

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 59 № 6 2024

ADAC 488

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 59 №6 2024



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

Известия НАН Армении, Математика.



ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Վ. Ս. Աթաբեկյան	Գ. Ա. Կարազուլյան
Կ. Լ. Ավետիսյան	Յու. Ա. Կուտոյանց
Գ. Գ. Գևորգյան	Ռ. Վ. Համբարձումյան
Մ. Ս. Գինովյան	Ա. Հ. Հովհաննիսյան
Ա. Ս. Դալայան	Հ. Շահդուլյան
Ն. Բ. Ենգիբարյան	Ա. Շիրիկյան
Խ. Ա. Խաչատրյան	Բ. Ս. Նահապետյան
Վ. Կ. Օհանյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ)	Բ. Մ. Պողոսյան
Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մարտինյան	

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Կ. Լ. Ավետիսյան	Բ. Ս. Նահապետյան
Ր. Վ. Ամբարձումյան	Գ. Ա. Կարազուլյան
Վ. Ս. Աթաբեկյան	Ե. Ա. Կուտոյանց
Գ. Գ. Գևորգյան	Ա. Օ. Օհաննիսյան
Մ. Ս. Գինովյան	Բ. Մ. Պողոսյան
Ա. Ս. Դալայան	Ս. Ա. Խաչատրյան
Ն. Բ. Ենգիբարյան	Ա. Մախչուլյան
Վ. Կ. Օհանյան (զամ. գլխ. խմբագրի տեղակալ)	Ա. Մարիկյան

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ТОЖДЕСТВА В ГРУППАХ
С n -КРУЧЕНИЕМ**

В. С. АТАБЕКЯН, А. А. БАЙРАМЯН

Ереванский государственный университет¹

E-mails: *avagujan@ysu.am*; *artan.bayramyan@ysu.am*

Аннотация. В работе построена 3-порожденная бесконечная группа, в которой вероятность выполнения некоторого фиксированного тождества стремится к 1. В то же время это тождество не выполняется на всей группе. Вопрос о существовании такой группы был поставлен недавно несколькими авторами. Более точно, рассматривается n -периодическое произведение свободной периодической группы ранга 2 и бесконечной циклической группы. Доказывается что в этом произведении вероятность выполнения тождества $x^n = 1$ стремится к 1, но оно не выполняется на всем произведении.

MSC2020 number: 20P05; 20F50.

Ключевые слова: тождество; вероятностное тождество; группа с n кручением; n -периодическое произведение; свободная бернсайдова группа.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $M = \{\mu_k\}$ — последовательность вероятностных мер на конечно порожденной группе G , а w — произвольное слово свободной группы F_m некоторого ранга m . Мы определяем *вероятность того, что G удовлетворяет тождеству $w = 1$ относительно последовательности мер M* (см. [1]) как число

$$(0.1) \quad P_M(w = 1 \text{ в } G) = \limsup_{k \rightarrow \infty} P_{\mu_k}(w = 1 \text{ в } G).$$

Число (0.1) также называется *степенью выполнимости равенства $w = 1$ относительно последовательности мер M* (см. [2]). Если $P_M(w = 1 \text{ в } G) = 1$, то будем говорить, что слово w является *M -вероятностным тождеством* группы G . Вероятность $P_M(w = 1 \text{ в } G)$ носит определенную информацию о группе G . Например, как показано в [3] и [1] соответственно, если $P([x, y] = 1 \text{ в } G) > 0$ или $P(x^2 = 1 \text{ в } G) > 0$, то группа виртуально абелева (см. также [2], [4]). В [5] показано, что если конечная группа не разрешима, то вероятность того, что два

¹Работа первого автора выполнена при поддержке гранта Комитета по высшему образованию и науке РА, проект № 21Т-1А213, а второго автора – при поддержке гранта Комитета по высшему образованию и науке РА, проект № 23АА-1А028.

случайно выбранных элемента порождают разрешимую подгруппу, не больше $\frac{11}{30}$. Подробный обзор результатов по этой тематике можно найти в [1].

В работе [1] сформулирован следующий

Вопрос (см. вопрос 13.3 [1]). Пусть $w \in F_m$ произвольное слово, G – конечно порожденная группа с порождающим множеством S и $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \dots, R_n^{(d)}$ независимые случайные блуждания на G относительно S . Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(w(R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \dots, R_n^{(d)}) = 1 \text{ в } G) = 1,$$

то верно ли что $w = 1$ является тождеством в G ?

Этот вопрос был рассмотрен в [6], где авторы строят m -порожденную группу, в которой $x^n = 1$ является вероятностным тождеством и который содержит свободную подгруппу, и, тем самым, не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. При этом m и n – достаточно большие числа, причем n – нечетное.

Мы будем усиливать этот результат, построив 3-порожденный контрпример к вышеупомянутой задаче, которая не содержит свободную подгруппу ранга 2. Для этой цели рассмотрим свободную бернсайдову группу $B(2, n)$ ранга 2, где n – фиксированное достаточно большое нечетное число. Напоминаем, что по определению группа $B(m, n)$ периода n и ранга m имеет следующее задание

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid X^n = 1 \rangle,$$

где X пробегает множество всех слов в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}\}$. Следует отметить известную работу С. И. Адяна [7], где показана, что при всех $m \geq 2$ и нечетных $n \geq 665$ симметричное случайное блуждание на свободных бернсайдовых группах $B(m, n)$ неозвратно. Исходя из этого результата к указанной задаче возможный контрпример можно поискать в классе групп имеющих определяющие соотношения вида A^n .

Далее мы берем n -периодическое произведение

$$(0.2) \quad G = B(2, n) *^n \mathbb{Z}$$

группы $B(2, n)$ и бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ со свободными порождающими $\{a_1, a_2\}$ и $\{b\}$ соответственно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 0.1. Для любого достаточно большого фиксированного нечетного числа n :

1. в группе $G = B(2, n) *^n \mathbb{Z}$ тождество $x^n = 1$ является M -вероятностным тождеством,

2. в группе $G = B(2, n) *^n \mathbb{Z}$ не выполняется тождество $x^n = 1$,

Группы $G = B(2, n) *^n \mathbb{Z}$ из теоремы 0.1 дают отрицательный ответ на указанный выше вопрос. В ходе доказательства в качестве случайных блужданий $R_n^{(i)}$ мы будем рассматривать простое симметричное случайное блуждание (см. [8]), а в качестве вероятностных мер на G будем фиксировать следующую естественную последовательность вероятностных мер на графе Кэли группы G . Пусть $B_G(k)$ обозначает шар радиуса k графа Кэли с центром в единичном элементе группы G относительно некоторого фиксированного симметричного порождающего множества S и μ_k – равномерное распределение на $B_G(k)$, то есть $\mu_k(g) = \frac{1}{|B_G(k)|}$ если $g \in B_G(k)$ и $\mu_k(g) = 0$ в противном случае.

Доказательство теоремы 0.1 будет проведено по следующей схеме. Сначала мы укажем необходимые для нас свойства группы G (0.2). Далее отметим некоторые факты об n -периодических произведениях и группах с n -кручением. В параграфе 2 докажем теорему, показав что в G выполняется указанное выше тождество с вероятностью 1, но оно не выполняется в G в обычном смысле. Во всех утверждениях ниже считается, что n – нечетное число. При этом в каждом утверждении мы укажем для каких нечетных n данное утверждение справедливо.

Если в наших суждениях везде группу $\mathbb{Z}$ заменить на свободную группу ранга 2, с использованием оценки $\gamma_{B(4, n)}(r) > 8 \cdot (6.9)^{r-1}$ [9], то непосредственно получим результат работы [6].

1. n -ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ГРУППЫ С n -КРУЧЕНИЕМ

Понятие n -периодических произведений групп было введено Адяном в [10]. Им же доказано, что операция n -периодического произведения нечетного показателя $n \geq 665$ точная, ассоциативная и обладает свойством наследственности по подгруппам; свойства, которыми обладают прямые и свободные произведения (решение известной проблемы Мальцева, подробности см. в [11]). Эта операция, обозначаемая $\prod_{i \in I}^n G_i$, определяется для нечетного $n \geq 665$ как фактор группа свободного произведения данного семейства $\{G_i\}$ групп по конкретной нормальной подгруппе, определяемой системой соотношений вида $A^n = 1$.

Следующие две леммы, которые нам понадобятся, доказаны в [10] и выявляют важнейшие свойства n -периодических произведений при нечетных $n \geq 665$.

Лемма 1.1 (Теорема 1, [10]). *Группы $G_i, i \in I$ каноническим образом вкладываются в $\prod_{i \in I}^n G_i$ в качестве подгруппы.*

Лемма 1.2 (Теорема 7, [10]). *Для каждого элемента $x \in \prod_{i \in I}^n G_i$ или $x^n = 1$ в $\prod_{i \in I}^n G_i$, или x сопряжен элементу некоторой подгруппы G_i группы $\prod_{i \in I}^n G_i$ ($n \geq 665$).*

Как показано в [12], утверждение леммы 1.2 является характеристическим для n -периодических произведений.

Пусть S – произвольный групповой алфавит, $\mathcal{R}$ – некоторое множество записанных в этом алфавите слов, $n > 1$ фиксированное натуральное число и

$$(1.1) \quad G_1 = \langle S | R^n = 1, R \in \mathcal{R} \rangle$$

задание некоторой группы G_1 .

Определение 1.1. *Скажем, что группа (1.1) является группой с n -кручением или частично бернсайдовой группой, если для любого элемента $y \in G$ либо $y^n = 1$, либо y имеет бесконечный порядок (см. [13], [14]).*

Циклическая группа порядка n и бесконечная циклическая группа являются простейшими примерами n -крученных групп. Ясно также, что свободные бернсайдовы группы и абсолютно свободные группы любого ранга являются n -крученными группами для любого натурального n . Следующее утверждение доказано в [13].

Лемма 1.3 (Теорема 1.1, [13]). *n -периодическое произведение любого семейства групп с n -кручением является группой с n -кручением ($n \geq 665$).*

Поэтому справедлива

Лемма 1.4. *Группа G (0.2) является группой с n -кручением ($n \geq 665$).*

Напоминаем, что некоторое слово в алфавите группы G называется *геодезическим*, если оно в G не равно более короткому слову. Если длина заданного слова y в свободной группе обозначить через $|y|$, ее длина в G обозначить через $|y|_G$, то для геодезических слов имеет место равенство $|y|_G = |y|$.

В работе [14] показано, что любая группа с n -кручением обладает таким, так называемым, *минимальным частично-бернсайдовым представлением* вида

(1.1), для которого справедлив ряд лемм из монографии [15] и на этой основе получены важные результаты. Фиксируем некоторое частично-бернсайдово представление (1.1) для группы G . Для доказательства следующей леммы 1.5 мы воспользуемся некоторыми утверждениями из [14] формулировки которых здесь не будем приводить, а будем лишь указывать ссылки на соответствующие утверждения.

Лемма 1.5. *Пусть геодезическое слово w в G сопряжено с b^k , $k \neq 0$. Тогда существует геодезическое слово c такое, что $w = cb^kc^{-1}$ в G , причем $|w|_G = |k| + 2|c|$.*

Доказательство. Рассмотрим приведенную кольцевую диаграмму Δ сопряженности w и b^k , метка внешнего контура которой есть w^{-1} и метка внутреннего контура есть b^k (см. Теорему II.4.1 [14]). Согласно Теореме II.56 [14] диаграмма Δ является A -картой. Если ранг $rank(\Delta) > 0$, то в силу следствия II.24 [14] диаграмма Δ содержит γ -клетку Π , т.е. клетку, для которой $(\Pi, \Gamma_w, w) + (\Pi, \Gamma_{b^k}, b^k) > 1 - \gamma$, где (Π, Γ_w, w) и (Π, Γ_{b^k}, b^k) – поддиаграммы примыкания клетки Π к контурам с метками w^{-1} и b^k соответственно. Так как w – геодезическое слово, то внешний контур Δ является гладким (см. определение II.16 [14]). Согласно лемме II.21 [14] имеем $(\Pi, \Gamma_w, w) < \frac{1}{2} + \alpha$. Тогда $(\Pi, \Gamma_{b^k}, b^k) > 1 - \gamma - \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} - \gamma - \alpha$. В силу принципа младшего параметра (ПМП, см. §15, п.1, [15]) имеем $\frac{1}{2} - \gamma - \alpha > \frac{1}{n}$. Отсюда следует, что метка контура клетки Π является периодическим словом с периодом b . Но это противоречит предложению III.8 [14], согласно которой каждый период имеет прядок n в G , в то время как элемент b имеет бесконечный порядок в G . Из полученного противоречия вытекает, что $rank(\Delta) = 0$, т.е. слово w сопряжено с b^k в свободной группе с порождающими a_1, a_2, b . Следовательно, геодезическое слово w графически имеет вид $w = cb^kc^{-1}$, где c и b^k – тоже геодезические слова. Поэтому $|w|_G = |k| + 2|c|$. $\square$

Следствие 1.1. *Слово b^k является геодезическим в G для любого k . В частности $|b^k|_G = |k|$.*

Лемма 1.6. *Пусть X – произвольное слово в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ и $X^n \neq 1$ в G . Тогда существует слово U такое, что $UXU^{-1} \in \langle b \rangle$.*

Доказательство. Поскольку в $B(2, n)$ выполняется тождество $x^n = 1$, то утверждение непосредственно вытекает из леммы 1.2. $\square$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1

Докажем, что в группе G тождество $x^n = 1$ является M -вероятностным тождеством (пункт 1 теоремы 0.1). Пусть $B_G(k)$ — шар радиуса k в графе Кэли группы G относительно порождающего множества $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}\}$, а $B_{\mathbb{Z}}(k)$ — шар радиуса k в графе Кэли группы $\mathbb{Z}$ относительно его порождающего множества $b^{\pm 1}$. Соответствующие функции роста обозначим через $\gamma_G(k) = |B_G(k)|$, $\gamma_{\mathbb{Z}}(k) = |B_{\mathbb{Z}}(k)|$.

Мы можем оценить $\gamma_{G(k)}$ сверху используя рост свободной группы ранга 3: $\gamma_G(k) \leq \gamma_{F_3}(k) = \frac{3(5^{k-1} - 1)}{2} < 3 \cdot 5^k$. С другой стороны, G гомоморфно отображается на свободную бернсайдову группу $B(3, n)$, так как G — 3-порожденная группа с n -кручением (см. (1.1)). Следовательно, $\gamma_G(k)$ не меньше, чем $\gamma_{B(3, n)}(k)$. Известно, что $\gamma_{B(2, n)}(k) > 4 \cdot (2.9)^{k-1}$ (см. [Теорема 2.15, гл VI][9]). Аналогичным образом повторив суждения доказательства этой оценки для группы $B(3, n)$, мы получим оценку $\gamma_{B(3, n)}(k) > 6 \cdot (4.9)^{k-1}$. Тем самым, мы имеем

$$6 \cdot (4.9)^{k-1} \leq \gamma_G(k) < 3 \cdot 5^k.$$

Пусть A есть множество всех элементов $g \in G$, для которых $g^n \neq 1$ в G . Количество элементов в шаре $B_G(k)$, которые не удовлетворяют уравнению $x^n = 1$ равна $|(B_G(k)) \cap A|$. Поэтому, в силу леммы 1.6, имеем:

$$(B_G(k)) \cap A = \bigcup_{i=0}^k \left\{ UXU^{-1} \mid X \in B_{\mathbb{Z}}(i), U \in B_G\left(\frac{k-i}{2}\right) \right\}$$

Учитывая, что $\gamma_{\mathbb{Z}}(i) = 2i + 1$, получаем

$$\begin{aligned} |(B_G(k)) \cap A| &\leq \sum_{i=0}^k \gamma_{\mathbb{Z}}(i) \gamma_G\left(\frac{k-i}{2}\right) \leq 3 \sum_{i=0}^k i \gamma_G\left(\frac{k-i}{2}\right) \leq \\ &\leq 3 \sum_{i=0}^k (i \cdot 3 \cdot 5^{\frac{k-i}{2}}) = 9 \sum_{i=0}^k i \sqrt{5}^{k-i} = 9 \sqrt{5}^k \sum_{i=0}^k i \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^i \leq \\ &\leq \frac{9k(\sqrt{5}^{k+1} - 1)}{(\sqrt{5} - 1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|(B_G(k)) \cap A|}{|B_G(k)|} \leq \frac{3k(\sqrt{5}^{k+1} - 1)}{2(\sqrt{5} - 1) \cdot (4.9)^{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Пункт 1 теоремы 0.1 доказан.

Согласно лемме 1.1 группа G содержит подгруппу $\mathbb{Z}$. Поэтому пункт 2 следует из того, что $\mathbb{Z}$ не имеет кручения.

Abstract. In this paper, a 3-generated infinite group is constructed in which the probability of satisfying a certain fixed identity tends to 1. At the same time, this identity is not satisfied throughout the entire group. The question of the existence of such a group was recently posed by several authors. More precisely, the work considers an n -periodic product of a free periodic group of rank 2 and an infinite cyclic group. It is proved that in this product, the probability of satisfying the identity $x^n = 1$ tends to 1, but it does not hold on the entire product.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Amir, G., Blachar, G., Gerasimova, M., Kozma, G. (2023), Probabilistic Laws on Infinite Groups (arXiv:2304.09144). arXiv. <http://arxiv.org/abs/2304.09144>
- [2] Y. Antolin, A. Martino and E. Ventura, “Degree of commutativity of infinite groups”, <https://arxiv.org/abs/1511.07269>.
- [3] Matthew C.H.Tointon, “Commuting probabilities of infinite groups”, Journal of the London Mathematical Society, **101** (3), 1280 — 1297 (2020).
- [4] Y. Antolin, A. Martino and E. Ventura, “Degree of commutativity of infinite groups”, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2), 479 — 485 (2017).
- [5] R. M. Guralnick and J. S. Wilson, “The probability of generating a finite soluble group”, Proc. London Math. Soc. (3) **81**, no. 2, 405 — 427 (2000).
- [6] G. Goffer, B. Greenfeld, “Probabilistic Burnside groups”, (2023) (arXiv:2306.11204). arXiv. <http://arxiv.org/abs/2306.11204>
- [7] С. И. Адян, “Случайные блуждания на свободных периодических группах”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **46**, 6, 1139 — 1149 (1982); Math. USSR-Izv., **21** 3, 425 — 434 (1983).
- [8] W. Woess, Random Walks on Infinite Graphs and Groups, Cambridge University Press (2000).
- [9] S. I. Adian, The Burnside Problem and Identities in Groups, Springer (1979).
- [10] S. I. Adian, “Periodic products of groups”, Proc. Steklov Inst. Math., **142**, 1 — 19 (1979).
- [11] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Periodic product of groups”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **52** (3), 111 — 117 (2017).
- [12] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Characteristic properties and uniform non-amenability of n -periodic products of groups”, Izv. Math., **79**, no. 6, 1097 — 1110 (2015).
- [13] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “ n -torsion groups, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **54**, no. 6, 319 — 327 (2019).
- [14] N. S. Boatman, Partial-Burnside groups (Dissertation), 2012, <https://etd.library.vanderbilt.edu/etd-11302012-113318>
- [15] A. Yu. Olshanskii, The Geometry of Defining Relations in Groups, Kluwer Academic Publishers (1991).

Поступила 11 марта 2024

После доработки 12 апреля 2024

Принята к публикации 24 апреля 2024

**КЛАСС МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ,
ВКЛЮЧАЩИЙ ПРОИЗВОДНУЮ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА**

Ж. Г. ВАНГ, М. У. ФАРУК, М. АРИФ, С.Н. МАЛИК И Ф.М.О. ТОФИК

Первый педагогический университет, Хунань, КНР¹
Университет Абдул Вали Хана, Мардан, Пакистан
Университет COMSATS, Исламабад, Пакистан
Университет King Saud, Рияд, Саудовская Аравия

E-mails: wangmath@163.com; umar4207590@gmail.com;
marifmaths@awkum.edu.pk; snmalik110@ciitwah.edu.pk
ftoufic@ksu.edu.sa

Аннотация. В статье изучаются оценки коэффициентов класса мероморфных функций, включающих производную высшего порядка. Несколько подобных неравенств также установлены для обратных функций рассматриваемого класса мероморфных функций.

