Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 1, 2025, стр. 25 – 44.

О МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРАХ $\mathcal{L}$-ВИНЕРА-ХОПФА В СЛУЧАЕ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Г. А. КИРАКОСЯН

Институт Математики, Национальная Академия Наук Армении
E-mail: *grigor.kirakosyan.99@gmail.com*

Аннотация. В работе рассматриваются матричные операторы $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа порожденные безотражательным потенциалом и действующие в лебеговых пространствах с весом Макенхаупта. Эти операторы определяются заменой преобразования Фурье в стандартном определении Винера-Хопфа на спектральное преобразование оператора Штурма-Лиувилля с безотражательным потенциалом. Получены критерий фредгольмовости и формула для индекса в случае кусочно-непрерывного символа.

MSC2020 number: 47G10; 47B35.

Ключевые слова: безотражательный потенциал; матричный оператор $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа; оператор Фредгольма.

1. Постановка задачи

Пусть λ_k, m_k $(k = 1, \ldots, N)$ положительные числа, причём $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$, а функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ однозначно определяются системой линейных уравнений

$$\varphi_k(x) + \sum_{s=1}^{N} m_k m_s \frac{e^{-(\lambda_k+\lambda_s)x}}{\lambda_k + \lambda_s} \varphi_s(x) = m_k e^{-\lambda_k x}, \quad k = 1, \ldots, N, \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Определим также функции $t(\lambda)$, $u^{\mp}(x, \lambda)$, $x, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$t(\lambda) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda + i\lambda_k}{\lambda - i\lambda_k},$$

$$u^-(x, \lambda) = t(\lambda) e^{i\lambda x} \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k - i\lambda} \varphi_k(x)\right),$$

$$u^+(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k + i\lambda} \varphi_k(x)\right).$$

При $N = 0$ будем считать, что $t(\lambda) = 1$, $u^{\mp}(x, \lambda) = e^{\pm ix\lambda}$.

Рассмотрим интегралы

$$(U_{\mp}y)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\mp}(x,\lambda)\, y(x)\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Как известно (более подробно см. [1, 2]) эти интегралы сходятся по норме $L_2(\mathbb{R})$ и определяют ограниченные операторы $U_{\mp}\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

Функции $u^{\mp}$ и операторы $U_{\pm}$ тесно связаны с действующим в $L_2(\mathbb{R})$ самосопряжённым дифференциальным оператором $\mathcal{L}$ порождённым дифференциальным выражением

$$(\ell x)(x) = -y''(x) + v(x)y(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

в случае когда v является безотражательным потенциалом (более подробно см. [1, секция 3], а также [3, 4, 5, 6]).

Ниже для линейного пространства X через X^n (соответственно через $X^{n\times n}$) будем обозначать множество n-мерных столбцов (соответственно $n \times n$ матриц). Для оператора A, действующего из линейного пространства X в линейное пространство Y, оператор

$$diag(A, \ldots, A)\colon X^n \to Y^n$$

также будем обозначать через A, т.е. действие оператора A на X^n будем понимать покомпонентно. Условимся через $m(a)$ обозначать действующий в функциональных пространствах оператор умножения на матриц-функцию a:

$$(m(a)y)(x) = a(x)\, y(x),$$

а через $J\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ оператор действующий по формуле $(Jy)(x) = y(-x)$.

Для банаховой алгебры $\mathfrak{A}$, через $G\mathfrak{A}$ будем обозначать группу обратимых элементов.

Пусть E либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{R}_{\pm} := \{\pm x > 0\colon x \in \mathbb{R}\}$, а $A_p(E)$, $1 < p < \infty$ множество весов на E удовлетворяющих условию A_p:

$$\sup \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^p dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-q} dx \right)^{1/q} < \infty,$$

где I пробегает все ограниченные интервалы E, $|I|$ длина интервала и $q = p/(p-1)$. Через $L_p(E, w)$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R})$ будем обозначать лебегово пространство с нормой

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_E |f(x)|^p\, w(x)^p dx \right)^{1/p}.$$

Под спектральным преобразованием оператора $\mathcal{L}$ мы понимаем оператор

$$U := m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)JU_+ \colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}).$$

Оператор U удовлетворяет равенствам

$$U^*U = I - P, \quad UU^* = I,$$

где I – единичный оператор, а P – ортогональный оператор на собственное подпространство $span\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ оператора $\mathcal{L}$. Кроме того на всюду плотном в $L_2(\mathbb{R})$ множестве имеет место равенство $U\mathcal{L}U^* = m(\lambda^2)$ (см. [1, 2, 6]).

При $v = 0$ (соответствующему случаю $N = 0$) оператор $U = U_\pm$ совпадает с преобразованием Фурье $F\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$:

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} y(x)\, dx.$$

Функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ назовём U-мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}, w)$ если для каждого $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$ функция $U^*m(a)Uy$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ и кроме того при некотором постоянном $c > 0$ неравенство

$$\|U^*m(a)Uy\| \leqslant c\|y\|$$

имеет место одновременно для всех $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$. Оператор $U^*m(a)U$ допускает непрерывное продолжение до действующего на $L_p(\mathbb{R}, w)$ ограниченного оператора, который мы будем обозначать через $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и называть оператором $\mathcal{L}$-свёртки на $L_p(\mathbb{R}, w)$ с символом a. Множество U-мультипликаторов будем обозначать через $\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$. В случае $a = (a_{ij}) \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w,\mathcal{L}}$ под оператором $\mathcal{L}$-свертки мы понимаем оператор

$$W^0_{\mathcal{L}}(a) = \big(W^0_{\mathcal{L}}(a_{ij})\big) : L^n_p(\mathbb{R}, w) \to L^n_p(\mathbb{R}, w),$$

здесь, как и в дальнейшем, через $L^n_p(\mathbb{R}, w)$ будем обозначать алгебру $(L_p(\mathbb{R}, w))^n$ (см. определение пространства X^n для банахова пространства X).

Определим операторы $\pi^0_\pm : L_p(\mathbb{R}_\pm, w) \to L_p(\mathbb{R}, w)$, $\pi_\pm : L_p(\mathbb{R}, w) \to L_p(\mathbb{R}_\pm, w)$ по формулам $(\pi_\pm y)(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}_\pm$

$$\left(\pi^0_+ y\right)(x) = \begin{cases} y(x) & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}, \qquad \left(\pi^0_- y\right)(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R}_+ \\ y(x) & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}.$$

Пусть $a \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w,\mathcal{L}}$. Оператор $W_{\mathcal{L}}(a) := \pi_+ W^0_{\mathcal{L}}(a)\pi^0_+ \colon L^n_p(\mathbb{R}_+, w) \to L^n_p(\mathbb{R}_+, w)$, $1 < p < \infty$ будем называть оператором $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа с символом a.

Поскольку при $v = 0$, оператор U совпадает с преобразованием Фурье F, то операторы $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и $W_{\mathcal{L}}(a)$ в этом случае совпадают, соответственно определёнными в весовых пространствах, оператором свёртки и оператором Винера-Хопфа (см. [7]). По этой причине в этом случае во всех обозначениях мы опускаем индекс $\mathcal{L}$ и будем пользоваться стандартными обозначениями $\mathcal{M}_{p,w}$, $\mathcal{M}^{n\times n}_{p,w}$, $W^0(a)$, $W(a)$. Множество мульпликаторов $\mathcal{M}_{p,w}$ (см. [7]) является банаховой алгеброй с нормой

$$\|a\|_{\mathcal{M}_{p,w}} := \left\|W^0(a)\right\|_{B(L_p(\mathbb{R},w))}.$$

Далее через $PC = PC(\dot{\mathbb{R}})$ будем обозначать алгебру всех кусочно непрерывных функций на $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, т.е. функций имеющих в каждой точке $x_0 \in \dot{\mathbb{R}}$ пределы $a(x_0-0) := \lim\limits_{x\to x_0-0} a(x)$, $a(x_0+0) := \lim\limits_{x\to x_0+0} a(x)$, причём $a(\infty \mp 0) := a(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm} a(x)$.

