Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 1, 2025, стр. 10 – 24.

ОБ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ГАУССОВСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

М. С. ГИНОВЯН, А. А. СААКЯН

Бостонский университет, Ереванский государственный университет
E-mails: ginovyan@bu.edu; sart@ysu.am

Аннотация. В этой статье мы устанавливаем предельные теоремы с умеренными уклонениями для Теплицевых и суженно Теплицевых квадратичных функционалов от гауссовских стационарных процессов с непрерывным временем. Результаты применяются для непараметрической оценки спектральных функционалов.

MSC2020 numbers: 60F10; 60G10; 60G15; 62G05; 62G20.

Ключевые слова. Теплицевый квадратичный функционал; принцип больших уклонений; умеренное уклонение; гауссовские стационарные процессы с непрерывным временем; спектральная плотность.

1. Введение

Пусть $\{\xi_T,\, T \in \mathbb{N}\}$ – последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, сходящейся по вероятности к действительной константе m (ξ_T может представлять собой T-ю частную сумму среднего значения другой последовательности случайных величин $\xi_T = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\eta_k$, где последовательность $\{\eta_k\}$ может быть независимой и одинаково распределенной или зависимой, как наблюдаемый отрезок некоторого стохастического процесса).

По закону больших чисел (ЗБЧ) имеем, что для $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{|\xi_T - m| > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.1}$$

Но как насчет скорости сходимости к нулю в (1.1)? Часто бывает так, что сходимость к нулю в (1.1) экспоненциально быстро, то есть, для $T \to \infty$,

$$\mathbb{P}\{|\xi_T - m| > \varepsilon\} \approx R(\cdot)\exp[-TI(\varepsilon, m)], \tag{1.2}$$

где $R(\cdot) = R(\varepsilon, m, T)$ — медленно меняющаяся (относительно экспоненциальной) функция от T, а $I(\varepsilon, m)$ — положительная величина.

Грубо говоря, если (1.2) выполняется, мы будем говорить, что последовательность $\{\xi_T,\, T \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет принципу больших уклонений. Одной из основных проблем теории больших уклонений является определение величин $I(\varepsilon, m)$ и $R(\varepsilon, m, T)$.

Таким образом, теорию больших уклонений можно рассматривать как расширение ЗБЧ. ЗБЧ утверждает, что определенные вероятности сходятся к нулю, в то время как теория больших уклонений занимается скоростью сходимости.

Теперь дадим стандартное определение *принципа больших уклонений (ПБУ)* (см. [2] – [4]).

Определение 1.1. *Скажем, что набор действительных случайных величин* $\{Y_T,\, T \in \mathbb{U}\}$*, определенных на вероятностном пространстве* $(\Omega, F, \mathbb{P})$*, удовлетворяет ПБУ со скоростью* $a_T \to \infty$ *и функцией скорости* $I : \mathbb{R} \to [0, \infty]$*, если множества уровня* $I^{-1}([0, b])$ *компактны для всех* $b < \infty$*, и*

$$\liminf_{T\to\infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P}\{Y_T \in E\} \geq - \inf_{x\in E} I(x)$$

для любого открытого множества $E \subset \mathbb{R}$*, в то время как*

$$\limsup_{T\to\infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P}\{Y_T \in F\} \leq - \inf_{x\in F} I(x),$$

для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}$*.*

ПБУ для квадратичных форм от гауссовских стационарных процессов с дискретным временем был установлен в ряде работ (см. [1], [2], [5], [12] – [15] и ссылки в них). ПБУ для квадратичных функционалов от гауссовских стационарных процессов с непрерывным временем был доказан в работах [2] и [5].

Важно исследовать ПБУ для случайных величин вида $m_T Y_T$, где фактор m_T является положительной числовой функцией от $T \in \mathbb{R}^+$, которая стремится к бесконечности при $T \to \infty$, но медленнее, чем стандартный нормализующий фактор $T^{1/2}$ в центральной предельной теореме (ЦПТ) для Y_T, то есть, $m_T = o(T^{1/2})$ при $T \to \infty$. Этот сценарий часто называют *принципом умеренных уклонений (ПУУ)*, поскольку он дает промежуточную оценку между ЦПТ и ПБУ. Итак, будем говорить, что набор $\{Y_T,\, T \in \mathbb{U}\}$ действительных случайных величин удовлетворяет ПУУ со скоростью $a_T \to \infty$ и функцией скорости $I : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, если случайная величина $m_T Y_T$ с $m_T = o(T^{1/2})$ при $T \to \infty$, удовлетворяет ПБУ с той же скоростью a_T и функцией скорости I.

