Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 1, 2025, стр. 45 – 51.

ЗАМЕТКА О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И РЯДАХ ФУРЬЕ

Т. КАРЧАВА, А. АПЛАКОВ

Сухумский государственный университет, Тбилиси, Грузия
Тбилисский государственный университет им. И.Джавахишвили, Тбилиси, Грузия
E-mails: *tkarchava01@gmail.com*; *aleksandre.aplakovi@tsu.ge*

Аннотация. В этой статье мы находим класс функций, для которых можно улучшить оценку Лебега.

MSC2020 numbers: 41A10.

Ключевые слова: ряд Фурье; модуль непрерывности.

Пусть $C\left([0,2\pi]\right)$ – пространство непрерывных функции f с периодом 2π. Если $f \in C\left([0,2\pi]\right)$, то функция

$$\omega\left(\delta, f\right) := \sup_{x} \sup_{|h|\le\delta} \left|f\left(x+h\right) - f\left(x\right)\right|$$

называется модулем непрерывности функции f.

Модули непрерывности более высоких порядков определяются следующим образом

$$\omega_p\left(\delta, f\right) := \sup_{x} \sup_{|h|\le\delta} \left|\Delta_p\left(x; h, f\right)\right|, \omega_1\left(\delta, f\right) := \omega\left(\delta, f\right),$$

где

$$\Delta_p\left(x; h, f\right) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^{p-j} \binom{p}{j} f\left(x + jh\right)$$

является разностью p-го порядка.

$$\Delta_1\left(x; h, f\right) := f\left(x+h\right) - f\left(x\right),$$

$$\Delta_{p+1}\left(x; h, f\right) = \Delta_p\left(x+h; h, f\right) - \Delta_p\left(x; h, f\right).$$

Известно, что тригонометрическая система не является базисом в пространстве непрерывных функций. Более того, Лебег (см. [1, Ch.1]) построил пример непрерывной функции с неограниченно расходящимся в одной точке рядом Фурье.

Отсюда возник вопрос охарактеризовать подмножества пространства непрерывных функций, обеспечивающие равномерную сходимость рядов Фурье. В этом направлении существует два подхода:

1) характеристика подклассов с помощью вариации функции (Жордан [2], Винер [3], Янг [4], Ватерман [5], Кита [6], Чантурия [7], Осколков [8], Карчава [9], Ахобадзе [10, 11, 12], Гогинава [13] – [16]); Гогинава, Саакян [17, 18]);

2) Использовать следующую оценку Лебега (см. [19],[20])

$$\|f - S_n(f)\| \le c\,\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\log(n+2),$$

где $S_n(f,x)$ — n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f, а w — модуль непрерывности функции.

Основной целью статьи является улучшение оценки Лебега. Доказывается справедливость следующей оценки.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C([0,2\pi])$. *Тогда*

$$\|f - S_n(f)\|_C \le c\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k2^k}.$$

Доказательство. Пусть $T_n(x)$ — полином Валле-Пуссена, который обеспечивает наилучшее приближение функции f в пространстве $C([0,2\pi])$ (см. [20]),

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,V_n(t)\,dt, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|V_n(t)|\,dt \le 1.$$

Положим

$$g(t) := f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) - T_n(x+t) - T_n(x-t) + 2T_n(x).$$

Очевидно, что

$$\omega_p(\delta, T_n) \le c\omega_p(\delta, f).$$

Мы будем использовать следующее представление

$$\sum_{i=k+1}^{n}\frac{(-1)^i}{i} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + P_k(n), \tag{1}$$

где

$$|P_k(n)| \le \frac{c}{k^2}.$$

Чтобы получить (1), когда k и n — нечетные положительные целые числа, обозначим

$$a = \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Применим следующее равенство: $a = \frac{a+b+(a-b)}{2}$, где

$$b = \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) + \left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Имеем

$$a + b = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

и

$$a - b = \left(\frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Очевидно, что

$$|a-b| \leq c\left(\frac{1}{(k+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \leq \frac{c}{k^2}.$$

В заключение получаем

$$a = \frac{a+b+(a-b)}{2} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Когда k — нечетное, а n — четное положительное целое число, достаточно применить представление

$$a = \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

При четном k с помощью элементарных преобразований приходим к рассмотренным случаям. Равенство (1) доказано.