Заметим, что функции из PC имеющие ограниченную вариацию $V(a)$ принадлежат $\mathcal{M}_{p,w}$ (см. [7]) и $\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$ (см. [2, теорема 5.1]).

Далее через $PC_{p,w}$ (соответственно $C_{p,w}$) обозначим замыкание в $\mathcal{M}_{p,w}$ множества кусочно непрерывных функций имеющих ограниченную вариацию и не более чем конечное число скачков (соответственно непрерывных на $\dot{\mathbb{R}}$ функций).

Напомним, что линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$, где X, Y банаховы пространства, называется фредгольмовым, если его образ замкнут и конечномерны его ядро $\ker A := \{x \in X\colon Ax = 0\}$ и коядро $\operatorname{coker} A := {}^{Y}/_{\mathrm{Im\ A}}$.

В данной работе исследуется задача фредгольмовости матричного оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа $W_{\mathcal{L}}(a)\colon L^n_p(\mathbb{R}_+,w) \to L^n_p(\mathbb{R}_+,w)$ в случае, когда $a \in PC^{n\times n}_{p,w}$.

Как и в скалярном случае исследование фредгольмовости оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ сводится к исследованию фредгольмовости оператора Винера-Хопфа $W(a)\colon L^n_p(\mathbb{R}_+,w) \to L^n_p(\mathbb{R}_+,w)$. О возможности исследования этого оператора говорится в работе [7] стр. 331. К сожалению в этой работе не приведены условия фредгольмовости и формула для индекса оператора $W(a)$. По этой причине мы вынуждены исследовать достаточно подробно фредгольмовость этого оператора (см. секции 2–6).

Критерий фредгольмовости и формула для индекса оператора $W(a)$ в случае $n = 1$, $w = 1$ получен в [8], а в случае $n = 1$, $w \in A_p$ в [9]. Для оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ аналогичные результаты получены в случае $n = 1$, $w \in A_p$ в [2]. Случай более общих потенциалов $w = 1$, $n = 1$, $p = 2$ рассмотрен в [1]. Аналогичные результаты для матричного оператора $W(a)$ в случае степенных весов получены в [10].

2. Формулировка основной теоремы

Пусть $\nu \in (0,1)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Множество

$$\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu) := \left\{ \frac{z_2 e^{2\pi(x+i\nu)} - z_1}{e^{2\pi(x+i\nu)} - 1}, \ \ x \in \mathbb{R} \right\} \cup \{z_1, z_2\}$$

является дугой окружности соединяющей точки z_1 и z_2 и содержащая концевые точки z_1 и z_2. Множество $\mathcal{A}(z, z; \nu)$ вырождается в точку $\{z\}$. Множество $\mathcal{A}(z_1, z_2; 1/2)$ совпадает с отрезком соединяющий точки z_1 и z_2. В случае $\nu > 1/2$ из точек $\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu)$ отличных от z_1 и z_2 отрезок $[z_1, z_2]$ виден под углом $2\pi(1-\nu)$ и при переходе от точки z_1 к точке z_2 отрезок остаётся справа. В случае $\nu < 1/2$, из отличных от z_1 и z_2 точек $\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu)$ отрезок виден под углом $2\pi\nu$ и при переходе от точки z_1 к z_2 отрезок остаётся слева.

Заметим, что

$$\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu) = \{(1-\mu)z_1 + \mu z_2 \colon \mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu)\}.$$

Рассмотрим также множество

$$\mathcal{H}(z_1, z_2; \nu_1, \nu_2) = \bigcup_{\nu \in [\nu_1, \nu_2]} \mathcal{A}(z_1, z_2; \nu)$$

называемое рогом между z_1 и z_2 из $\mathbb{C}$ и определяемое числами ν_1, ν_2, $0 < \nu_1 \leqslant \nu_2 < 1$ (см. [7]).

Каждое из множеств (см. [7, 9])

$$I_\xi(p, w) = \left\{ \mu \in \mathbb{R} \colon \left| \frac{x - \xi}{x - i} \right|^\mu w(x) \in A_p \right\}, \quad \xi \in \mathbb{R}$$
$$I_\infty(p, w) = \left\{ \mu \in \mathbb{R} \colon |x - i|^{-\mu} w(x) \in A_p \right\}$$

является открытым интервалом длиной не превышающей единицу и содержащий 0

$$I_\xi(p, w) = \left(-\nu_\xi^-(p, w), 1 - \nu_\xi^+(p, w) \right), \ \ \xi \in \dot{\mathbb{R}}$$

где $0 < \nu_\xi^-(p, w) \leqslant \nu_\xi^+(p, w) < 1$.

Рассмотрим также числа $\nu_0^0 = \frac{1}{2}(\nu_0^- + \nu_0^+)$, $\nu_\infty^0 = \frac{1}{2}(\nu_\infty^- + \nu_\infty^+)$.

Пусть $a \in PC^{n \times n}$. Через $\gamma_{p,w}(a)$ мы обозначим замкнутую непрерывную кривую дополняющую существенный образ функции $\det a$ кривыми

$$\det[(1-\mu)a(x-0) + \mu a(x+0)],$$

$\mu \in \mathcal{A}(0,1;\nu_\infty^0)$ при $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathcal{A}(0,1;\nu_0^0)$ при $x=\infty$, соединяющими точки $\det a(x-0)$ и $\det a(x+0)$ в каждой точке разрыва $x \in \dot{\mathbb{R}}$. Ориентация $\mathbb{R}$ от $-\infty$ до $+\infty$ и вышеуказанных кривых от $\mu = 0$ к $\mu = 1$ порождает естественную ориентацию кривой $\gamma_{p,w}(a)$ которая совпадает с множеством

$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \left\{\det[(1-\mu)a(x-0)+\mu a(x+0)]\colon \mu \in \mathcal{A}\left(0,1;\nu_\infty^0\right)\right\} \bigcup \bigcup \left\{\det[(1-\mu)a(+\infty)+\mu a(-\infty)]\colon \mu \in \mathcal{A}\left(0,1;\nu_0^0\right)\right\}.$$

В случае, когда $0 \notin \gamma_{p,w}(a)$ корректно определено количество оборотов, обозначаемое далее через $\mathrm{wind}_{p,w} a$, вокруг нулевой точки при обходе кривой $\gamma_{p,w}(a)$ в направлении ее естественной ориентации (см. [7]). Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2.1. *Пусть $a \in PC_{p,w}^{n\times n}$. Тогда оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фегдольмов в пространстве $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$ тогда и только тогда, когда*

$$\det[(1-\mu)a(x-0)+\mu a(x+0)] \neq 0 \quad \textit{при } x \in \mathbb{R} \quad \textit{и } \mu \in \mathcal{H}\left(0,1;\nu_\infty^-,\nu_\infty^+\right) \quad \textit{и}$$
$$\det[(1-\mu)a(+\infty)+\mu a(-\infty)] \neq 0 \quad \textit{при } \mu \in \mathcal{H}\left(0,1;\nu_0^-,\nu_0^+\right).$$

В случае выполнения этих условий

$$\mathrm{Ind}\, W_{\mathcal{L}}(a) = -\mathrm{wind}_{p,w} a.$$

Окончательное доказательство этой теоремы будет приведено в секциях 5, 6. В секциях 3, 4 приведены результаты необходимые для доказательства основной теоремы.