Номера MSC2020: 30C55, 30C45.

Ключевые слова: мероморфная функция; звездообразная функция; подчинение; оценка коэффициентов; определитель Ганкеля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{D}$ обозначает открытый единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а Σ обозначает класс мероморфных функций вида

$$(1.1) \quad f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}).$$

Более того, пусть $w(z)$ — аналитическая функция, такая что $w(0) = 0$ и $|w(z)| < 1$ с разложением в ряд

$$(1.2) \quad w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Функция $w(z)$ называется *функцией Шварца*.

В последние десятилетия многие исследователи проявляли интерес к изучению мероморфных функций в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Например, Клуни [1] доказал, что если f имеет вид (1.1), то есть мероморфным звездообразным в $\mathbb{D}$, то $|a_n| \leq 2/(n+1)$

¹Настоящее исследование было поддержано *Естественным научным фондом провинции Хунань* в рамках гранта № 2022JJ30185 КНР и *Фондом университета King Saud* в рамках гранта № RSP2023R440 Саудовской Аравии.

(Клуни доказал это для случая, когда $a_0 = 0$, тогда как в различных случаях в литературе отмечалось, что его доказательство справедливо для $a_0 \neq 0$). Поммеренке [2], Либера и Робертсон [3] также получили несколько похожих результатов.

Оценки коэффициентов играют важную роль в области GFT (Геометрическая теория функций). В 1916 году Биберах выдвинул знаменитую гипотезу о том, что для любой нормализованной аналитической и однолистной функции выполняется неравенство $|a_n| \leq n$, и только спустя 69 лет, в 1985 году это было доказано де Бранжем (см. [4]). Оценки коэффициентов говорят нам о геометрических свойствах функций, например, оценка второго коэффициента определяет рост, искажения и покрытия нормализованных однолистных функций.

Определители Ганкеля аналитических функций были введены впервые в 1960-х годах. Поммеренке [2] изучал определители Ганкеля для класса $\mathcal{S}$ однолистных и аналитических функций с разложениями в ряд

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

Он показал, что для $f \in \mathcal{S}$, имеет место оценка

$$|H_q(n)| \leq K n^{(-1/2+\beta)q+3/2},$$

где n, q — натуральные числа, $q \geq 2$, $\beta > 1/4000$ и K зависит от q . Позднее Хейман [5] и Нур [6] также доказали несколько похожих интересных результатов (см. также [7, 8]).

Оценка для $|H_2(1)|$ была впервые изучена Бабалолой [9], он нашел точную оценку $|a_4 - a_2 a_3|$ для звездообразных функций, выпуклых функций и близких к выпуклым функций с положительными действительными частями их производных, соответственно. Мишра-Праджапат-Махарана [10] доказал оценки $|H_2(1)| \leq 1/2$ и $|H_2(1)| \leq 4/27$ для класса звездообразных и выпуклых относительно симметричных точек, соответственно, функций. Раза и Малик [11] (см. также [12]) доказали, что эта оценка верна с $1/6$ для класса звездообразных функций, связанных с лемниской Бернулли.

В последние годы оценки коэффициентов для мероморфных однолистных функций были тщательно изучены различными исследователями. Например, для мероморфных однолистных функций f Шиффер [13] доказал, что $|a_2| \leq 2/3$ с $a_0 = 0$, а Дюрэн [14] получил $|a_n| \leq 2/(n+1)$, где $a_k = 0$ для $1 \leq k \leq n/2$.

Спрингер [15] получил оценку $|b_3| \leq 1$, а также $|b_3 + (1/2)b_1^2| \leq 1/2$, для класса мероморфных однолистных функций, где b_k представляет собой коэффициент ряда Тейлора обратной функции Σ . Он также выдвинул гипотезу, что $|b_{2n-1}| \leq (2n-1)!/[n!(n-1)!]$, что было доказано Куботой [16] для $n = 3, 4, 5$ и Шобером [17] для $1 \leq n \leq 7$. Оценки коэффициентов для класса мероморфных звездообразных функций порядка α и мероморфных звездообразных функций порядка α с m -кратными представлениями в виде рядов с пропусками были исследованы Капуром и Мишрой [18], Сриваставой-Мишрой-Кундом [19] соответственно. Хамиди-Халим-Джахангири [20, 21] использовал полиномы Фабера для исследования границ коэффициентов двояковыпуклых функций. Для более поздних исследований мероморфных функций можно посмотреть [22] – [28].

По существу мотивированные вышеизложенными оценками коэффициентов мероморфных функций, мы определим общий класс $\mathcal{MSC}(n, b)$ мероморфных функций, включающих высшую производную, который обобщает и объединяет предыдущее исследование в литературе. Предоставляется всестороннее и детальное понимание оценок коэффициентов мероморфных функций, и выводятся оценки коэффициентов этого общего класса мероморфных функций.

Пусть $\mathcal{P}$ обозначает класс аналитических функций p в $\mathbb{D}$ вида

$$(1.3) \quad p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

таких, что $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ в $\mathbb{D}$.

Определение 1.1. *Предположим, что $\phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n \in \mathcal{P}$. Говорят, что функция $f \in \Sigma$ принадлежит классу $\mathcal{MSC}(n, b)$, если она удовлетворяет условию*

$$1 - \frac{2}{b} \left(\frac{1}{n+1} \frac{z f^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)} + 1 \right) \prec \phi(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Выбирая специальные n , b и $\phi(z)$, мы получаем следующие подклассы мероморфных функций.

1. Для $n = 0$, $b = 2$ и $\phi(z) = 1 + \sin z$, мы получаем

$$\mathcal{MS}_{\sin}^* = \left\{ f \in \Sigma : -\frac{z f'(z)}{f(z)} \prec 1 + \sin z \right\}.$$

2. Для $n = 0$, $b = 2$ и $\phi(z) = 1 + \tanh z$, имеем

$$\mathcal{MS}_{\tanh}^* = \left\{ f \in \Sigma : -\frac{z f'(z)}{f(z)} \prec 1 + \tanh z \right\}.$$

3. Для $n = 0$, $b = 2$ и $\phi(z) = \sqrt{1+z}$, мы получаем

$$\mathcal{MS}_{BL}^* = \left\{ f \in \Sigma : -\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \sqrt{1+z} \right\}.$$

Целью данной статьи является вывод оценок коэффициентов, второго определителя Ганкеля $|H_2(1)|$ и коэффициентов обратных функций для обобщенного класса мероморфных функций, связанных с общей функцией $\phi(z)$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для вывода основных результатов нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2.1. (см. [29, стр. 41]) *Для функции $p \in \mathcal{P}$ вида (1.3) и для каждого $n \geq 1$ выполняется точное неравенство $|p_n| \leq 2$. Равенство выполняется для функции*

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Лемма 2.2. (см. [30]) *Для любых действительных чисел μ и v и функции Шварца $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, выполняются следующие точные соотношения. Если*

$$(2.1) \quad (\mu, v) \in \left\{ |\mu| \leq \frac{1}{2}, -1 \leq v \leq 1 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \leq |\mu| \leq 2, \frac{4}{27}(|\mu|+1)^3 - (|\mu|+1) \leq v \leq 1 \right\},$$

тогда

$$(2.2) \quad |c_3 + \mu c_1 c_3 + v c_1^3| \leq 1.$$

Если

$$D_1 = \left\{ 2 \leq |\mu| \leq 4, v \geq \frac{1}{12}(\mu^2 + 8) \right\} \cup \left\{ |\mu| \geq 4, v \geq \frac{2}{3}(|\mu| - 1) \right\},$$

тогда

$$|c_3 + \mu c_1 c_3 + v c_1^3| \leq |v|,$$

и $|c_n| \leq 1$.

По лемме Шварца-Пика мы знаем, что

$$(2.3) \quad |c_2| \leq 1 - |c_1|^2.$$

Аналогично мы находим, что

$$(2.4) \quad |c_2 + \lambda c_1^2| \leq \max\{1, |\lambda|\} \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Лемма 2.3. (см. [31]) *Пусть $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ — функция Шварца. Тогда*

$$|c_3| \leq 1 - |c_1|^2 - \frac{|c_2|^2}{1 + |c_1|},$$

$$|c_4| \leq 1 - |c_1|^2 - |c_2|^2,$$

$$|c_5| \leq 1 - |c_1|^2 - |c_2|^2 - \frac{|c_3|^2}{1 + |c_1|}.$$

Лемма 2.4. (see [32]) Пусть $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ – функция Шварца. Тогда

$$|c_1 c_3 - c_2^2| \leq 1 - |c_1|^2.$$

Лемма 2.5. (see [33]) Пусть $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ – функция Шварца, и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$|c_4 + (1 + \lambda) c_1 c_3 + c_2^2 + (1 + 2\lambda) c_1^2 c_2 + \lambda c_1^4| \leq \max \{1, |\lambda|\},$$

и

$$|c_4 + 2c_1 c_3 + \lambda c_2^2 + (1 + 2\lambda) c_1^2 c_2 + \lambda c_1^4| \leq \max \{1, |\lambda|\}.$$

3. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ КЛАССА $\mathcal{MSC}(n, b)$

Сначала мы докажем следующий результат для начальных коэффициентов класса $\mathcal{MSC}(n, b)$.

Теорема 3.1. Пусть $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$ с $\phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n$. Тогда

$$(3.1) \quad |a_0| \leq \frac{n+1}{2} \left| \frac{bB_1}{\psi(0, n)} \right|,$$

$$(3.2) \quad |a_1| \leq \frac{n+1}{4} \left| \frac{bB_1}{\psi(1, n)} \right| \left(\max \left\{ 1, \left| \frac{2B_2 - b(n+1)B_1^2}{2B_1} \right| \right\} \right),$$

$$|a_2| \leq \frac{n+1}{6} \left| \frac{bB_1}{\psi(2, n)} \right|,$$

где

$$\psi(j, n) = \frac{\binom{j}{n}}{(-1)^n} \quad (j = 0, 1, 2),$$

$$|8B_2 - 3b(n+1)B_1^2| \leq 4|B_1|,$$

$$\left| b^2(n+1)^2 B_1^3 - 6bB_2(n+1)B_1 + 8B_3 \right| \leq 8|B_1|.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$. Тогда существует функция Шварца такая, что

$$(3.3) \quad 1 - \frac{2}{b} \left(\frac{1}{n+1} \frac{zf^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)} + 1 \right) = \phi(w(z)).$$

Легко видеть, что

$$(3.4) \quad f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} a_m z^{m-n}.$$

В силу (3.3) и (3.4), имеем

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & 1 - \frac{2}{b} \left(\frac{1}{n+1} \frac{z f^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)} + 1 \right) \\
 & = 1 + \frac{2}{b(n+1)} \left[-\psi(0, n) a_0 z + (\psi^2(0, n) a_0^2 - 2\psi(1, n) a_1) z^2 \right. \\
 & \quad \left. - (\psi^3(0, n) a_0^3 - 3\psi(0, n) \psi(1, n) a_0 a_1 + 3\psi(2, n) a_2) z^3 + \dots \right],
 \end{aligned}$$

где

$$\psi(m, n) = \frac{\binom{m}{n}}{(-1)^n},$$

$$(3.6) \quad \phi(w(z)) = 1 + B_1 c_1 z + (B_2 c_1^2 + B_1 c_2) z^2 + (B_3 c_1^3 + 2B_2 c_1 c_2 + B_1 c_3) z^3 + \dots$$

Из (3.5) и (3.6) следует, что

$$(3.7) \quad a_0 = -\frac{1}{2} \frac{b B_1 c_1 (n+1)}{\psi(0, n)},$$

$$(3.8) \quad a_1 = \frac{1}{8} \frac{b(n+1)}{\psi(1, n)} [b c_1^2 (n+1) B_1^2 - 2B_1 c_2 - 2B_2 c_1^2],$$

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad a_2 = & -\frac{b(n+1)}{48\psi(2, n)} (b^2 n^2 B_1^3 c_1^3 + 2b^2 n B_1^3 c_1^3 - 6bn B_1 B_2 c_1^3 - 6bn B_1^2 c_1 c_2 \\
 & + B_1^3 c_1^3 b^2 - 6b B_1 B_2 c_1^3 - 6b B_1^2 c_1 c_2 + 8B_3 c_1^3 + 16B_2 c_1 c_2 + 8B_1 c_3).
 \end{aligned}$$

Из (3.7), получаем

$$a_0 = -\frac{1}{2} \frac{b B_1 (n+1)}{\psi(0, n)} c_1,$$

откуда следует, что

$$|a_0| = \frac{1}{2} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(0, n)|} |B_1| |c_1|.$$

В силу леммы 2.2,

$$|a_0| \leq \frac{1}{2} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(0, n)|} |B_1|.$$

С учетом (3.8), получим, что

$$|a_1| = \frac{1}{8} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(1, n)|} |b c_1^2 (n+1) B_1^2 - 2B_1 c_2 - 2B_2 c_1^2|,$$

откуда следует, что

$$|a_1| = \frac{1}{4} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(1, n)|} |B_1| \left| c_2 + \frac{2B_2 - b(n+1)B_1^2}{2B_1} c_1^2 \right|.$$

По лемме 2.4 получаем, что

$$|a_1| \leq \frac{1}{4} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(1, n)|} |B_1| \left(\max \left\{ 1, \left| \frac{2B_2 - b(n+1)B_1^2}{2B_1} \right| \right\} \right).$$

Из (3.9), имеем

$$\begin{aligned}
 a_2 = & -\frac{b(n+1)}{48\psi(2, n)} (b^2 n^2 B_1^3 c_1^3 + 2b^2 n B_1^3 c_1^3 - 6bn B_1 B_2 c_1^3 - 6bn B_1^2 c_1 c_2 \\
 & + B_1^3 c_1^3 b^2 - 6b B_1 B_2 c_1^3 - 6b B_1^2 c_1 c_2 + 8B_3 c_1^3 + 16B_2 c_1 c_2 + 8B_1 c_3),
 \end{aligned}$$

что приводит к

$$|a_2| = \frac{|b|(n+1)}{6|\psi(2, n)|} |B_1| \times \left| c_3 + \frac{8B_2 - 3b(n+1)B_1^2}{4B_1} c_1 c_2 + \frac{b^2(n+1)^2 B_1^3 - 6bB_2(n+1)B_1 + 8B_3}{8B_1} c_1^3 \right|.$$

Если

$$|8B_2 - 3b(n+1)B_1^2| \leq 4|B_1|$$

и имеет место

$$\left| b^2(n+1)^2 B_1^3 - 6bB_2(n+1)B_1 + 8B_3 \right| \leq |8B_1|,$$

тогда

$$|a_2| \leq \frac{n+1}{6} \frac{|bB_1|}{|\psi(2, n)|}.$$

Теорема 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.2. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$ и

$$|c_1| < \frac{|24\psi(0, n)\psi(2, n)B_1^2 - 1|}{|32B_1^2\psi^2(1, n) - 1| - |24\psi(0, n)\psi(2, n)B_1^2 - 1|},$$

тогда

$$|a_0 a_2 - a_1^2| \leq \frac{1}{192} \frac{|b|^2(n+1)^2}{\psi(0, n)\psi^2(1, n)\psi(2, n)} \left(\frac{1}{2} + \max\{g(|c_1|)\} \right),$$

где

$$g(|c_1|) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2} \left(A - \frac{D}{1+|c_1|} \right) |c_1| + \left(D \frac{|c_1|}{1+|c_1|} - A + E \right) |c_1|^2 - \left(\frac{A}{2} + E \right) |c_1|^3 + \left(F + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2} \frac{|c_1|}{1+|c_1|} D \right)$$

$$A = |24\psi(0, n)\psi(2, n)B_1^2 - 1|,$$

$$D = |32B_1^2\psi(1, n)^2 - 1|,$$

$$E = |(32\psi^2(1, n) - 24\psi(0, n)\psi(2, n))B_1B_2$$

$$-12b(n+1)(\psi^2(1, n) - \psi(0, n)\psi(2, n))B_1^3|,$$

$$F = |-12\psi(0, n)\psi(2, n)B_2^2 - 12b(n+1)(\psi^2(1, n) - \psi(0, n)\psi(2, n))B_1^2B_2$$

$$+b^2(n+1)^2(2\psi^2(1, n) - 3\psi(0, n)\psi(2, n))B_1^4 + 16B_1\psi^2(1, n)B_3|.$$

Доказательство. В силу (3.7) – (3.9), имеем

$$\begin{aligned}
 & a_0 a_2 - a_1^2 \\
 &= \frac{1}{192} \frac{b^2 (n+1)^2}{\psi(0, n) \psi^2(1, n) \psi(2, n)} \{ 16 B_1^2 \psi^2(1, n) c_1 c_3 - 12 \psi(0, n) \psi(2, n) B_1^2 c_2^2 \\
 &+ [(32 \psi^2(1, n) - 24 \psi(0, n) \psi(2, n)) B_1 B_2 \\
 &- 12 b (n+1) (\psi^2(1, n) - \psi(0, n) \psi(2, n)) B_1^3] c_1^2 c_2 \\
 &+ [-12 \psi(0, n) \psi(2, n) B_2^2 - 12 b (n+1) (\psi^2(1, n) - \psi(0, n) \psi(2, n)) B_1^2 B_2 \\
 &+ b^2 (n+1)^2 (2 \psi^2(1, n) - 3 \psi(0, n) \psi(2, n)) B_1^4 + 16 B_1 \psi^2(1, n) B_3] c_1^4 \}.
 \end{aligned}$$

После простых вычислений получим, что

$$\begin{aligned}
 |a_0 a_2 - a_1^2| &= \frac{1}{192} \frac{|b|^2 (n+1)^2}{\psi(0, n) \psi^2(1, n) \psi(2, n)} \\
 &\times \left(\frac{1}{2} |c_1 c_3 - c_2^2| + \frac{1}{2} |c_1| |c_3| D + \frac{1}{2} |c_2|^2 A + E |c_1|^2 |c_2| + F |c_1|^4 \right).
 \end{aligned}$$

Упростив, получим

$$|a_0 a_2 - a_1^2| = \frac{1}{192} \frac{|b|^2 (n+1)^2}{\psi(0, n) \psi^2(1, n) \psi(2, n)} \left(\frac{1}{2} L_1 + L_2 \right),$$

где

$$\begin{aligned}
 L_1 &= |c_1 c_3 - c_2^2|, \\
 L_2 &= \frac{1}{2} |c_1| |c_3| D + \frac{1}{2} |c_2|^2 A + E |c_1|^2 |c_2| + F |c_1|^4.
 \end{aligned}$$

Теперь, по лемме 2.4, получим $L_1 \leq 1$. Для получения оценки L_2 , в силу леммы 2.3, имеем, что

$$L_2 = \frac{1}{2} |c_1| \left(1 - |c_1|^2 - \frac{|c_2|^2}{1 + |c_1|} \right) D + \frac{1}{2} |c_2|^2 A + E |c_1|^2 |c_2| + F |c_1|^4,$$

что эквивалентно

$$L_2 = \frac{1}{2} |c_1| - \frac{1}{2} |c_1|^3 + \frac{1}{2} |c_2|^2 \left(A - \frac{|c_1|}{1 + |c_1|} D \right) + E |c_1|^2 |c_2| + F |c_1|^4.$$