Инструментом, используемым для установления ПУУ, является следующая теорема Гартнера–Эллиса (см., например, [4], теорема 2.3.6).

Утверждение 1.1 (Теорема Гартнера–Эллиса)**.** *Пусть* $\{Y_T, T \in \mathbb{U}\}$ *– набор действительных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве* $(\Omega, F, \mathbb{P})$*, и пусть* a_T *– положительная числовая функция от* $T \in \mathbb{R}^+$*, стремящаяся к бесконечности при* $T \to \infty$*. Положим*

$$M_T(s) := a_T^{-1} \log \mathbb{E}[\exp(sa_T Y_T)].$$

Если предел

$$\lim_{T\to\infty} M_T(s) := M(s) \in \mathbb{R}$$

существует для всех $s \in \mathbb{R}$ *и предельная функция* $M(s)$ *дифференцируема для всех* $s \in \mathbb{R}$*, то* $\{Y_T\}$ *удовлетворяет ПБУ со скоростью* a_T *и функцией скорости* $I(x)$*, которая является преобразованием Фенхеля-Лежандра для* $M(s)$*:*

$$I(x) = \sup_{s\in\mathbb{R}}\{sx - M(s)\},$$

то есть для любого замкнутого множества F *из* $\mathbb{R}$

$$\limsup_{T\to\infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P}\{Y_T \in F\} \le - \inf_{x\in F} I(x),$$

и для любого открытого множества E *из* $\mathbb{R}$

$$\liminf_{T\to\infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P}\{Y_T \in E\} \ge - \inf_{x\in E} I(x).$$

Теоремы об умеренных уклонениях для квадратичных форм в дискретных гауссовских стационарных процессах были получены в работах [2] и [13]. В работе [2] также был сформулирован ПУУ для специального квадратичного функционала в случае непрерывного времени (см. теорему 2.4 ниже).

В этой статье нас интересует принцип умеренных уклонений для Теплицевых и суженно Теплицевых квадратичных функционалов от гауссовских стационарных процессов с непрерывным временем и их применение для непараметрической оценки спектральных функционалов.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приводим достаточные условия для ПУУ в случае общих и Теплицевых квадратичных функционалов от гауссовских стационарных процессов. В разделе 3 мы устанавливаем ПУУ для суженных Теплицевых функционалов. Раздел 4 содержит доказательства теорем. В разделе 5 результаты применяются для непараметрической оценки линейных спектральных функционалов.

2. ПУУ для квадратичных функционалов

Пусть $\{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ – центрированный вещественный гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и ковариационной функцией $r(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Обозначим через $W_T(f)$ $(T > 0)$ ковариационный оператор процесса $X(t)$, то есть, $W_T(f)$ является *T-усеченным оператором Теплица* (также называемым *T-усеченным оператором Винера-Хопфа*) определенным равенством:

$$[W_T(f)u](t) = \int_0^T r(t-s)u(s)ds, \quad u(s) \in L^2[0,T]. \tag{2.1}$$

Пусть $a(t,s)$ – симметричная интегрируемая с квадратом функция, определенная на $[0,T] \times [0,T]$, и пусть A_T - линейный интегральный оператор, определенный на пространстве $L^2[0,T]$, порождённый ядром $a(t,s)$, то есть для $\phi \in L^2[0,T]$,

$$[A_T\phi](t) = \int_0^T a(t,s)\phi(s)ds, \quad t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Рассмотрим следующий случайный квадратичный функционал от процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}_T := \int_0^T \int_0^T a(t,s)X(t)X(s)\, dt\, ds. \tag{2.3}$$

Через $\widetilde{\mathcal{A}}_T$ обозначим нормализованный квадратичный функционал:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_T := b_T^{-1}\left(\mathcal{A}_T - \mathbb{E}[\mathcal{A}_T]\right), \tag{2.4}$$

где b_T — положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $b_T \to \infty$ при $T \to \infty$.

Нас интересует ПУУ для функционала $\widetilde{\mathcal{A}}_T$. Мы предпологаем, что

(A1).

$$\lim_{T\to\infty} \frac{2}{b_T} \operatorname{tr}\big[A_T W_T(f)\big]^2 := V \in [0,\infty), \tag{2.5}$$

где $\operatorname{tr}[A]$ – след оператора A.

(A2). При некоторых $\delta \in [0,1/2)$ и константе $c \in [0,\infty)$,

$$\sup_{T\in\mathbb{R}} b_T^{-\delta} ||A_T W_T(f)||_\infty \le c. \tag{2.6}$$

Следующая теорема содержит достаточные условия для того, чтобы общий квадратичный функционал $\widetilde{\mathcal{A}}_T$ удовлетворял ПУУ.