3. Связь операторов $W_{\mathcal{L}}(a)$ с $W(a)$

С помощью непрерывной на $\mathbb{R}_+$ функции ϕ и удовлетворяющей там неравенству $|\phi(x)| < ce^{-\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, где λ и c положительные постоянные, построим ограниченные операторы

$$N_{\phi,1}^+, N_{\phi,2}^+ \colon L_p(\mathbb{R}_+) \to L_p(\mathbb{R}_+),$$

действующие по формулам

$$\left(N_{\phi,1}^+ y\right)(x) = \int_x^\infty \phi(\sigma)\, y(\sigma)\, d\sigma, \quad \left(N_{\phi,2}^+ y\right)(x) = \int_0^x \phi(\sigma)\, y(\sigma)\, d\sigma, \tag{3.1}$$

Определим так называемый оператор преобразования по формуле

$$I + \mathcal{K}_+ = I - \sum_{k=1}^{N} m\left(\varphi_k\right) N^+_{\psi_k,1} \colon L_p(\mathbb{R}_+) \to L_p(\mathbb{R}_+),$$

а также оператор

$$I - \Gamma_+ = I - \sum_{k=1}^{N} m\left(\psi_k\right) N^+_{\varphi_k,2} \colon L_p(\mathbb{R}_+) \to L_p(\mathbb{R}_+),$$

где φ_k, $k = 1,\ldots,N$ определяются из (1.1), а $\psi_k(x) := m_k e^{-\lambda_k x}$, $k = 1,\ldots,N$, $x \in \mathbb{R}$.

Точно так же как в [2] можно установить ограниченность и обратимость этих операторов в $L^n_p(\mathbb{R}_+, w)$, при $w \in A_p(\mathbb{R})$ а также связь между операторами $W_{\mathcal{L}}(a)$ и $W(a)$, при $a \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w}$, $w \in A_p(\mathbb{R})$. Именно, справедливы следующие результаты.

Лемма 3.1. $w \in A_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. *Тогда операторы* $I+\mathcal{K}_+$, $I-\Gamma_+$ *ограничены в пространствах* $L^n_p(\mathbb{R}_+, w)$. *Кроме того эти операторы обратимы и справедливы равенства*

$$\left(I + \mathcal{K}_+\right)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{N} m\left(\psi_k\right) N^+_{\varphi_k,1},$$

$$\left(I - \Gamma_+\right)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{N} m\left(\varphi_k\right) N^+_{\psi_k,2}$$

Теорема 3.1. *Пусть* $w \in A_p(\mathbb{R})$, $a \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w}$. *Тогда* $a \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w,\mathcal{L}}$ *и в пространстве* $L^n_p(\mathbb{R}_+, w)$ *справедливо тождество*

$$W_{\mathcal{L}}(a) = (I + \mathcal{K}_+)W(a)(I - \Gamma_+).$$

Последнее даёт эквивалентность фредгольмовых свойств операторов $W_{\mathcal{L}}(a)$ и $W(a)$ в пространствах $L^n_p(\mathbb{R}_+, w)$. Следовательно, для доказательства основной теоремы достаточно убедиться в её справедливости для оператора $W(a)$.

Пусть $\mathcal{M}^{n\times n}_{p,w}$. Определим операторы

$$E = \begin{pmatrix} -\pi^0_+ & m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a) \\ I & -\pi_+ W^0(a - E_n) \end{pmatrix} \colon$$
$$L^n_p(\mathbb{R}_+, w) \oplus L^n_p(\mathbb{R}, w) \to L^n_p(\mathbb{R}, w) \oplus L^n_p(\mathbb{R}_+, w)$$

$$F = \begin{pmatrix} \pi_+ W^0(a - E_n) & I \\ m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a) & \pi^0_+ \end{pmatrix} \colon$$
$$L^n_p(\mathbb{R}, w) \oplus L^n_p(\mathbb{R}_+, w) \to L^n_p(\mathbb{R}_+, w) \oplus L^n_p(\mathbb{R}, w),$$

где E_n единичная матрица размера n. Нетрудно убедиться, что эти операторы обратимы, причём

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_+ W^0(a - E_n) & W(a) \\ I & \pi_+^0 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} -\pi_+^0 & I \\ W(a) & -\pi_+^0 W^0(a - E_n) \end{pmatrix},$$

а также имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} W(a) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} F \tag{3.2}$$

Это доказывается непосредственной проверкой записав оператор $m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)$ в виде $I + \pi_+^0 \pi_+ W^0(a - E_n)$.

Из равенства (3.2) и обратимости E, F следует, что оператор $W(a)$ (а следовательно и $W_{\mathcal{L}}(a)$) фредгольмов в $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$ тогда и только тогда когда оператор $m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)$ фредгольмов в $L_p^n(\mathbb{R}, w)$.

4. Локальный принцип

Пусть $\mathfrak{A}$ – банахова алгебра с единицей. Ограниченное подмножество $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$ называется локализирующим классом, если $0 \notin \mathfrak{M}$ и для любых элементов $B_1, B_2 \in \mathfrak{M}$ существует третий $B \in \mathfrak{M}$, что $B_j B = B B_j = B$, $j = 1, 2$. Система $\{\mathfrak{M}\}_{\tau \in T}$ локализирующих классов называется покрывающей, если из каждого множества $\{B_\tau\}_{\tau \in T}$, $B_\tau \in \mathfrak{M}_\tau$, можно выделить конечное число, сумма которых обратима в алгебре $\mathfrak{A}$ (см. [11]).

Пусть $\{\mathfrak{M}\}_{\tau \in T}$ покрывающая система локализирующих классов в $\mathfrak{A}$ и положим $\mathcal{B} = \cup\{\mathfrak{M}_\tau \colon \tau \in T\}$. Комутант $\operatorname{Com}\mathcal{B}$ замкнутая подалгебра в $\mathfrak{A}$. Для $\tau \in T$ определим

$$\mathfrak{Z}_\tau = \left\{ A \in \operatorname{Com}\mathcal{B} \colon \inf_{B \in \mathfrak{M}_\tau} \|AB\| = \inf_{B \in \mathfrak{M}_\tau} \|BA\| = 0. \right\}$$

Можно показать, что $\mathfrak{Z}_\tau$ замкнутый, двухсторонний идеал в $\operatorname{Com}\mathcal{B}$. Для $A \in \operatorname{Com}\mathcal{B}$ через A_τ обозначим смежный класс в ${\operatorname{Com}\mathcal{B}}/{\mathfrak{Z}_\tau}$ содержащий элемент A.

Теорема 4.1 (Локальный принцип Гохберга и Крупника [11])**.** *Элемент $A \in \operatorname{Com}\mathcal{B}$ обратим в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда A_τ обратим в ${\operatorname{Com}\mathcal{B}}/{\mathfrak{Z}_\tau}$ для всех $\tau \in T$.*

Теорему 4.1 будем применять в случае алгебры Калкина
$\mathfrak{A} = \mathcal{B}\left(L_p^n(\mathbb{R}_+, w)\right)/\mathcal{K}\left(L_p^n(\mathbb{R}_+, w)\right)$, где $\mathcal{B}\left(L_p^n(\mathbb{R}_+, w)\right)$ – банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов на $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$, а $\mathcal{K}\left(L_p^n(\mathbb{R}_+, w)\right)$ – идеал компактных операторов на $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$, который кратко будем обозначать через $\mathcal{K}$.

В качестве кандидатов на локализационных классов в $\mathfrak{A}$ возьмём семейство $\{\mathfrak{M}_{y,\eta}\}$, $(y,\eta) \in (\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}) \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = T$. Множество $\mathfrak{M}_{y,\eta}$ состоит из смежных классов $m(v)W^0(u) + \mathcal{K}$ таких, что $u = diag(\underbrace{u^0, \dots, u^0}_{n})$, $v = diag(\underbrace{v^0, \dots, v^0}_{n})$, где $u^0, v^0 \in C(\dot{\mathbb{R}})$ кусочно линейные с ограниченной вариацией и u^0 (соответственно v^0) тождественно равно 1 в некоторой открытой окрестности y (соответственно η) и тождественно равно 0 вне некоторой открытой окрестности y (соответственно η).