Если $|c_1| < \left| \frac{A}{D-A} \right|$, то

$$L_2 = \left(\frac{1}{2} |c_1| - \frac{1}{2} |c_1|^3 \right) D + \frac{1}{2} (1 - |c_1|^2)^2 \left(A - \frac{|c_1|}{1 + |c_1|} D \right) + E |c_1|^2 (1 - |c_1|) + F |c_1|^4.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 g(|c_1|) &= \frac{1}{2} A + \left(-A + \frac{1}{2} D + E \right) |c_1|^2 + \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} D - E + F \right) |c_1|^4, \\
 L_2 &\leq \max\{g(|c_1|)\},
 \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$|a_0 a_2 - a_1^2| \leq \frac{1}{192} \frac{|b|^2 (n+1)^2}{\psi(0, n) \psi^2(1, n) \psi(2, n)} \left(\frac{1}{2} + \max\{g(|c_1|)\} \right).$$

Теорема 3.2 доказана. $\square$

Теорема 3.3. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$, тогда

$$|a_0 a_1 - a_2| \leq \frac{n+1}{6} \left| \frac{bB_1}{\psi(2, n)} \right|$$

для $|A_1| \leq \frac{|A_3|}{2}$ и $|A_2| \leq |A_3|$, где

$$A_1 = 16\psi(0, n)\psi(1, n)B_2 - 6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) - \psi(2, n))B_1^2,$$

$$A_2 = 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_3 - 6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) - \psi(2, n))B_1B_2 \\ + b^2(n+1)^2(\psi(0, n)\psi(1, n) - 3\psi(2, n))B_1^3,$$

$$A_3 = 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_1.$$

Доказательство. В силу (3.7) – (3.9), имеем

$$|a_0 a_1 - a_2| = \left| \frac{(n+1)b}{48\psi(0, n)\psi(1, n)\psi(2, n)} \right| |A_1 c_1 c_2 + A_2 c_1^3 + A_3 c_3|.$$

После вычислений,

$$|a_0 a_1 - a_2| = \left| \frac{(n+1)b}{6\psi(2, n)} B_1 \right| \left| c_3 + \frac{A_1}{A_3} c_1 c_2 + \frac{A_2}{A_3} c_1^3 \right|.$$

Из $|A_1| \leq \frac{|A_3|}{2}$ и $|A_2| \leq |A_3|$, заключаем, что утверждение теоремы 3.3 имеет место. $\square$

Теорема 3.4. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$, тогда

$$|a_1 - \lambda a_0^2| \leq \frac{n+1}{4} |bB_1| \left| \frac{\psi(0, n)}{\psi(1, n)} \right| \\ \times \left(\max \left\{ 1, \left| \frac{b(n+1)}{2\psi^2(0, n)} \{ [2\psi(1, n)\lambda - \psi^2(0, n)] B_1^2 + 2\psi^2(0, n) B_2 \} \right| \right\} \right).$$

Доказательство. В силу (3.7) и (3.8), имеем

$$|a_1 - \lambda a_0^2| = \frac{1}{4} \frac{|b|(n+1)\psi(0, n)}{|\psi(1, n)|} |B_1| \\ \times \left| c_2 + \frac{b(n+1)}{2\psi^2(0, n)} \{ [2\psi(1, n)\lambda - \psi^2(0, n)] B_1^2 + 2\psi^2(0, n) B_2 \} c_1^2 \right|.$$

По лемме 2.4, получим утверждение теоремы 3.4. $\square$

4. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Для функции вида (1.1), $f^{-1}(\omega)$ есть обратная функция функции $f(z)$ и определена равенством

$$(4.1) \quad f^{-1}(\omega) = \frac{1}{\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n = \frac{1}{\omega} - a_0 - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \Lambda_{n+1}^n \omega^n,$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda_{n+1}^n &= na_0^{n-1}a_1 + n(n-1)a_0^{n-2}a_2 + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)a_0^{n-3}(a_3 + a_1^2) \\ &\quad + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(n-3)a_0^{n-4}(a_4 + 3a_1a_2) + \sum_{l \geq 5} a_0^{n-l}\eta_l\end{aligned}$$

а η_l with $5 \leq l \leq n$ – однородный полином степени l относительно переменных $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Из (4.1), имеем

$$\begin{aligned}(4.2) \quad b_0 &= -a_0, b_1 = -a_1, b_2 = -(a_2 + a_0a_1), \\ b_3 &= -(a_3 + 2a_0a_2 + a_0^2a_1 + a_1^2).\end{aligned}$$

Теорема 4.1. Пусть $f \in \text{MSC}(n, b)$ с обратными коэффициентами задана в (4.1). Тогда

$$\begin{aligned}|b_0| &\leq \frac{n+1}{2} \left| \frac{bB_1}{\psi(0, n)} \right|, \\ |b_1| &\leq \frac{n+1}{4} \left| \frac{bB_1}{\psi(0, n)} \right| \cdot \max \left\{ 1, \left| \frac{1}{2}b(n+1)B_1 - \frac{B_2}{B_1} \right| \right\}, \\ |b_2| &\leq \frac{n+1}{6} \left| \frac{bB_1}{\psi(2, n)} \right|\end{aligned}$$

для $|A| \leq \frac{|E|}{2}$ и $|D| \leq |E|$, где A, D и E определены в (4.6).

Доказательство. В силу (3.7) – (3.9) и (4.2), имеем

$$(4.3) \quad b_0 = \frac{1}{2} \frac{bB_1c_1(n+1)}{\psi(0, n)},$$

$$(4.4) \quad b_1 = \frac{1}{8} \frac{b(n+1)}{\psi(0, n)} \{2B_1c_2 - [b(n+1)B_1^2 - 2B_2]c_1^2\},$$

и

$$(4.5) \quad b_2 = \frac{1}{48} \frac{b(n+1)}{\psi(0, n)\psi(1, n)\psi(2, n)} (Ac_1c_2 + Dc_1^3 + Ec_3),$$

где

$$\begin{aligned}(4.6) \quad A &= -6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) + \psi(2, n))B_1^2 + 16\psi(0, n)\psi(1, n)B_2, \\ D &= -6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) + \psi(2, n))B_1B_2 + 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_3 \\ &\quad + b^2(n+1)^2(\psi(0, n)\psi(1, n) + 3\psi(2, n))B_1^3, \\ E &= 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_1.\end{aligned}$$

Из (4.3), находим, что

$$b_0 = \frac{1}{2} \frac{bB_1c_1(n+1)}{\psi(0, n)}.$$

Отметив, что $|c_1| \leq 1$, находим, что

$$|b_0| \leq \frac{1}{2} \frac{n+1}{|\psi(0, n)|} |bB_1|.$$

Аналогично, в силу (4.4), находим, что

$$\begin{aligned} |b_1| &= \frac{1}{8} \frac{|b|(n+1)}{|\psi(0, n)|} |2B_1c_2 - (b(n+1)B_1^2 - 2B_2)c_1^2| \\ &= \frac{1}{4} \frac{|b|(n+1)}{|\psi(0, n)|} |B_1| \left| c_2 - \left(\frac{1}{2}b(n+1)B_1 - \frac{B_2}{B_1} \right) c_1^2 \right|. \end{aligned}$$

С учетом (2.4) получаем, что

$$|b_1| \leq \frac{1}{4} \frac{|b|(n+1)}{|\psi(0, n)|} |B_1| \cdot \max \left\{ 1, \left| \frac{1}{2}b(n+1)B_1 - \frac{B_2}{B_1} \right| \right\}.$$

Теперь, из (4.5) следует, что

$$b_2 = \frac{1}{48} \frac{b(n+1)}{\psi(0, n)\psi(1, n)\psi(2, n)} (Ac_1c_2 + Dc_1^3 + Ec_3).$$

С помощью простых вычислений, получаем

$$|b_2| \leq \frac{1}{6} \frac{n+1}{|\psi(2, n)|} |bB_1| \left| c_3 + \frac{A}{E}c_1c_2 + \frac{D}{E}c_1^3 \right|.$$

Если $|A| \leq \frac{|E|}{2}$ и $|D| \leq |E|$, в силу леммы 2.2, заключаем, что

$$|b_2| \leq \frac{1}{6} \frac{n+1}{|\psi(2, n)|} |bB_1|.$$

Теорема 4.2. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$ с обратными коэффициентами как в (4.1), тогда

$$|b_0b_1 - b_2| \leq \frac{n+1}{6} \left| \frac{bB_1}{\psi(2, n)} \right|$$

для $|D_1| \leq \frac{|D_3|}{2}$ и $|D_2| \leq |D_3|$, где

$$\begin{aligned} D_1 &= 16\psi(1, n)\psi(0, n)B_2 - 6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) + 2\psi(2, n))B_1^2, \\ D_2 &= 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_3 - 6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) + 2\psi(2, n))B_1B_2 \\ &\quad + b^2(n+1)^2(\psi(0, n)\psi(1, n) + 6\psi(2, n))B_1^3, \\ D_3 &= 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_1. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу (4.3) – (4.5) имеем, что

$$|b_0b_1 - b_2| = \frac{1}{48} \frac{|b|(n+1)}{|\psi(0, n)||\psi(1, n)||\psi(2, n)|} |D_3c_3 + D_1c_1c_2 + D_2c_1^3|.$$

Следовательно,

$$|b_0b_1 - b_2| = \frac{1}{6} \frac{n+1}{|\psi(2, n)|} |bB_1| \left| c_3 + \frac{D_1}{D_3}c_1c_2 + \frac{D_2}{D_3}c_1^3 \right|.$$

Если $|D_1| \leq \frac{|D_3|}{2}$ и $|D_2| \leq |D_3|$, по лемме 2.2 заключаем, что утверждение теоремы 4.2 имеет место. $\square$

Теорема 4.3. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$ с обратными коэффициентами как в (4.1), тогда

$$|b_1^2 - \lambda b_0| \leq \frac{n+1}{4} \left| \frac{bB_1}{\psi(1, n)} \right| \times \left(\max \left\{ 1, \left| \frac{[b(n+1)(\psi^2(0, n) + 2\lambda\psi(1, n))B_1^2 - 2\psi^2(0, n)B_2]}{2\psi^2(0, n)B_1} \right| \right\} \right).$$

Доказательство. Из (4.3) и (4.4), имеем, что

$$|b_1^2 - \lambda b_0| = \frac{1}{4} \frac{n+1}{|\psi(1, n)|} |bB_1| \times \left| c_2 - \frac{[b(n+1)(\psi^2(0, n) + 2\lambda\psi(1, n))B_1^2 - 2\psi^2(0, n)B_2]}{2\psi^2(0, n)B_1} c_1^2 \right|.$$

В силу (2.4), заключаем, что утверждение теоремы 4.3 имеет место. $\square$

Замечание 4.1. Выбрав в полученных результатах специальным образом n, b и $\phi(z)$, мы получим некоторые известные результаты. Мы опускаем подробности.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения, которые существенным образом повысили качество данной статьи.

Abstract. The main purpose of this paper is to study coefficient bounds of a class of meromorphic functions involving higher order derivative. Several similar inequalities are also established for the inverse functions of the considered class of meromorphic functions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Clunie, "On meromorphic schlicht functions", J. London Math. Soc., **34**, 115 – 116 (1959).
- [2] C. Pommerenke, "Über einige Klassen meromorpher schlichter Funktionen", Math. Z., **78**, 263 – 284 (1962).
- [3] R. Libera, M. S. Robertson, "Meromorphic close-to-convex functions", Michigan Math. J., **8**, 167 – 175 (1961).
- [4] L. de Branges, "A proof of Bieberbach conjecture", Acta Math., **154**, 137 – 152 (1985).
- [5] W. K. Hayman, "On the second Hankel determinant of mean univalent function", Proc. London. Math. Soc., **3**, 77 – 94 (1968).
- [6] K. I. Noor, "On the Hankel determinant problem for strongly close-to-convex functions", J. Nat. Geom., **11**, 29 – 34 (1997).
- [7] Z.-G. Wang, H. M. Srivastava, M. Arif, Z.-H. Liu, K. Ullah, "Sharp bounds on Hankel determinants of bounded turning functions involving the hyperbolic tangent function", Appl. Anal. Discrete Math., doi: 10.2298/AADM221203013W, (2024).
- [8] Z.-G. Wang, M. Raza, M. Arif, K. Ahmad, "On the third and fourth Hankel determinants of a subclass of analytic functions", Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **45**, 323 – 359 (2022).
- [9] K. O. Babalola, "On $H_3(1)$ Hankel determinants for some classes of univalent functions", Inequality Theory and Applications, 1 – 7 (2010).

- [10] A. K. Mishra, J. K. Prajapat, S. Maharana, “Bounds on Hankel determinant for starlike and convex functions with respect to symmetric points”, *Cogent Math.*, **3**, Art. ID 1160557, 9 pp. (2016).
- [11] M. Raza, S. N. Malik, “Upper bound of the third Hankel determinant for a class of analytic functions related with lemniscate of Bernoulli”, *J. Inequal. Appl.*, **2013**, 2013:412, 8 pp.
- [12] Z.-G. Wang; M. Hussain, X.-Y. Wang, “On sharp solutions to majorization and Fekete-Szegő problems for starlike functions”, *Miskolc Math. Notes*, **24**, 1003 – 1019 (2023).
- [13] M. Schiffer, “Sur un problème d’extremum de la représentation conforme”, *Bull. Soc. Math. France*, **66**, 48 – 55 (1938).
- [14] P. L. Duren, “Coefficients of meromorphic schlicht functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **28**, 169 – 172 (1971).
- [15] G. Springer, “The coefficient problem for schlicht mappings of the exterior of the unit circle”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70**, 421 – 450 (1951).
- [16] Y. Kubota, “Coefficients of meromorphic univalent functions”, *Kodai Math. Semin. Rep.*, **28**, 253 – 261 (1977).
- [17] G. Schober, “Coefficients of inverses of meromorphic univalent functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **67**, 111 – 116 (1977).
- [18] G. P. Kapoor, A. K. Mishra, “Coefficient estimates for inverses of starlike functions of positive order”, *J. Math. Anal. Appl.*, **329**, 922 – 934 (2007).
- [19] H. M. Srivastava, A. K. Mishra, S. N. Kund, “Coefficient estimates for the inverses of starlike functions represented by symmetric gap series”, *Panamer. Math. J.*, **21**, 105 – 123 (2011).
- [20] S. G. Hamidi, S. A. Halim, J. M. Jahangiri, “Faber polynomial coefficient estimates for meromorphic bi-starlike functions”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, Art. ID 498159, 4 pp. (2013).
- [21] S. G. Hamidi, S. A. Halim, J. M. Jahangiri, “Coefficient estimates for a class of meromorphic bi-univalent functions”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **351**, 349 – 352 (2013).
- [22] R. Chandrashekar, R. M. Ali; S. K. Lee, V. Ravichandran, “Convolutions of meromorphic multivalent functions with respect to n -ply points and symmetric conjugate points”, *Appl. Math. Comput.*, **218**, 723 – 728 (2011).
- [23] R. M. Ali, R. Chandrashekar, S. K. Lee, A. Swaminathan, V. Ravichandran, “Differential sandwich theorem for multivalent meromorphic functions associated with the Liu-Srivastava operator”, *Kyungpook Math. J.*, **51**, 217 – 232 (2011).
- [24] R. M. Ali, V. Ravichandran, N. Seenivasagan, “On subordination and superordination of the multiplier transformation for meromorphic functions”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)*, **33**, 311 – 324 (2010).
- [25] D. Breaz, K. R. Karthikeyan, E. Umadevi, “Subclasses of multivalent meromorphic functions with a pole of order p at the origin”, *Mathematics*, **10**, Article 600 (2022).
- [26] E. E. Ali, H. M. Srivastava, A. Y. Lashin, A. M. Albalahi, “Applications of some subclasses of meromorphic functions associated with the q -derivatives of the q -binomials”, *Mathematics*, **11**, Article 2496 (2023).
- [27] I. Al-Shbeil, J. Gong, S. Ray, S. Khan, N. Khan, H. Alaqad, “The properties of meromorphic multivalent q -starlike functions in the Janowski domain”, *Fractal Fract.*, **7**, Article 438 (2023).
- [28] E.-A. Tatoi, L.-I. Cotîrlă, “Preserving classes of meromorphic functions through integral operators”, *Symmetry*, **14**, Article 1545 (2022).
- [29] P. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag (1983).
- [30] D. V. Prokhorov, J. Szynal, “Inverse coefficients for (a, b) -convex functions”, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, **35**, 125 – 143 (1981).
- [31] F. Carlson, *Sur les Coefficients D’une Fonction Bornée Dans Le Cercle Unité*; Almqvist Wiksell: Stockholm, Sweden (1940).
- [32] P. Zaprawa, “On coefficient problems for functions starlike with respect to symmetric points”, *Bol. Soc. Mat. Mex. (3)*, **28**, No. 17, 12 pp. (2022).
- [33] I. Efraimidis, “A generalization of Livingston’s coefficient inequalities for functions with positive real part”, *J. Math. Anal. Appl.*, **435**, 369–379 (2016).

Поступила 11 ноября 2023

После доработки 22 января 2024

Принята к публикации 04 февраля 2024

ФРЕЙМ ПОТЕНЦИАЛ СОПРЯЖЕННОГО ФРЕЙМА И ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ПО ФАЗЕ ФРЕЙМ

М. ДЖАФАРИЗАДЕ, М. А. ГАСАНХАНИ ФАРД

Рафсанджанский университет, Рафсанджан, Иран
E-mails: *m.jafarizadeh@stu.vru.ac.ir*; *m.hasankhani@vru.ac.ir*

Аннотация. Настоящая статья посвящена фрейм-потенциалу конечных фреймов в n -мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Точнее, мы определяем относительный фрейм-потенциал двух последовательностей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}_n$, который обозначается как $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Для дуальных фреймов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}_n$ мы показываем, что $\mathcal{G}$ является каноническим дуальным фреймом $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = n$. Нижняя и верхняя границы для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ даны для случая, когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются фреймами для $\mathcal{H}_n$. Более того, показываем, что $\min \{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ есть последовательность в } \mathcal{H}_n \}$ по множеству всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с нижней фрейм границей A достигается для A -жестких фреймов и $\max \{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ есть последовательность в } \mathcal{H}_n \}$ по множеству всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с верхней фрейм границей B встречается в B -жестких фреймах. Также, используя относительный фрейм-потенциал подпоследовательностей данного фрейма, представлены некоторые эквивалентные условия для его восстанавливаемости по фазе и по норме.

MSC2020 numbers: 42C15.

Ключевые слова: фрейм; дуальный фрейм; фрейм потенциал; восстанавливаемый по фазе фрейм; нормированно восстанавливаемый кадр.

1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция фреймов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ была первоначально введена Даффином и Шеффером в контексте негармонического ряда Фурье [1]. За последнее десятилетие были предложены различные обобщения фреймов, такие как фрейм подпространств, псевдофреймы, косые фреймы, непрерывные фреймы, фреймы слияния, g -фреймы и т. д. Концепция фреймов Парсевалья с равной нормой на конечномерных гильбертовых пространствах была впервые введена Касаза и Леонардом в [2, 3] и очень быстро развивалась в течение последних десяти лет, особенно в контексте вейвлетов и систем Габора.

В n -мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ последовательность $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m$ называется фреймом для $\mathcal{H}_n$, если существуют константы $A > 0$, $B < \infty$ такие, что для всех $f \in \mathcal{H}_n$,

$$(1.1) \quad A \|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^m |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B \|f\|^2,$$

где A, B — соответственно нижняя и верхняя границы фрейма. Второе неравенство условия фрейма (1.1) также известно как условие Бесселя для $\{f_i\}_{i=1}^m$. Фрейм $\{f_i\}_{i=1}^m$ называется A -жестким фреймом, если $A = B$. Жесткий фрейм с $\|f_i\| = c$ для всех $1 \leq i \leq m$ называется жёстким фреймом с c -равной нормой, а жесткий фрейм с границей фрейма 1 называется фреймом Парсеваля.

