta}\right| |\sigma|}{2(1 - \alpha)\,|\sigma|} \\ &\leq \frac{1 + \alpha + (n + 1)\,|\zeta|}{1 - \alpha}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Если для $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ имеет место (3.22), то согласно (3.24),

$$\frac{(f * h)(z)}{z^{-1}} \neq -\varepsilon \quad (|\varepsilon| \leq \delta;\ \delta > 0).$$

Следовательно,

$$\left|\frac{(f * h)(z)}{z^{-1}}\right| \geq \delta \quad (\delta > 0;\ z \in \mathbb{U}). \tag{3.28}$$

Теперь допустим, что

$$q(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n.$$

Если $q \in N_\delta(f)$, то

$$\begin{aligned} \left|\frac{[(q - f) * h](z)}{z^{-1}}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} (q_n - a_n) h_n z^n\right| \\ &\leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \alpha + (n + 1)\,|\zeta|}{1 - \alpha}\,|q_n - a_n| < \delta. \end{aligned} \tag{3.29}$$

В силу (3.28) и (3.29),

$$\left|\frac{(q * h)(z)}{z^{-1}}\right| = \left|\frac{\{[f + (g - f)] * h\}(z)}{z^{-1}}\right| \geq \left|\frac{(f * h)(z)}{z^{-1}}\right| - \left|\frac{[(q - f) * h](z)}{z^{-1}}\right| > 0,$$

откуда следует $\frac{(q*h)(z)}{z^{-1}} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{U})$. Таким образом, $q(z) \in N_\delta(f) \subset \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$. Теорема 3.6 доказана. □

В заключении мы приводим свойста частных сумм для $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$.

Теорема 3.7. *Пусть* $f \in \Sigma$ *и*

$$f_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{1-\alpha}|a_n| \leq 1, \tag{3.30}$$

тогда

(1) $f \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$;

(2)

$$\Re\left(\frac{f(z)}{f_n(z)}\right) \geq \frac{2\alpha+(n+1)|\zeta|}{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}, \tag{3.31}$$

и

$$\Re\left(\frac{f_n(z)}{f(z)}\right) \geq \frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{2+(n+1)|\zeta|}. \tag{3.32}$$

Оценки (3.31) *и* (3.32) *точные.*

Доказательство. Если $f_1(z) = z^{-1} \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$, тогда

$$\frac{f_1(z)+\varepsilon z^{-1}}{1+\varepsilon} = z^{-1} \in \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha).$$

Из (3.30) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{1-\alpha}|a_n - 0| \leq 1,$$

или, что одно и то же, $f \in N_1(z^{-1})$. Согласно теореме 3.6, $f \in N_1(z^{-1}) \subset \mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$. Ясно, что

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k| + \frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{1-\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+\alpha+(k+1)|\zeta|}{1-\alpha}|a_k| \leq 1. \tag{3.33}$$

Допустим, что

$$\begin{aligned}\phi(z) &:= \frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{1-\alpha} \times \left(\frac{f(z)}{f_n(z)} - \frac{2\alpha+(n+1)|\zeta|}{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}\right)\\ &= 1 + \frac{\frac{1+\alpha+(n+1)|\zeta|}{1-\alpha}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k+1}}{1+\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Из (3.33) и (3.34) следует, что

$$\left|\frac{\phi(z)-1}{\phi(z)+1}\right| \leq \frac{\dfrac{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|}{1-\alpha}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k|}{2-2\sum\limits_{k=0}^{n}|a_k|-\dfrac{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|}{1-\alpha}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k|} \leq 1,$$

$(z \in \mathbb{U})$, откуда,

$$\Re(\phi(z)) \geq 0 \quad (z \in \mathbb{U}). \tag{3.35}$$

Таким образом, утверждение (3.31) теоремы 3.7 выполняется.

Далее, если

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|} z^{n+1} \quad (n \geq 0), \tag{3.36}$$

то $f_n(z) = \dfrac{1}{z}$ и для $z = re^{i\frac{\pi}{n+2}}$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{f_n(z)} &= 1 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|} z^{n+2} \\ &= 1 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|} \cdot \left(-r^{n+2}\right). \end{aligned} \tag{3.37}$$

При $r \to 1^-$, получаем

$$\frac{f(z)}{f_n(z)} = \frac{2\alpha+(n+1)\,|\zeta|}{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|},$$

что доказывает точность оценки (3.31) для любого $n \in \mathbb{N}$.