Сначала покажем, что каждый из множеств $\mathfrak{M}_{y,\eta}$ является локализирующим классом. Пусть $m(v_i)W^0(u_i) + \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_{y,\eta}$, $i = 1, 2$, для некоторой $(y,\eta) \in T$. Для любого $m(v)W^0(u) + \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_{y,\eta}$ имеем

$$\left(m(v_i)W^0(u_i) + \mathcal{K}\right)\left(m(v)W^0(u) + \mathcal{K}\right) = m(v_i)W^0(u_i)m(v)W^0(u) + \mathcal{K} =$$
$$= m(v_iv)W^0(u_iu) + m(v_i)\left[W^0(u_i)m(v) - m(v)W^0(u_i)\right]W^0(u) + \mathcal{K} =$$
$$= m(v_iv)W^0(u_iu) + \mathcal{K}.$$

Последнее равенство следует из следующего известного факта (см. [7, 8]).

Лемма 4.1. *Пусть хотя бы одна из матриц функций a или b диагональна. Тогда, если $a \in C^n(\dot{\mathbb{R}})$, b является функцией ограниченной вариации ($Var(b) < \infty$) либо $a \in PC^{n\times n}$, $Var(b) < \infty$, $b \in C^n(\dot{\mathbb{R}})$, то оператор $m(a)W^0(b) - W^0(b)m(a)$ компактен в $L_p^n(\mathbb{R}, w)$.*

Очевидно, что $v_iv = vv_i$, $u_iu = uu_i$ и что функции u, v можно выбрать таким образом, что $v_iv = v$, $u_iu = u$. Система локализирующих классов $\{\mathfrak{M}_{y,\eta}\}$ является покрывающей, т.е. что оператор $\sum\limits_{j=1}^{n} m(u_j)W^0(v_j)$ фредгольмов для заданных

$$u_j = diag\left(u_j^0, \dots, u_j^0\right), \quad v_j = diag(v_j^0, \dots, v_j^0), \quad \sum_{j=1}^{n} u_j^0 \geqslant 1, \ \sum_{j=1}^{n} v_j^0 \geqslant 1.$$

Этот факт очевидным образом сводится к скалярному случаю рассмотренному в [12].

Аналогичными рассуждениями, из леммы 4.1 следует, что если хотя бы одна из матриц-функций c или a диагональна, $b, c \in PC^{n\times n}$, $a \in PC_{p,w}^{n\times n}$, то $m(b) + m(c)W^0(a) + \mathcal{K} \in \operatorname{Com}\mathcal{B}$. Тогда элемент $\left[m(b) + m(c)W^0(a) + \mathcal{K}\right]_{(y,\eta)}$ принадлежит алгебре $\operatorname{Com}\mathcal{B}/\mathfrak{Z}_{y,\eta}$, которую кратко обозначим через $\left[m(b) + m(c)W^0(a)\right]_{y,\eta}^{\pi}$.

Используя локальный принцип Гохберга-Крупника заключаем, что для доказательства фредгольмовости оператора $m(\chi_-) + m(\chi_+)W^0(a)$ (а, следовательно, и для $W(a)$, $W_{\mathcal{L}}(a)$) достаточно исследовать обратимость элементов $\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^{\pi}_{y,\eta}$ в алгебре $\mathrm{Com}\,\mathcal{B}/\mathfrak{Z}_{y,\eta}$ для всех $(y,\eta)\in T$.

5. Доказательство критерий фредгольмовости $W_{\mathcal{L}}(a)$

Пусть $\sigma_\zeta(x) = -\mathrm{sgn}(x-\zeta)E_n$, $\lambda_\zeta(x) = e^{i\zeta x}E_n$, где $x,\zeta\in\mathbb{R}$, Имеет место равенство

$$m(b)+m(c)W^0(\sigma_\zeta) = m(\lambda_\zeta^{-1})(m(b)+m(c)S)m(\lambda_\zeta),$$

где $b,c\in PC^{n\times n}$, а S сингулярный интегральный оператор на оси (см. например [7] либо [11]). Пользуясь стандартной техникой сингулярных интегральных операторов (см. например [9, лемма 3.4] и [7, теорема 16.21]) можем утверждать справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.1. *Пусть $b,c\in PC^{n\times n}$, $\zeta\in\mathbb{R}$ и предположим, что $b-c\in GL_\infty^{n\times n}(\mathbb{R})$. Тогда оператор $m(b)+m(c)W^0(\sigma_\zeta)$ фредгольмов в пространстве $L_p(\mathbb{R},w)$ тогда и только тогда, когда*

$$\det[(1-\mu)d(x-0)+\mu d(x+0)]\neq 0$$

при $\mu\in\mathcal{H}(0,1;\nu_x^-(p,w),\nu_x^+(p,w))$, $x\in\dot{\mathbb{R}}$, где $d=(b-c)^{-1}(b+c)$.

Доказательства следующих лемм в скалярном случае приведены в работе [9] (см. [9, лемма 4.6, лемма 5.1]). Сохраняя методологию этой работы перенесем эти результаты на матричный случай.

Лемма 5.1. *Пусть $b,c\in PC^{n\times n}$, $b-c, b+c\in GL_\infty^n(\mathbb{R})$ и $d=d_{b,c}=(b-c)^{-1}(b+c)$ и предположим, что $y,\eta,\zeta\in\mathbb{R}$. Тогда*

(1) $\left[m(b)+m(c)W^0(\sigma_\zeta)\right]^{\pi}_{y,\infty}$ *обратим тогда и только тогда, когда* $\det[(1-\mu)d(y-0)+\mu d(y+0)]\neq 0$, *при* $\mu\in\mathcal{H}\left(0,1;\nu_y^-(p,w),\nu_y^+(p,w)\right)$;
(2) $\left[m(b)+m(c)W^0(\sigma_\zeta)\right]^{\pi}_{\infty,\infty}$ *обратим;*
(3) $\left[m(b)+m(c)W^0(\sigma_\zeta)\right]^{\pi}_{\infty,\eta}$ *обратим , если* $\eta\neq\zeta$;
(4) $\left[m(b)+m(c)W^0(\sigma_\zeta)\right]^{\pi}_{\infty,\zeta}$ *обратим тогда и только тогда, когда* $\det[(1-\mu)d(+\infty)+\mu d(-\infty)]\neq 0$, *при* $\mu\in\mathcal{H}\left(0,1;\nu_\infty^-(p,w),\nu_\infty^+(p,w)\right)$.

Доказательство. (1) Имеем

$$\left[m(b)+m(c)W^0(\sigma_\zeta)\right]^{\pi}_{y,\infty} = \left[m(b_y)+m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)\right]^{\pi}_{y,\infty}$$

где $b_y,c_y\in PC^{n\times n}$ такие, что $b_y(y\pm0)=b(y\pm0)$, $c_y(y\pm0)=c(y\pm0)$. Функции b_y, c_y выберем так, чтобы они были непрерывными на $\dot{\mathbb{R}}\setminus\{y\}$, а также $b_y\pm c_y\in GPC^{n\times n}$ и $\det d_{b_y,c_y}(x)\neq 0$ при $x\in\dot{\mathbb{R}}\setminus\{y\}$.

Пусть $\det[(1-\mu)d(y-0)+\mu d(y+0)] \neq 0$ при $\mu \in \mathcal{H}(0,1;\nu_y^-(p,w),\nu_y^+(p,w))$. Тогда из теоремы 5.1 заключаем, что оператор $m(b_y)+m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)$ фредгольмовый. В силу теоремы 4.1 элемент $\left[m(b_y)+m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{y,\infty}$ обратим.