Ограниченный линейный оператор $T_{\mathcal{F}}$, определенный равенством

$$T_{\mathcal{F}} : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathcal{H}, \quad T_{\mathcal{F}}(\{c_i\}_{i=1}^m) = \sum_{k=1}^m c_k f_k$$

называется фрейм оператором фрейма $\mathcal{F}$. Ограниченный линейный оператор $S_{\mathcal{F}}$, определенный равенством

$$S_{\mathcal{F}} : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad S_{\mathcal{F}} f = \sum_{i=1}^m \langle f, f_i \rangle f_i$$

также называется фрейм оператором фрейма $\mathcal{F}$. Известно, что фрейм оператора S является положительным, самосопряженным и обратимым оператором.

Фреймы $\{f_i\}_{i=1}^m$ и $\{g_i\}_{i=1}^m$ являются сопряженными (дуальными) фреймами для $\mathcal{H}$, если

$$f = \sum_{i=1}^m \langle f, g_i \rangle f_i, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Фрейм $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^m$ определенный как $\tilde{f}_i = S^{-1} f_i$ для $1 \leq i \leq m$, является сопряженным к $\{f_i\}_{i=1}^m$ и называется канонически сопряженным фреймом фрейма $\{f_i\}_{i=1}^m$. Для дальнейших сведений о фреймах см. [4]–[8].

Фреймы — это избыточные множества векторов в гильбертовом пространстве, которые дают одно естественное представление каждого вектора в пространстве, но могут иметь бесконечно много различных представлений для любого вектора. Именно эта избыточность делает фреймы полезными в приложениях. В обработке сигналов эта концепция стала очень полезной при анализе полноты и устойчивости линейных дискретных представлений сигналов.

Понятие фрейм-потенциала конечного фрейма был введен Бенедетто и Фикусом в [9]. Фактически, фрейм-потенциал конечного фрейма является критерием измерения его ортогональности. Показано, что A -жесткие фреймы являются минимизаторами фрейм-потенциала в $\mathcal{K}$ — семействе фреймов с нижней границей фрейма A .

Реконструкция сигнала с помощью фреймов является важной и интересной проблемой в физике и технике. Некоторые классы жестких фреймов гильбертова пространства, которые позволяют реконструировать сигнал из абсолютных

значений фрейм коэффициентов, были построены в [10]. Как следствие, реконструкция сигнала может быть выполнена без использования фазы. Процесс реконструкции сигнала без использования фазы известен как восстановление фазы. Когда мы говорим, что $\{f_k\}_{k=1}^m$ является восстанавливаемым по фазе фреймом в $\mathcal{H}_n$, это означает, что любой вектор в $\mathcal{H}_n$ может быть восстановлен с точностью до постоянного фазового множителя из модуля его фрейм коэффициентов.

Восстанавливаемые по фазе фреймы имеют важные приложения в рентгеновской кристаллографии, электронной микроскопии, распознавании речи и многих других областях [11] – [14].

Понятие восстанавливаемого по норме фрейма введено в [15]. Авторы показали, что это то, что необходимо для перехода из восстанавливаемости по фазе к полноте. Они также получили связь между восстанавливаемыми по фазе фреймами и восстанавливаемыми по норме фреймами.

В этой статье определяем относительный фрейм-потенциал фрейма $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ для двух последовательностей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}_n$. Для дуальных фреймов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}_n$ мы показываем, что $\mathcal{G}$ является каноническим дуальным фреймом $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = n$. В случае, когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются фреймами для $\mathcal{H}_n$, даются нижняя и верхняя границы для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Более того, мы показываем, что $\min \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ есть последовательность в } \mathcal{H}_n \right\}$ на совокупности всех фреймов для $\mathcal{H}_n$ с нижней фрейм-границей A встречается в A -жестких фреймах и $\max \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ есть последовательность в } \mathcal{H}_n \right\}$ на совокупности всех фреймов для $\mathcal{H}_n$ с верхней фрейм границей B встречается в B -жестких фреймах. Также, используя относительный фрейм-потенциал кадра подпоследовательностей данного кадра, представлены некоторые эквивалентные условия для его восстанавливаемости по фазе и по норме.

2. ФРЕЙМ–ПОТЕНЕЦИАЛ СОПРЯЖЕННЫХ ФРЕЙМОВ

Бенедетто и Фикус определили фрейм потенциал системы $\{f_i\}_{i=1}^m$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ следующим образом:

Определение 2.1. [9] Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m$ – система в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Фрейм–потенциал системы $\mathcal{F}$ определяется равенством:

$$FP(\mathcal{F}) = \sum_{i,j=1}^m |\langle f_i, f_j \rangle|^2.$$

Относительный фрейм–потенциал двух систем $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ определяем следующим образом:

Определение 2.2. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Относительный фрейм-потенциал двух систем или просто фрейм-потенциал двух систем $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ определяется равенством:

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2.$$

Следующее предложение представляет некоторые соотношения между относительным фрейм-потенциалом двух последовательностей и их фрейм-потенциалами.

Утверждение 2.1. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – две системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Тогда

- a) $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = FP(\mathcal{F})$,
- b) $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \frac{1}{2} [FP(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) - FP(\mathcal{F}) - FP(\mathcal{G})]$,
- c) Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$, тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{G}})$, где $S_{\mathcal{F}}$ и $S_{\mathcal{G}}$ – фрейм операторы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, соответственно.

Доказательство. Часть a) очевидна. Пусть

$$h_i := \begin{cases} f_i & , \quad 1 \leq i \leq p, \\ g_{i-p}, & p+1 \leq i \leq p+q \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} FP(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) &= \sum_{i,j=1}^{p+q} |\langle h_i, h_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^p |\langle f_i, f_j \rangle|^2 + 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 + \sum_{i,j=1}^q |\langle g_i, g_j \rangle|^2 \\ &= FP(\mathcal{F}) + 2\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) + FP(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Применив равенство $FP(\mathcal{F}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2)$ [16], имеем,

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \frac{1}{2} [FP(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) - FP(\mathcal{F}) - FP(\mathcal{G})] \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}(S_{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{G}}^2)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}(S_{\mathcal{F}} + S_{\mathcal{G}})^2 - \text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{G}}^2)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2) + \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{G}}) + \text{tr}(S_{\mathcal{G}} S_{\mathcal{F}}) + \text{tr}(S_{\mathcal{G}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{G}}^2)] \\ &= \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{G}}). \end{aligned}$$

В следующей теореме получена оценка сверху для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Получена также оценка снизу для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ в случае, когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются фреймами в $\mathcal{H}_n$.

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq \alpha\beta$, где $\alpha := \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2$ и $\beta := \sum_{j=1}^q \|g_j\|^2$. Если, кроме того, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$, тогда

$$\frac{\alpha\beta}{n} \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq \alpha\beta.$$

В частности, если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ нормированы, тогда

$$\frac{pq}{n} \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq pq.$$

Доказательство. Применив неравенство Коши-Шварца, имеем:

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \|f_i\|^2 \|g_j\|^2 = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 \sum_{j=1}^q \|g_j\|^2 = \alpha\beta.$$

В случае, когда $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$, применив часть с утверждения 2.1 и [17, Theorem II.2] получим $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{G}}) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_{n-i+1}$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ – собственные значения $S_{\mathcal{F}}$, а $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ – собственные значения $S_{\mathcal{G}}$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(S_{\mathcal{F}}) = \text{tr}(T_{\mathcal{F}} T_{\mathcal{F}}^*) = \text{tr}(T_{\mathcal{F}}^* T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 = \alpha.$$

Аналогично, $\sum_{i=1}^n \mu_i = \beta$.

Следовательно, для получения оценки снизу для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, нужно решить следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} \min \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_{n-i+1}, \\ \phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \sum_{i=1}^n \lambda_i = \alpha, \\ \psi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) := \sum_{i=1}^n \mu_i = \beta \end{cases}.$$

Применив метод множителей Лагранжа, мы ищем значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ и γ, η так, что $\nabla \Phi = \gamma \nabla \phi + \eta \nabla \psi$, $\phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \alpha$ и $\psi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \beta$. Получаем следующие уравнения для $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_i} = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \mu_i} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial \mu_i}, \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = \alpha, \\ \sum_{i=1}^n \mu_i = \beta \end{cases},$$

откуда следует, что $\lambda_i = \frac{\alpha}{n}$ and $\mu_i = \frac{\beta}{n}$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \geq \Phi\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}, \dots, \frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n}, \frac{\beta}{n}, \dots, \frac{\beta}{n}\right) = n \frac{\alpha}{n} \frac{\beta}{n} = \frac{\alpha\beta}{n}.$$

Теорема 2.2. *Оценка снизу для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ достигается, когда $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ являются жесткими фреймами.*

Доказательство. Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – жесткие фреймы, тогда $S_{\mathcal{F}} = \frac{\alpha}{n}I$ и $S_{\mathcal{G}} = \frac{\beta}{n}I$, где I – тождественный оператор в $\mathcal{H}_n$. Таким образом,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}}S_{\mathcal{G}}) = \text{tr}\left(\frac{\alpha}{n}I\frac{\beta}{n}I\right) = \frac{\alpha\beta}{n^2}\text{tr}(I) = \frac{\alpha\beta}{n}.$$

Следующий пример показывает, что обратное утверждение теоремы 2.2 неверно.

Пример 1. Рассмотрим фреймы $\mathcal{F} = \{e_1, e_2\}$ и $\mathcal{G} = \{e_1, e_2, e_2\}$ для $\mathcal{H}_2$, где $\{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_2$. Тогда, $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 3 = \frac{\alpha\beta}{n}$, но фрейм $\mathcal{G}$ не жесткий.

Теорема 2.3. *Оценка сверху для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ достигается только, если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются скалярными кратными одного вектора в $\mathcal{H}_n$.*

Доказательство. Если две системы $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ являются скалярными кратными одного вектора в $\mathcal{H}_n$, тогда существует вектор $f \in \mathcal{H}_n$ такой, что $f_i = c_i f$ и $g_j = d_j f$ для некоторых скаляров c_i, d_j . Тогда $|\langle f_i, g_j \rangle| = \|f_i\| \|g_j\|$, для $1 \leq i \leq p$ и $1 \leq j \leq q$. Следовательно,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \|f_i\|^2 \|g_j\|^2 = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 \sum_{j=1}^q \|g_j\|^2 = \alpha\beta.$$

Обратное, если существуют $1 \leq i_0 \leq p$ и $1 \leq j_0 \leq q$ такие, что f_{i_0} и g_{j_0} не являются скалярными кратными одного вектора в $\mathcal{H}_n$, тогда $|\langle f_{i_0}, g_{j_0} \rangle| < \|f_{i_0}\| \|g_{j_0}\|$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 + |\langle f_{i_0}, g_{j_0} \rangle|^2 \\ &< \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^q \|f_i\|^2 \|g_j\|^2 + \|f_{i_0}\|^2 \|g_{j_0}\|^2 = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 \sum_{j=1}^q \|g_j\|^2 = \alpha\beta. \end{aligned}$$

Теорема 2.4. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – биортогональны, тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \min\{p, q\}$.*

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – биортогональны. Без ограничения общности можем считать, что $p \leq q$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p |\langle f_i, g_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1, j \neq i}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 = p + 0 = p = \min\{p, q\}. \end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно.

Пример 2. Рассмотрим фреймы $\mathcal{F} = \{e_1, e_2\}$ и $\mathcal{G} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) \right\}$ в $\mathcal{H}_2$, где $e = \{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_2$. Тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 2 = \min\{p, q\}$, но $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не биортогональны.

Следующая теорема дает отношение между дуальными фреймами.

Теорема 2.5. Если $\hat{\mathcal{F}}$ и $\hat{\mathcal{G}}$ – дуальные фреймы двух фреймов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ соответственно, тогда

$$\frac{FP(\mathcal{F})}{\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{G}})} \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq FP(\mathcal{F}) \widetilde{FP}(\mathcal{G}, \hat{\mathcal{F}}).$$

Доказательство. Предположим, что $\hat{\mathcal{F}} = \{\hat{f}_i\}_{i=1}^p$ и $\hat{\mathcal{G}} = \{\hat{g}_j\}_{j=1}^q$ – дуальные фреймы двух фреймов $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ соответственно, тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left| \left\langle f_i, \sum_{k=1}^p \langle g_j, \hat{f}_k \rangle f_k \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left(\sum_{k=1}^p |\langle f_i, f_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^p |\langle \hat{f}_k, g_j \rangle|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p |\langle f_i, f_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle \hat{f}_k, g_j \rangle|^2 \right) = FP(\mathcal{F}) \widetilde{FP}(\mathcal{G}, \hat{\mathcal{F}}). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} FP(\mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |\langle f_i, f_j \rangle|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \left\langle \sum_{k=1}^q \langle f_i, \hat{g}_k \rangle g_k, f_j \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^q |\langle f_i, \hat{g}_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^q |\langle f_j, g_k \rangle|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q |\langle f_i, \hat{g}_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q |\langle f_j, g_k \rangle|^2 \right) \\ &= \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{G}}) \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

В частном случае, когда $\hat{\mathcal{F}}$ – канонический дуальный фрейм фрейма $\mathcal{F}$, тогда по утверждению 2.1, мы имеем: $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{F}}^{-1}) = \text{tr}(I) = n$, но обратное неверно. Действительно, рассмотрим два фрейма: $\mathcal{F} = \{e_1, e_2\}$ и $\mathcal{G} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}}e_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}e_2, \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 + \sqrt{\frac{1}{3}}e_2 \right\}$ в $\mathcal{H}_2$, где $\{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_2$. Тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 2 = n$, но $\mathcal{G}$ – не канонический дуальный фрейм фрейма $\mathcal{F}$.

Теорема 2.6. Пусть $\hat{\mathcal{F}}$ – дуальный фрейм для $\mathcal{F}$ в $\mathcal{H}_n$. Тогда, $\hat{\mathcal{F}}$ является каноническим дуальным фреймом $\mathcal{F}$ только если $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) = n$.

Доказательство. Пусть $\hat{\mathcal{F}} = \{\hat{f}_i\}_{i=1}^p$ – дуальный фрейм для $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ в $\mathcal{H}_n$. Применив теорему [5, Theorem 5.7.4] можем предположить, что $\hat{f}_j = S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j + \phi_j$ так, что $\phi_j = h_j - \sum_{k=1}^p \langle S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j, f_k \rangle h_k$ для $1 \leq j \leq p$, где $\{h_i\}_{i=1}^p$ – система в $\mathcal{H}_n$. Тогда,

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \langle f_i, \hat{f}_j \rangle \right|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j + \phi_j \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \right|^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \langle f_i, \phi_j \rangle \right|^2 + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \overline{\langle f_i, \phi_j \rangle} \\ &= \widetilde{FP}(\mathcal{F}, S_{\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{F}) + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \langle \phi_j, f_i \rangle \\ &= n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \langle \hat{f}_j - S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j, f_i \rangle \\ &= n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \left\langle \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \hat{f}_j - \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j, f_i \right\rangle \\ &= n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \left\langle \sum_{j=1}^p \langle S_{\mathcal{F}}^{-1} f_i, f_j \rangle \hat{f}_j - S_{\mathcal{F}}^{-1} \left(\sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle f_j \right), f_i \right\rangle \\ &= n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \langle S_{\mathcal{F}}^{-1} f_i - S_{\mathcal{F}}^{-1} f_i, f_i \rangle = n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi), \end{aligned}$$

где $\Phi := \{\phi_i\}_{i=1}^p$. Следовательно, $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) = n$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) = 0$, откуда следует, что $\phi_j = 0$ для $1 \leq j \leq p$, в силу полноты $\mathcal{F}$. Значит $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) = n$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}_j = S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j$ for $1 \leq j \leq p$. $\square$

В следующей теореме мы показываем, что $\min \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}) ; \mathcal{G} \text{ – система в } \mathcal{H}_n \right\}$ по множеству всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с нижней фрейм границей A достигается для A -жестких фреймов, а $\max \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}) ; \mathcal{G} \text{ – система в } \mathcal{H}_n \right\}$ по множеству всех

фреймов в $\mathcal{H}_n$ с верхней фрейм границей B достигается для B -жестких фреймов.

Теорема 2.7. Пусть $\mathcal{P}$ – множество всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с нижней фрейм границей A и пусть $\mathcal{Q}$ – множество всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с верхней фрейм границей B . Тогда

а) Если $\ddot{F}$ есть A -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$, тогда $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{P}$ и любой системы $\mathcal{G}$.

б) Если $\ddot{F} \in \mathcal{P}$ и $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, любого $\mathcal{F} \in \mathcal{P}$ и любой системы $\mathcal{G}$, тогда $\ddot{F}$ есть A -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$.

с) Если $\ddot{F}$ есть B -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$, тогда $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \geq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{Q}$ и любой системы $\mathcal{G}$.

д) Если $\ddot{F} \in \mathcal{Q}$ и $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \geq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{Q}$ и любой системы $\mathcal{G}$, тогда $\ddot{F}$ есть B -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$.

Доказательство. а: Пусть $\ddot{F} = \{\ddot{f}_i\}_{i=1}^p$ есть A -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$ $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^q$ – система в $\mathcal{H}_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle \ddot{f}_i, g_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p |\langle g_j, \ddot{f}_i \rangle|^2 = \sum_{j=1}^q A \|g_j\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^r |\langle g_j, f_i \rangle|^2 = \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

для любого $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^r \in \mathcal{P}$.

б: Если $\ddot{F} = \{\ddot{f}_i\}_{i=1}^p \in \mathcal{P}$ и $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{P}$ и любой системы $\mathcal{G}$, для $\mathcal{F} := \{\sqrt{A}e_1, \sqrt{A}e_2, \dots, \sqrt{A}e_n\} \in \mathcal{P}$, где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_n$, для $x \in \mathcal{H}_n$ имеем:

$$\sum_{i=1}^p |\langle x, \ddot{f}_i \rangle|^2 = \widetilde{FP}(\ddot{F}, \{x\}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \{x\}) = \sum_{i=1}^p |\langle x, \sqrt{A}e_i \rangle|^2 = A \|x\|^2.$$

В силу $\ddot{F} \in \mathcal{P}$, имеем, что $\ddot{F}$ есть A -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$.

Доказательства пунктов с) и d) аналогичны доказательствам а) и б), соответственно. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $\mathcal{P}$ – множество всех пар $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ где $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$ с нижними фрейм границами A_1 и A_2 соответственно. Пусть $\mathcal{Q}$ – множество всех пар $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$ с нижними фрейм границами B_1 и B_2 соответственно. Тогда,

а) $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \ddot{G}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любой пары $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{P}$, где $\ddot{F}$ и $\ddot{G}$ – жесткие фреймы в $\mathcal{H}_n$ с нижними фрейм границами A_1 и A_2 соответственно.

b) $\widetilde{FP}(\check{\mathcal{F}}, \check{\mathcal{G}}) \geq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любой пары $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{Q}$, где $\check{\mathcal{F}}$ и $\check{\mathcal{G}}$ – жесткие фреймы в $\mathcal{H}_n$ с верхними фрейм границами B_1 и B_2 соответственно.