Аналогично, предположив, что

$$\begin{aligned} \psi(z) &:= \frac{2+(n+1)\,|\zeta|}{1-\alpha} \times \left(\frac{f_n(z)}{f(z)} - \frac{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|}{2+(n+1)\,|\zeta|}\right) \\ &= 1 - \frac{\dfrac{2+(n+1)\,|\zeta|}{1-\alpha}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k+1}}{1+\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

с учетом (3.33) и (3.38), заключаем, что

$$\left|\frac{\psi(z)-1}{\psi(z)+1}\right| \leq \frac{\dfrac{2+(n+1)\,|\zeta|}{1-\alpha}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k|}{2-2\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|-\dfrac{2+(n+1)\,|\zeta|}{1-\alpha}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k|} \leq 1 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

откуда,

$$\Re(\psi(z)) \geq 0 \quad (z \in \mathbb{U}). \tag{3.39}$$

Для функции f, заданной в (3.36) при $z = re^{i\frac{2\pi}{n+2}}$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{f_n(z)}{f(z)} &= \frac{1}{1 + \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|} z^{n+2}} \\ &= \frac{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|}{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta| + (1-\alpha)r^{n+2}}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Следовательно,

$$\frac{f_n(z)}{f(z)} = \frac{1+\alpha+(n+1)\,|\zeta|}{2+(n+1)\,|\zeta|}$$

при $r \to 1^-$. Из (3.38) и (3.39) получаем утверждение (3.32) теоремы 3.7, и оценка точная. □

Замечание 3.1. Беря $\zeta = 1$ в полученных результатах, получим соответствующие результаты для класса $\mathcal{MS}^*(\alpha)$ мероморфных звездообразных функций порядка α.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные коментарии и предложения, которые существенно улучшили качество настоящей статьи.

Abstract. In this paper, motivated essentially by analytic ζ-starlike functions, we introduce and investigate the class $\mathcal{MS}^*(\zeta, \alpha)$ of meromorphic ζ-starlike functions. Results like a convolution property, coefficient inequalities, a neighborhood property and partial sums for this function class are derived.

Список литературы

[1] R. M. Ali, S. Kumar and V. Ravichandran, "The third Hermitian-Toeplitz and Hankel determinants for parabolic starlike functions", Bull. Korean Math. Soc., **60**, 281 – 291 (2023).

[2] R. M. Ali, S. K. Lee and S. R. Mondal, "Starlikeness of a generalized Bessel function", Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **25**, 527 – 540 (2018).

[3] S. Malik, R. M. Ali and V. Ravichandran, "The Booth lemniscate starlikeness radius for Janowski starlike functions", Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **45**, 2715 – 2732 (2022).

[4] Y. Sun and Z.-G. Wang, "Sharp bounds on Hermitian Toeplitz determinants for Sakaguchi classes", Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **46**, Paper No. 59, 23 pp. (2023).

[5] Z.-G. Wang, M. Hussain and X.-Y. Wang, "On sharp solutions to majorization and Fekete-Szegö problems for starlike functions", Miskolc Math. Notes, **24**, 1003 – 1019 (2023).

[6] K. Piejko and J. Sokół, "On convolution and q-calculus", Bol. Soc. Mat. Mex. (3), **26**, 349 – 359 (2020).

[7] K. Piejko, J. Sokół and K. Trąbka-Więcław, "On q-starlike functions", Bull. Sci. Math., **186**, Paper No. 103285, 10 pp. (2023).

[8] A. Akgül, "An application of modified sigmoid function to a class of q-starlike and q-convex analytic error functions", Turkish J. Math., **46**, 1318 – 1329 (2022).

[9] M. Arif and B. Ahmad, "New subfamily of meromorphic multivalent starlike functions in circular domain involving q-differential operator", Math. Slovaca, **68**, 1049 – 1056 (2018).

[10] S. Agrawal and S. K. Sahoo, "A generalization of starlike functions of order alpha", Hokkaido Math. J., **46**, 15 – 27 (2017).

