

ФРЕЙМ ПОТЕНЦИАЛ СОПРЯЖЕННОГО ФРЕЙМА И ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ПО ФАЗЕ ФРЕЙМ

М. ДЖАФАРИЗАДЕ, М. А. ГАСАНХАНИ ФАРД

Рафсанджанский университет, Рафсанджан, Иран
E-mails: *m.jafarizadeh@stu.vru.ac.ir*; *m.hasankhani@vru.ac.ir*

Аннотация. Настоящая статья посвящена фрейм-потенциалу конечных фреймов в n -мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Точнее, мы определяем относительный фрейм-потенциал двух последовательностей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}_n$, который обозначается как $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Для дуальных фреймов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}_n$ мы показываем, что $\mathcal{G}$ является каноническим дуальным фреймом $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = n$. Нижняя и верхняя границы для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ даны для случая, когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются фреймами для $\mathcal{H}_n$. Более того, показываем, что $\min \{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ есть последовательность в } \mathcal{H}_n \}$ по множеству всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с нижней фрейм границей A достигается для A -жестких фреймов и $\max \{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ есть последовательность в } \mathcal{H}_n \}$ по множеству всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с верхней фрейм границей B встречается в B -жестких фреймах. Также, используя относительный фрейм-потенциал подпоследовательностей данного фрейма, представлены некоторые эквивалентные условия для его восстанавливаемости по фазе и по норме.

MSC2020 numbers: 42C15.

Ключевые слова: фрейм; дуальный фрейм; фрейм потенциал; восстанавливаемый по фазе фрейм; нормированно восстанавливаемый кадр.

1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция фреймов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ была первоначально введена Даффиним и Шеффером в контексте негармонического ряда Фурье [1]. За последнее десятилетие были предложены различные обобщения фреймов, такие как фрейм подпространств, псевдофреймы, косые фреймы, непрерывные фреймы, фреймы слияния, g -фреймы и т. д. Концепция фреймов Парсеваля с равной нормой на конечномерных гильбертовых пространствах была впервые введена Касаза и Леонардом в [2, 3] и очень быстро развивалась в течение последних десяти лет, особенно в контексте вейвлетов и систем Габора.

В n -мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ последовательность $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m$ называется фреймом для $\mathcal{H}_n$, если существуют константы $A > 0$, $B < \infty$ такие, что для всех $f \in \mathcal{H}_n$,

$$(1.1) \quad A \|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^m |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B \|f\|^2,$$

где A, B — соответственно нижняя и верхняя границы фрейма. Второе неравенство условия фрейма (1.1) также известно как условие Бесселя для $\{f_i\}_{i=1}^m$. Фрейм $\{f_i\}_{i=1}^m$ называется A -жестким фреймом, если $A = B$. Жесткий фрейм с $\|f_i\| = c$ для всех $1 \leq i \leq m$ называется жёстким фреймом с c -равной нормой, а жесткий фрейм с границей фрейма 1 называется фреймом Парсеваля.

Ограниченный линейный оператор $T_{\mathcal{F}}$, определенный равенством

$$T_{\mathcal{F}} : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathcal{H}, \quad T_{\mathcal{F}}(\{c_i\}_{i=1}^m) = \sum_{k=1}^m c_k f_k$$

называется фрейм оператором фрейма $\mathcal{F}$. Ограниченный линейный оператор $S_{\mathcal{F}}$, определенный равенством

$$S_{\mathcal{F}} : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad S_{\mathcal{F}} f = \sum_{i=1}^m \langle f, f_i \rangle f_i$$

также называется фрейм оператором фрейма $\mathcal{F}$. Известно, что фрейм оператора S является положительным, самосопряженным и обратимым оператором.

Фреймы $\{f_i\}_{i=1}^m$ и $\{g_i\}_{i=1}^m$ являются сопряженными (дуальными) фреймами для $\mathcal{H}$, если

$$f = \sum_{i=1}^m \langle f, g_i \rangle f_i, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Фрейм $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^m$ определенный как $\tilde{f}_i = S^{-1} f_i$ для $1 \leq i \leq m$, является сопряженным к $\{f_i\}_{i=1}^m$ и называется канонически сопряженным фреймом фрейма $\{f_i\}_{i=1}^m$. Для дальнейших сведений о фреймах см. [4]–[8].

Фреймы — это избыточные множества векторов в гильбертовом пространстве, которые дают одно естественное представление каждого вектора в пространстве, но могут иметь бесконечно много различных представлений для любого вектора. Именно эта избыточность делает фреймы полезными в приложениях. В обработке сигналов эта концепция стала очень полезной при анализе полноты и устойчивости линейных дискретных представлений сигналов.