Доказательство. Дважды применив пункт *a)* теоремы 2.7, получим:

$$\widetilde{FP}(\check{\mathcal{F}}, \check{\mathcal{G}}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \check{\mathcal{G}}) = \widetilde{FP}(\check{\mathcal{G}}, \mathcal{F}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

для любой $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{P}$. Пункт *b)* доказывается аналогично. $\square$

3. ФРЕЙМ ПОТЕНЦИАЛ И ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ПО ФАЗЕ ФРЕЙМ

Восстанавливаемые по фазе фреймы имеют множество применений в физике и в инженерии. Математическое исследование восстанавливаемых по фазе фреймов началось в 2006 году в статье Балана, Касаза и Едидина [10]

Определение 3.1. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) называется восстанавливаемым по фазе фреймом, если для любых $f, g \in \mathbb{R}^n$ ($f, g \in \mathbb{C}^n$), если $|\langle f, f_k \rangle| = |\langle g, f_k \rangle|$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$, тогда $f = cg$ для некоторой $c \in \{-1, 1\}$ ($c \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$).*

С. Бахманпур, Дж. Кахил, П. Г. Касаза, Дж. Джаспер и Л.М. Вудланд [15] определили восстанавливаемый по норме фрейм:

Определение 3.2. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) называется восстанавливаемым по норме фреймом, если для любых $f, g \in \mathbb{R}^n$ ($f, g \in \mathbb{C}^n$) из условия $|\langle f, f_k \rangle| = |\langle g, f_k \rangle|$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$, вытекает, что $\|f\| = \|g\|$.*

В дальнейшем мы предполагаем, что $\mathcal{H}_n$ – действительное Гильбертово пространство. В следующей теореме дается описание восстанавливаемых по фазе и восстанавливаемых по норме фреймов в $\mathcal{H}_n$, используя оболочку элементов фрейма:

Теорема 3.1. [10, Theorem 2.8] *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m \subset \mathcal{H}_n$ является восстанавливаемым по фазе тогда и только тогда, когда для любого разбиения $\{I_j\}_{j=1}^2$ набора $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$,*

$$\text{span}\{f_k\}_{k \in I_1} = \mathcal{H}_n \quad \text{или} \quad \text{span}\{f_k\}_{k \in I_2} = \mathcal{H}_n.$$

Теорема 3.2. [18, Theorem 2.3] *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m \subset \mathcal{H}_n$ является восстанавливаемым по норме тогда и только тогда, когда для любого разбиения $\{I_j\}_{j=1}^2$ набора $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$,*

$$\text{span}\{f_k\}_{k \in I_1}^\perp \perp \text{span}\{f_k\}_{k \in I_2}^\perp.$$

Для любого фрейма $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ в $\mathcal{H}_n$, положим $\mathcal{F}_I := \{f_i\}_{i \in I}$ для любого подмножества $\emptyset \neq I \subsetneq [p] := \{1, 2, \dots, p\}$.

Теорема 3.3. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ является восстанавливаемым по фазе фреймом в $\mathcal{H}_n$ с ненулевыми элементами, тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_{I^c}) > 0$, для любого подмножества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1, $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$ или $\text{span}\{f_i\}_{i \in I^c} = \mathcal{H}_n$. Без ограничения общности можем предположить, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$. Тогда,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_{I^c}) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I^c} |\langle f_i, f_j \rangle|^2 = \sum_{j \in I^c} \sum_{i \in I} |\langle f_j, f_i \rangle|^2 \geq A \sum_{j \in I^c} \|f_j\|^2 > 0,$$

где A – нижняя фрейм граница $\{f_i\}_{i \in I}$. $\square$

Следующий пример показывает, что обратное теореме 3.3 утверждение неверно.

Пример 3. Рассмотрим фрейм $\mathcal{F} := \{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ в $\mathbb{R}^3$, где $\{e_1, e_2, e_3\}$ – канонический ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$. let $\emptyset \neq I \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$.

Если $e_1 + e_2 + e_3 \in I$, тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_{I^c}) \geq 1 > 0$ и если $e_1 + e_2 + e_3 \notin I$, тогда $e_1 + e_2 + e_3 \in I^c$ и следовательно, $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_{I^c}) \geq 1 > 0$. Тем не менее, $\mathcal{F}$ не является восстанавливаемым по фазе фреймом, так как для векторов $x = (1, -1, 1)$ и $y = (-1, 1, 1)$ в $\mathbb{R}^3$, имеем, что $|\langle x, f_i \rangle| = |\langle y, f_i \rangle|$, для $1 \leq i \leq 4$, но $y \neq \pm x$.

В следующей теореме, используя относительный фрейм потенциал подсистем фрейма, мы приводим эквивалентное условие для его восстанавливаемости по фазе.

Теорема 3.4. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ в $\mathcal{H}_n$ является восстанавливаемым по фазе тогда и только тогда, когда для любого множества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$,*

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) + \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{x\}) > 0,$$

для всех $x \in S := \{x \in \mathcal{H}_n; \|x\| = 1\}$.

Доказательство. Сначала предположим, что $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ есть восстанавливаемый по фазе фрейм в $\mathcal{H}_n$ and $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$. По теореме 3.1, $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$ или $\text{span}\{f_i\}_{i \in I^c} = \mathcal{H}_n$. Без ограничения общности, можем считать, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$. Тогда, для любого $x \in S$ имеем, что

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) + \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{x\}) \geq \widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) = \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle|^2 \geq A > 0,$$

где A – нижняя фрейм граница $\{f_i\}_{i \in I}$.

Предположим обратное, что для любого подмножества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) + \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{x\}) > 0,$$

для всех $x \in S$. Рассмотрим подмножество $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$. Без ограничения общности, можем считать, что $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) > 0$, для всех $x \in S$. Покажем, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$. Если $x \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp$, тогда $x = 0$, так как, если $x \neq 0$, тогда

$$0 = \sum_{i \in I} \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, f_i \right\rangle \right|^2 = \widetilde{FP}\left(\mathcal{F}_I, \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}\right) > 0,$$

что является противоречием. Теперь мы имеем, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$ и следовательно, $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ есть восстанавливаемым по фазе фрейм в $\mathcal{H}_n$, в силу теоремы 3.1. $\square$

В следующей теореме приведено эквивалентное условие для восстанавливаемости по норме фрейма.

Теорема 3.5. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ является восстанавливаемым по норме в $\mathcal{H}_n$ тогда и только тогда, когда для любого подмножества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$,*

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) = \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{y\}) = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0,$$

для всех $x, y \in S := \{x \in \mathcal{H}_n; \|x\| = 1\}$.

Доказательство. Сначала допустим, что фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ является восстанавливаемым по норме в $\mathcal{H}_n$ и $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$. Тогда для произвольных $x, y \in S$, если $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) = \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{y\}) = 0$, то $x \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp$ и $y \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I^c}^\perp$, откуда следует, что $\langle x, y \rangle = 0$, так как, по теореме 3.2, имеем, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp \perp \text{span}\{f_i\}_{i \in I^c}^\perp$.

Обратное, допустим, что $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$, $x \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp$ и $y \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I^c}^\perp$. Если $x = 0$ или $y = 0$, то $\langle x, y \rangle = 0$. Допустим, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Тогда, s

$$\widetilde{FP}\left(\mathcal{F}_I, \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}\right) = \widetilde{FP}\left(\mathcal{F}_{I^c}, \left\{ \frac{y}{\|y\|} \right\}\right) = 0,$$

откуда следует, что

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 0.$$

Теперь мы имеем, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp \perp \text{span}\{f_i\}_{i \in I^c}^\perp$ и фрейм $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по норме в $\mathcal{H}_n$ в силу теоремы 3.2. $\square$

Следствие 3.1. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ является восстанавливаемым по норме в $\mathcal{H}_n$ тогда и только тогда, когда для любого множества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$,*

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \Phi) = \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \Psi) = 0 \Rightarrow \widetilde{FP}(\Phi, \Psi) = 0,$$

для произвольных систем Φ, Ψ в $\mathcal{H}_n$.

Определение 3.3. Пусть $\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^q$ и $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^q$ – системы в $\mathcal{H}_n$. Скажем, что

- (1) Φ и Ψ имеют одинаковые фазы, если $\phi_j = \lambda_j \psi_j$ при $1 \leq j \leq q$, для некоторых констант λ_j с $|\lambda_j| = 1$.
- (2) Φ и Ψ имеют одинаковые нормы, если $\|\phi_j\| = \|\psi_j\|$ для всех $1 \leq j \leq q$.

Теорема 3.6. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ – фрейм в $\mathcal{H}_n$ и пусть $\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^q$ и $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^q$ – системы в $\mathcal{H}_n$.

- (1) Если фрейм $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по фазе, и $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi - \Psi) = 0$, тогда Φ и Ψ имеют одинаковые фазы.
- (2) Если $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по норме и $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi - \Psi) = 0$, тогда Φ и Ψ имеют одинаковые нормы.

Доказательство. Пусть $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi - \Psi) = 0$. При $1 \leq j \leq q$

$$\begin{aligned} \|\langle f_i, \phi_j \rangle - \langle f_i, \psi_j \rangle\|^2 &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \|\langle f_i, \phi_j \rangle - \langle f_i, \psi_j \rangle\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, \phi_j \rangle - \langle f_i, \psi_j \rangle|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, \phi_j - \psi_j \rangle|^2 = \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi - \Psi), \end{aligned}$$

для всех $1 \leq i \leq p$. Тогда при $1 \leq j \leq q$, имеем, что $|\langle f_i, \phi_j \rangle| = |\langle f_i, \psi_j \rangle|$, для всех $1 \leq i \leq p$.

Теперь, если фрейм $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по фазе, тогда $\phi_j = \lambda_j \psi_j$, при $1 \leq j \leq q$, для некоторых констант λ_j с $|\lambda_j| = 1$ и если $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по норме, тогда $\|\phi_j\| = \|\psi_j\|$ при $1 \leq j \leq q$, $\square$

Abstract. This paper is concentrated on the frame potential of finite frames in n -dimensional Hilbert space $\mathcal{H}_n$. More precisely, We define the relative frame potential of two sequences $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}_n$, which is denoted by $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. For dual frames $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}_n$, we show that $\mathcal{G}$ is canonical dual frame of $\mathcal{F}$ if and only $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = n$. A lower and upper bound for $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ is given, for the case that $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ are frames for $\mathcal{H}_n$. Moreover, we show that $\min \left\{ \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ is a sequence in } \mathcal{H}_n \right\}$ on the collection of all frames for $\mathcal{H}_n$ with lower frame bound A occurs in A -tight frames and $\max \left\{ \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ is a sequence in } \mathcal{H}_n \right\}$ on the collection of all frames for $\mathcal{H}_n$ with upper frame bound B occurs in B -tight frames. Also, using the relative frame potential of the sub sequences of a given frame, some equivalent conditions for its phase and its norm retrievability are presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, “A class of nonharmonic Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 341 – 366 (1952).
- [2] P. G. Casazza and M. T. Leonhard, “Existence and construction of finite tight frames”, *J. Concr. Appl. Math.*, **4**, 277 – 289 (2006).
- [3] P. G. Casazza and M. Leon, “Existence and construction of finite frames with a given frame operator”, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **63**, 149 – 158 (2010).
- [4] J. J. Benedetto, “Frame decomposition, sampling, and uncertainty principle inequalities in wavelets”, *Mathematics and applications*, Wiley (1999).
- [5] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (2002).
- [6] C. Heil, D. Walnut, “Continuous and discrete wavelet transform”, *SIAM Rev.* **31**, 628 – 666 (1969).
- [7] W. Sun, “G-frames and G-Riesz bases”, *J. Math. Anal. Appl.* **322**, 437 – 452 (2006).
- [8] R. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York (1992).
- [9] J. Benedetto and M. Fickus, “Finite normalized tight frames”, *Advances in Computational Math.*, **18**, 357 – 385 (2003).
- [10] R. Balan, P. G. Casazza and D. Edidin, “On signal reconstruction without phase”, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **20**, 345 – 356 (2006).
- [11] R. H. Bates and D. Mnyama, “The status of practical Fourier phase retrieval”, in W. H. Hawkes, ed, *Advances in Electronics and Electron Physics.*, **67**, 1 – 64 (1986).
- [12] C. Becchetti and L. P. Ricotti, *Speech Recognition Theory and C++ Implementation*, CRC Press, Boca Raton, FL (1994).
- [13] J. R. Fienup, “Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform”, *Optics Letters*, **3**, 27 – 29 (1978).
- [14] J. M. Renes, R. Blume-Kohout, A. J. Scott, and C. M. Caves, “Symmetric informationally complete quantum measurements”, *J. Math. Phys.*, **45**, 2171 – 2180 (2004).
- [15] S. Bahmanpour, J. Cahill, P. G. Casazza, J. Jasper, L. M. Woodland, “Phase retrieval and norm retrieval”, *Contemp. Math.*, **650**, 3 – 14 (2015).
- [16] P. Casazza, M. Fickus, M. Leon, and J.C. Tremain, “Constructing infinite tight frames”, <https://faculty.missouri.edu/casazzap/pdf/100-Inf-Fr.pdf>.
- [17] J. B. Lasserre, “A trace inequality for matrix product”, *IEEE transaction On Automatic Control*, **40**, no. 8 (1995).
- [18] M. A. Hasankhani Fard, “Norm retrievable frames in $\mathbb{R}^n$ ”, *Elect. J. Lin. Alg.*, **31**, 425 – 432 (2016).

Поступила 07 ноября 2023

После доработки 20 февраля 2024

Принята к публикации 28 февраля 2024

СЛУЧАЙНЫЕ СЕЧЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ВОСЬМИГРАННИКОВ

Г. С. СУКИАСЯН

Институт Математики НАН, Ереван, Армения¹
Национальный Политехнический Университет, Ереван, Армения
E-mail: hayksukiasyan28@gmail.com

Аннотация. Изучены сечения выпуклого восьмигранника случайными плоскостями. Распределение случайных плоскостей порождено мерой плоскостей, инвариантной относительно евклидовых движений. С помощью комбинаторной формулы Р. В. Амбарцумяна вероятности событий, что в сечении образуется четырехугольник и шестиугольник, выражены через длины ребер и двугранные углы. Для одного семейства восьмигранников получены графики зависимости этих вероятностей от высоты восьмигранника. Исследовано асимптотическое поведение этих вероятностей когда высота восьмигранника стремится к нулю или бесконечности. Получено экстремальное свойство правильного восьмигранника - октаэдра. Приведены возможности применения полученных результатов на практике.

MSC2020 number: 60D05; 53C22.

Ключевые слова: случайные сечения выпуклого восьмигранника; инвариантная мера плоскостей; комбинаторная формула Р. Амбарцумяна; октаэдр.

1. ВВЕДЕНИЕ

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим сечения выпуклого многогранника D случайными плоскостями. Распределение случайных плоскостей порождается мерой, инвариантной относительно группы евклидовых движений в $\mathbb{R}^3$. Эта мера единственна (с точностью до постоянного множителя) и ее элемент имеет вид (см. [1])

$$(1.1) \quad \mu(de) = dp \, d\omega,$$

где p — расстояние от начала координат до плоскости e , ω — пространственное направление нормали к e ; dp и $d\omega$ — соответствующие элементы меры Лебега.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Комитета по науке РА, грант 21Т-2В256

Рассмотрим множество плоскостей A_n пересекающих многогранник D так, что сечение $e \cap D$ является n -угольником. Мы изучим распределение вероятностей

$$P_n = \frac{\mu(A_n)}{\mu([D])},$$

где $[D]$ — множество плоскостей, пересекающих многогранник D т.е. $[D] = \{e : e \cap D \neq \emptyset\}$. Цель настоящей работы — исследовать вероятности P_n для восьмигранников. Вероятности P_n будем вычислять с помощью комбинаторной формулы Р. В. Амбарцумяна (см. [2]).

2. КОМБИНАТОРНАЯ ФОРМУЛА АМБАРЦУМЯНА

Двугранным углом называем часть пространства $\mathbb{R}^3$ ограниченную двумя полуплоскостями с общей границей, называемой ребром двугранного угла. *Клином* называется пара $w = (a, \phi)$, где a — прямолинейный отрезок в $\mathbb{R}^3$, ϕ — двугранный угол, ребро которого содержит отрезок a . Отрезок a называется *ребром*, а плоский угол двугранного угла называется *раствором* клина w . Мы рассматриваем только клинья с раствором меньшим π .

Обозначим через $V(D)$ множество вершин многогранника D . Клин $w = (a, \phi)$ называется клином многогранника D , если концы P_1 и P_2 ребра $a = P_1P_2$ принадлежат $V(D)$, внутри двугранного угла клина нет других вершин из $V(D)$, а на каждой из плоскостей, образующих ϕ , имеются (кроме P_1 и P_2) вершины из $V(D)$. Клин $w = (a, \phi)$ называется *внешним клином* многогранника D , если двугранный угол ϕ не пересекается с внутренностью многогранника D , в противном случае — клин называется *внутренним клином* многогранника D .

Для широкого класса т.н. бюфоновых множеств A имеет место комбинаторная формула Р.В.Амбарцумяна (см. [1]):

$$(2.1) \quad \mu(A) = \sum_{w=(a,\phi) \in W(D)} c_w(A) |a| \cdot |\phi|,$$

где $W(D)$ — множество всех клиньев многогранника D , $|a|$ — длина отрезка a , $|\phi|$ — величина раствора клина w . Алгоритм определения целочисленных коэффициентов $c_w(A)$ дан в [1].

В частности, бюфоновыми являются множества плоскостей вида

$$A(k : N - k) = \{e : k \text{ вершин отделены плоскостью } e \text{ от } N - k \text{ вершин}\},$$

где $N = \text{card}(V(D))$ — число вершин многогранника D , $k = 1, \dots, N - 1$.

3. СЕЧЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Сначала рассмотрим случай, когда многогранник D является прямоугольным параллелепипедом с параметрами (a, b, c) .

Теорема 3.1. ([3]) *Для любого прямоугольного параллелепипеда имеет место $P_4 > P_3 > P_5 > P_6$. Вероятность P_4 (как функция от a, b, c) достигает своего минимального значения, а вероятности P_3 , P_5 и P_6 достигают своих максимальных значений для правильного параллелепипеда (куба).*

Наша цель — получить аналогичные результаты для восьмигранника.

4. СЕЧЕНИЯ ВОСЬМИГРАННИКА

Теперь рассмотрим случай, когда многогранник D является выпуклым восьмигранником. Восьмигранник — это многогранник с 8 треугольными гранями, 12 ребрами и 6 вершинами. Каждая вершина — это точка пересечения четырех ребер (см. Рис. 1).

Изучим сечения восьмигранника D случайными плоскостями. Распределение случайных плоскостей порождено мерой плоскостей, которая инвариантна относительно евклидовых движений в R^3 . Мы рассматриваем следующие события:

$A(1 : 5)$ — множество плоскостей, отделяющих одну вершину от остальных пяти вершин,

$A(2 : 4)$ — множество плоскостей, отделяющих две вершины от остальных четырех вершин,

$A(3 : 3)$ — множество плоскостей, оба полупространства которых содержат по три вершины.

Для любой плоскости e из $A(1 : 5)$ сечение $D \cap e$ является четырехугольником, а если плоскость e принадлежит $A(2 : 4)$ или $A(3 : 3)$, то сечение $D \cap e$ является шестиугольником. Рассмотрим какие клинья может иметь выпуклый восьмигранник D . Обозначим

W_d — множество клиньев, ребром для которых служит диагональ восьмигранника D , все такие клинья являются внутренними;

W_{in} — множество внутренних клиньев, ребром для которых служит ребро восьмигранника D ;

W_{out} — множество внешних клиньев восьмигранника D .