Теперь предположим, что $\det[(1-\mu)d(x-0)+\mu d(x+0)] = 0$ при некотором $\mu \in \mathcal{H}(0,1;\nu_y^-(p,w),\nu_y^+(p,w))$, но элемент $\left[m(b_y)+m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{y,\infty}$ обратим. Для $x \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{y\}$ имеем

$$\left[m(b_y)+m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{x,\infty} = \left[m(b_y(x))+m(c_y(x))W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{x,\infty},$$

а так как оператор $m(b_y(x))+m(c_y(x))W^0(\sigma_\zeta)$ (с постоянными матрицами $b_y(x)$, $c_y(x)$) фредгольмов по теореме 5.1, то в силу теоремы 4.1 элемент $\left[m(b_y(x))+m(c_y(x))W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{x,\infty}$ обратим. Также, для $\eta \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left[m(b_y)+m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{\infty,\eta} = \left[m(b_y(\infty))+m(c_y(\infty))W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{\infty,\eta}.$$

Повторяя вышеуказанные рассуждения получим обратимость и для элемента $\left[m(b_y)+m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{\infty,\eta}$.

Следовательно получили, что элемент $\left[m(b_y)+m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{x,\eta}$ обратим для всех $(x,\eta) \in T$ и в силу теоремы 4.1 заключаем, что оператор $m(b_y)+m(c_y)W^0(\sigma_\zeta)$ фредгольмов, что противоречит нашему предположению с учетом теоремы 5.1.

Доказательство (2), (3) без всяких изменений проводится также как и в скалярном случае (см. [9, лемма 5.1]).

(4) Имеем

$$\left[m(b)+m(c)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{\infty,\zeta} = \left[m(b_\infty)+m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{\infty,\zeta},$$

где b_∞, c_∞ непрерывны на $\mathbb{R}$ такие, что $b_\infty(\pm\infty) = b(\pm\infty)$, $c_\infty(\pm\infty) = c(\pm\infty)$, $b_\infty \pm c_\infty \in GPC^{n\times n}$, $\det d_{b_\infty,c_\infty}(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $\det[(1-\mu)d(+\infty)+\mu d(-\infty)] \neq 0$ при $\mu \in \mathcal{H}(0,1;\nu_\infty^-(p,w),\nu_\infty^+(p,w))$. Тогда оператор $m(b_\infty)+m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)$ фредгольмов по теореме 5.1. Следовательно, в силу теоремы 4.1 элемент $\left[m(b_\infty)+m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{\infty,\zeta}$ обратим.

Предположим обратное, пусть $\det[(1-\mu)d(+\infty)+\mu d(-\infty)] = 0$ при некотором $\mu \in \mathcal{H}(0,1;\nu_\infty^-(p,w),\nu_\infty^+(p,w))$, но элемент $\left[m(b_\infty)+m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{\infty,\zeta}$ обратим. При $y \in \mathbb{R}$, имеем

$$\left[m(b_\infty)+m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{y,\infty} = \left[m(b_\infty(y))+m(c_\infty(y))W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{y,\infty},$$

но оператор $m(b_\infty(y))+m(c_\infty(y))W^0(\sigma_\zeta)$ (с постоянными матрицами $b_\infty(y)$, $c_\infty(y)$) фредгольмов в силу теоремы 5.1 и, следовательно, в силу теоремы 4.1 элемент $\left[m(b_\infty)+m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{y,\infty}$ обратим. В случае $\eta \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{\zeta\}$ имеем обратимость элемента $\left[m(b_\infty)+m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{\infty,\eta}$ в силу пунктам (2), (3). Следовательно, в силу теоремы 4.1 из обратимости элементов $\left[m(b_\infty)+m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)\right]^\pi_{y,\eta}$ для любых $(y,\eta)\in T$ заключаем фредгольмовость оператора $m(b_\infty)+m(c_\infty)W^0(\sigma_\zeta)$, что противоречит нашему предположению с учетом теоремы 5.1. □

Лемма 5.2. *Пусть* $a\in PC^{n\times n}_{p,w}\cap GL^n_\infty(\mathbb{R})$, $y,\eta\in\mathbb{R}$. *Тогда*

(1) $\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^\pi_{y,\infty}$ *обратим если* $y\neq 0$;

(2) $\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^\pi_{0,\infty}$ *обратим тогда и только тогда, когда* $\det[(1-\mu)a(+\infty)+\mu a(-\infty)]\neq 0$, *при* $\mu\in\mathcal{H}\left(0,1;\nu_0^-(p,w),\nu_0^+(p,w)\right)$;

(3) $\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^\pi_{\infty,\infty}$ *обратим;*

(4) $\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^\pi_{\infty,\eta}$ *обратим тогда и только тогда, когда* $\det[(1-\mu)a(\eta-0)+\mu a(\eta+0)]\neq 0$, *при* $\mu\in\mathcal{H}\left(0,1;\nu_\infty^-(p,w),\nu_\infty^+(p,w)\right)$.

Доказательство. (1) При $y<0$ имеет место равенство

$$\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^\pi_{y,\infty}=[I]^\pi_{y,\infty},$$

а при $y>0$ имеем

$$\begin{aligned}\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^\pi_{y,\infty}&=\left[W^0\left(a(-\infty)\chi_-+a(+\infty)\chi_+\right)\right]^\pi_{y,\infty}=\\ =\left[m\left(\frac{a(-\infty)+a(+\infty)}{2}\right)+m\left(\frac{a(-\infty)-a(+\infty)}{2}\right)W^0(\sigma_0)\right]^\pi_{y,\infty}&=\\ =\left[m(b)+m(c)W^0(\sigma_0)\right]^\pi_{y,\infty}.\end{aligned}$$

Очевидно, что $[I]^\pi_{y,\infty}$ обратимый и поскольку

$$\det\left[(b-c)^{-1}(b+c)\right]=\det[(a(+\infty))^{-1}a(-\infty)]\neq 0,$$

то из леммы 5.1 (1) заключаем, что элемент $\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^\pi_{y,\infty}$ обратим.

(2) Имеем

$$\begin{aligned}&\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^\pi_{0,\infty}=\\ &=\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0\left(a(-\infty)\chi_-+a(+\infty)\chi_+\right)\right]^\pi_{0,\infty}=\\ &=\left[m(b)+m(c)W^0(\sigma_0)\right]^\pi_{0,\infty}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\left((b-c)^{-1}(b+c)\right)(x)=\begin{cases}E_n, & \text{для } x<0\\ (a(+\infty))^{-1}a(-\infty), & \text{для } x>0\end{cases}$$

то из леммы 5.1 (1) заключаем, что элемент $\left[m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)\right]^\pi_{0,\infty}$ обратим тогда и только тогда, когда

$$\det[(1-\mu)E_n+\mu\left(a(+\infty)\right)^{-1}a(-\infty)]\neq 0,\ \text{ при }\ \mu\in\mathcal{H}\left(0,1;\nu_0^-(p,w),\nu_0^+(p,w)\right).$$

Последнее умножая на $\det a(+\infty) \neq 0$ получим требуемое.

(3) Имеем

$$\begin{gathered}\left[m(\chi_-) + m(\chi_+) W^0(a)\right]^{\pi}_{\infty,\infty} = \\ = \left[m(\chi_-) + m(\chi_+) W^0\left(a(-\infty)\chi_- + a(+\infty)\chi_+\right)\right]^{\pi}_{\infty,\infty} = \\ = \left[m(b) + m(c) W^0(\sigma_0)\right]^{\pi}_{\infty,\infty}.\end{gathered}$$

что обратимо в силу леммы 5.1 (2).