Пусть $D_n(t)$ – ядро Дирихле. Тогда,

$$\int_0^\pi g(t)\, D_n(t)\, dt = \int_0^\pi g(t)\left(D_n(t) - \frac{\sin nt}{t}\right) dt + \int_0^\pi g(t)\, \frac{\sin nt}{t} dt. \tag{2}$$

Легко видеть, что функция

$$D_n(t) - \frac{\sin nt}{t}$$

ограничена и

$$|g(t)| \leq 4E_n(f).$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^\pi g(t)\left(D_n(t) - \frac{\sin nt}{t}\right) dt\right| \leq cE_n(f), \tag{3}$$

где $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции f.

С другой стороны,

$$\left|\int_0^{\pi/n} g(t)\, \frac{\sin nt}{t} dt\right| \leq \|g\|_c \int_0^{\pi/n} \frac{\sin nt}{t} dt \leq cE_n(f). \tag{4}$$

Из (2)-(4) находим

$$\int_{0}^{\pi} g(t)\, D_n(t)\, dt = \int_{\pi/n}^{\pi} g(t)\, \frac{\sin nt}{t} dt + \gamma, \tag{5}$$

где $|\gamma| \le cE_n(f)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}
(6) \qquad & \left| \int_{\pi/n}^{\pi} g(t)\, \frac{\sin nt}{t} dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\pi k/n}^{\pi(k+1)/n} g(t)\, \frac{\sin nt}{t} dt \right| \\
= \quad & \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_{0}^{\pi/n} g\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k \sin nt}{t + \pi k/n} dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_{0}^{\pi} g\left(\frac{u + \pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k \sin u}{u + \pi k} du \right| \\
\le \quad & \pi \max_{0 \le u \le \pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{u + \pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k \sin u}{u + \pi k} \right| \le \pi \left| \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{u_0 + \pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k}{u_0 + \pi k} \right| \\
\le \quad & \pi \left| \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{u_0 + \pi k}{n}\right) \left(\frac{(-1)^k}{u_0 + \pi k} - \frac{(-1)^k}{\pi k} \right) \right| \\
+ \quad & \pi \left| \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{u_0 + \pi k}{n}\right) \frac{(-1)^k}{\pi k} \right| = I + II,
\end{aligned}$$

где $u_0 \in \ [0, \pi]$. Ясно, что

$$I \le \|g\|_c \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} = O\left(E_n(f)\right). \tag{7}$$

Пусть $u_k := \frac{u_0 + \pi k}{n}$. Нам понадобятся следующие оценки для $p = 1, 2, ..., n$:

$$II \quad = \quad \pi \left| \sum_{k=1}^{n-1} g(u_k)\, \frac{(-1)^k}{\pi k} \right| \le \frac{c}{2^p} \left| \sum_{k=p+1}^{n-1} \Delta_p\left(u_k; \frac{\pi}{n}, g\right) \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k$$