Теорема 2.1. *Предположим, что условия (A1) и (A2) выполняются с некоторой $\delta \in [0, 1/2)$. Пусть a_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $1/a_T + a_T b_T^{2\delta-1} \to 0$ при $T \to \infty$. Тогда случайная величина $(b_T/a_T)^{1/2}\widetilde{\mathcal{A}}_T$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I_V(x)$:*

$$I_V(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{xy - y^2V/2\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где V определена в (2.5), то есть, для любого открытого множества $E \subset \mathbb{R}$,

$$\liminf_{T\to\infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P}\left\{(b_T/a_T)^{1/2}\widetilde{\mathcal{A}}_T \in E\right\} \geq -\inf_{x\in E} I(x)$$

и для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}$.

$$\limsup_{T\to\infty} a_T^{-1} \log \mathbb{P}\left\{(b_T/a_T)^{1/2}\widetilde{\mathcal{A}}_T \in F\right\} \leq -\inf_{x\in F} I(x),$$

Замечание 2.1. В дополнение к условиям теоремы 2.1 рассмотрим неслучайную функцию ε_T (в статистических приложениях это часто смещение оценок) такую, что $(b_T/a_T)^{1/2}\varepsilon_T \to b \in \mathbb{R}$ при $T \to \infty$. Тогда случайная величина $(b_T/a_T)^{1/2}(\widetilde{\mathcal{A}}_T + \varepsilon_T)$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I_V(x-b)$, $x \in \mathbb{R}$.

Теперь, пусть $a(t,s) = \widehat{g}(t-s)$, где $\widehat{g}$ — преобразование Фурье некоторой интегрируемой четной функции g. В этом случае оператор A_T, определенный по формуле (2.2) с $a(t,s) = \widehat{g}(t-s)$, является T-усеченным оператором Теплица, порожденным функцией g:

$$[W_T(g)u](t) = \int_0^T \hat{g}(t-s)u(s)ds, \quad u(s) \in L^2[0,T].$$

Теперь нас интересует ПУУ для следующего Теплицевого квадратичного функционала от процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$Q_T := \int_0^T \int_0^T \widehat{g}(t-s)X(t)X(s)\,dt\,ds, \tag{2.7}$$

Через $\widetilde{Q}_T$ обозначим стандартный нормализованный квадратичный функционал:

$$\widetilde{Q}_T := T^{-1}\left(Q_T - \mathbb{E}[Q_T]\right). \tag{2.8}$$

Предположим следующее:

(B1). $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и при $T \to \infty$,

$$\chi_2(\widetilde{Q}_T) := \frac{2}{T}\mathrm{tr}\big[W_T(f)W_T(g)\big]^2 \longrightarrow V(f,g) := 16\pi^3 \int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda)g^2(\lambda)d\lambda \tag{2.9}$$

(B2). При некоторых $\delta \in [0, 1/2)$ и $c \in [0, \infty)$,

$$\sup_{T \in \mathbb{R}} T^{-\delta} ||W_T(f) W_T(g)||_\infty \le c. \tag{2.10}$$

Как следствие теоремы 2.1, имеем следующий ПУУ для квадратичного функционала типа Теплица $\widetilde{Q}_T$, заданного в (2.8).

Теорема 2.2. *Предположим, что функции f и g удовлетворяют условиям (B1) и (B2) с некоторой $\delta \in [0, 1/2)$. Пусть a_T – положительная функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $1/a_T + a_T T^{2\delta - 1} \to 0$ при $T \to \infty$. Тогда случайная величина $(b_T/a_T)^{1/2} \widetilde{Q}_T$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I(x)$:*

$$I(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{xy - y^2 V(f, g)/2\},$$

где $V(f, g)$ определена в (2.9).

Следующая теорема содержит конструктивные достаточные условия для того, чтобы квадратичный функционал Теплица $\widetilde{Q}_T$ удовлетворял ПУУ.

Теорема 2.3. *Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ $(p > 2)$ и $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ $(q > 2)$ с $1/p + 1/q < 1/2$. Пусть a_T — положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что*

$$1/a_T + a_T T^{2(1/p+1/q)-1} \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Тогда случайная величина $(T/a_T)^{1/2} \widetilde{Q}_T$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I(x)$ определенной в теореме 2.2.

Следствие 2.1. *Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ $(p > 2)$, и g имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$. Пусть a_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $1/a_T + T^{1-2/p} \to 0$ при $T \to \infty$. Тогда случайная величина $(T/a_T)^{1/2} \widetilde{Q}_T$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I(x)$ определенной в теореме 2.3.*

Следующая теорема, которая была сформулирована в [2] без доказательства, является следствием теоремы 2.2.