Понятие фрейм-потенциала конечного фрейма был введен Бенедетто и Фикусом в [9]. Фактически, фрейм-потенциал конечного фрейма является критерием измерения его ортогональности. Показано, что A -жесткие фреймы являются минимизаторами фрейм-потенциала в $\mathcal{K}$ — семействе фреймов с нижней границей фрейма A .

Реконструкция сигнала с помощью фреймов является важной и интересной проблемой в физике и технике. Некоторые классы жестких фреймов гильбертова пространства, которые позволяют реконструировать сигнал из абсолютных

значений фрейм коэффициентов, были построены в [10]. Как следствие, реконструкция сигнала может быть выполнена без использования фазы. Процесс реконструкции сигнала без использования фазы известен как восстановление фазы. Когда мы говорим, что $\{f_k\}_{k=1}^m$ является восстанавливаемым по фазе фреймом в $\mathcal{H}_n$, это означает, что любой вектор в $\mathcal{H}_n$ может быть восстановлен с точностью до постоянного фазового множителя из модуля его фрейм коэффициентов.

Восстанавливаемые по фазе фреймы имеют важные приложения в рентгеновской кристаллографии, электронной микроскопии, распознавании речи и многих других областях [11] – [14].

Понятие восстанавливаемого по норме фрейма введено в [15]. Авторы показали, что это то, что необходимо для перехода из восстанавливаемости по фазе к полноте. Они также получили связь между восстанавливаемыми по фазе фреймами и восстанавливаемыми по норме фреймами.

В этой статье определяем относительный фрейм-потенциал фрейма $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ для двух последовательностей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}_n$. Для дуальных фреймов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}_n$ мы показываем, что $\mathcal{G}$ является каноническим дуальным фреймом $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = n$. В случае, когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются фреймами для $\mathcal{H}_n$, даются нижняя и верхняя границы для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Более того, мы показываем, что $\min \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ есть последовательность в } \mathcal{H}_n \right\}$ на совокупности всех фреймов для $\mathcal{H}_n$ с нижней фрейм-границей A встречается в A -жестких фреймах и $\max \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ есть последовательность в } \mathcal{H}_n \right\}$ на совокупности всех фреймов для $\mathcal{H}_n$ с верхней фрейм границей B встречается в B -жестких фреймах. Также, используя относительный фрейм-потенциал кадра подпоследовательностей данного кадра, представлены некоторые эквивалентные условия для его восстанавливаемости по фазе и по норме.

2. ФРЕЙМ–ПОТЕНЕЦИАЛ СОПРЯЖЕННЫХ ФРЕЙМОВ

Бенедетто и Фикус определили фрейм потенциал системы $\{f_i\}_{i=1}^m$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ следующим образом:

Определение 2.1. [9] Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m$ – система в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Фрейм–потенциал системы $\mathcal{F}$ определяется равенством:

$$FP(\mathcal{F}) = \sum_{i,j=1}^m |\langle f_i, f_j \rangle|^2.$$

Относительный фрейм–потенциал двух систем $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ определяем следующим образом:

Определение 2.2. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Относительный фрейм-потенциал двух систем или просто фрейм-потенциал двух систем $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ определяется равенством:

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2.$$

Следующее предложение представляет некоторые соотношения между относительным фрейм-потенциалом двух последовательностей и их фрейм-потенциалами.

Утверждение 2.1. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – две системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Тогда

- a) $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = FP(\mathcal{F})$,
- b) $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \frac{1}{2} [FP(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) - FP(\mathcal{F}) - FP(\mathcal{G})]$,
- c) Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$, тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{G}})$, где $S_{\mathcal{F}}$ и $S_{\mathcal{G}}$ – фрейм операторы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, соответственно.

Доказательство. Часть a) очевидна. Пусть

$$h_i := \begin{cases} f_i & , \quad 1 \leq i \leq p, \\ g_{i-p}, & p+1 \leq i \leq p+q \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} FP(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) &= \sum_{i,j=1}^{p+q} |\langle h_i, h_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^p |\langle f_i, f_j \rangle|^2 + 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 + \sum_{i,j=1}^q |\langle g_i, g_j \rangle|^2 \\ &= FP(\mathcal{F}) + 2\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) + FP(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Применив равенство $FP(\mathcal{F}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2)$ [16], имеем,

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \frac{1}{2} [FP(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) - FP(\mathcal{F}) - FP(\mathcal{G})] \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}(S_{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{G}}^2)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}(S_{\mathcal{F}} + S_{\mathcal{G}})^2 - \text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{G}}^2)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2) + \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{G}}) + \text{tr}(S_{\mathcal{G}} S_{\mathcal{F}}) + \text{tr}(S_{\mathcal{G}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{F}}^2) - \text{tr}(S_{\mathcal{G}}^2)] \\ &= \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{G}}). \end{aligned}$$

В следующей теореме получена оценка сверху для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Получена также оценка снизу для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ в случае, когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются фреймами в $\mathcal{H}_n$.