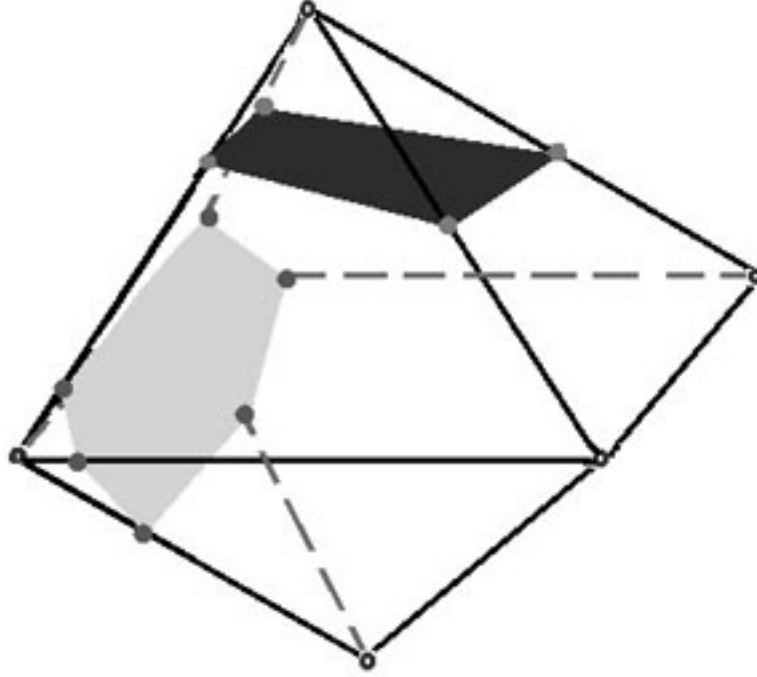


Рис. 1. Выпуклый восьмигранник и его сечения

Интересно, что все клинья из этих множеств имеют одинаковые комбинаторные коэффициенты, а именно

$$c_w(A(1 : 5)) = 0, \quad c_w(A(2 : 4)) = -2, \quad c_w(A(3 : 3)) = +2, \quad \text{для } w \in W_d,$$

$$c_w(A(1 : 5)) = -1, \quad c_w(A(2 : 4)) = +2, \quad c_w(A(3 : 3)) = -1, \quad \text{для } w \in W_{in},$$

$$c_w(A(1 : 5)) = +2, \quad c_w(A(2 : 4)) = -1, \quad c_w(A(3 : 3)) = 0, \quad \text{для } w \in W_{out}.$$

По формуле Р.В.Амбарцумяна (2.1) получаем

$$(4.1) \quad \mu(A(1 : 5)) = (-1) \sum_{i=1}^{12} |a_i| \varphi_i + 2 \sum_{i=1}^{12} |a_i| (\pi - \varphi_i) = \sum_{i=1}^{12} |a_i| (2\pi - 3\varphi_i),$$

где суммирование ведется по всем 12 ребрам a_i восьмигранника D , φ_i – раствор внутреннего двугранного угла при ребре a_i . Аналогично

$$(4.2) \quad \mu(A(2 : 4)) = \sum_{i=1}^{12} |a_i| (3\varphi_i - \pi) - 2\pi \sum_{i=1}^3 |d_i|,$$

где второе суммирование ведется по трем диагоналям d_i восьмигранника D . Заметим, что сумма растворов всех двугранных углов при любой диагонали равна 2π . Наконец,

$$(4.3) \quad \mu(A(3 : 3)) = - \sum_{i=1}^{12} |a_i| \varphi_i + 2\pi \sum_{i=1}^3 |d_i|.$$

Из (4.1) – (4.3) получаем

$$(4.4) \quad \mu([D]) = \mu(A(1 : 5)) + \mu(A(2 : 4)) + \mu(A(3 : 3)) = \sum_{i=1}^{12} |a_i| (\pi - \varphi_i).$$

Разделив меру на нормировочный коэффициент, получим вероятностное распределение

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu([D])}.$$

Здесь $P(A)$ – вероятность события, что случайная плоскость принадлежит множеству A при условии, что она пересекает многогранник D .

Из (4.1) – (4.4) получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Для произвольного выпуклого восьмигранника D вероятности событий $A(1 : 5)$, $A(2 : 4)$ и $A(3 : 3)$ имеют вид*

$$\begin{aligned} P(A(1 : 5)) &= \frac{1}{\mu([D])} \left[\sum_{i=1}^{12} |a_i| (2\pi - 3\varphi_i) \right], \\ P(A(2 : 4)) &= \frac{1}{\mu([D])} \left[\sum_{i=1}^{12} |a_i| (3\varphi_i - \pi) - 2\pi \sum_{i=1}^3 |d_i| \right], \\ P(A(3 : 3)) &= \frac{1}{\mu([D])} \left[- \sum_{i=1}^{12} |a_i| \varphi_i + 2\pi \sum_{i=1}^3 |d_i| \right], \end{aligned}$$

где $\mu([D])$ имеет вид (4.4).

5. СЛУЧАЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА

Рассмотрим однопараметрическое семейство восьмигранников, вершины которого имеют следующие декартовы координаты:

$$V_1 = (\sqrt{2}/2, 0, 0), \quad V_2 = (0, \sqrt{2}/2, 0), \quad V_3 = (-\sqrt{2}/2, 0, 0),$$

$$V_4 = (0, -\sqrt{2}/2, 0), \quad V_5 = (0, 0, -h), \quad V_6 = (0, 0, h).$$

Семейство зависит от высоты h и содержит при $h = \sqrt{2}/2$ правильный многогранник – октаэдр. Обозначим через a_{ij} ребро с вершинами V_i и V_j . Для ребер основания имеем $|a_{12}| = |a_{23}| = |a_{34}| = |a_{41}| = 1$. Для боковых ребер имеем

$$|a_{15}| = |a_{25}| = |a_{35}| = |a_{45}| = |a_{16}| = |a_{26}| = |a_{36}| = |a_{46}| = \sqrt{h^2 + 0.5}.$$

Для диагонали d_{ij} с вершинами V_i и V_j имеем $|d_{13}| = |d_{24}| = \sqrt{2}$, $|d_{56}| = 2h$. Обозначим раствор внутреннего двугранного угла при ребре основания a_{12} через 2φ . Нетрудно вычислить, что $\tan \varphi = 2h$. Раствор внешнего двугранного угла при боковом ребре a_{15} обозначим через ψ . Из формул сферической тригонометрии находим связь между этими углами: $\cos \psi = \cos^2 \varphi$. Применяя Теорему 4.1 для данного семейства получаем

$$\begin{aligned} \mu([D]) &= \sum_{i=1}^4 1(\pi - 2\varphi) + \sum_{i=1}^8 \sqrt{h^2 + 0.5} \psi = 8 \left[\frac{\pi}{2} - \varphi + \sqrt{h^2 + 0.5} \psi \right]. \\ P(A(1 : 5)) &= \frac{1}{\mu([D])} \left[\sum_{i=1}^4 1(2\pi - 6\varphi) + \sum_{i=1}^8 \sqrt{h^2 + 0.5} (2\pi - 3(\pi - \psi)) \right] \\ &= \frac{8}{\mu([D])} \left[\pi - 3\varphi + \sqrt{h^2 + 0.5} (3\psi - \pi) \right]. \\ P(A(2 : 4)) &= \frac{1}{\mu([D])} \left[\sum_{i=1}^4 (6\varphi - \pi) + \sum_{i=1}^8 \sqrt{h^2 + 0.5} (3(\pi - \psi) - \pi) - 2\pi(2h + 2\sqrt{2}) \right] \\ &= \frac{4}{\mu([D])} \left[6\varphi - \pi + 2\sqrt{h^2 + 0.5} (2\pi - 3\psi) - \pi(h + \sqrt{2}) \right]. \\ P(A(3 : 3)) &= \frac{1}{\mu([D])} \left[-\sum_{i=1}^4 2\varphi - \sum_{i=1}^8 \sqrt{h^2 + 0.5} (\pi - \psi) + 2\pi(2h + 2\sqrt{2}) \right] \\ (5.1) \quad &= \frac{4}{\mu([D])} \left[-2\varphi - 2\sqrt{h^2 + 0.5} (\pi - \psi) + \pi(h + \sqrt{2}) \right], \end{aligned}$$

где $\tan \varphi = 2h$, $\cos \psi = \cos^2 \varphi$.

6. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Изучим асимптотическое поведение полученных вероятностей при $h \rightarrow 0$ и $h \rightarrow \infty$. Из соотношений $\tan \varphi = 2h$ и $\cos \psi = \cos^2 \varphi = \frac{1}{1+4h^2}$ получаем пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \psi = 0, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \varphi = \lim_{h \rightarrow \infty} \psi = \frac{\pi}{2}.$$

При $h \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mu([D]) &= 4\pi h + o(h), \quad h \rightarrow \infty, \\ \lim_{h \rightarrow \infty} P(A(1 : 5)) &= 1, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} P(A(2 : 4)) = \lim_{h \rightarrow \infty} P(A(3 : 3)) = 0. \end{aligned}$$

При $h \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \mu([D]) &= 4\pi, \quad \lim_{h \rightarrow 0} P(A(1 : 5)) = \frac{8}{4\pi} [\pi - \sqrt{0.5}\pi] = 2 - \sqrt{2}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} P(A(2 : 4)) &= \frac{4}{4\pi} [-\pi + 2\sqrt{0.5}(2\pi) - \pi(\sqrt{2})] = \sqrt{2} - 1. \\ \lim_{h \rightarrow 0} P(A(3 : 3)) &= \frac{4}{4\pi} [-2\sqrt{0.5}(\pi) + \pi(\sqrt{2})] = 0.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим пространство прямых на двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и там – меру μ_2 , инвариантную относительно группы евклидовых движений плоскости $\mathbb{R}^2$. Эта мера единственна (с точностью до постоянного множителя) и ее элемент имеет вид (см. [2])

$$(6.1) \quad \mu_2(dg) = dp \, d\phi,$$

где p – расстояние от начала координат до прямой g , ϕ – направление нормали к g ; а dp и $d\phi$ – соответствующие элементы меры Лебега.

Рассмотрим на плоскости квадрат Q , пересекаемый случайной прямой g , порожденной инвариантной мерой μ_2 . С вероятностью 1 случайная прямая g не проходит через вершины квадрата Q . Обозначим:

$B(1 : 3)$ – множество прямых, которые отделяют одну вершину квадрата от остальных трех,

$B(2 : 2)$ – множество прямых, которые оставляют в разных полуплоскостях по две вершины.

Через $[Q]$ обозначим множество прямых, пересекающих квадрат Q . Разделив меру на нормировочный коэффициент, получим вероятностное распределение

$$P(B) = \frac{\mu_2(B)}{\mu_2([Q])}.$$

Здесь $P(B)$ – вероятность события, что случайная прямая принадлежит множеству B при условии, что она пересекает квадрат Q . Заметим, что вероятности $P(B(1 : 3))$ и $P(B(2 : 2))$ не зависят от размеров квадрата.

Теорема 6.1. *При $h \rightarrow 0$ восьмигранник вырождается в плоский квадрат и*

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(A(1 : 5)) = P(B(1 : 3)) = 2 - \sqrt{2}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} P(A(2 : 4)) = P(B(2 : 2)) = \sqrt{2} - 1.$$

Доказательство. Для треугольника со сторонами a_1, a_2, a_3 обозначим через $[a_1] \cap [a_2]$ множество прямых, пересекающих стороны a_1 и a_2 (и естественно не пересекающих a_3). Известно, что [1]

$$\mu_2([a_1] \cap [a_2]) = |a_1| + |a_2| - |a_3|.$$

Если a_1 и a_2 – две фиксированные соседние стороны единичного квадрата (и естественно a_3 – диагональ), то $\mu_2([a_1] \cap [a_2]) = 2 - \sqrt{2}$. Так как таких пар соседних сторон имеется четыре, то $\mu_2(B(1 : 3)) = 4(2 - \sqrt{2})$. Остается заметить, что $\mu_2([Q]) = 4$ и $P(B(2 : 2)) = 1 - P(B(1 : 3)) = \sqrt{2} - 1$. Теорема доказана.

7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

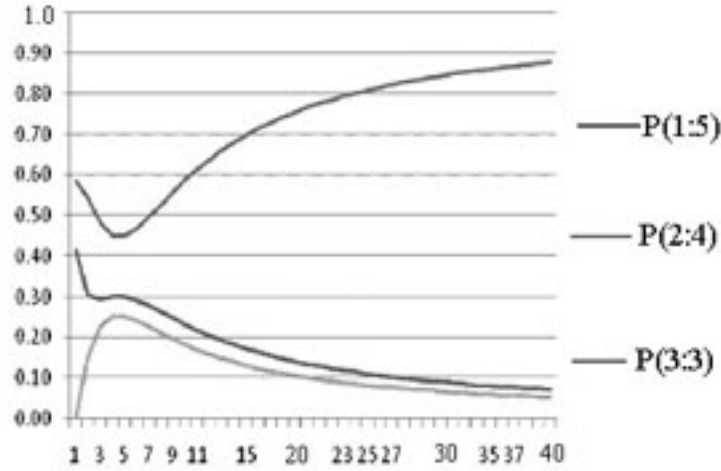


Рис. 2. Зависимости вероятностей от высоты восьмигранника

Результаты вычислений по формулам (5.1) вероятностей $P(A(1 : 5))$, $P(A(2 : 4))$ и $P(A(3 : 3))$ для различных значений высоты h показаны на рис. 2. Из рисунка 2 получаем следующий эмпирический результат: Для любой высоты h имеет место неравенство

$$(7.1) \quad P_4 = P(A(1 : 5)) > P_6 > P(A(2 : 4)) > P(A(3 : 3)).$$

Вероятности P_4 достигают своего минимума, а P_6 – своего максимума для правильного восьмигранника – октаэдра.

8. ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ НА ПРАКТИКЕ

Стереология срезов. Рассмотрим срезы (плоские сечения) горных пород, в которых имеются вкрапления кристаллов. Пусть известно, что кристаллы имеют форму восьмигранников. Проверяется гипотеза, что кристаллы в породе расположены однородно и изотропно. Эти кристаллы образуют на срезах четырехугольники или шестиугольники. Затем вычисляется, с какой частотой встречаются четырехугольники и шестиугольники. Эти частоты принимаются за оценки статистических вероятностей P_4 и P_6 .

Напомним, что все вычисления в настоящей работе сделаны для меры (1.1), инвариантной относительно группы евклидовых движений в $\mathbb{R}^3$. Поэтому, если нарушаются неравенства (7.1), то гипотеза об изотропности кристаллов отвергается. Отметим, что аналогичные исследования по стереологии срезов проводили в [4] и [5].

Тестирование трехмерных сеток. При численном решении трёхмерных задач математической физики применяется метод конечных элементов, который требует использования четырёхгранных сеток, смотри [6]. Так как восьмигранник можно представить в виде объединения четырех примыкающих друг к другу четырехгранников, то соответствующей группировкой (пренебрегая краевыми эффектами) сетку из четырехгранников можно преобразовать в сетку из восьмигранников. Пересечем сетку несколькими независимыми плоскостями и рассчитаем количество образовавшихся в сечении шестиугольников и четырехугольников. Принимая правильный октаэдр за идеал восьмигранника, получаем следующий критерий качества сетки: *чем меньше доля четырехугольников, тем лучше сетка.*

Отметим, что при конечно-элементном моделировании имеется строгое требование к сетке: внутренности элементов не должны пересекаться, а объединение всех элементов должно совпадать с выпуклой оболочкой сетки, т.е. внутри сетки не должно быть пустот, не покрытых элементами. Если в двумерном случае визуально видно, выполнено ли это требование, то для трехмерной сетки проверка выполнения полноты сетки и непересекаемости элементов представляет определенную трудность.

Предлагается следующий тест качества сетки: если для какой-либо плоскости, пересекающей сетку из восьмигранников, возникли в сечении пятиугольники или

нарушено неравенство (7.1) то сетка имеет дефекты – нарушено требование полноты сетки и непересекаемости элементов.

Отметим, что первые исследования по тестированию трехмерных сеток приведены в работе [7], где оценены тетраэдрические сетки, взятые из реальных инженерных задач.

Abstract. Sections of a convex octahedron by random planes are studied. The distribution of random planes is generated by a measure of planes that is invariant with respect to Euclidean motions. Using R. V. Ambartsumyan's combinatorial formula, the probabilities of events that a quadrangle and a hexagon are formed in a section are expressed through the lengths of the edges and dihedral angles. For one family of octahedrons, graphs of the dependence of these probabilities on the height of the octahedron are obtained. The asymptotic behavior of these probabilities is studied when the height of the octahedron tends to zero or infinity. An extremal property of a regular octahedron, an octahedron, is obtained. The possibilities of applying the obtained results in practice are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, J.Wiley, Chichester (1982).
- [2] R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press (1990).
- [3] Г. С. Сукиасян, “О случайных сечениях многогранников”, Доклады АН СССР, **263**, no. 4, 809 – 812 (1982).
- [4] D. Stoyan, J. Mecke, Stochastische Geometrie, Akademie-Verlag, Berlin (1983).
- [5] S. A. Saltykow, Stereometrische Metallographie, Deutsche Verlag f. Grundstoffindustrie, Leipzig (1974).
- [6] А. А. Терзян, А. Э. Акопян, Г. С. Сукиасян, Л. Т. Оганнисян, “Параллельное построение тетраэдрической сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных электромагнитных полей”, Известия НАН РА и ГИУА, Сер. ТН., **65**, no. 2, 213 – 218 (2012).
- [7] Г. С. Сукиасян, “Об оценке качества тетраэдрической сетки при решении трехмерных краевых задач”, Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН., **66**, no. 4, 384 – 388 (2013).

Поступила 05 марта 2024

После доработки 26 апреля 2024

Принята к публикации 05 мая 2024

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ
ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ
ВЫСШЕГО ПОРЯДКА**

З. ХЕ, Г. ВАНГ, М. ФАНГ, М. Л. ФАНГ

Университет Ханчжоу Дяньцзы, Ханчжоу, Китай¹

E-mails: *zhiyinggood@163.com*; *gwang@hdu.edu.cn*; *mlfang@hdu.edu.cn*

Аннотация. В статье изучаем единственность мероморфных функций относительно разностных операторов высшего порядка и в основном доказываем следующий результат: пусть $m, n (\geq 6)$ — положительные целые числа, пусть η — ненулевое комплексное число, и пусть f — непостоянная мероморфная функция в комплексной плоскости. Если f^n и $(\Delta_\eta^m f)^n$ делят 1 CM, f и $\Delta_\eta^m f$ делят ∞ IM, то $\Delta_\eta^m f \equiv tf$, где $t^n = 1$, и если $m = 1$, то $t \neq -1$. Это улучшает результаты, полученные Ченом и Ченом [Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35 (2012)] и Дэн, Лю и Ян [Turkish J. Math. 41 (2017)] для случая разностных операторов бесконечного и высшего порядков.

MSC2020 numbers: 30D35.

Keywords: мероморфная функция; разности; бесконечный порядок; единственность.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой статье мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями теории распределения значений Неванлинны, см. [1] – [4]. В дальнейшем мероморфный всегда означает мероморфный во всей комплексной плоскости. Через $S(r, f)$ мы обозначаем величину, удовлетворяющую $S(r, f) = o(T(r, f))$ при $r \rightarrow \infty$ возможно вне исключительного множества E конечной меры.

Пусть f — непостоянная мероморфная функция в комплексной плоскости. Порядок f определяется как

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ T(r, f)}{\log r}.$$

Пусть k — положительное целое число. Обозначим через $\overline{N}_{(k)}(r, f)$ функцию подсчета полюсов f с кратностью $\geq k$, где кратность не учитывается. Положим $N_k(r, f) = \overline{N}(r, f) + \overline{N}_{(2)}(r, f) + \cdots + \overline{N}_{(k)}(r, f)$.

¹Работа первого автора выполнена при поддержке гранта NNSF of China (Grant Nos. 121711127, 12371074)

Пусть η будет ненулевым комплексным числом, а n будет положительным целым числом. Определим операторы разности f как $\Delta_\eta f(z) = f(z + \eta) - f(z)$ и $\Delta_\eta^n f(z) = \Delta_\eta(\Delta_\eta^{n-1} f(z))$, $n \geq 2$.

Пусть f и g — две мероморфные функции в комплексной плоскости, и пусть a — комплексное число. Мы говорим, что f и g делят a СМ(ИМ), если $f - a$ и $g - a$ имеют одинаковые нули, считая кратности (игнорируя кратности).