где

$$\gamma_k < c \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k 2^k}.$$

Применив преобразование Абеля и (1), для II получим

$$
\begin{aligned}
& II=\pi\left|\sum_{k=1}^{n-1} g\left(u_k\right) \frac{(-1)^k}{\pi k}\right| \\
\leq & \left|\sum_{k=2}^{n-1}\left(g\left(u_{k+1}\right)-g\left(u_k\right)\right) \sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i}\right|+\left|g\left(u_1\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i}\right| \\
\leq & \left|\sum_{k=2}^{n-1}\left(g\left(u_{k+1}\right)-g\left(u_k\right)\right)\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k}+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}+P_k(n)\right)\right|+\left|g\left(u_1\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i}\right| \\
\leq & \left|\sum_{k=2}^{n-1}\left(g\left(u_{k+1}\right)-g\left(u_k\right)\right) \frac{(-1)^{k+1}}{2k}\right|+\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n} \sum_{k=2}^{n-1}\left(g\left(u_{k+1}\right)-g\left(u_k\right)\right)\right| \\
& +c \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\left|g\left(u_{k+1}\right)-g\left(u_k\right)\right|}{k^2}+\left|g\left(u_1\right)\right|\left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i}\right| \\
\leq & c\left|\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1}\left(g\left(u_{k+1}\right)-g\left(u_k\right)\right) \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|+\gamma_1 \\
\leq & c\left|\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \Delta_1\left(u_k ; \frac{\pi}{n}, g\right) \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|+\gamma_1 \\
= & c \frac{1}{2}\left|\sum_{k=3}^{n-1}\left(\Delta_1\left(u_{k+1} ; \frac{\pi}{n}, g\right)-\Delta_1\left(u_k ; \frac{\pi}{n}, g\right)\right) \sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i}\right. \\
+ & \left.\Delta_1\left(u_k ; \frac{\pi}{n}, g\right) \sum_{i=2}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i}\right|+\gamma_1 \\
= & c \frac{1}{2}\left|\sum_{k=3}^{n-1} \Delta_2\left(u_k ; \frac{\pi}{n}, g\right)\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k}+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}+P_k(n)\right)\right. \\
+ & \left.\Delta_1\left(u_k ; \frac{\pi}{n}, g\right) \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i}\right|+\gamma_1 \\
= & c \frac{1}{2^2}\left|\sum_{k=3}^{n-1} \Delta_2\left(u_k ; \frac{\pi}{n}, g\right) \frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{k=2}^{n-1} \Delta_2\left(u_k ; \frac{\pi}{n}, g\right) P_k(n)\right|+\gamma_1 \\
\leq & c \frac{1}{2^2}\left|\sum_{k=3}^{n-1} \Delta_2\left(u_k ; \frac{\pi}{n}, g\right) \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|+\frac{1}{2^2} \omega_2\left(\frac{\pi}{n}, g\right) \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^2}+\gamma_1+\gamma_2 .
\end{aligned}
$$

При $p=3,4,...,n$ доказательство аналогично.

Пусть $p=n-2$. Тогда из (6), (7) и оценки для II получим утверждение теоремы 1. Из этой теоремы вытекает следующий результат:

Следствие 1. *Пусть* $f \in C([0,2\pi])$. *Тогда*

$$\|f - S_n(f)\|_C \le c \max_{1 \le k \le [\log \log n]} \omega_k \left(\frac{\pi}{n}, f\right).$$

Доказательство. Применив очевидное неравенство

$$\frac{\omega_i\left(\frac{1}{n}, f\right)}{2^i} \le \frac{\omega_j\left(\frac{1}{n}, f\right)}{2^j}, \tag{8}$$

при $i \ge j$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_C &\le c \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k 2^k} = c\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k 2^k} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k 2^k}\right) \\ &\le c\left(\max_{1 \le k \le m} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + \frac{\omega_m\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{2^m} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}\right) \\ &\le c\left(\max_{1 \le k \le m} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + \frac{\omega_m\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{2^m} \log \frac{n}{m}\right) \le c \max_{1 \le k \le m} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \end{aligned}$$

где $m = [\log \log n]$.

Следствие 2. *Пусть* $f \in C([0,2\pi])$ *и* $\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \le \frac{2^k}{l(k)}$, *где*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l(k)\, k} < \infty.$$

Тогда,

$$\|f - S_n(f)\|_C \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Из (8) имеем

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_C &\le c \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k 2^k} = c\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k 2^k} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{k 2^k}\right) \\ &\le c\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k l(k)}\right) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty, \end{aligned}$$

где $m = \left[\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)\right]^{-1}$.