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$. Тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq \alpha\beta$, где $\alpha := \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2$ и $\beta := \sum_{j=1}^q \|g_j\|^2$. Если, кроме того, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$, тогда

$$\frac{\alpha\beta}{n} \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq \alpha\beta.$$

В частности, если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ нормированы, тогда

$$\frac{pq}{n} \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq pq.$$

Доказательство. Применив неравенство Коши-Шварца, имеем:

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \|f_i\|^2 \|g_j\|^2 = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 \sum_{j=1}^q \|g_j\|^2 = \alpha\beta.$$

В случае, когда $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$, применив часть с утверждения 2.1 и [17, Theorem II.2] получим $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{G}}) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_{n-i+1}$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ – собственные значения $S_{\mathcal{F}}$, а $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ – собственные значения $S_{\mathcal{G}}$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(S_{\mathcal{F}}) = \text{tr}(T_{\mathcal{F}} T_{\mathcal{F}}^*) = \text{tr}(T_{\mathcal{F}}^* T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 = \alpha.$$

Аналогично, $\sum_{i=1}^n \mu_i = \beta$.

Следовательно, для получения оценки снизу для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, нужно решить следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} \min \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_{n-i+1}, \\ \phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \sum_{i=1}^n \lambda_i = \alpha, \\ \psi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) := \sum_{i=1}^n \mu_i = \beta \end{cases}.$$

Применив метод множителей Лагранжа, мы ищем значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ и γ, η так, что $\nabla \Phi = \gamma \nabla \phi + \eta \nabla \psi$, $\phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \alpha$ и $\psi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \beta$. Получаем следующие уравнения для $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_i} = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \mu_i} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial \mu_i}, \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = \alpha, \\ \sum_{i=1}^n \mu_i = \beta \end{cases},$$

откуда следует, что $\lambda_i = \frac{\alpha}{n}$ and $\mu_i = \frac{\beta}{n}$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \geq \Phi\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}, \dots, \frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n}, \frac{\beta}{n}, \dots, \frac{\beta}{n}\right) = n \frac{\alpha}{n} \frac{\beta}{n} = \frac{\alpha\beta}{n}.$$

Теорема 2.2. *Оценка снизу для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ достигается, когда $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ являются жесткими фреймами.*

Доказательство. Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – жесткие фреймы, тогда $S_{\mathcal{F}} = \frac{\alpha}{n}I$ и $S_{\mathcal{G}} = \frac{\beta}{n}I$, где I – тождественный оператор в $\mathcal{H}_n$. Таким образом,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}}S_{\mathcal{G}}) = \text{tr}\left(\frac{\alpha}{n}I\frac{\beta}{n}I\right) = \frac{\alpha\beta}{n^2}\text{tr}(I) = \frac{\alpha\beta}{n}.$$

Следующий пример показывает, что обратное утверждение теоремы 2.2 неверно.

Пример 1. Рассмотрим фреймы $\mathcal{F} = \{e_1, e_2\}$ и $\mathcal{G} = \{e_1, e_2, e_2\}$ для $\mathcal{H}_2$, где $\{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_2$. Тогда, $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 3 = \frac{\alpha\beta}{n}$, но фрейм $\mathcal{G}$ не жесткий.

Теорема 2.3. *Оценка сверху для $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ достигается только, если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются скалярными кратными одного вектора в $\mathcal{H}_n$.*

Доказательство. Если две системы $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ являются скалярными кратными одного вектора в $\mathcal{H}_n$, тогда существует вектор $f \in \mathcal{H}_n$ такой, что $f_i = c_i f$ и $g_j = d_j f$ для некоторых скаляров c_i, d_j . Тогда $|\langle f_i, g_j \rangle| = \|f_i\| \|g_j\|$, для $1 \leq i \leq p$ и $1 \leq j \leq q$. Следовательно,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \|f_i\|^2 \|g_j\|^2 = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 \sum_{j=1}^q \|g_j\|^2 = \alpha\beta.$$

Обратное, если существуют $1 \leq i_0 \leq p$ и $1 \leq j_0 \leq q$ такие, что f_{i_0} и g_{j_0} не являются скалярными кратными одного вектора в $\mathcal{H}_n$, тогда $|\langle f_{i_0}, g_{j_0} \rangle| < \|f_{i_0}\| \|g_{j_0}\|$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 + |\langle f_{i_0}, g_{j_0} \rangle|^2 \\ &< \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^q \|f_i\|^2 \|g_j\|^2 + \|f_{i_0}\|^2 \|g_{j_0}\|^2 = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 \sum_{j=1}^q \|g_j\|^2 = \alpha\beta. \end{aligned}$$

Теорема 2.4. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – биортогональны, тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \min\{p, q\}$.*

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ – биортогональны. Без ограничения общности можем считать, что $p \leq q$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p |\langle f_i, g_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1, j \neq i}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 = p + 0 = p = \min\{p, q\}. \end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно.

