Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 1, 2025, стр. 3 – 9.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ХААРА, СХОДЯЩИХСЯ ПО ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ ФУНКЦИЯМ

Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *ggg@ysu.am*

Аннотация. Пусть $I := \bigcup_{i=1}^{\infty}\{2^{m_i} < n \leq 2^{m_i+1}\}$, где m_i некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. В работе доказано, что если частичные суммы ряда Хаара $\sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k(x)$, $n \in I$, всюду сходятся к всюду конечной интегрируемой функции f, то этот ряд является рядом Фурье-Хаара функции f.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: система Хаара; теорема единственности; сходимость по подпоследовательности.

Напомним определение системы Хаара. Пусть $k = 2^{\mu} + \nu$, $\mu = 0, 1, ...,$ $1 < \nu \leq 2^{\mu}$. Обозначим

$$\Delta_k := \left(\frac{\nu-1}{2^{\mu}}, \frac{\nu}{2^{\mu}}\right), \quad \Delta_k^+ = \left(\frac{\nu-1}{2^{\mu}}, \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}\right), \quad \Delta_k^- = \left(\frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}, \frac{\nu}{2^{\mu}}\right). \tag{1}$$

Система Хаара определяется формулами $\chi_1(x) = 1$, $x \in [0,1]$, а для $k = 2^{\mu} + \nu$, $\mu = 0, 1, ...,$ $1 < \nu \leq 2^{\mu}$, полагается

$$\chi_k(x) := \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} & \text{когда } x \in \Delta_k^+, \\ -2^{\frac{k}{2}} & \text{когда } x \in \Delta_k^-, \\ 0, & \text{когда } x \notin \overline{\Delta}_k. \end{cases} \tag{2}$$

В остальных точках значение функции $\chi_k(x)$ равно среднему арифметическому односторонних пределов функции в этих точках. Отсюда следует, что частичные суммы $S_n(x)$ ряда Хаара $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k(x)$ обладают свойством

$$S_n(x) = \frac{S_n(x+) + S_n(x-)}{2}. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке комитета по науке министерства ОНКС Республики Армения (грант № 21T-1A055).

Точками разрыва первых n функций системы Хаара отрезок $[0,1]$ разбивается на n интервалов (два полуоткрытых, остальные открытые), на каждом из которых первые n функции системы Хаара принимают постоянные значения. Обозначим их слева на право через Δ_i^n, $i = 1, 2, ..., n$. Если имеем интервалы $\{\Delta_i^n\}_{i=1}^n$, то интервалы $\{\Delta_i^{n+1}\}_{i=1}^{n+1}$ получаются разделением первого слева самого длинного интервала Δ_i^n на два равных интервала.

Частичные суммы ряда Фурье-Хаара интегрируемой функции f определяются формулами (см. напр. [10] гл.3, §1)

$$S_n(x) = \int_{\Delta_i^n} f(t)dt, \quad \text{когда} \quad x \in \Delta_i^n, \tag{4}$$

а в точках разрыва-формулами (3). Есть также другие способы определения функций системы Хаара, однако при других определениях теоремы единственности, доказанные в этой работе и многие другие теоремы, доказанные ранее, перестают быть верными. Сам Хаар [1] систему определял так как это сделано выше.

Система Хаара является первым примером ортонормированной системы обладающей свойством: ряд Фурье непрерывной функции по системе Хаара равномерно сходится к этой функции.

С работ [2]-[4] начались исследования вопросов единственности рядов по системе Хаара. В этих работах было доказано, что если ряд по системе Хаара всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю. Г. Фабер [5] показал, что даже одноточечное множество $\{\frac{1}{2}\}$ не является множеством единственности для рядов Хаара, т.е. существует нетривиальный ряд по системе Хаара, который всюду вне этого множества сходится к нулю. Оказалось (см. напр. [6]), что для рядов Хаара любое одноточечное множество не является множеством единственности. В работе [6] доказана следующая теорема.