Теорема 2.4. *Пусть $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ – действительный, центрированный стационарный гауссовский процесс со спектральной плотностью $f_Y(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R})$, $r > 2$, и пусть m_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $m_T \to \infty$, $m_T T^{-1/r} \to \infty$ и $m_T T^{-1/2} \to 0$ при $T \to \infty$. Положим*

$$L_T := \int_0^T Y^2(t)\, dt. \tag{2.11}$$

Тогда нормализованный квадратичный функционал

$$\widetilde{L}_T = m_T T^{-1}\ (L_T - \mathbb{E}[L_T])$$

удовлетворяет ПБУ со скоростью T/m_T^2 *и функцией скорости* $I(x) = x^2/\sigma^2$, *где*

$$\sigma^2 = 16\pi^3 \int_{\mathbb{R}} f_Y^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{2.12}$$

Заметим, что если $m_T = T^\delta$, то $\delta \in (1/r, 1/2)$.

3. ПУУ для суженных Теплицевых квадратичных функционалов

Сужение — это метод, предназначенный на повышение точности спектральных оценок путем внесения определенных предварительных преобразований в исходные данные перед применением процедуры оценивания (о мотивации и преимуществах сужения см., [10]).

В статистическом анализе стационарных процессов данные часто сужаются перед вычислением интересующей статистики, и процедура статистического вывода вместо исходных данных: $\mathbf{X}_T := \{X(t),\, t \in [0,T]\}$ основана на *суженных данных*:

$$\mathbf{X}_T^h := \{h_T(t)X(t),\ t \in [0,T]\},$$

где

$$h_T(t) := h(t/T) \tag{3.1}$$

а $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – *функция сужения*, которая будет уточнена ниже.

Случай $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$, где $\mathbf{1}_{[0,1]}(\cdot)$ – индикатор отрезка $[0,1]$, является *несуженным случаем*.

Для $k \in \mathbb{N} := \{1,2,\dots\}$ обозначим через $H_{k,T}(\lambda)$ *суженное ядро типа Дирихле*, определяемое как

$$H_{k,T}(\lambda) := \int_0^T h_T^k(t) e^{-i\lambda t} dt, \tag{3.2}$$

и положим

$$H_{k,T} := H_{k,T}(0) \text{ и } C_T := 2\pi H_{2,T}. \tag{3.3}$$

Заметим, что в несуженном случае $C_T := 2\pi T$.

Мы предполагаем, что функция сужения $h(\cdot)$ удовлетворяет следующему предположению.

Предположение 3.1. *Сужение $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является непрерывной неотрицательной функцией ограниченной вариации с ограниченным носителем в* $[0,1]$, *такой, что*

$$H_k := \int_0^1 h^k(t)dt \neq 0. \tag{3.4}$$

Нас интересует ПУУ для следующего *суженного* Теплицевого квадратичного функционала:

$$Q_T^h := \int_0^T \int_0^T \widehat{g}(t-s)h_T(t)h_T(s)X(t)X(s)\,dt\,ds \tag{3.5}$$

где $\widehat{g}(t)$ — преобразование Фурье некоторой интегрируемой четной функции $g(\lambda)$, а $h_T(t)$ — определена в (3.1) с функцией сужения $h(t)$, $t \in [0,1]$, удовлетворяющей Предположению 3.1. Обозначим

$$\widetilde{Q}_T^h := T^{-1}\left(Q_T^h - \mathbb{E}[Q_T^h]\right). \tag{3.6}$$

Следующая теорема является суженной версией теоремы 2.3.

Теорема 3.1. *Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ $(p > 2)$ и $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ $(q > 2)$ с $1/p + 1/q < 1/2$, и сужение h удовлетворяет предположению 3.1. Пусть a_T – позитивная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $1/a_T + a_T T^{2(1/p+1/q)-1} \to 0$ при $T \to \infty$. Тогда случайная величина $(T/a_T)^{1/2}\widetilde{Q}_T^h$ удовлетворяет ПБУ с со скоростью a_T и функцией скорости $I^h(x)$:*

$$I^h(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{xy - y^2V^h(f,g)/2\},$$

где

$$V^h(f,g) = 16\pi^3 H_4 \int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda)g^2(\lambda)\,d\lambda,$$

а H_4 определена в (3.4).

Следствие 3.1. *Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ $(p > 2)$ и g имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$. Пусть a_T – положительная числовая функция от $T \in \mathbb{R}^+$ такая, что $a_T \to \infty$ и $1/a_T + T^{1-2/p} \to 0$ при $T \to \infty$.*

Тогда случайная величина $(T/a_T)^{1/2}\widetilde{Q}_T^h$ удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I^h(x)$ как в теореме 3.1.