Пример 2. Рассмотрим фреймы $\mathcal{F} = \{e_1, e_2\}$ и $\mathcal{G} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) \right\}$ в $\mathcal{H}_2$, где $e = \{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_2$. Тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 2 = \min\{p, q\}$, но $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не биортогональны.

Следующая теорема дает отношение между дуальными фреймами.

Теорема 2.5. Если $\hat{\mathcal{F}}$ и $\hat{\mathcal{G}}$ – дуальные фреймы двух фреймов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ соответственно, тогда

$$\frac{FP(\mathcal{F})}{\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{G}})} \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq FP(\mathcal{F}) \widetilde{FP}(\mathcal{G}, \hat{\mathcal{F}}).$$

Доказательство. Предположим, что $\hat{\mathcal{F}} = \{\hat{f}_i\}_{i=1}^p$ и $\hat{\mathcal{G}} = \{\hat{g}_j\}_{j=1}^q$ – дуальные фреймы двух фреймов $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^q$ соответственно, тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, g_j \rangle|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left| \left\langle f_i, \sum_{k=1}^p \langle g_j, \hat{f}_k \rangle f_k \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left(\sum_{k=1}^p |\langle f_i, f_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^p |\langle \hat{f}_k, g_j \rangle|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p |\langle f_i, f_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle \hat{f}_k, g_j \rangle|^2 \right) = FP(\mathcal{F}) \widetilde{FP}(\mathcal{G}, \hat{\mathcal{F}}). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} FP(\mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |\langle f_i, f_j \rangle|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \left\langle \sum_{k=1}^q \langle f_i, \hat{g}_k \rangle g_k, f_j \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^q |\langle f_i, \hat{g}_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^q |\langle f_j, g_k \rangle|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q |\langle f_i, \hat{g}_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q |\langle f_j, g_k \rangle|^2 \right) \\ &= \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{G}}) \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

В частном случае, когда $\hat{\mathcal{F}}$ – канонический дуальный фрейм фрейма $\mathcal{F}$, тогда по утверждению 2.1, мы имеем: $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) = \text{tr}(S_{\mathcal{F}} S_{\mathcal{F}}^{-1}) = \text{tr}(I) = n$, но обратное неверно. Действительно, рассмотрим два фрейма: $\mathcal{F} = \{e_1, e_2\}$ и $\mathcal{G} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}}e_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}e_2, \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 + \sqrt{\frac{1}{3}}e_2 \right\}$ в $\mathcal{H}_2$, где $\{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_2$. Тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 2 = n$, но $\mathcal{G}$ – не канонический дуальный фрейм фрейма $\mathcal{F}$.

Теорема 2.6. Пусть $\hat{\mathcal{F}}$ – дуальный фрейм для $\mathcal{F}$ в $\mathcal{H}_n$. Тогда, $\hat{\mathcal{F}}$ является каноническим дуальным фреймом $\mathcal{F}$ только если $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) = n$.

Доказательство. Пусть $\hat{\mathcal{F}} = \{\hat{f}_i\}_{i=1}^p$ – дуальный фрейм для $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ в $\mathcal{H}_n$. Применив теорему [5, Theorem 5.7.4] можем предположить, что $\hat{f}_j = S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j + \phi_j$ так, что $\phi_j = h_j - \sum_{k=1}^p \langle S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j, f_k \rangle h_k$ для $1 \leq j \leq p$, где $\{h_i\}_{i=1}^p$ – система в $\mathcal{H}_n$. Тогда,

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \langle f_i, \hat{f}_j \rangle \right|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j + \phi_j \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \right|^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left| \langle f_i, \phi_j \rangle \right|^2 + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \overline{\langle f_i, \phi_j \rangle} \\ &= \widetilde{FP}(\mathcal{F}, S_{\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{F}) + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \langle \phi_j, f_i \rangle \\ &= n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \langle \hat{f}_j - S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j, f_i \rangle \\ &= n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \left\langle \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle \hat{f}_j - \sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j, f_i \right\rangle \\ &= n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \left\langle \sum_{j=1}^p \langle S_{\mathcal{F}}^{-1} f_i, f_j \rangle \hat{f}_j - S_{\mathcal{F}}^{-1} \left(\sum_{j=1}^p \langle f_i, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j \rangle f_j \right), f_i \right\rangle \\ &= n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) + 2\text{Re} \sum_{i=1}^p \langle S_{\mathcal{F}}^{-1} f_i - S_{\mathcal{F}}^{-1} f_i, f_i \rangle = n + \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi), \end{aligned}$$