Теорема 1 (Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян)**.** *Пусть ряд Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{5}$$

обладает свойствами:

а) *ряд* (5) *сходится к некоторой интегрируемой функции* $f(x)$ *всюду на отрезке* $[0,1]$*, кроме, быть может, некоторого счетного множества точек,*

b) *для любой точки* $x_0 \in [0,1]$ $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0$, *где* $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, *суть все те номера* n *для которых* $\chi_n(x_0) \neq 0$.

Тогда ряд (5) *является рядом Фурье-Хаара функции* f.

Когда ряд (5) сходится во всех точках, условие b) автоматически выполняется во всех точках. Вообще говоря, условие b) нужно, чтобы допустить исключительное счетное множество. Условие b) присутствует во многих теоремах единственности рядов Хаара.

В работе [7] В. А. Скворцов определил интеграл, который восстанавливает коэффициенты всюду сходящегося ряда Хаара по сумме этого ряда. Он назвал этот интеграл HD интегралом и доказал, что этот интеграл представляет собой некоторое обобщение интеграла Данжуа. В работах [8], [9] В. А. Скворцов рассмотрел ряды Хаара с коэффициентами удовлетворяющие условию b) теоремы 1 и сходящиеся всюду по некоторой подпоследовательности частичных сумм. Он показал также, что этот интеграл зависит от того, какая подпоследовательность частичных сумм сходится.

В настоящей работе мы рассмотрим ряды Хаара, с некоторой подпоследовательностью частичных сумм всюду сходящиеся к всюду конечной интегрируемой по Лебегу функции.

Пусть m_i, $i \in \mathbb{N}$, возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$I := \bigcup_{i=1}^{\infty} \{n \in \mathbb{N} : 2^{m_i} < n \leq 2^{m_i+1}\}. \tag{6}$$

Верна следующая теорема.

Теорема 2. *Если частичные суммы* $S_j(x) = \sum_{n=1}^{j} a_n \chi_n(x)$, $j \in I$, *ряда Хаара* (5) *всюду на* $[0,1]$ *сходятся к всюду конечной интегрируемой функции* f, *т.е.*

$$\lim_{j\in I, j\to\infty} S_j(x) = f(x), \quad \forall x \in [0,1], \tag{7}$$

то ряд (5) *является рядом Фурье-Хаара функции* f.

Обозначим через $\tilde{S}_n(x)$ частичные суммы ряда Фурье-Хаара функции $f(x)$, а через $\overline{S}_n(x)$ обозначим частичные суммы ряда Фурье-Хаара функции $|f(x)|$. Из (4) следует

$$|\tilde{S}_n(x)| \leq \overline{S}_n(x). \tag{8}$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно доказать, что для любого $n \in I$ и $i = 1, 2, ..., n$, выполняются

$$\int_{\Delta_i^n} S_n(x)dx = \int_{\Delta_i^n} f(x)dx. \tag{9}$$

Лемма 1. *Допустим для некоторых $n \in I$ и $i \in \{1, 2, ...n\}$ не выполняется (9). Тогда для любого $M > 0$ существует интервал $\Delta_{i_1}^{n_1}$, $n_1 \in I$, правый конец которого не совпадает с правым концом интервала Δ_i^n и удовлетворяет условиям:*

$$\Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n, \tag{10}$$

$$|S_n(x)| > M \quad на \quad \Delta_{i_1}^{n_1}, \tag{11}$$

$$\int_{\Delta_{i_1}^{n_1}} S_n(x)dx \neq \int_{\Delta_{i_1}^{n_1}} f(x)dx. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала убедимся, что найдется

$$\Delta_{i'}^{n'} \subset \Delta_i^n, \quad n' > n_1, \quad n' \in I, \tag{13}$$

удовлетворяюшее условию

$$|S_{n'}(\Delta_{i'}^{n'})| > 5M + 2\overline{S}_n(\Delta_{i'}^{n'}). \tag{14}$$

Действительно, если не нашелся бы такой интервал $\Delta_{i'}^{n'}$, то выполнялось бы

$$|S_{n'}(\Delta_{i'}^{n'})| \leq 5M + 2\overline{S}_n(\Delta_{i'}^{n'}) \ \text{ для любого } \ \Delta_{i'}^{n'} \subset \Delta_i^n. \tag{15}$$