Если f и g делят 1 ИМ, мы обозначаем через $\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f-1}\right)$ функцию подсчета для 1-точек как f , так и g , относительно которых f имеет большую кратность, чем g , причем кратность не учитывается, и обозначаем через $\overline{N}_{11}\left(r, \frac{1}{f-1}\right)$ функцию подсчета для общих простых 1-точек как f , так и g , где кратность не учитывается. Аналогично у нас есть обозначение $\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g-1}\right)$. Если f и g делят 1 СМ, то $\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f-1}\right) = \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g-1}\right) = 0$.

Недавно распределение значений и теория единственности мероморфных функций в разностном аналоге стали предметом интереса.

В 2010 году Чжан [5] доказал

Теорема А. Пусть η — ненулевое комплексное число, $n(\geq 4)$ — целое положительное число и f — непостоянная мероморфная функция конечного порядка. Если $f^n(z)$ и $f^n(z + \eta)$ делят 1 СМ, $f(z)$ и $f(z + \eta)$ делят ∞ СМ, то $f(z) \equiv tf(z + \eta)$, где $t^n = 1$.

Теорема В. Пусть η — ненулевое комплексное число, $n(\geq 3)$ — положительное целое число, и пусть f — непостоянная целая функция конечного порядка. Если $f^n(z)$ и $f^n(z + \eta)$ делят 1 СМ, то $f(z) \equiv tf(z + \eta)$, где $t^n = 1$.

Замечание А. Теорема А и Теорема В не верны для мероморфных функций бесконечного порядка.

Пример А. Пусть $f(z) = e^{\frac{e^z}{n}}$, и пусть $\eta = \pi i$. Тогда $f^n(z)$ и $f^n(z + \eta)$ делят 1 СМ, но $f(z) \not\equiv tf(z + \eta)$, где $t^n = 1$.

В 2012 году Чен и Чен [6] получили разностный аналог теорем А, В и доказали

Теорема С. Пусть η — ненулевое комплексное число, $n(\geq 7)$ — положительное целое число, и пусть f — непостоянная мероморфная функция с конечного порядка. Если f^n и $(\Delta_\eta f)^n$ делят 1 СМ, f и $\Delta_\eta f$ делят ∞ СМ, то $\Delta_\eta f \equiv tf$, где $t^n = 1$ и $t \neq -1$.

Теорема D. Пусть η — ненулевое комплексное число, $n(\geq 5)$ — положительное целое число, и f — непостоянная целая функция конечного порядка. Если f^n и $(\Delta_\eta f)^n$ делят 1 СМ, то $\Delta_\eta f \equiv tf$, где $t^n = 1$ и $t \neq -1$.

Теорема Е. Пусть η — ненулевое комплексное число, $n(\geq 7)$ — положительное целое число, и пусть f — непостоянная мероморфная функция конечного порядка. Если f^n и $(\Delta_\eta f)^n$ делят 1 СМ, f и $\Delta_\eta f$ делят ∞ ИМ, и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{T(r, f)} < 1,$$

тогда $\Delta_\eta f \equiv tf$, где $t^n = 1$ и $t \neq -1$.

Естественно ставить следующую задачу.

Проблема А. Можно ли удалить “ f имеет конечный порядок” в приведенных выше теоремах С-Е?

В 2017 году Дэн и др. [7] доказали

Теорема F. Пусть η — ненулевое комплексное число, $n(\geq 6)$ — положительное целое число, и пусть f — непостоянная мероморфная функция в комплексной плоскости. Если f^n и $(\Delta_\eta f)^n$ делят 1 СМ, f и $\Delta_\eta f$ делят ∞ СМ, то $\Delta_\eta f \equiv tf$, где $t^n = 1$ и $t \neq -1$.

Теорема G. Пусть η — ненулевое комплексное число, $n(\geq 5)$ — положительное целое число, и пусть f — непостоянная целая функция. Если f^n и $(\Delta_\eta f)^n$ делят 1 СМ, то $\Delta_\eta f \equiv tf$, где $t^n = 1$ и $t \neq -1$.

Из приведенных выше теорем мы естественным образом ставим следующие задачи.

Проблема 1. Будут ли теоремы С-G по-прежнему верны, если $\Delta_\eta f$ заменить на $\Delta_\eta^m f$?

Проблема 2. Можно ли удалить “ f имеет конечный порядок” в теоремах С-Е?

Проблема 3. Можно ли удалить “ $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, \frac{1}{f})}{T(r, f)} < 1$ ” в теореме Е?

В этой статье мы даем положительный ответ на Проблемы 1 – 3 и доказываем следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $m, n(\geq 6)$ — положительные целые числа, пусть η — ненулевое комплексное число, и пусть f — непостоянная мероморфная функция в комплексной плоскости. Если f^n и $(\Delta_\eta^m f)^n$ делят 1 СМ, f и $\Delta_\eta^m f$ делят ∞ ИМ, то $\Delta_\eta^m f \equiv tf$, где $t^n = 1$, и если $m = 1$, то $t \neq -1$.

Замечание 1. Из теоремы 1 мы видим, что “ $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, \frac{1}{f})}{T(r, f)} < 1$ ” и “ f имеет конечный порядок” в теореме Е можно удалить.

Следствие 1. Пусть $m, n(\geq 5)$ — положительные целые числа, пусть η — ненулевое комплексное число, и пусть f — непостоянная целая функция. Если f^n и $(\Delta_\eta^m f)^n$ делят 1 СМ, то $\Delta_\eta^m f \equiv tf$, где $t^n = 1$, а если $m = 1$, то $t \neq -1$.

Теорема 2. Пусть $m, n (\geq 10)$ — положительные целые числа, пусть η — ненулевое комплексное число, и пусть f — непостоянная мероморфная функция в комплексной плоскости. Если f^n и $(\Delta_\eta^m f)^n$ делят 1 ИМ, f и $\Delta_\eta^m f$ делят ∞ СМ, то $\Delta_\eta^m f \equiv tf$, где $t^n = 1$, и если $m = 1$, то $t \neq -1$.

Теорема 3. Пусть $m, n (\geq 11)$ — положительные целые числа, пусть η — ненулевое комплексное число, и пусть f — непостоянная мероморфная функция в комплексной плоскости. Если f^n и $(\Delta_\eta^m f)^n$ делят 1 ИМ, f и $\Delta_\eta^m f$ делят ∞ ИМ, то $\Delta_\eta^m f \equiv tf$, где $t^n = 1$, а если $m = 1$, то $t \neq -1$.

Следствие 2. Пусть $m, n (\geq 8)$ — положительные целые числа, пусть η — ненулевое комплексное число, и пусть f — непостоянная целая функция. Если f^n и $(\Delta_\eta^m f)^n$ делят 1 ИМ, то $\Delta_\eta^m f \equiv tf$, где $t^n = 1$, и если $m = 1$, то $t \neq -1$.

2. НЕКОТОРЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1 [1, 8, 4]. Пусть f — непостоянная мероморфная функция в комплексной плоскости, и пусть k — положительное целое число. Тогда

$$m \left(r, \frac{f^{(k)}}{f} \right) = S(r, f).$$

Лемма 2 [9, 10]. Пусть f — непостоянная мероморфная функция в комплексной плоскости, и пусть $a_0, a_1, \dots, a_n$ — конечные комплексные числа, такие что $a_n \neq 0$. Тогда

$$T(r, a_n f^n + \dots + a_1 f + a_0) = nT(r, f) + S(r, f).$$

Лемма 3 [4]. Пусть f — трансцендентная мероморфная функция, и пусть k — положительное целое число. Тогда

$$N \left(r, \frac{1}{f^{(k)}} \right) \leq N \left(r, \frac{1}{f} \right) + k\bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

Лемма 4 [11]. Пусть f — трансцендентная целая функция, пусть η — ненулевое комплексное число, и пусть n — положительное целое число. Если $f \neq 0$, $\Delta_\eta^n f \neq 0$, то либо

$$f(z) = e^{h_1(z) + C_1 z},$$

где $h_1(z)$ — целая функция периода η и $e^{C_1 \eta} \neq 1$; или

$$f(z) = e^{h_2(z) + C_2 z},$$

где $h_2(z)$ — целая функция периода 2η , а C_2 удовлетворяет $\left(\frac{1+e^{C_2 \eta}}{1-e^{C_2 \eta}} \right)^{2n} = 1$.

Лемма 5. Пусть f и g — две непостоянные мероморфные функции в комплексной плоскости. Если f и g делят 1 СМ, f и g делят ∞ ИМ, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $T(r, f) + T(r, g) \leq 2 \left\{ \overline{N}(r, f) + N_2 \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N}(r, g) + N_2 \left(r, \frac{1}{g} \right) \right\} + \overline{N}_{(2)}(r, f) + \overline{N}_{(2)}(r, g) + S(r, f) + S(r, g);$
- (ii) Либо $f \equiv g$, либо $fg \equiv 1$.

Доказательство. Пусть

$$(2.1) \quad \psi = \frac{f''}{f'} - 2 \frac{f'}{f-1} - \frac{g''}{g'} + 2 \frac{g'}{g-1}.$$

Случай 1. $\psi \not\equiv 0$. Пусть z_0 будет простой 1-точкой и для f , и для g . С помощью простого вычисления имеем, что $\psi(z_0) = 0$. Тогда по первой фундаментальной теореме Неванлинны и лемме 1 имеем

$$(2.2) \quad \begin{aligned} N_{(1)} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) &= N_{(1)} \left(r, \frac{1}{g-1} \right) \leq N \left(r, \frac{1}{\psi} \right) \\ &\leq T(r, \psi) + O(1) \leq N(r, \psi) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Очевидно, что общие 1-точки f и g с одинаковой кратностью не являются полюсами ψ , а полюса f и g с кратностью 1 также не являются полюсами ψ . Из того, что f и g делят 1 СМ, f и g делят ∞ ИМ, следует, что

$$(2.3) \quad \begin{aligned} N(r, \psi) &\leq \overline{N}_{(2)} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N}_{(2)} \left(r, \frac{1}{g} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \{ \overline{N}_{(2)}(r, f) + \overline{N}_{(2)}(r, g) \} + S(r, f) + S(r, g), \end{aligned}$$

где $N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right)$ обозначает функцию подсчета для тех нулей f' , которые не являются нулевыми точками $f(f-1)$, а $N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right)$ обозначает аналогичную величину.

По первой фундаментальной теореме Неванлинны получаем

$$(2.4) \quad N_2 \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \leq N \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \leq T(r, f) + O(1),$$

$$(2.5) \quad N_2 \left(r, \frac{1}{g-1} \right) \leq N \left(r, \frac{1}{g-1} \right) \leq T(r, g) + O(1).$$

Из (2.3) – (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} T(r, f) + T(r, g) &\leq 2 \left\{ \overline{N}(r, f) + N_2 \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N}(r, g) + N_2 \left(r, \frac{1}{g} \right) \right\} \\ &+ \overline{N}_{(2)}(r, f) + \overline{N}_{(2)}(r, g) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Случай 2. $\psi \equiv 0$. Тогда по (2.1), имеем

$$(2.6) \quad f \equiv \frac{Ag + B}{Cg + D},$$

где A, B, C, D — конечные комплексные числа, удовлетворяющие $AD - BC \neq 0$.

Таким образом, получаем

$$(2.7) \quad T(r, f) = T(r, g) + S(r, f).$$

Теперь рассмотрим три подслучая.

Случай 2.1. $AC \neq 0$. Тогда по (2.6) имеем $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-\frac{A}{C}}\right) = \overline{N}(r, g)$. Из второй фундаментальной теоремы Неванлинны следует, что

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-\frac{A}{C}}\right) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, g) + S(r, f). \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$T(r, g) \leq \overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r, f) + S(r, g).$$

Таким образом, пункт (i) леммы 5 имеет место.

Случай 2.2. $A \neq 0, C = 0$. Тогда по (2.6) имеем $f = \frac{Ag+B}{D}$. Далее рассмотрим два подслучая.

Случай 2.2.1. $B \neq 0$. Тогда имеем $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-\frac{1}{B}}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right)$. По второй фундаментальной теореме Неванлинны имеем

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-\frac{1}{B}}\right) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$T(r, g) \leq \overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, g).$$

Таким образом, пункт (i) леммы 5 имеет место.

Случай 2.2.2. $B = 0$. Тогда имеем $f \equiv \frac{Ag}{D}$.

Если $f(z) \neq 1$, то $g(z) \neq 1$. По второй фундаментальной теореме Неванлинны имеем

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$T(r, g) \leq \overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, g).$$

Таким образом, пункт (i) леммы 5 имеет место.

Если существует z_0 такое, что $f(z_0) = 1$, то, поскольку f и g делят 1 СМ, значит $\frac{A}{D} = 1$, что дает $f \equiv g$.

Случай 2.3. $A = 0, C \neq 0$. Тогда мы имеем $f \equiv \frac{B}{Cg+D}$. Используя тот же аргумент, что и в случае 2.2, мы получаем, что либо пункт (i) леммы 5 имеет место, либо $fg \equiv 1$.

Это завершает доказательство Леммы 5.

Следуя доказательству Леммы 2 в [12] мы получаем следующий результат. Для удобства читателей мы приводим подробное доказательство.

Лемма 6 [12]. Пусть f и g — две непостоянные мероморфные функции в комплексной плоскости. Если f и g делят 1 ИМ, f и g делят ∞ СМ, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $T(r, f) + T(r, g) \leq 2 \left\{ \overline{N}(r, f) + N_2 \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N}(r, g) + N_2 \left(r, \frac{1}{g} \right) \right\} + 3 \left\{ \overline{N}_L \left(r, \frac{1}{f-1} \right) + \overline{N}_L \left(r, \frac{1}{g-1} \right) \right\} + S(r, f) + S(r, g);$
- (ii) Либо $f \equiv g$, либо $fg \equiv 1$.

Доказательство. Пусть

$$(2.8) \quad \psi = \frac{f''}{f'} - 2 \frac{f'}{f-1} - \frac{g''}{g'} + 2 \frac{g'}{g-1}.$$

Случай 1. $\psi \not\equiv 0$. Пусть z_0 будет простой 1-точкой как f , так и g . Известно, что $\psi(z_0) = 0$. По первой фундаментальной теореме Неванлинны и лемме 1 имеем

$$(2.9) \quad N_{11} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) \leq N \left(r, \frac{1}{\psi} \right) \leq T(r, \psi) + O(1) \leq N(r, \psi) + S(r, f) + S(r, g).$$

Очевидно, что общие 1-точки f и g с одинаковой кратностью не являются полюсами ψ , а полюса f и g с одинаковой кратностью также не являются полюсами ψ . Из того, что f и g делят 1 ИМ, f и g делят ∞ СМ, следует, что

$$(2.10) \quad \begin{aligned} N(r, \psi) &\leq \overline{N}_L \left(r, \frac{1}{f-1} \right) + \overline{N}_L \left(r, \frac{1}{g-1} \right) + \overline{N}_{(2)} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N}_{(2)} \left(r, \frac{1}{g} \right) \\ &+ N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right) + S(r, f) + S(r, g), \end{aligned}$$

где $N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right)$ означает функцию подсчета для тех нулей f' , которые не являются нулевыми точками $f(f-1)$, а $N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right)$ означает аналогичную величину.

По второй фундаментальной теореме Неванлинны имеем

$$(2.11) \quad T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{f-1} \right) - N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + S(r, f).$$

$$(2.12) \quad T(r, g) \leq \overline{N}(r, g) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{g} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{g-1} \right) - N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right) + S(r, g).$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
 & \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) \\
 & \leq N_{11}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \\
 & + \frac{1}{2}\overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + \frac{1}{2}\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g-1}\right) \\
 & \leq N_{11}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}T(r, f) + \frac{1}{2}T(r, g) \\
 (2.13) \quad & + \frac{1}{2}\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + O(1).
 \end{aligned}$$

Из (2.11)-(2.13) следует, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\{T(r, f) + T(r, g)\} \\
 & \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f) \\
 & + \overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) + S(r, g) \\
 (2.14) \quad & + N_{11}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{1}{2}\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g-1}\right).
 \end{aligned}$$

Из (2.9), (2.10) и (2.14) имеем

$$\begin{aligned}
 T(r, f) + T(r, g) & \leq 2\left\{\overline{N}(r, f) + N_2\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, g) + N_2\left(r, \frac{1}{g}\right)\right\} \\
 & + 3\left\{\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g-1}\right)\right\} + S(r, f) + S(r, g).
 \end{aligned}$$

Случай 2. $\psi \equiv 0$. Из (2.8) получаем $f \equiv \frac{Ag+B}{Cg+D}$, где A, B, C, D — конечные комплексные числа, удовлетворяющие $AD - BC \neq 0$. Используя тот же аргумент, что и в случае 2 леммы 5, получаем, что либо $f \equiv g$, либо $fg \equiv 1$. Это завершает доказательство леммы 6.

По доказательству леммы 2 в [12] имеем следующий результат.

Лемма 7 [12]. Пусть f и g — две непостоянные мероморфные функции в комплексной плоскости. Если f и g делят 1 ИМ, f и g делят ∞ ИМ, то происходит один из следующих случаев:

- (i) $T(r, f) + T(r, g) \leq 2\left\{\overline{N}(r, f) + N_2\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, g) + N_2\left(r, \frac{1}{g}\right)\right\} + 3\left\{\overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g-1}\right)\right\} + \overline{N}_{(2)}(r, f) + \overline{N}_{(2)}(r, g) + S(r, f) + S(r, g);$
- (ii) Либо $f \equiv g$, либо $fg \equiv 1$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Положим $g = \Delta_\eta^m f$. Поскольку f^n и $(\Delta_\eta^m f)^n$ делят 1 СМ, f и $\Delta_\eta^m f$ делят ∞ ИМ, получаем, что f^n и g^n делят 1 СМ, f и g делят ∞ ИМ.

Положим

$$(3.1) \quad \varphi = \frac{(f^n)'}{f^n(f^n - 1)} - \frac{(g^n)'}{g^n(g^n - 1)}.$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. $\varphi \neq 0$. Предположим, что

$$(3.2) \quad \begin{aligned} T(r, f^n) + T(r, g^n) \leq & 2 \left\{ \overline{N}(r, f^n) + N_2\left(r, \frac{1}{f^n}\right) + \overline{N}(r, g^n) + N_2\left(r, \frac{1}{g^n}\right) \right\} \\ & + \overline{N}_{(2)}(r, f^n) + \overline{N}_{(2)}(r, g^n) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Поскольку f и g делят ∞ ИМ, то по первой фундаментальной теореме Неванлинны и лемме 1 имеем

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \overline{N}(r, f) = \overline{N}(r, g) & \leq \frac{1}{n-1} N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) \\ & \leq \frac{1}{n-1} N(r, \varphi) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Простым вычислением находим, что общие 1-точки f^n и g^n с одинаковой кратностью не являются полюсами φ . Следовательно, поскольку f^n и g^n делят 1 СМ, f и g делят ∞ ИМ, мы получаем

$$(3.4) \quad N(r, \varphi) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, f) + S(r, g).$$

Используя формулы (3.3) и (3.4), получаем

$$(3.5) \quad \overline{N}(r, f) = \overline{N}(r, g) \leq \frac{1}{n-1} \left\{ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \right\} + S(r, f) + S(r, g).$$

Поскольку $n \geq 6$, по (3.2), (3.5), лемме 2 и лемме 3 получаем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} n\{T(r, f) + T(r, g)\} & \leq 2 \left\{ 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \right\} \\ & + \frac{6}{n-1} \left\{ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \right\} + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(n - 4 - \frac{6}{n-1}\right) \{T(r, f) + T(r, g)\} \leq S(r, f) + S(r, g),$$

и мы получаем противоречие.