Следствие 3. *Пусть* $f \in C([0,2\pi])$ *and* $\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \le M$, $k = 1, 2, \ldots$ *Тогда*

$$\|f - S_n(f)\|_C \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Abstract. In this paper we find class of functions for which the Lebesgue estimate can be improved.

Список литературы

[1] A. Torchinsky, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Pure and Applied Mathematics, **123**, Academic Press, Inc., Orlando, FL (1986).

[2] G. C.R. Jordan, “Sur la series de Fourier”, C.R. Acad.Sci. Paris 92, 228 – 230 (1881).

[3] N. Wiener, “The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients”, Massachusetts J. Math. **3**, 72 – 92 (1924).

[4] L. Young, “Sur un generalization de la notion de variation de Poissance p-ieme bornee an sonce de Wiener et sur la convergence de series de Fourier”, C.R. Acad. Sci. Paris. **204**, 470 – 472 (1937).

[5] D.Waterman, “On Λ-bounded variation”, Studia Math. **57**, 33 – 45 (1976).

[6] H. Kita, “Convergence of Fourier series of functions on generalized Wiener’s class $BV\left(p\left(n\right)\uparrow\infty\right)$”, Acta Math. Hung. **57**, 233 – 243 (1991).

[7] Z. Chanturia, “Uniform convergence of Fourier series” [in Russian], Mat. Sb. **100**, 534 – 554 (1976).

[8] K. Oskolkov, “Non-amplibiability of Lebesgue estimates for approximation by Fourier sums with given modulus of continuity” [in Russian], Trudy Mat. Inst. Steklov, **112**, 337 – 345 (1971).

[9] T. Karchava, “On the convergence of Fourier series” [in Russian], Reports of Enlarget session of the Seminar of I. Vekua’s Institute of Applied Mathematics, **3**, 93 – 95 (1988).

[10] T. Akhobadze, “Functions of generalized Wiener classes $BV\left(p\left(n\right)\uparrow p,\phi\right)$ and their Fourier coefficients”, Georgian Math. J. **7**, No.3, 401 – 416 (2000).

[11] T. Akhobadze, “$B\Lambda\left(p\left(n\right)\uparrow p,\phi\right)$ classes of functions of bounded variation”, Bull. Georgian Acad. Sci. **164**, No.1, 18 – 20 (2001).

[12] T. Akhobadze, “Generalized $BV\left(p\left(n\right)\uparrow p,\phi\right)$ class of bounded variation”, Bull. Georgian Acad. Sci., **163**, No. 3, 426 – 428 (2001).

[13] U. Goginava, “On the divergence of trigonometric Fourier series of the class $H^{\omega}\cap BV\left(p\left(n\right)\uparrow\infty\right)$”, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **121**, 63 – 70 (1999).

[14] U. Goginava, “Uniform summability of double Walsh-Fourier series of functions of bounded partial λ -variation”, Math. Slovaca **64**, no. 6, 1451 – 1474 (2014).

[15] U. Goginava, “On the embedding Waterman, Chanturia and generalized Wiener classes in the classes H^{ω}”, Georgian Math. J. **10**, no. 4, 677 – 686 (2003).

[16] U. Goginava, “On the uniform convergence of Walsh-Fourier series”, Acta Math. Hungar. **93**, no. 1 – 2, 59 – 70 (2001).

[17] U. Goginava, A. Sahakian, “On the convergence and summability of double Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation”, Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat., **49**, no. 6, 51 – 65 (2014).

[18] U. Goginava, A. Sahakian, “On the convergence of multiple Fourier series of functions of bounded partial generalized variation”, Anal. Math. **39**, no. 1, 45 – 56 (2013).

[19] N. Bari, Trigonometric Series [in Russian], Nauka, Moscow (1961).

[20] V. Dzyadyk, Introduction to the Theory of Uniformly Approximation of Functions [in Russian], Nauka, Moscow (1977).

Поступила 17 марта 2023

После доработки 30 мая 2024

Принята к публикации 05 июня 2024