где $\Phi := \{\phi_i\}_{i=1}^p$. Следовательно, $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) = n$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi) = 0$, откуда следует, что $\phi_j = 0$ для $1 \leq j \leq p$, в силу полноты $\mathcal{F}$. Значит $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}) = n$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}_j = S_{\mathcal{F}}^{-1} f_j$ for $1 \leq j \leq p$. $\square$

В следующей теореме мы показываем, что $\min \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}) ; \mathcal{G} \text{ – система в } \mathcal{H}_n \right\}$ по множеству всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с нижней фрейм границей A достигается для A -жестких фреймов, а $\max \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}) ; \mathcal{G} \text{ – система в } \mathcal{H}_n \right\}$ по множеству всех

фреймов в $\mathcal{H}_n$ с верхней фрейм границей B достигается для B -жестких фреймов.

Теорема 2.7. Пусть $\mathcal{P}$ – множество всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с нижней фрейм границей A и пусть $\mathcal{Q}$ – множество всех фреймов в $\mathcal{H}_n$ с верхней фрейм границей B . Тогда

а) Если $\ddot{F}$ есть A -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$, тогда $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{P}$ и любой системы $\mathcal{G}$.

б) Если $\ddot{F} \in \mathcal{P}$ и $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, любого $\mathcal{F} \in \mathcal{P}$ и любой системы $\mathcal{G}$, тогда $\ddot{F}$ есть A -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$.

с) Если $\ddot{F}$ есть B -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$, тогда $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \geq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{Q}$ и любой системы $\mathcal{G}$.

д) Если $\ddot{F} \in \mathcal{Q}$ и $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \geq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{Q}$ и любой системы $\mathcal{G}$, тогда $\ddot{F}$ есть B -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$.

Доказательство. а: Пусть $\ddot{F} = \{\ddot{f}_i\}_{i=1}^p$ есть A -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$ $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^q$ – система в $\mathcal{H}_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle \ddot{f}_i, g_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p |\langle g_j, \ddot{f}_i \rangle|^2 = \sum_{j=1}^q A \|g_j\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^r |\langle g_j, f_i \rangle|^2 = \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

для любого $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^r \in \mathcal{P}$.

б: Если $\ddot{F} = \{\ddot{f}_i\}_{i=1}^p \in \mathcal{P}$ и $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \mathcal{G}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{P}$ и любой системы $\mathcal{G}$, для $\mathcal{F} := \{\sqrt{A}e_1, \sqrt{A}e_2, \dots, \sqrt{A}e_n\} \in \mathcal{P}$, где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_n$, для $x \in \mathcal{H}_n$ имеем:

$$\sum_{i=1}^p |\langle x, \ddot{f}_i \rangle|^2 = \widetilde{FP}(\ddot{F}, \{x\}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \{x\}) = \sum_{i=1}^p |\langle x, \sqrt{A}e_i \rangle|^2 = A \|x\|^2.$$

В силу $\ddot{F} \in \mathcal{P}$, имеем, что $\ddot{F}$ есть A -жесткий фрейм в $\mathcal{H}_n$.

Доказательства пунктов с) и d) аналогичны доказательствам а) и б), соответственно. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $\mathcal{P}$ – множество всех пар $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ где $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$ с нижними фрейм границами A_1 и A_2 соответственно. Пусть $\mathcal{Q}$ – множество всех пар $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – фреймы в $\mathcal{H}_n$ с нижними фрейм границами B_1 и B_2 соответственно. Тогда,

а) $\widetilde{FP}(\ddot{F}, \ddot{G}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любой пары $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{P}$, где $\ddot{F}$ и $\ddot{G}$ – жесткие фреймы в $\mathcal{H}_n$ с нижними фрейм границами A_1 и A_2 соответственно.

b) $\widetilde{FP}(\check{\mathcal{F}}, \check{\mathcal{G}}) \geq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, для любой пары $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{Q}$, где $\check{\mathcal{F}}$ и $\check{\mathcal{G}}$ – жесткие фреймы в $\mathcal{H}_n$ с верхними фрейм границами B_1 и B_2 соответственно.