4. Доказательства

4.1. **Предварительные результаты.** Предварительные результаты мы формулируем для суженного случая, для несуженного случая полагаем $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$.

1. Распределение квадратичных форм. Пусть ξ — гауссовская случайная величина со средним m и ковариационным оператором R со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, то есть ξ — случайная величина с характеристическим функционалом:

$$\psi(h) = \exp\left\{m(h) - \frac{1}{2}(Rh, h)\right\}, \quad h \in H, \tag{4.1}$$

где $m(h)$ — непрерывный линейный функционал, а ковариационный оператор R — самосопряженный вполне непрерывный оператор с конечным следом. Мы предполагаем, не ограничивая общности, что $m(h) \equiv 0$.

Пусть A — некоторый линейный самосопряженный ограниченный оператор.

Доказательство следующего результата можно найти в работе [11].

Утверждение 4.1. *Пусть операторы R и A такие, как указано выше. Справедливы следующие утверждения.*

a) *Квадратичная форма $\eta := (A\xi, \xi)$ имеет то же распределение, что и сумма $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2$, где ξ_k — независимые $N(0,1)$ гауссовские случайные величины, а λ_k — собственные значения оператора R.*

b) *Характеристическая функция $\varphi_\eta(t)$ квадратичной формы $(A\xi, \xi)$ задается формулой*

$$\varphi_\eta(t) = \prod_{k=1}^{\infty} |1 - 2it\lambda_k|^{-1/2}. \tag{4.2}$$

c) *Кумулянт k-го порядка $\chi_k(\cdot)$ $(A\xi, \xi)$ задается формулой*

$$\chi_k(\eta) := 2^{k-1}(k-1)! \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^k = 2^{k-1}(k-1)!\, tr[RA]^k, \tag{4.3}$$

где $tr[A]$ – след оператора A.

2. Аппроксимация следа. Для заданного действительного числа $T > 0$, интегрируемой действительной симметричной функции ψ, определенной на $\mathbb{R}$, и функции сужения h, удовлетворяющей предположению 3.1, *T-усеченный суженный оператор Теплица*, сгенерированный функциями ψ и h, обозначаемый как $W_T^h(\psi)$, определяется следующим равенством:

$$[W_T^h(\psi)u](t) = \int_0^T \hat{\psi}(t-s)u(s)h_T(s)ds, \quad u(s) \in L^2([0,T]; h_T), \tag{4.4}$$

где $\hat{\psi}(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $\psi(\cdot)$, а $L^2([0,T]; h_T)$ – весовое L^2-пространство относительно меры $h_T(t)dt$.

Дана совокупность интегрируемых вещественных симметричных функций $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$, определенных на $\mathbb{R}$. Пусть $W_T^h(\psi_i)$ обозначает T-усеченный оператор Теплица, порожденный функциями ψ_i и h. Положим

$$S_{W,\mathcal{H},h}(T) := \frac{1}{T}\mathrm{tr}\left[\prod_{i=1}^{k} W_T^h(\psi_i)\right], \tag{4.5}$$

$$M_{\mathbb{R},\mathcal{H},h} := (2\pi)^{k-1} H_k \int_{\mathbb{R}} \left[\prod_{i=1}^{k} \psi_i(\lambda)\right] d\lambda, \tag{4.6}$$

где H_k определена в в (3.4), и пусть

$$\Delta_h(T) := |S_{W,\mathcal{H},h}(T) - M_{\mathbb{R},\mathcal{H},h}|. \tag{4.7}$$

Для доказательства следующего предложения см. [8], теорема 2.3.

Утверждение 4.2. *Предположим, что* $\psi_i \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{p_i}(\mathbb{R})$, $p_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, *причем* $1/p_1 + \dots + 1/p_k \le 1$, *а функция сужения* h *удовлетворяет предположению 3.1. Тогда*

$$\Delta_h(T) = o(1) \quad \textit{при} \quad T \to \infty.$$

3. Оценки для норм Шаттена. Для числа p, $1 \le p \le \infty$, p-*норма Шаттена* компактного оператора B определяется как

$$||B||_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(B)\right)^{1/p}, & \text{при } 1 \le p < \infty, \\ \sup_j s_j(B), & \text{при } p = \infty. \end{cases} \tag{4.8}$$

Доказательство следующего предложения можно найти в работах Гиновяна [6] и Гиновяна и Саакяна [8].