(4) Пусть χ^-_η и χ^+_η характеристические функции множеств $(-\infty,\eta)$ и $(\eta,+\infty)$ соответственно. Тогда

$$\begin{gathered}\left[m(\chi_-) + m(\chi_+) W^0(a)\right]^{\pi}_{\infty,\eta} = \\ = \left[m(\chi_-) + m(\chi_+) W^0\left(a(\eta-0)\chi^-_\eta + a(\eta+0)\chi^+_\eta\right)\right]^{\pi}_{\infty,\eta} = \\ = \left[m(\chi_-) + m\left(\frac{a(\eta-0)+a(\eta+0)}{2}\right) + m\left(\frac{a(\eta-0)-a(\eta+0)}{2}\right) W^0(\sigma_\eta)\right]^{\pi}_{\infty,\eta} = \\ = \left[m(b) + m(c) W^0(\sigma_\eta)\right]^{\pi}_{\infty,\eta}.\end{gathered}$$

Поскольку

$$\left((b-c)^{-1}(b+c)\right)(-\infty) = E_n, \quad \left((b-c)^{-1}(b+c)\right)(+\infty) = \left(a(\eta+0)\right)^{-1} a(\eta-0),$$

то из леммы 5.1 (4) закючаем, что элемент $\left[m(\chi_-) + m(\chi_+) W^0(a)\right]^{\pi}_{\infty,\eta}$ обратим тогда и только тогда, когда

$$\det\left[(1-\mu)\left(a(\eta+0)\right)^{-1} a(\eta-0) + \mu E_n\right] \neq 0, \quad \text{при} \quad \mu \in \mathcal{H}(0,1;\nu^-_\infty(p,w),\nu^+_\infty(p,w)).$$

Умножая на $\det a(\eta+0) \neq 0$ получим требуемое. $\square$

Принимая во внимание вышеуказанный факт о фредгольмовой эквивалентности операторов $W_{\mathcal{L}}(a)$ и $m(\chi_-)+m(\chi_+)W^0(a)$ и локальный принцип Гохберга-Крупника, из леммы 5.2 получаем первую часть теоремы 2.1, а именно критерий фредгольмовости оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$.

6. Формула индекса

Пусть $a \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w}$. Операторы Ганкеля $H(a)$, $\tilde{H}(a)$ с символом a определим

$$\begin{gathered}H(a) = \pi_+ W^0(a) \pi^0_- J \colon L^n_p(\mathbb{R}_+, w) \to L^n_p(\mathbb{R}_+, w), \\ \tilde{H}(a) = J\pi_- W^0(a) \pi^0_+ \colon L^n_p(\mathbb{R}_+, w) \to L^n_p(\mathbb{R}_+, w).\end{gathered}$$

Нетрудно убедиться (см. [7, предложение 2.10]), что имеет место следующее равенство

$$W(ab) = W(a)W(b) + H(a)\tilde{H}(b), \quad \text{где} \;\; a, b \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w} \tag{6.1}$$

Предложение 6.1. *Пусть $c \in C^{n\times n}(\dot{\mathbb{R}})$, тогда операторы Ганкеля $H(c)$, $\tilde{H}(c)$ компактны.*

Доказательство. Пусть $1 < p < \infty$ и $w \in A_p(\mathbb{R}_+)$. Теорема 2.31 из [13] утверждает, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $w^{1+\gamma} \in A_{p_1}(\mathbb{R}_+)$, как только

$$|\gamma| < \varepsilon_0, \;\; |p - p_1| < \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad 1 < p_1 < \infty. \tag{6.2}$$

Пусть $0 < \theta < 1$, $\gamma = \frac{1-\theta}{\theta}$ и $p_1 = p(1+\varepsilon)$. Выберем θ таким образом,чтобы имело место равенство

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{p(1+\varepsilon)} \tag{6.3}$$

и одновременно были выполнены условия (6.2). Такой выбор возможен поскольку из (6.3) следует, что

$$\varepsilon = \frac{(1-\theta)(p-2)}{2-p(1-\theta)}$$

и при $\theta \to 1$, имеем $\gamma \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Пусть весовая функция w_1 определена равенством $w^p = w_1^{p_1 \frac{p\theta}{p_1}} = w_1^{p\theta}$, т.е. $w_1 = w^{\frac{1}{\theta}} = w^{1+\frac{1-\theta}{\theta}} = w^{1+\gamma}$ и поэтому в силу вышеуказанной теоремы $w_1 \in A_{p_1}(\mathbb{R}_+)$. В силу интерполяционной теоремы Стейна-Вейса (см. [14]) $L_p(\mathbb{R}_+, w)$ является интерполяционным пространством с показателем θ, между парой пространств $L_2(\mathbb{R}_+)$ и $L_{p_1}(\mathbb{R}, w_1)$. Ганкелевы операторы $H(c)$ и $\tilde{H}(c)$ в случае $c \in C(\dot{\mathbb{R}})$ компактны как операторы действующие из $L_2(\mathbb{R}_+)$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$ (см. [7]) и ограничены как операторы действующие из $L_{p_1}(\mathbb{R}_+, w)$ в $L_{p_1}(\mathbb{R}_+, w)$. В силу обобщённой теоремы Красносельского (см. [15]) эти операторы компактны и как операторы действующие из $L_p(\mathbb{R}_+, w)$ в $L_p(\mathbb{R}_+, w)$. □

Используя равенство (6.1) из предложения 6.1 вытекает

Следствие 6.1. *Пусть $a, b \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w}$ и хотя бы один из функций a, b принадлежит $C^{n\times n}(\dot{\mathbb{R}})$, то оператор $W(ab) - W(a)W(b)$ компактный.*

Перейдём теперь к доказательству формулы индекса. Учитывая теорему 3.1 формулу индекса достаточно доказать для $W(a)$.

Пусть E подмножество $PC_{p,w}^{n\times n}$ состоящее из матриц-функций компоненты которых являются функциями ограниченной вариации и имеющих конечное число разрывов. Из определения $PC_{p,w}^{n\times n}$ следует существование последовательности a_n, $a_n \in E$, такого что $\|W(a_n) - W(a)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Поскольку индекс оператора является непрерывной функцией, то без потери общности мы можем считать, что $a \in E$. Из условий фредгольмовости имеем, что $a \in GPC^{n\times n}$. Тогда, как известно (см. [16, лемма 2.2]), матрица a может быть представлена в виде

$$a = b\,\varphi\,c,$$

где $b, c \in GC^{n\times n}(\dot{\mathbb{R}})$, $\varphi \in GPC^{n\times n}$ и φ верхтреугольная матрица вида

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_n \end{pmatrix}$$

при этом матриц-функции b, φ, c могут быть выбраны так, чтобы их компоненты были функциями ограниченной вариации. Тогда в силу обобщенного неравенства Стечкина (см. [7, теорема 17.1]) матриц-функции являются мультипликаторами, т.е. $b, \varphi, c \in \mathcal{M}_{p,w}^{n\times n}$.

В силу следствия 6.1 оператор $W(a) - W(b)W(\varphi)W(c)\colon L_p^n(\mathbb{R}_+, w) \to L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$ является компактным. Из критерия фредгольмовости и из того, что $b, c \in GC^{n\times n}(\dot{\mathbb{R}})$ имеем, что операторы $W(b)$, $W(c)$ фредгольмовы. Кроме того

$$0 \neq \det[(1-\mu)a(x-0) + \mu a(x+0)] = \det[(1-\mu)b(x)\varphi(x-0)c(x)+$$
$$+\mu b(x)\varphi(x+0)c(x)] = \det b(x)\cdot \det[(1-\mu)\varphi(x-0) + \mu\varphi(x+0)]\det c(x),$$

где при $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathcal{H}(0,1;\nu_\infty^-(p,w),\nu_\infty^+(p,w))$, а при $x = \infty$, $\mu \in \mathcal{H}(0,1;\nu_0^-(p,w),\nu_0^+(p,w))$.