Доказательство. Дважды применив пункт *a)* теоремы 2.7, получим:

$$\widetilde{FP}(\check{\mathcal{F}}, \check{\mathcal{G}}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \check{\mathcal{G}}) = \widetilde{FP}(\check{\mathcal{G}}, \mathcal{F}) \leq \widetilde{FP}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

для любой $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{P}$. Пункт *b)* доказывается аналогично. $\square$

3. ФРЕЙМ ПОТЕНЦИАЛ И ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ПО ФАЗЕ ФРЕЙМ

Восстанавливаемые по фазе фреймы имеют множество применений в физике и в инженерии. Математическое исследование восстанавливаемых по фазе фреймов началось в 2006 году в статье Балана, Касаза и Едидина [10]

Определение 3.1. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) называется восстанавливаемым по фазе фреймом, если для любых $f, g \in \mathbb{R}^n$ ($f, g \in \mathbb{C}^n$), если $|\langle f, f_k \rangle| = |\langle g, f_k \rangle|$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$, тогда $f = cg$ для некоторой $c \in \{-1, 1\}$ ($c \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$).*

С. Бахманпур, Дж. Кахил, П. Г. Касаза, Дж. Джаспер и Л.М. Вудланд [15] определили восстанавливаемый по норме фрейм:

Определение 3.2. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) называется восстанавливаемым по норме фреймом, если для любых $f, g \in \mathbb{R}^n$ ($f, g \in \mathbb{C}^n$) из условия $|\langle f, f_k \rangle| = |\langle g, f_k \rangle|$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$, вытекает, что $\|f\| = \|g\|$.*

В дальнейшем мы предполагаем, что $\mathcal{H}_n$ – действительное Гильбертово пространство. В следующей теореме дается описание восстанавливаемых по фазе и восстанавливаемых по норме фреймов в $\mathcal{H}_n$, используя оболочку элементов фрейма:

Теорема 3.1. [10, Theorem 2.8] *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m \subset \mathcal{H}_n$ является восстанавливаемым по фазе тогда и только тогда, когда для любого разбиения $\{I_j\}_{j=1}^2$ набора $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$,*

$$\text{span}\{f_k\}_{k \in I_1} = \mathcal{H}_n \quad \text{или} \quad \text{span}\{f_k\}_{k \in I_2} = \mathcal{H}_n.$$

Теорема 3.2. [18, Theorem 2.3] *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m \subset \mathcal{H}_n$ является восстанавливаемым по норме тогда и только тогда, когда для любого разбиения $\{I_j\}_{j=1}^2$ набора $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$,*

$$\text{span}\{f_k\}_{k \in I_1}^\perp \perp \text{span}\{f_k\}_{k \in I_2}^\perp.$$

Для любого фрейма $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ в $\mathcal{H}_n$, положим $\mathcal{F}_I := \{f_i\}_{i \in I}$ для любого подмножества $\emptyset \neq I \subsetneq [p] := \{1, 2, \dots, p\}$.

Теорема 3.3. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ является восстанавливаемым по фазе фреймом в $\mathcal{H}_n$ с ненулевыми элементами, тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_{I^c}) > 0$, для любого подмножества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1, $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$ или $\text{span}\{f_i\}_{i \in I^c} = \mathcal{H}_n$. Без ограничения общности можем предположить, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$. Тогда,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_{I^c}) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I^c} |\langle f_i, f_j \rangle|^2 = \sum_{j \in I^c} \sum_{i \in I} |\langle f_j, f_i \rangle|^2 \geq A \sum_{j \in I^c} \|f_j\|^2 > 0,$$

где A — нижняя фрейм граница $\{f_i\}_{i \in I}$. $\square$

Следующий пример показывает, что обратное теореме 3.3 утверждение неверно.

Пример 3. Рассмотрим фрейм $\mathcal{F} := \{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ в $\mathbb{R}^3$, где $\{e_1, e_2, e_3\}$ — канонический ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\emptyset \neq I \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$.

Если $e_1 + e_2 + e_3 \in I$, тогда $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_{I^c}) \geq 1 > 0$ и если $e_1 + e_2 + e_3 \notin I$, тогда $e_1 + e_2 + e_3 \in I^c$ и следовательно, $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_{I^c}) \geq 1 > 0$. Тем не менее, $\mathcal{F}$ не является восстанавливаемым по фазе фреймом, так как для векторов $x = (1, -1, 1)$ и $y = (-1, 1, 1)$ в $\mathbb{R}^3$, имеем, что $|\langle x, f_i \rangle| = |\langle y, f_i \rangle|$, для $1 \leq i \leq 4$, но $y \neq \pm x$.

В следующей теореме, используя относительный фрейм потенциал подсистем фрейма, мы приводим эквивалентное условие для его восстанавливаемости по фазе.

Теорема 3.4. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ в $\mathcal{H}_n$ является восстанавливаемым по фазе тогда и только тогда, когда для любого множества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$,*

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) + \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{x\}) > 0,$$

для всех $x \in S := \{x \in \mathcal{H}_n; \|x\| = 1\}$.