Утверждение 4.3. *Пусть* $W_T^h(\psi)$ *–* T*-усеченный суженный Теплицевый оператор, определенный в* (4.4). *Справедливы следующие утверждения.*

a) *Для* $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ *с* $1 \le p \le \infty$ *имеем*

$$||W_T^h(\psi)||_p \le T^{1/p} ||\psi||_p. \tag{4.9}$$

b) *Для* $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ *при* $1 < p < \infty$ *имеем*

$$\lambda_T := ||W_T^h(\psi)||_\infty = o\big(T^{1/p}\big) \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{4.10}$$

c) *Для* $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *имеем*

$$\frac{1}{T} ||W_T^h(\psi)||_2^2 \longrightarrow 2\pi H_4 ||\psi||_2^2 \quad \textit{при} \quad T \to \infty, \tag{4.11}$$

где H_4 *определена в* (3.4).

4.2. **Доказательство теорем.**

Доказательство теоремы 2.1. По предложению 4.1 a) с $R = W_T(f)$ и $A = A_T$ квадратичный функционал $\mathcal{A}_T$ в (2.3) имеет то же распределение, что и сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,T} \xi_k^2,$$

где $\{\xi_k,\, k \ge 1\}$ — независимые $N(0,1)$ гауссовские случайные величины и $\{\lambda_{k,T},\, k \ge 1\}$ — собственные значения оператора $W_T(f)A_T$.

Из предположений (A1) и (A2), ввиду предложения 4.1 c), имеем, что

$$b_T \mathrm{Var}[\widetilde{\mathcal{A}}_T] = \frac{2}{b_T} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{j,T}^2 = \frac{2}{b_T} \mathrm{tr}\big[A_T W_T(f)\big]^2 \to V \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{4.12}$$

и

$$\sup_j |\lambda_{j,T}| = ||A_T W_T(f)||_\infty \le c\, b_T^\delta \quad \text{для всех} \quad T \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Чтобы применить теорему Эллиса–Гартнера (Предложение 1.1) с $Y_T = (b_T/a_T)^{1/2} \widetilde{\mathcal{A}}_T$, нам нужно только доказать, что для $s \in \mathbb{R}$

$$M_T(\mathcal{A}, s) := a_T^{-1} \log \mathbb{E}[\exp(s a_T (b_T/a_T)^{1/2}) \widetilde{\mathcal{A}}_T] \to \frac{s^2 V}{2} \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{4.14}$$

По предложению 4.1 б) с $R = W_T(f)$ и $A = A_T$, имеем

$$\begin{aligned} M_T(\mathcal{A}, s) =& \frac{1}{a_T} \sum_{k=1}^{\infty} \log \mathbb{E} \left[\exp\{ s (a_T/b_T)^{1/2} \lambda_{k,T} (\xi^2 - 1) \} \right] \\ =& \frac{1}{a_T} \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \log(1 - 2s(a_T/b_T)^{1/2} \lambda_{k,T}) - s(a_T/b_T)^{1/2} \lambda_{k,T} \right]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Обозначим $\mu_{j,T}^{(s)} := s(a_T/b_T)^{1/2} \lambda_{j,T}$, и заметим, что по (4.13) и выбору a_T имеем

$$\sup_j |\mu_{j,T}^{(s)}| \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{4.16}$$

Действительно, в силу (4.13),

$$|\mu_{j,T}^{(s)}| \le c\,(a_T/b_T)^{1/2} b_T^\delta = c\, \left(a_T b_T^{2\delta - 1}\right)^{1/2}. \tag{4.17}$$

Последний член в (4.17) стремится к нулю при $T \to \infty$, поскольку по предположению, наложенному на a_T, имеем $a_T b_T^{2\delta-1} \to 0$ при $T \to \infty$.

Из (4.16) имеем

$$\sup_j |1 - \theta(\mu_{j,T}^{(s)}) \mu_{j,T}^{(s)}| \to 1 \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{4.18}$$

где $\theta(\mu_{j,T}^{(s)}) \in [0,1]$.

Далее, по теореме Тейлора, для $|w|<1$

$$\log(1-w) = -w - (1/2)w^2(1-\theta(w)w)^{-2}, \tag{4.19}$$

где $\theta(w) \in [0,1]$.