Следовательно, так как $\det b(x) \neq 0$, $\det c(x) \neq 0$, то в силу уже доказанного критерия фредгольмовости оператор $W(\varphi)$ также является фредгольмовым и $\det[(1-\mu)\varphi(x-0) + \mu\varphi(x+0)] \neq 0$. В силу треугольной структуры φ

$$\prod_{i=1}^{n}[(1-\mu)\varphi_i(x-0) + \mu\varphi_i(x+0)] \neq 0 \implies$$
$$\implies [(1-\mu)\varphi_i(x-0) + \mu\varphi_i(x+0)] \neq 0, \quad i = 1,\ldots,N,$$

где при $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathcal{H}(0,1;\nu_\infty^-(p,w),\nu_\infty^+(p,w))$, а при $x = \infty$, $\mu \in \mathcal{H}(0,1;\nu_0^-(p,w),\nu_0^+(p,w))$.

Используя критерий фредгольмовости для оператора Винера-Хопфа со скалярным символом (см. [9]) получаем, что операторы $W(\varphi_i)$, $i = 1, \dots, n$ фредгольмовы. Следовательно

$$\operatorname{Ind} W(a) = \operatorname{Ind} W(b) + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ind} W(\varphi_j) + \operatorname{Ind} W(c). \tag{6.4}$$

Для каждой φ_j обозначим через $\varphi_j^{\#}$ кривую, которая получается из существенного образа кривой φ_j путем соединения точек $\varphi_j(x-0)$, $\varphi_j(x+0)$ дугами вида

$$(1-\mu)\varphi_j(x-0) + \mu\varphi_j(x+0),$$

где $\mu \in \mathcal{A}(0,1;\nu_\infty^0)$ при $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathcal{A}(0,1;\nu_0^0)$ при $x = \infty$.

Из [9, теорема 5.2] следует, что

$$\operatorname{Ind} W(\varphi_j) = -\operatorname{wind} \varphi_j^{\#}.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ind} W(\varphi_j) = \sum_{j=1}^{n} -\operatorname{wind} \varphi_j^{\#} = -\operatorname{wind} \prod_{j=1}^{n} \varphi_j^{\#} = -\operatorname{wind} \varphi^{\#},$$

где $\varphi^{\#}$ кривая полученная из образа $\det \varphi$ добавлением кривыми вида

$$\det[(1-\mu)\varphi(x-0) + \mu\varphi(x+0)],$$

где $\mu \in \mathcal{A}(0,1;\nu_\infty^0)$ при $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathcal{A}(0,1;\nu_0^0)$ при $x = \infty$, в точках разрыва функции $\det \varphi$. Таким образом $\operatorname{Ind} W(\varphi) = -\operatorname{wind} \varphi^{\#}$.

Для непрерывных b, c имеем, что (см. [7, теорема 17.10])

$$\operatorname{Ind} W(b) = -\operatorname{wind} \det b, \quad \operatorname{Ind} W(c) = -\operatorname{wind} \det c.$$

Следовательно из (6.4) имеем $\operatorname{Ind} W(a) = -\operatorname{wind} \det b - \operatorname{wind} \varphi^{\#} - \operatorname{wind} \det c = -\operatorname{wind}_{p,w} a$. Теорема 2.1 доказана.

7. Следствия из основной теоремы

Обозначим через $\lambda_j(x)$, $x \in \dot{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2, \dots, n$ собственные значения матрицы $a^{-1}(x-0)a(x+0)$. Легко видеть, что при $x \in \dot{\mathbb{R}}$ условие

$$\det[(1-\mu)a(x-0) + \mu a(x+0)] \neq 0, \quad \mu \in \mathcal{A}(0,1;\nu)$$

эквивалентно условиям

$$\begin{aligned} &\det a(x \pm 0) \neq 0, \\ &\frac{\mu}{\mu-1}\lambda_j(x) \neq 1, \quad j = 1, \dots, n,\ \mu \in \mathcal{A}(0,1;\nu) \setminus \{0,1\}, \end{aligned}$$

или, что тоже самое

$$\det a(x \pm 0) \neq 0,$$
$$\lambda_j(x) \neq \frac{\mu - 1}{\mu}, \quad j = 1, \dots, n, \ \mu \in \mathcal{A}(0, 1; \nu) \setminus \{0, 1\}.$$

С учетом того, что для $\mu \in \mathcal{A}(0,1;\nu) \setminus \{0,1\}$, $\frac{\mu}{\mu-1} = e^{i2\pi\nu}\zeta$, $\zeta \in (0,\infty)$ из теоремы 2.1 несложно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 7.1. *Пусть $a \in PC^{n\times n}_{p,w}$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны*

(1) *Оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов;*

(2) $\det a(x \pm 0) \neq 0$ *для* $x \in \dot{\mathbb{R}}$,

$$\nu + \frac{1}{2\pi}\arg\lambda_j(x) \notin \mathbb{Z} \ \ \textit{для}\ x \in \mathbb{R},\ \nu \in [\nu_\infty^-, \nu_\infty^+],\ j = 1, \dots, n,$$
$$\nu + \frac{1}{2\pi}\arg\lambda_j(\infty) \notin \mathbb{Z} \ \ \textit{для}\ \nu \in [\nu_0^-, \nu_0^+],\ j = 1, \dots, n;$$

(3) $\det a(x \pm 0) \neq 0$ *для* $x \in \dot{\mathbb{R}}$,

$$\lambda_j(x) \notin \{re^{-i2\pi\nu} \colon r \in (0,\infty),\ \nu \in [\nu_\infty^-, \nu_\infty^+]\} \ \ \textit{для}\ x \in \mathbb{R},$$
$$\lambda_j(\infty) \notin \{re^{-i2\pi\nu} \colon r \in (0,\infty),\ \nu \in [\nu_0^-, \nu_0^+]\}.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $0 < \nu < 1$, функция $g \colon \mathcal{A}(0,1,\nu) \to \mathbb{C}$ определена равенством $g(\mu) = (1-\mu) + \mu\lambda$. Как известно (см. например [7, теорема 16.18])

$$\frac{1}{2\pi}\left[\arg g\right]_{\mathcal{A}(0,1,\nu)} = -\nu + \left\{\nu + \frac{1}{2\pi}\arg\lambda\right\},$$

где $[\arg g]_{\mathcal{A}(0,1,\nu)}$ является изменением аргумента g при переходе от $\mu = 0$ к $\mu = 1$ по дуге $\mathcal{A}(0,1;\nu)$, а $\{c\}$ означает дробная часть числа, $c \in \mathbb{R}$. Отсюда при $x \in \mathbb{R}$ изменение аргумента вдоль дуги $\mathcal{A}(0,1;\nu)$ функции $\arg\det((1-\mu)a(x-0)+\mu a(x+0))$ равно

$$\frac{1}{2\pi}\left[\arg\det((1-\mu)a(x-0) + \mu a(x+0))\right]_{\mathcal{A}(0,1;\nu)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\arg\prod_{j=1}^{n}((1-\mu) + \mu\lambda_j(x))\right]_{\mathcal{A}(0,1;\nu)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\left[\arg((1-\mu) + \mu\lambda_j(x))\right]_{\mathcal{A}(0,1;\nu)} = -n\nu_\infty + \sum_{j=1}^{n}\left\{\nu_\infty + \frac{1}{2\pi}\arg\lambda_j(x)\right\}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi}\left[\arg\det((1-\mu)a(+\infty) + \mu a(-\infty))\right]_{\mathcal{A}(0,1;\nu)} =$$

$$= -n\nu_0 + \sum_{j=1}^{n} \left\{ \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(\infty) \right\}.$$

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$, где $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$. Для непрерывной на Δ и отличной там от нуля функции c через $\arg_\Delta c$ будем обозначать непрерывный аргумент функции c, т.е. непрерывную на Δ функцию удовлетворяющую тождеству $c(x) = |c(x)|e^{i \arg c(x)}$, $x \in \Delta$.