Доказательство. Сначала предположим, что $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ есть восстанавливаемый по фазе фрейм в $\mathcal{H}_n$ and $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$. По теореме 3.1, $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$ или $\text{span}\{f_i\}_{i \in I^c} = \mathcal{H}_n$. Без ограничения общности, можем считать, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$. Тогда, для любого $x \in S$ имеем, что

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) + \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{x\}) \geq \widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) = \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle|^2 \geq A > 0,$$

где A – нижняя фрейм граница $\{f_i\}_{i \in I}$.

Предположим обратное, что для любого подмножества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$,

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) + \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{x\}) > 0,$$

для всех $x \in S$. Рассмотрим подмножество $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$. Без ограничения общности, можем считать, что $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) > 0$, для всех $x \in S$. Покажем, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$. Если $x \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp$, тогда $x = 0$, так как, если $x \neq 0$, тогда

$$0 = \sum_{i \in I} \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, f_i \right\rangle \right|^2 = \widetilde{FP}\left(\mathcal{F}_I, \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}\right) > 0,$$

что является противоречием. Теперь мы имеем, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$ и следовательно, $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ есть восстанавливаемым по фазе фрейм в $\mathcal{H}_n$, в силу теоремы 3.1. $\square$

В следующей теореме приведено эквивалентное условие для восстанавливаемости по норме фрейма.

Теорема 3.5. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ является восстанавливаемым по норме в $\mathcal{H}_n$ тогда и только тогда, когда для любого подмножества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$,*

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) = \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{y\}) = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0,$$

для всех $x, y \in S := \{x \in \mathcal{H}_n; \|x\| = 1\}$.

Доказательство. Сначала допустим, что фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ является восстанавливаемым по норме в $\mathcal{H}_n$ и $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$. Тогда для произвольных $x, y \in S$, если $\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \{x\}) = \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \{y\}) = 0$, то $x \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp$ и $y \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I^c}^\perp$, откуда следует, что $\langle x, y \rangle = 0$, так как, по теореме 3.2, имеем, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp \perp \text{span}\{f_i\}_{i \in I^c}^\perp$.

Обратное, допустим, что $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$, $x \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp$ и $y \in \text{span}\{f_i\}_{i \in I^c}^\perp$. Если $x = 0$ или $y = 0$, то $\langle x, y \rangle = 0$. Допустим, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Тогда, s

$$\widetilde{FP}\left(\mathcal{F}_I, \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}\right) = \widetilde{FP}\left(\mathcal{F}_{I^c}, \left\{ \frac{y}{\|y\|} \right\}\right) = 0,$$

откуда следует, что

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 0.$$

Теперь мы имеем, что $\text{span}\{f_i\}_{i \in I}^\perp \perp \text{span}\{f_i\}_{i \in I^c}^\perp$ и фрейм $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по норме в $\mathcal{H}_n$ в силу теоремы 3.2. $\square$

Следствие 3.1. *Фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ является восстанавливаемым по норме в $\mathcal{H}_n$ тогда и только тогда, когда для любого множества $\emptyset \neq I \subsetneq [p]$,*

$$\widetilde{FP}(\mathcal{F}_I, \Phi) = \widetilde{FP}(\mathcal{F}_{I^c}, \Psi) = 0 \Rightarrow \widetilde{FP}(\Phi, \Psi) = 0,$$

для произвольных систем Φ, Ψ в $\mathcal{H}_n$.

Определение 3.3. Пусть $\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^q$ и $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^q$ – системы в $\mathcal{H}_n$. Скажем, что

- (1) Φ и Ψ имеют одинаковые фазы, если $\phi_j = \lambda_j \psi_j$ при $1 \leq j \leq q$, для некоторых констант λ_j с $|\lambda_j| = 1$.
- (2) Φ и Ψ имеют одинаковые нормы, если $\|\phi_j\| = \|\psi_j\|$ для всех $1 \leq j \leq q$.

Теорема 3.6. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ – фрейм в $\mathcal{H}_n$ и пусть $\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^q$ и $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^q$ – системы в $\mathcal{H}_n$.

- (1) Если фрейм $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по фазе, и $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi - \Psi) = 0$, тогда Φ и Ψ имеют одинаковые фазы.
- (2) Если $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по норме и $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi - \Psi) = 0$, тогда Φ и Ψ имеют одинаковые нормы.