Применяя (4.19) с $w = \mu_{j,T}^{(s)}$ с учетом (4.12), (4.15) и (4.18) получаем (4.14). Теорема 2.1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.2. По предложению 4.1 а) при $R = W_T(f)$ и $A = W_T(g)$ квадратичный функционал Q_T в (2.7) имеет то же распределение, что и сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,T}\xi_k^2,$$

где $\{\xi_k,\, k\geq 1\}$ — независимые $N(0,1)$ гауссовские случайные величины и $\{\lambda_{k,T},\, k\geq 1\}$ — собственные значения оператора $W_T(f)W_T(g)$. Остальная часть доказательства повторяет аргументы доказательства теоремы 2.1. □

Доказательство теоремы 2.3. Результат мы выводим из теоремы 2.2. Во-первых, предположение (B1) теоремы 2.2 выполняется в силу 4.2 с $k=4$. Во-вторых, по предложению 4.3 имеем, что

$$||W_T(f)W_T(g)||_\infty \leq ||W_T(f)||_\infty ||W_T(g)||_\infty \leq c\,T^{1/p+1/q}, \tag{4.20}$$

и, следовательно, предположение (B2) теоремы 2.2 выполняется с $\delta = 1/p+1/q$. Таким образом, результат следует из теоремы 2.2. □

Доказательство теоремы 3.1. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3, с использованием предложений 4.2 и 4.3. Поэтому мы опускаем подробности. □

5. Приложение: ПУУ для эмпирических спектральных функционалов

Пусть $\{X(t),\, t\in\mathbb{R}\}$ — центрированный стационарный процесс с *неизвестной* спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Мы предполагаем, что $f(\lambda)$ принадлежит заданному (бесконечномерному) классу $\mathcal{F} \subset L^p := L^p(\mathbb{R})$ ($p\geq 1$) спектральных плотностей, обладающих некоторыми заданными свойствами гладкости. Пусть $J(\cdot)$ — некоторый *известный* функционал, область определения которого содержит $\mathcal{F}$. Интересующая нас задача — оценить значение $J(f)$ функционала $J(\cdot)$ в *неизвестной* 'точке' $f\in\mathcal{F}$ на основе наблюдаемых данных.

Мы предполагаем, что оцениваемый функционал $J(f)$ линеен и непрерывен в $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$. Тогда $J(f)$ допускает представление:

$$J(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)g(\lambda)d\lambda, \tag{5.1}$$

где $g(\lambda) \in L^q(\mathbb{R}),\ 1/p + 1/q = 1$.

Нас интересует непараметрическая оценка функционала $J(f)$ на основе суженных данных:

$$\mathbf{X}_T^h := \{h_T(t)X(t),\ t \in [0,T]\}, \tag{5.2}$$

где $h_T(t)$ определена в (3.1) с функцией сужения $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей предположению 3.1. Как и прежде, случай $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ – *несуженный* случай.

Квадратичные функционалы Q_T и Q_T^h предоставляют непараметрические оценки для функционала (5.1) на основе несуженных и суженных данных соответственно. Действительно, естественная статистическая оценка для $J(f)$ является линейным интегральным функционалом суженной эмпирической спектральной плотности процесса $X(t)$:

$$J(I_T^h, g) := \int_{\mathbb{R}} I_T^h(\lambda)g(\lambda)d\lambda. \tag{5.3}$$

где

$$I_T^h(\lambda) := \frac{1}{C_T}\left|\int_0^T h_T(t)X(t)e^{-i\lambda t}dt\right|^2 \tag{5.4}$$

является *суженной периодограммой (эмпирической спектральной плотностью)* процесса $X(t)$, а

$$C_T := 2\pi H_{2,T}(0) \neq 0 \tag{5.5}$$

с $H_{k,T}(\cdot)$ как в (3.3). Напомним, что в несуженном случае ($h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$), мы имеем $C_T = 2\pi T$.

Из (3.5), (5.3) и (5.4) имеем

$$J_T^h = C_T^{-1}Q_T^h, \tag{5.6}$$

Асимптотические свойства оценки (5.6), включая асимптотическую несмещенность, состоятельность и асимптотическую нормальность J_T^h, были установлены в работах Гиновяна и Саакяна [8], [9]. Следующая теорема, вытекающая из теоремы 3.1 и формулы (5.6), утверждает, что ПУУ выполняется для оценки $J(I_T^h, g)$.

Теорема 5.1. *Предположим, что условия теоремы 3.1 выполнены. Тогда случайная величина*

$$\eta_T := (T/a_T)^{1/2}[J(I_T^h, g) - \mathbb{E}[J(I_T^h, g)]]$$

удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I^h(x)$:

$$I^h(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{xy - y^2 V^h(f,g)/2\}, \tag{5.7}$$

где

$$V^h(f,g) = 4\pi e(h)\int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda) g^2(\lambda)\, d\lambda \tag{5.8}$$

и

$$e(h) := H_4 H_2^{-2} \tag{5.9}$$

где H_k определена в (3.4).