Известно (см. напр [10], гл. 3. §2, теорема 3), что ряд Фурье-Хаара интегрируемой функции f сходится в метрике L^1 к f. Поэтому из (15) следовала бы равномерная абсолютная интегрируемость последовательности $S_n(x)$, $n \in I$, на интервале $\Delta_{i_1}^{n_1}$. Поэтому из (15) и (7) получили бы

$$\int_{\Delta_i^n} f(x)dx = \lim_{k \in I, k \to \infty} \int_{\Delta_i^n} S_k(x)dx = \int_{\Delta_i^n} S_n(x)dx, \tag{16}$$

которое противоречит (12).

Теперь убедимся, что среди интервалов $\Delta_{i'}^{n'}$, удовлетворяющих (13) и (14), найдется такой, который не имеет общего правого конца с Δ_i^n. Допустим такого интервала не существует. Обозначим через α правый конец интервала Δ_i^n, а через $\Delta_\alpha^{(j)}$ обозначим интервал длины 2^{-m_j-1} с правым концом α. Пусть n_j такое, что

$$\Delta_{n_j}^- = \Delta_\alpha^{(j)}. \tag{17}$$

Учитывая, что для остальных интервалов постоянства суммы $S_{n_j}(x)$ не выполняются (14), то если бы для бесконечнего числа $n_j \in I$ выполнялось

$$S_{n_j}(\Delta_\alpha^{n_j}) \le 5M + 2\overline{S}_n(\Delta_\alpha^{n_j}),$$

то получилось бы (16). Следовательно, для некоторого j' выполняется

$$|S_{n_j}(\Delta_\alpha^{(j)})| > 5M + 2\overline{S}_{n_j}(\Delta_\alpha^{(j)})), \quad n_j \in I, [n] = m_j \ge m_{j'}. \tag{18}$$

Учитывая (7), можем j' выбрать настолько большим, чтобы выполнялось

$$|a_{n_j}\chi_{n_j}(\alpha)| < \frac{M}{2}, \quad \text{когда} \quad n_j \in I, [n] = m_j \ge m_{j'}. \tag{19}$$

Фиксируем некоторое $j > j'$. Тогда

$$\max_{x \in \Delta_\alpha^{(j)}} |a_{n_j}\chi_{n_j}(x)| = 2|a_{n_j}\chi_{n_j}(\alpha)| < M \tag{20}$$

и

$$|S_{n_j}(\Delta_{n_j}^-)| > 5M + 2\overline{S}_{n_j}(\Delta_{n_j}^-). \tag{21}$$

По предположению имеем также, что

$$|S_{n_j-1}(\Delta_{n_j})| > 5M + 2\overline{S}_{n_j-1}(\Delta_{n_j}). \tag{22}$$

Из свойства (4) для функции $|f|$ имеем

$$|\overline{S}_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)| = \frac{1}{|\Delta_{n_j}^+|}\int_{\Delta_{n_j}^+} |f(x)|dx \le \frac{2}{|\Delta_{n_j}|}\int_{\Delta_{n_j}} |f(x)|dx = 2\overline{S}_{n_j-1}(\Delta_{n_j}). \tag{23}$$

Последовательно применяя (20), (22) и (23) получим

$$|S_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)| \ge |S_{n_j-1}(\Delta_{n_j})| - 2|a_{n_j}\chi_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)| > \tag{24}$$

$$3M + 2\overline{S}_{n_j-1}(\Delta_{n_j}) \ge 3M + |\overline{S}_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)|.$$

Учитывая, что $|S_n(x)| \le |\overline{S}_n(x)|$ на любом Δ_i^n, из (24) получим

$$|S_{n_j}(\Delta_{n_j}^+)| \ge 3M \tag{25}$$

и

$$S_{n_j}(\Delta_{n_j}^+) \ne \frac{1}{|\Delta_{n_j}^+|}\int_{\Delta_{n_j}^+} f(x)dx, \tag{26}$$