[11] M. Çağlar, H. Orhan and H. M. Srivastava, “Coefficient bounds for q-starlike functions associated with q-Bernoulli numbers”, J. Appl. Anal. Comput., **13**, 2354 – 2364 (2023).
[12] K. Dhurai, N. E. Cho and S. Sivasubramanian, “On a class of analytic functions closely related to starlike functions with respect to a boundary point”, AIMS Math., **8**, 23146 – 23163 (2023).
[13] F. Z. El-Emam, “Convolution conditions for two subclasses of analytic functions defined by Jackson q-difference operator”, J. Egyptian Math. Soc., **30**, Paper No. 7, 10 pp. (2022).
[14] R. K. Maurya and K. Rajesh, “Certain subordination results on the class of strongly starlike p-valent analytic functions”, Jordan J. Math. Stat., **15**, 661 – 681 (2022).
[15] H. E. Özkan Uçar, “Coefficient inequality for q-starlike functions”, Appl. Math. Comput., **276**, 122 – 126 (2016).
[16] K. Piejko, J. Sokół and K. Trąbka-Więcław, “Coefficient bounds in the class of functions associated with Sakaguchi’s functions”, Bull. Sci. Math., **188**, Paper No. 103308, 12 pp. (2023).
[17] H. M. Srivastava, B. Khan, N. Khan and Q. Z. Ahmad, “Coefficient inequalities for q-starlike functions associated with the Janowski functions”, Hokkaido Math. J., **48**, 407 – 425 (2019).
[18] S. Verma, R. Kumar and J. Sokół, “A conjecture on Marx-Strohhäcker type inclusion relation between q-convex and q-starlike functions”, Bull. Sci. Math., **174**, Paper No. 103088, 10 pp. (2022).
[19] R. M. Ali, V. Ravichandran and N. Seenivasagan, “On subordination and superordination of the multiplier transformation for meromorphic functions”, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), **33**, 311 – 324 (2010).
[20] Q. Z. Ahmad, N. Khan, M. Raza, M. Tahir and B. Khan, “Certain q-difference operators and their applications to the subclass of meromorphic q-starlike functions”, Filomat **33**, 3385 – 3397 (2019).
[21] S. S. Joshi and S. B. Joshi, “On a subclass of meromorphic starlike functions with positive coefficients”, Ganita, **73**, 65 – 71 (2023).
[22] S. Khan, S. Hussain and M. Darus, “Certain subclasses of meromorphic multivalent q-starlike and q-convex functions”, Math. Slovaca, **72**, 635 – 646 (2022).
[23] S. Kavitha, S. Sivasubramanian and K. Muthunagai, “A new subclass of meromorphic function with positive coefficients”, Bull. Math. Anal. Appl., **3**, 109 – 121 (2010).
[24] N. Khan, H. M. Srivastava, A. Rafiq, M. Arif and S. Arjika, “Some applications of q-difference operator involving a family of meromorphic harmonic functions”, Adv. Difference Equ., **2021**, Paper No. 471, 18 pp. (2021).
[25] L. Liu and J.-H. Fan, “On starlike meromorphic functions of order α”, J. Math. Res. Appl., **42**, 363 – 373 (2022).
[26] K. K. Shergill and S. S. Billing, “On meromorphic starlike and convex functions”, Palest. J. Math., **12**, 404 – 413 (2023).
[27] H. M. Srivastava, M. Tahir, B. Khan, M. Darus, N. Khan and Q. Z. Ahmad, “Certain subclasses of meromorphically q-starlike functions associated with the q-derivative operators”, Ukrainian Math. J., **73**, 1462 – 1477 (2022).
[28] Z.-G. Wang, H. M. Srivastava, M. Arif, Z.-H. Liu and K. Ullah, “Sharp bounds on Hankel determinants of bounded turning functions involving the hyperbolic tangent function”, Appl. Anal. Discrete Math., **18**, 551 -– 571 (2024).
[29] Z.-G. Wang, M. U. Farooq, M. Arif, S. N. Malik and F. M. O. Tawfiq, “A class of meromorphic functions involving higher order derivative”, J. Contemp. Math. Anal., **59**, 419 -– 429 (2024).
[30] R. J. Libera and E. J. Złotkiewicz, “Early coefficients of the inverse of a regular convex function”, Proc. Amer. Math. Soc., **85**, 225 – 230 (1982).
[31] C. Pommerenke, Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1975).
[32] A. W. Goodman, Univalent Functions, Vol. II. Mariner Publishing Co., Inc., Tampa, FL (1983).
[33] S. Ruscheweyh, “Neighborhoods of univalent functions”, Proc. Amer. Math. Soc., **81**, 521 – 527 (1981).

Поступила 02 февраля 2024
После доработки 24 апреля 2024
Принята к публикации 06 мая 2024