В следующем следствии теоремы 5.1 мы заменяем $\mathbb{E}[J(I_T^h, g)]$ на $J(f,g)$, что более полезно на практике, но требует больше предположений для оценки смещения $J(I_T^h, g)$.

Следствие 5.1. *Предположим, что условия теоремы 5.1 выполнены, и пусть функция g имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$. Тогда случайная величина*

$$\tilde{\eta}_T := (T/a_T)^{1/2}[J(I_T^h, g) - J(f,g)]$$

удовлетворяет ПБУ со скоростью a_T и функцией скорости $I^h(x)$ определенной как в теореме 5.1.

Доказательство. Чтобы вывести результат из теоремы 5.1, с учетом замечания 2.1, нам нужно только показать, что

$$(T/a_T)^{1/2}[J(f,g) - \mathbb{E}[J(I_T^h, g)] = o(1) \quad \text{при} \;\; T\to\infty. \tag{5.10}$$

Это следует из теоремы 2.1 [9], утверждающей, что в условиях следствия для смещения $J(I_T^h, g)$ имеем

$$Bias(J(I_T^h, g)) := J(f,g) - \mathbb{E}[J(I_T^h, g)] = o(T^{-1/2}) \quad \text{при} \;\; T\to\infty, \tag{5.11}$$

откуда вытекает (5.10). □

Замечание 5.1. Для несуженного случая имеем

$$V(f,g) = 4\pi\int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda) g^2(\lambda)\, d\lambda, \tag{5.12}$$

и согласно (5.8) и (5.12)

$$V^h(f,g)/V(f,g) = e(h).$$

Ввиду (3.4), согласно неравенству Шварца, имеем $e(h) := H_4 H_2^{-2} \geq 1$. Таким образом, экспоненциальное убывание вероятности больших уклонений в суженном случае не больше, чем в несуженном случае.

Abstract. In this paper, we establish moderate deviations limit theorems for Toeplitz and tapered Toeplitz type quadratic functionals in continuous time Gaussian stationary processes. The results are applied in the nonparametric estimation of spectral functionals.

Список литературы

[1] B. Bercu, F. Gamboa, A. Rouault, “Large deviations for quadratic forms of Gaussian stationary processes”, Stochastic Process. Appl., **71**, 75 – 90 (1997).

[2] W. Bryc, A. Dembo, “Large deviations for quadratic functionals of Gaussian processes”, J. Theoret. Probab., **10**, 307 – 332 (1997).

[3] J. A. Bucklew, “Large deviations techniques in decision, simulation, and estimation”, Wiley (1990).

[4] A. Dembo, O. Zeitouni, “Large Deviations Technique and Applications”, Jones and Barlett, Boston, Massachusetts (1993).

[5] F. Gamboa, A. Rouault, M. Zani, “A functional large deviations principle for quadratic forms of Gaussian stationary processes”, Statist. Probab. Lett., **43**, 299 — 308 (1999).

[6] M. S. Ginovyan, “On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process”, Probab. Theory Related Fields, **100**, 395 – 406 (1994).

[7] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, “Limit Theorems for Toeplitz quadratic functionals of continuous time stationary process”, Probab. Theory Relat. Fields, **138**, 551 – 579 (2007).

[8] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, “Limit theorems for tapered Toeplitz quadratic functionals of continuous time Gaussian stationary processes”, J. Cont. Math. Anal., **54**(4), 222 – 239 (2019).

[9] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, “Estimation of spectral functionals for Lévy-driven continuous time linear models with tapered data”, Electronic Journal of Statistics, **13**, 255 – 283 (2019).

[10] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, “Statistical inference for stationary models with tapered data”, Statistics Surveys, **15**, 154 – 194 (2021).

[11] I. A. Ibragimov, “On estimation of the spectral function of a stationary Gaussian process”, Theory Probab. Appl., **8**, 366 – 401 (1963).

[12] S. Ihara, “Large deviation theorems for Gaussian processes and their applications in information theory”, Acta Appl. Math., **63**, 165 – 174 (2000).

[13] Y. Kakizawa, “Moderate deviations for quadratic forms in Gaussian stationary processes”, J. Multivar. Anal., **98**, 992 – 1017 (2007).

[14] T. Sato, Y. Kakizawa, M. Tahiguchi, “Large deviations results for statistics of short– and long–memory Gaussian processes”, Austral. and New Zeland J. Statist., **40**, 17 – 29 (1998).

[15] M. Taniguchi, Y. Kakizawa, Asymptotic Theory of Statistical Inference for Time Series, Academic Press, New York (2000).

Поступила 06 августа 2024

После доработки 30 октября 2024

Принята к публикации 02 декабря 2024