причем правый конец интервала $\Delta_{n_j}^+$ не равен α. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Допустим для некоторых $n \in I$ и $i \in \{1, 2, ...n\}$ не выполняется* (9). *Тогда для любого $M > 0$ существует интервал $\Delta_{i_1}^{n_1}$, $n_1 \in I$, левый конец которого не совпадает с левым концом интервала Δ_i^n и удовлетворяет условиям:*

$$\Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n, \tag{27}$$

$$|S_{n_1}(x)| > M \quad \text{на} \quad \Delta_{i_1}^{n_1}, \tag{28}$$

$$\int_{\Delta_{i_1}^{n_1}} S_n(x)dx \neq \int_{\Delta_{i_1}^{n_1}} f(x)dx. \tag{29}$$

Последовательно применяя леммы 1, 2, получим основную лемму.

Лемма 3. *Допустим для некоторых $n \in I$ и $i \in \{1, 2, ...n\}$ не выполняется* (9). *Тогда для любого $M > 0$ существует интервал $\Delta_{i_1}^{n_1}$, $n_1 \in I$, который не имеет общих концов с интервалом Δ_i^n и выполняются* (27)-(29).

Доказательство теоремы 2. Допустим ряд (5) удовлетворяет (7) и не является рядом Фурье-Хаара функции f. Тогда найдутся $n_1 \in I$ и некоторое $i_1 \in \{1, 2, ..., n\}$, для которых не выполняется (9). Применив лемму 3, найдем интервал $\Delta_{i_1}^{n_1}$, который не имеет общих концов с Δ_i^n и выполняются (27)-(29), с $M = 1$. Выполнение (29) позволяет нам опять применить лемму 3. Продолжая этот процесс, найдем последовательность интервалов $\Delta_{i_k}^{n_k}$ со свойствами

$$\Delta_{i_k}^{n_k} \subset \Delta_{i_{k-1}}^{n_{k-1}} \text{ и не имеет общих концов с } \Delta_{i_{k-1}}^{n_{k-1}}, \tag{30}$$

$$|S_{n_k}(x)| > k \quad \text{на} \quad \Delta_{i_k}^{n_k} \tag{31}$$

Условие (30) обеспечивает, чтобы пересечение интервалов $\Delta_{i_k}^{n_k}$ было не пустым. Тогда, если это пересечение есть одноточечное множество $\{z\}$, то из условия (31) следует, что

$$\limsup_{n \in I, n \to \infty} S_n(z) = +\infty,$$

которое противоречит (7). Теорема доказана.

Abstract. Let $I := \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2^{m_i} < n \leq 2^{m_i+1}\}$, where m_i is some increasing sequence of natural numbers. It is proved, if partial sums $\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(x)$, $n \in I$, of Haar series everywhere converge to everywhere finite integrable function f, then that series is Fourier-Haar series of function f.

Список литературы

[1] A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme”, Math. Ann., **69**, 331 – 371 (1910).

[2] Ф. Г. Арутюнян, “О рядах по системе Хаара”, ДАН Арм. ССР **38**, но. 3, 129 – 134 (1964).

[3] М. Б. Петровская, “О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности”, Изв. АН, сер. матем., **28**, но. 4, 773 – 798 (1964).

[4] В. А. Скворцов, “Теорема типа Кантора для системы Хаара”, Вестник МГУ, сер. матем. **5**, 3 – 6 (1964).

[5] G. Faber, “Uber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar”, Deutsch. Math. Ver., **19**, 104 – 112 (1910).

[6] Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, “О единственности рядов по системам Хаара и Уолша”, Изв. АН, сер. матем., **28**, но. 6, 1391 – 1408 (1964).

[7] В. А. Скворцов, “Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара”, Матем. сборник, **75**, но. 3, 349 – 360 (1968).

[8] В. А. Скворцов, “О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм”, Докл. АН СССР, **183**, но. 4, 784 – 786 (1968).

[9] В. А. Скворцов, “О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм”, Мат. Заметки, **4**, но. 6, 707 – 714 (1968).

[10] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Изд-во АФЦ, М. (1999).

Поступила 02 сентября 2024

После доработки 02 сентября 2024

Принята к публикации 25 октября 2024