Из теоремы 2.1 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 7.2. *Пусть матриц-функция $a \in PC_{p,w}^{n\times n}$ имеет конечное число разрывов в точках $-\infty < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < \infty$ и может иметь разрыв в бесконечности. Тогда, если оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов, то*

$$\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) = \frac{1}{2\pi} \left(\arg_{\Delta_0} \det a(-\infty) - \arg_{\Delta_0} \det a(x_1 - 0) \right) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\arg_{\Delta_k} \det a(x_k + 0) - \arg_{\Delta_k} \det a(x_{k+1} - 0) \right) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \left(\arg_{\Delta_m} \det a(x_m + 0) - \arg_{\Delta_m} \det a(+\infty) \right) + n\, m\, \nu_\infty^0 + n\, \nu_0^0 -$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \nu_\infty^0 + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(x_k) \right\} - \sum_{j=1}^{n} \left\{ \nu_0^0 + \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(+\infty) \right\}.$$

8. Частный случай

Пусть $w(x) = t^\beta$, $\beta \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right)$, где $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Известно, что тогда $w \in A_p(\mathbb{R})$ (см. [7, стр. 304]).

Рассмотрим оператор $W_{\mathcal{L}}(a) \colon L_p(\mathbb{R}_+, t^\beta) \to L_p(\mathbb{R}_+, t^\beta)$ в случае символа $a(x) = -\operatorname{sgn}(x)$ и безотражательного потенциала

$$v(x) = -\frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2(\mu(x - \xi))}, \quad \xi = \frac{1}{\ln\left({}^{m^2}\!/_{2\mu} \right)},$$

$m, \mu > 0$. Известно следующее равенство (см. [17, 6])

$$W_{\mathcal{L}}(-\operatorname{sgn} x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{s - x} y(s)\, ds - \frac{1}{\pi i}\, \varphi(x) \int_0^\infty (Ei(\mu(s-x)) - Ei(\mu(x-s))) \varphi(s) y(s)\, ds,$$

где $\varphi(x) := \dfrac{m e^{\mu\xi}}{2\operatorname{ch}(\mu(x - \xi))}$, а $Ei(x) := v.p. \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$ интегрально-показательная функция. Из теоремы 3.1 имеем

$$W_{\mathcal{L}}(-\operatorname{sgn} x) = (I + \mathcal{K}_+) W(-\operatorname{sgn} x)(I - \Gamma_+).$$

С другой стороны из леммы 3.1 имеем обратимость операторов $(I+\mathcal{K}_+)$, $(I-\Gamma_+)$ и их явный вид. Следовательно обратимость оператора $W_{\mathcal{L}}(-\operatorname{sgn} x)$ сводится к обратимости оператора $W(-\operatorname{sgn} x)$.

Известно, что (см. [7]) оператор $W(-\operatorname{sgn} x)$ совпадает с сингулярным интегральным оператором S_+ на положительной полуоси

$$(S_+ f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

В свою очередь (см. [11, стр. 312]) имеем, что при $2(1+\beta) > p$

$$\left(S_+^{-1} f\right)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{\tau}{t}}\,\frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

а при $2(1+\beta) < p$

$$\left(S_+^{-1} f\right)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{t}{\tau}}\,\frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

В случае когда $p = 2(1+\beta)$ оператор S_+ (а следовательно и $W_{\mathcal{L}}(-\operatorname{sgn} x)$) не является обратимым.

Таким образом справедливо следующее утверждение.

Следствие 8.1. *В случае $p \neq 2(1+\beta)$ оператор $W_{\mathcal{L}}(-\operatorname{sgn} x)$ обратим и его обратный оператор допускает представление*

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{L}}^{-1}(-\operatorname{sgn} x) &= (I-\Gamma_+)^{-1} W^{-1}(-\operatorname{sgn} x)(I+\mathcal{K}_+)^{-1} = \\ &= \left(I + m(\varphi) N_{\psi,2}^+\right) S_+^{-1}\left(I + m(\psi) N_{\varphi,1}^+\right) = \\ &= S_+^{-1} + m(\varphi) N_{\psi,2}^+ S_+^{-1} + S_+^{-1} m(\psi) N_{\varphi,1}^+ + m(\varphi) N_{\psi,2}^+ S_+^{-1} m(\psi) N_{\varphi,1}^+, \end{aligned}$$

где $\psi(x) = m e^{-\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$, а операторы $N_{\varphi,1}^+$, $N_{\psi,2}^+$ определяются по формулам (3.1).

Abstract. The present paper considers matrix $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operators generated by a reflectionless potential and acting in Lebesgue spaces with Muckenhoupt weight. These operators are defined by replacing the Fourier transform in the standard definition of the Wiener-Hopf operator with the spectral transform of the Sturm-Liouville operator with a reflectionless potential. Criteria for Fredholm property and a formula for the index in the case of a piecewise continuous symbol are obtained.

Список литературы

[1] А. Г. Камалян, И. М. Спитковский, “О фредгольмовости одного класса операторов типа свертки”, Математические заметки, **104**, но. 3, 407 – 421 (2018). DOI:10.4213/mzm12113

[2] А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян, “Операторы $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в весовых пространствах в случае безотражательного потенциала”, Изв. НАН Армении, Математика, **57**, но. 2, 112 – 121 (2022). DOI:10.54503/0002-3043-2022.57.2-0-43

[3] Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния”, Итоги науки и техники, Сер. Соврем. проблем мат., 3 ВИНИТИ, Москва, 93 – 180 (1974).

[4] В. Юрко, Введение в Теорию Обратных Спектральных Задач, Физмат, Москва (2007).

[5] П. Бхатнагар, Нелинейные Волны в Одномерных Диспергирующих Системах, Мир, Москва (1983).

[6] D. Hasanyan, A. Kamalyan, M. Karakhanyan, I. M. Spitkovsky, “Integral Operators of the $\mathcal{L}$-Convolution Type in the Case of a Reflectionless Potential”, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, **291**, 175 – 197 (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-030-26748-3_11

[7] A. Böttcher Y. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky, Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions, Birkhäuser, Basel (2002).

[8] Р. В. Дудучава, Интегральные Уравнения Свертки с Разрывными Предсимволами, СИУ, (1979).

[9] A. Böttcher, I. M. Spitkovsky, “Wiener-Hopf integral operators with PC symbols on spaces with Muckenhoupt weight”, Revista Matemática Iberoamericana, **9**, no. 2, 257 – 279 (1993). DOI:10.4171/RMI/136

[10] R. Schneider, “Integral equations with piecewise continuous coefficients in L^p-spaces with weight”, Journal of Integral Equations, **9**, no. 2, 135 – 152 (1985). https://www.jstor.org/stable/26164260

[11] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Интегральных Операторов, Кишинев, Штиинца (1973).

[12] A. Böttcher, I. M. Spitkovsky, “Pseudodifferential operators with heavy spectrum, Integral Equations and Operator Theory”, **19**, 251–269, (1994). DOI:10.1007/BF01203665

[13] A. Böttcher, Y. I. Karlovich, Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators, Progress in Mathematics, 154, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (1997).

[14] E. Stein, G. Weiss, “Interpolation of operators with change of measures”, Transactions of the American Mathematical Society, **87**, 159 – 172 (1958). DOI:10.1090/s0002-9947-1958-0092943-6

[15] A. Persson, Compact linear mappings between interpolation spaces, Arkiv för Matematik, **5**, no. 13, 215 – 219 (1964). DOI:10.1007/BF02591123

[16] K. F. Clancey , I. Gohberg, Factorization of matrix functions and singular integral operators, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston (1981).

[17] G. Kirakosyan, “On the invertibility of one integral operator”, Armenian Journal of Mathematics, **14**, no. 6, 1 – 10 (2022). DOI: https://doi.org/10.52737/18291163-2022.14.6-1-10

Поступила 08 июля 2024

После доработки 29 октября 2024

Принята к публикации 05 ноября 2024