Следовательно, по лемме 5 получаем, что либо $f^n \equiv g^n$, либо $f^n g^n \equiv 1$.

Случай 2. $\varphi \equiv 0$. По (3.1) имеем

$$(3.7) \quad f^n = \frac{Ag^n + B}{Cg^n + D},$$

где A, B, C, D — конечные комплексные числа, удовлетворяющие $AD - BC \neq 0$. Тогда,

$$(3.8) \quad T(r, f) = T(r, g) + S(r, f).$$

Теперь рассмотрим три подслучая.

Случай 2.1. $AC \neq 0$. Из (3.7) получаем $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f^n - \frac{A}{C}}\right) = \overline{N}(r, g)$, тогда по (3.8) и второй фундаментальной теореме Неванлинны имеем

$$\begin{aligned} nT(r, f) &\leq \overline{N}(r, f^n) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^n}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^n - \frac{A}{C}}\right) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, g) + S(r, f) \\ &\leq 3T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Из $n \geq 6$ следует, что $T(r, f) \leq S(r, f)$ — противоречие.

Случай 2.2. $A \neq 0, C = 0$. Из (3.7) получаем $f^n \equiv \frac{Ag^n + B}{D}$.

Если $B \neq 0$, то имеем $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f^n - \frac{B}{D}}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right)$. Из (3.8) и второй фундаментальной теоремы Неванлинны следует, что

$$\begin{aligned} nT(r, f) &\leq \overline{N}(r, f^n) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^n}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^n - \frac{B}{D}}\right) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, f) \\ &\leq 3T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Из $n \geq 6$ следует, что $T(r, f) \leq S(r, f)$ — противоречие.

Если $B = 0$, то получаем $f^n \equiv \frac{A}{D}g^n$. Так как f^n и g^n имеют общую 1 СМ, то по второй фундаментальной теореме Неванлинны и $n \geq 6$ мы знаем, что существует точка z_0 такая, что $f^n(z_0) = g^n(z_0) = 1$. Таким образом, $\frac{A}{D} = 1$, что даёт $f^n \equiv g^n$.

Случай 2.3. $A = 0, C \neq 0$. Из (3.7) получаем $f^n \equiv \frac{B}{Cg^n + D}$. Используя тот же аргумент, что и в случае 2.2, мы находим, что $f^n g^n \equiv 1$.

Следовательно, либо $f^n \equiv g^n$, либо $f^n g^n \equiv 1$. То есть либо $f^n \equiv (\Delta_\eta^m f)^n$, либо $f^n (\Delta_\eta^m f)^n \equiv 1$.

Если $f^n (\Delta_\eta^m f)^n \equiv 1$, тогда, поскольку f и $\Delta_\eta^m f$ делят ∞ ИМ, мы выводим, что $f \neq 0, \infty$, $\Delta_\eta^m f \neq 0, \infty$, и мы имеем

$$(3.9) \quad f \Delta_\eta^m f \equiv t,$$

где t — константа, такая, что $t^n = 1$.

Теперь по лемме 4 рассмотрим два случая.

Случай 1. $f(z) = e^{h_1(z)+C_1z}$, где $h_1(z)$ — целая функция периода η и $e^{C_1\eta} \neq$

1. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Delta_\eta^m f &= \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i f(z + (m-i)\eta) = \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i e^{h_1(z+(m-i)\eta)} e^{C_1(z+(m-i)\eta)} \\ (3.10) \quad &= e^{h_1(z)+C_1z} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i (e^{C_1\eta})^{m-i} = e^{h_1(z)+C_1z} (e^{C_1\eta} - 1)^m. \end{aligned}$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что

$$e^{2(h_1(z)+C_1z)} (e^{C_1\eta} - 1)^m \equiv t,$$

тогда по $e^{C_1\eta} \neq 1$ имеем $f \equiv C$, где C — константа, что является противоречием.

Случай 2. $f(z) = e^{h_2(z)+C_2z}$, где $h_2(z)$ — целая функция периода 2η , а C_2 удовлетворяет $\left(\frac{1+e^{C_2\eta}}{1-e^{C_2\eta}}\right)^{2m} = 1$.

Далее рассмотрим два подслучая.

Случай 2.1. m — четное число. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Delta_\eta^m f &= \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i f(z + (m-i)\eta) = \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i e^{h_2(z+(m-i)\eta)} e^{C_2(z+(m-i)\eta)} \\ &= \sum_{i=2k}^m C_m^i e^{h_2(z+(m-i)\eta)} e^{C_2(z+(m-i)\eta)} - \sum_{i=2k+1}^m C_m^i e^{h_2(z+(m-i)\eta)} e^{C_2(z+(m-i)\eta)} \\ &= e^{h_2(z)+C_2z} \sum_{i=2k}^m C_m^i (e^{C_2\eta})^{(m-i)} - e^{h_2(z+\eta)+C_2z} \sum_{i=2k+1}^m C_m^i (e^{C_2\eta})^{(m-i)} \\ (3.11) \quad &= \frac{(e^{C_2\eta} + 1)^m + (e^{C_2\eta} - 1)^m}{2} e^{h_2(z)+C_2z} - \frac{(e^{C_2\eta} + 1)^m - (e^{C_2\eta} - 1)^m}{2} e^{h_2(z+\eta)+C_2z}. \end{aligned}$$

Из $\left(\frac{1+e^{C_2\eta}}{1-e^{C_2\eta}}\right)^{2m} = 1$ мы знаем, что либо $(e^{C_2\eta} + 1)^m + (e^{C_2\eta} - 1)^m = 0$, либо $(e^{C_2\eta} + 1)^m - (e^{C_2\eta} - 1)^m = 0$. Таким образом, мы рассматриваем два подслучая.

Случай 2.1.1. $(e^{C_2\eta} + 1)^m - (e^{C_2\eta} - 1)^m = 0$. Тогда по (3.9) и (3.11) получаем

$$\frac{(e^{C_2\eta} + 1)^m + (e^{C_2\eta} - 1)^m}{2} e^{2(h_2(z)+C_2z)} \equiv t,$$

тогда по $(e^{C_2\eta} + 1)^m + (e^{C_2\eta} - 1)^m \neq 0$ имеем $f \equiv C$, где C — константа, опять противоречие.

Случай 2.1.2. $(e^{C_2\eta} + 1)^m + (e^{C_2\eta} - 1)^m = 0$. Тогда по (3.9) и (3.11) получаем

$$(3.12) \quad -\frac{(e^{C_2\eta} + 1)^m - (e^{C_2\eta} - 1)^m}{2} e^{h_2(z)+C_2z} e^{h_2(z+\eta)+C_2z} \equiv t.$$

Поскольку $h_2(z)$ является целой функцией периода 2η , то по (3.12) имеем

$$(3.13) \quad -\frac{(e^{C_2\eta} + 1)^m - (e^{C_2\eta} - 1)^m}{2} e^{h_2(z+\eta)+C_2(z+\eta)} e^{h_2(z)+C_2(z+\eta)} \equiv t.$$

Из (3.12) и (3.13) следует, что $e^{2C_2\eta} = 1$. По $\left(\frac{1+e^{C_2\eta}}{1-e^{C_2\eta}}\right)^{2m} = 1$ находим $\left(\frac{1-e^{2C_2\eta}}{(1-e^{C_2\eta})^2}\right)^{2m} = 1$, что противоречит $e^{2C_2\eta} = 1$. Следовательно, этот случай не может иметь места.

Случай 2.2. m — нечетное число. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Delta_\eta^m f &= \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i f(z + (m-i)\eta) = \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i e^{h_2(z+(m-i)\eta)} e^{C_2(z+(m-i)\eta)} \\ &= \sum_{i=2k}^m C_m^i e^{h_2(z+(m-i)\eta)} e^{C_2(z+(m-i)\eta)} - \sum_{i=2k+1}^m C_m^i e^{h_2(z+(m-i)\eta)} e^{C_2(z+(m-i)\eta)} \\ &= e^{h_2(z+\eta)+C_2z} \sum_{i=2k}^m C_m^i (e^{C_2\eta})^{(m-i)} - e^{h_2(z)+C_2z} \sum_{i=2k+1}^m C_m^i (e^{C_2\eta})^{(m-i)} \\ (3.14) \quad &= \frac{(e^{C_2\eta} + 1)^m + (e^{C_2\eta} - 1)^m}{2} e^{h_2(z+\eta)+C_2z} - \frac{(e^{C_2\eta} + 1)^m - (e^{C_2\eta} - 1)^m}{2} e^{h_2(z)+C_2z}. \end{aligned}$$

Используя тот же аргумент, что и в случае ii.1, получаем противоречие.

Следовательно, $f^n \equiv (\Delta_\eta^m f)^n$. То есть $\Delta_\eta^m f \equiv tf$, где t — константа такая, что $t^n = 1$, а если $m = 1$, то $t \neq -1$.

Теорема 1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Установим $g = \Delta_\eta^m f$. Поскольку f^n и $(\Delta_\eta^m f)^n$ делят 1 ИМ, f и $\Delta_\eta^m f$ делят ∞ СМ, получаем, что f^n и g^n делят 1 ИМ, f и g делят ∞ СМ.

Положим

$$(4.1) \quad \varphi = \frac{(f^n)'}{f^n(f^n - 1)} - \frac{(g^n)'}{g^n(g^n - 1)}.$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. $\varphi \neq 0$. Предположим, что

$$\begin{aligned} &T(r, f^n) + T(r, g^n) \\ &\leq 2 \left\{ \overline{N}(r, f^n) + N_2\left(r, \frac{1}{f^n}\right) + \overline{N}(r, g^n) + N_2\left(r, \frac{1}{g^n}\right) \right\} \\ (4.2) \quad &+ 3 \left\{ \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f^n - 1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g^n - 1}\right) \right\} + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Поскольку f и g делят ∞ СМ, то по первой фундаментальной теореме Неванлинны и лемме 1 имеем

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \overline{N}(r, f) = \overline{N}(r, g) &\leq \frac{1}{n-1} N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) \\ &\leq \frac{1}{n-1} N(r, \varphi) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Простым вычислением мы видим, что общие 1-точки f^n и g^n с одинаковой кратностью не являются полюсами φ . Следовательно, поскольку f^n и g^n делят 1 ИМ, f и g делят ∞ СМ, получаем

$$(4.4) \quad \begin{aligned} N(r, \varphi) &\leq \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f^n - 1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g^n - 1}\right) \\ &+ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$(4.5) \quad \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f^n - 1}\right) \leq N\left(r, \frac{f}{f'}\right) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f).$$

$$(4.6) \quad \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g^n - 1}\right) \leq N\left(r, \frac{g}{g'}\right) \leq \overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, g).$$

Из (4.3)-(4.6) следует, что

$$(4.7) \quad \overline{N}(r, f) = \overline{N}(r, g) \leq \frac{2}{n-3} \left\{ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \right\} + S(r, f) + S(r, g).$$

Так как $n \geq 10$, то по (4.2), (4.5)-(4.7) и лемме 2 имеем

$$(4.8) \quad \begin{aligned} n \{T(r, f) + T(r, g)\} &\leq 2 \left\{ \overline{N}(r, f) + 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, g) + 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \right\} \\ &+ 3 \left\{ \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \right\} + S(r, f) + S(r, g) \\ &\leq 7 \left\{ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \right\} + 5 \{ \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, g) \} + S(r, f) + S(r, g) \\ &\leq \left(7 + \frac{20}{n-3} \right) \left\{ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \right\} + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(n - 7 - \frac{20}{n-3} \right) \{T(r, f) + T(r, g)\} \leq S(r, f) + S(r, g),$$

противоречие.

Следовательно, по Лемме 6 получаем, что либо $f^n \equiv g^n$, либо $f^n g^n \equiv 1$.

Случай 2. $\varphi \equiv 0$. Аналогично Случаю 2 Теоремы 1 выводим, что либо $f^n \equiv g^n$, либо $f^n g^n \equiv 1$.

Далее, используя тот же аргумент, что и в Теореме 1, имеем $\Delta_\eta^m f \equiv t f$, где $t^n = 1$, и если $m = 1$, то $t \neq -1$.

Это завершает доказательство Теоремы 2.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Пусть $g = \Delta_\eta^m f$. Поскольку f^n и $(\Delta_\eta^m f)^n$ делят 1 ИМ, f и $\Delta_\eta^m f$ делят ∞ ИМ, получаем, что f^n и g^n делят 1 ИМ, f и g делят ∞ ИМ.

Положим

$$(5.1) \quad \varphi = \frac{(f^n)'}{f^n(f^n - 1)} - \frac{(g^n)'}{g^n(g^n - 1)}.$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. $\varphi \neq 0$. Предположим, что

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & T(r, f^n) + T(r, g^n) \\ & \leq 2 \left\{ \overline{N}(r, f^n) + N_2\left(r, \frac{1}{f^n}\right) + \overline{N}(r, g^n) + N_2\left(r, \frac{1}{g^n}\right) \right\} \\ & + 3 \left\{ \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f^n - 1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g^n - 1}\right) \right\} \\ & + \overline{N}_{(2)}(r, f^n) + \overline{N}_{(2)}(r, g^n) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Поскольку f и g делят ∞ ИМ, то по первой фундаментальной теореме Неванлинны и лемме 1 имеем

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \overline{N}(r, f) = \overline{N}(r, g) & \leq \frac{1}{n-1} N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) \\ & \leq \frac{1}{n-1} N(r, \varphi) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Простым вычислением видим, что общие 1-точки f^n и g^n с одинаковой кратностью не являются полюсами φ . Следовательно, поскольку f^n и g^n делят 1 ИМ, f и g делят ∞ ИМ, мы получаем

$$(5.4) \quad \begin{aligned} N(r, \varphi) & \leq \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f^n - 1}\right) + \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g^n - 1}\right) \\ & + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$(5.5) \quad \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{f^n - 1}\right) \leq N\left(r, \frac{f}{f'}\right) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f).$$

$$(5.6) \quad \overline{N}_L\left(r, \frac{1}{g^n - 1}\right) \leq N\left(r, \frac{g}{g'}\right) \leq \overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, g).$$

Из (5.3)-(5.6) следует, что

$$(5.7) \quad \overline{N}(r, f) = \overline{N}(r, g) \leq \frac{2}{n-3} \left\{ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \right\} + S(r, f) + S(r, g).$$

Так как $n \geq 11$, то по (5.2), (5.5)-(5.7) и лемме 2 имеем

$$\begin{aligned} & n \{T(r, f) + T(r, g)\} \\ & \leq 7 \left\{ \overline{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{g} \right) \right\} + 6 \{ \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, g) \} + S(r, f) + S(r, g) \\ & \leq \left(7 + \frac{24}{n-3} \right) \left\{ \overline{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{g} \right) \right\} + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(n - 7 - \frac{24}{n-3} \right) \{T(r, f) + T(r, g)\} \leq S(r, f) + S(r, g),$$

противоречие.

Следовательно, по лемме 7 получаем, что либо $f^n \equiv g^n$, либо $f^n g^n \equiv 1$.

Случай 2. $\varphi \equiv 0$. Аналогично случаю 2 теоремы 1, мы выводим, что либо $f^n \equiv g^n$, либо $f^n g^n \equiv 1$.

Далее, используя тот же аргумент, что и в теореме 1, мы имеем $\Delta_\eta^m f \equiv tf$, где $t^n = 1$, а если $m = 1$, то $t \neq -1$. Теорема 3 доказана.

Abstract. In this paper, we study the unicity of meromorphic functions concerning higher order difference operators and mainly prove the following result: Let $m, n (\geq 6)$ be positive integers, let η be a nonzero complex number, and let f be a nonconstant meromorphic function in the complex plane. If f^n and $(\Delta_\eta^m f)^n$ share 1 CM, f and $\Delta_\eta^m f$ share ∞ IM, then $\Delta_\eta^m f \equiv tf$, where $t^n = 1$, and if $m = 1$, then $t \neq -1$. This improves the results due to Chen and Chen [Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35 (2012)] and Deng, Liu and Yang [Turkish J. Math. 41 (2017)] for the case of infinite order and higher order difference operators.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. K. Hayman, Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford (1964).
- [2] I. Laine, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, De Gruyter, Berlin (1993).
- [3] C. C. Yang and H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (2003).
- [4] L. Yang, Value Distribution Theory, Springer-Verlag Berlin (1993).
- [5] J. L. Zhang, "Value distribution and shared sets of differences of meromorphic functions," J. Math. Anal. Appl. **367**, no. 2, 401 – 408 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.01.038>
- [6] B. Q. Chen and Z. X. Chen, "Meromorphic function sharing two sets with its difference operator," Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) **35**, no. 3, 765 – 774 (2012).
- [7] B. M. Deng, D. Liu and D. G. Yang, "Meromorphic function and its difference operator share two sets with weight k ," Turkish J. Math. **41**, no. 5, 1155 – 1163 (2017). <https://doi.org/10.3906/mat-1509-73>
- [8] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, "Nevanlinna theory for difference operator," Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31**, no. 2, 463 – 478 (2006).
- [9] C. C. Yang, "On deficiencies of differential polynomials," Math. Z. **125**, no. 2, 107 – 112 (1972).
- [10] A. Z. Mokhon'ko, "The Nevanlinna characteristics of certain meromorphic function," Teor. Functcii Funkcional. Anal. i Priložen. no. 14, 83 – 87 (1971).

З. ХЕ, Г. ВАНГ, М.ФАНГ, М. Л. ФАНГ

- [11] M. L. Fang, H. Li and X. Yao, “The difference analogue of Hayman-Clunies theorem,” Bull. Austral Math. Soc., accepted.
- [12] M. L. Fang and H. Guo, “On unique range sets for meromorphic or entire functions,” Acta Math. Sinica(N.S.) **14**, no. 4, 569 – 576 (1998). <https://doi.org/10.1007/BF02580416>

Поступила 04 ноября 2023

После доработки 28 февраля 2024

Принята к публикации 10 марта 2024

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал "Известия НАН Армении, Математика" публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата А4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
 - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
 - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
 - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы, место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала "Известия НАН Армении, Математика", пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
E-mail: sart@ysu.am, URL: <http://www.maik.ru>
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале "Journal of Contemporary Mathematical Analysis". URL: <http://www.springer.com>.

Заказ N1287. Тираж 150. Подписано к печати 22.01.24.
Печ. л. 6.25. Бумага офсетная. Цена договорная.
Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 59, номер 6, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

В. С. АТАБЕКЯН, А. А. БАЙРАМЯН, Вероятностные тождества в группах с n -кручением	3
Ж. Г. ВАНГ, М. У. ФАРУК, М. АРИФ, С. Н. МАЛИК, Ф. М. О. ТОФИК, Класс мероморфных функций, включающий производную высшего порядка	10
М. ДЖАФАРИЗАДЕ, М. А. ГАСАНХАНИ ФАРД, Фрейм потенциал сопряженного фрейма и восстанавливаемый по фазе фрейм.....	23
Г. С. СУКИАСЯН, Случайные сечения выпуклых восьмигранников	37
З. ХЕ, Г. ВАНГ, М. ФАНГ, М. Л. ФАНГ, Единственность мероморфных функций относительно разностных операторов высшего порядка	47 – 62

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 59, No. 6, 2024

CONTENTS

V. S. ATABEKYAN, A. A. BAYRAMYAN, Probabilistic identities in n -torsion groups	3
ZH.-G. WANG, M. U. FAROOQ, M. ARIF, S. N. MALIK, F. M. O. TAWFIQ, A class of meromorphic functions involving higher order derivative	10
M. JAFARIZADEH; M. A. HASANKHANI FARD, Frame potential of dual frames and phase retrievable frames	23
H. S. SUKIASYAN, Random sections of convex octahedrons	37
Z. Y. HE, G. WANG AND M. L. FANG, Unicity of meromorphic functions concerning higher order difference operators	47 – 62