Доказательство. Пусть $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi - \Psi) = 0$. При $1 \leq j \leq q$

$$\begin{aligned} \|\langle f_i, \phi_j \rangle - \langle f_i, \psi_j \rangle\|^2 &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \|\langle f_i, \phi_j \rangle - \langle f_i, \psi_j \rangle\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, \phi_j \rangle - \langle f_i, \psi_j \rangle|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\langle f_i, \phi_j - \psi_j \rangle|^2 = \widetilde{FP}(\mathcal{F}, \Phi - \Psi), \end{aligned}$$

для всех $1 \leq i \leq p$. Тогда при $1 \leq j \leq q$, имеем, что $|\langle f_i, \phi_j \rangle| = |\langle f_i, \psi_j \rangle|$, для всех $1 \leq i \leq p$.

Теперь, если фрейм $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по фазе, тогда $\phi_j = \lambda_j \psi_j$, при $1 \leq j \leq q$, для некоторых констант λ_j с $|\lambda_j| = 1$ и если $\mathcal{F}$ является восстанавливаемым по норме, тогда $\|\phi_j\| = \|\psi_j\|$ при $1 \leq j \leq q$, $\square$

Abstract. This paper is concentrated on the frame potential of finite frames in n -dimensional Hilbert space $\mathcal{H}_n$. More precisely, We define the relative frame potential of two sequences $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}_n$, which is denoted by $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. For dual frames $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}_n$, we show that $\mathcal{G}$ is canonical dual frame of $\mathcal{F}$ if and only $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = n$. A lower and upper bound for $\widetilde{FP}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ is given, for the case that $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ are frames for $\mathcal{H}_n$. Moreover, we show that $\min \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ is a sequence in } \mathcal{H}_n \right\}$ on the collection of all frames for $\mathcal{H}_n$ with lower frame bound A occurs in A -tight frames and $\max \left\{ \widetilde{FP}(\cdot, \mathcal{G}); \mathcal{G} \text{ is a sequence in } \mathcal{H}_n \right\}$ on the collection of all frames for $\mathcal{H}_n$ with upper frame bound B occurs in B -tight frames. Also, using the relative frame potential of the sub sequences of a given frame, some equivalent conditions for its phase and its norm retrievability are presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, “A class of nonharmonic Fourier series”, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 341 – 366 (1952).
- [2] P. G. Casazza and M. T. Leonhard, “Existence and construction of finite tight frames”, J. Concr. Appl. Math, **4**, 277 – 289 (2006).
- [3] P. G. Casazza and M. Leon, “Existence and construction of finite frames with a given frame operator”, Int. J. Pure Appl. Math, **63**, 149 – 158 (2010).
- [4] J. J. Benedetto, “Frame decomposition, sampling, and uncertainty principle inequalities in wavelets”, Mathematics and applications, Wiley (1999).
- [5] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (2002).
- [6] C. Heil, D. Walnut, “Continuous and discrete wavelet transform”, SIAM Rev. **31**, 628 – 666 (1969).
- [7] W. Sun, “G-frames and G-Riesz bases”, J. Math. Anal. Appl. **322**, 437 – 452 (2006).
- [8] R. Young, An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York (1992).
- [9] J. Benedetto and M. Fickus, “Finite normalized tight frames”, Advances in Computational Math, **18**, 357 – 385 (2003).
- [10] R. Balan, P. G. Casazza and D. Edidin, “On signal reconstruction without phase”, Applied and Computational Harmonic Analysis, **20**, 345 – 356 (2006).
- [11] R. H. Bates and D. Mnyama, “The status of practical Fourier phase retrieval”, in W. H. Hawkes, ed, Advances in Electronics and Electron Physics., **67**, 1 – 64 (1986).
- [12] C. Becchetti and L. P. Ricotti, Speech Recognition Theory and C++ Implementation, CRC Press, Boca Raton, FL (1994).
- [13] J. R. Fienup, “Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform”, Optics Letters, **3**, 27 – 29 (1978).
- [14] J. M. Renes, R. Blume-Kohout, A. J. Scott, and C. M. Caves, “Symmetric informationally complete quantum measurements”, J. Math. Phys., **45**, 2171 – 2180 (2004).
- [15] S. Bahmanpour, J. Cahill, P. G. Casazza, J. Jasper, L. M. Woodland, “Phase retrieval and norm retrieval”, Contemp. Math., **650**, 3 – 14 (2015).
- [16] P. Casazza, M. Fickus, M. Leon, and J.C. Tremain, “Constructing infinite tight frames”, <https://faculty.missouri.edu/casazzap/pdf/100-Inf-Fr.pdf>.
- [17] J. B. Lasserre, “A trace inequality for matrix product”, IEEE transaction On Automatic Control, **40**, no. 8 (1995).
- [18] M. A. Hasankhani Fard, “Norm retrievable frames in $\mathbb{R}^n$ ”, Elect. J. Lin. Alg, **31**, 425 – 432 (2016).

Поступила 07 ноября 2023

После доработки 20 февраля 2024

Принята к публикации 28 февраля 2024