

**КЛАСС МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ,
ВКЛЮЧАЩИЙ ПРОИЗВОДНУЮ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА**

Ж. Г. ВАНГ, М. У. ФАРУК, М. АРИФ, С.Н. МАЛИК И Ф.М.О. ТОФИК

Первый педагогический университет, Хунань, КНР¹
Университет Абдул Вали Хана, Мардан, Пакистан
Университет COMSATS, Исламабад, Пакистан
Университет King Saud, Рияд, Саудовская Аравия

E-mails: wangmath@163.com; umar4207590@gmail.com;
marifmaths@awkum.edu.pk; snmalik110@ciitwah.edu.pk
ftoufic@ksu.edu.sa

Аннотация. В статье изучаются оценки коэффициентов класса мероморфных функций, включающих производную высшего порядка. Несколько подобных неравенств также установлены для обратных функций рассматриваемого класса мероморфных функций.

Номера MSC2020: 30C55, 30C45.

Ключевые слова: мероморфная функция; звездообразная функция; подчинение; оценка коэффициентов; определитель Ганкеля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{D}$ обозначает открытый единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а Σ обозначает класс мероморфных функций вида

$$(1.1) \quad f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}).$$

Более того, пусть $w(z)$ — аналитическая функция, такая что $w(0) = 0$ и $|w(z)| < 1$ с разложением в ряд

$$(1.2) \quad w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Функция $w(z)$ называется *функцией Шварца*.

В последние десятилетия многие исследователи проявляли интерес к изучению мероморфных функций в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Например, Клуни [1] доказал, что если f имеет вид (1.1), то есть мероморфным звездообразным в $\mathbb{D}$, то $|a_n| \leq 2/(n+1)$

¹Настоящее исследование было поддержано *Естественным научным фондом провинции Хунань* в рамках гранта № 2022JJ30185 КНР и *Фондом университета King Saud* в рамках гранта № RSP2023R440 Саудовской Аравии.

(Клуни доказал это для случая, когда $a_0 = 0$, тогда как в различных случаях в литературе отмечалось, что его доказательство справедливо для $a_0 \neq 0$). Поммеренке [2], Либера и Робертсон [3] также получили несколько похожих результатов.

Оценки коэффициентов играют важную роль в области GFT (Геометрическая теория функций). В 1916 году Биберах выдвинул знаменитую гипотезу о том, что для любой нормализованной аналитической и однолистной функции выполняется неравенство $|a_n| \leq n$, и только спустя 69 лет, в 1985 году это было доказано де Бранжем (см. [4]). Оценки коэффициентов говорят нам о геометрических свойствах функций, например, оценка второго коэффициента определяет рост, искажения и покрытия нормализованных однолистных функций.

Определители Ганкеля аналитических функций были введены впервые в 1960-х годах. Поммеренке [2] изучал определители Ганкеля для класса $\mathcal{S}$ однолистных и аналитических функций с разложениями в ряд

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

Он показал, что для $f \in \mathcal{S}$, имеет место оценка

$$|H_q(n)| \leq K n^{(-1/2+\beta)q+3/2},$$

где n, q — натуральные числа, $q \geq 2$, $\beta > 1/4000$ и K зависит от q . Позднее Хейман [5] и Нур [6] также доказали несколько похожих интересных результатов (см. также [7, 8]).

Оценка для $|H_2(1)|$ была впервые изучена Бабалолой [9], он нашел точную оценку $|a_4 - a_2 a_3|$ для звездообразных функций, выпуклых функций и близких к выпуклым функций с положительными действительными частями их производных, соответственно. Мишра-Праджапат-Махарана [10] доказал оценки $|H_2(1)| \leq 1/2$ и $|H_2(1)| \leq 4/27$ для класса звездообразных и выпуклых относительно симметричных точек, соответственно, функций. Раза и Малик [11] (см. также [12]) доказали, что эта оценка верна с $1/6$ для класса звездообразных функций, связанных с лемниской Бернулли.

В последние годы оценки коэффициентов для мероморфных однолистных функций были тщательно изучены различными исследователями. Например, для мероморфных однолистных функций f Шиффер [13] доказал, что $|a_2| \leq 2/3$ с $a_0 = 0$, а Дюрэн [14] получил $|a_n| \leq 2/(n+1)$, где $a_k = 0$ для $1 \leq k \leq n/2$.

Спрингер [15] получил оценку $|b_3| \leq 1$, а также $|b_3 + (1/2)b_1^2| \leq 1/2$, для класса мероморфных однолистных функций, где b_k представляет собой коэффициент ряда Тейлора обратной функции Σ . Он также выдвинул гипотезу, что $|b_{2n-1}| \leq (2n-1)!/[n!(n-1)!]$, что было доказано Куботой [16] для $n = 3, 4, 5$ и Шобером [17] для $1 \leq n \leq 7$. Оценки коэффициентов для класса мероморфных звездообразных функций порядка α и мероморфных звездообразных функций порядка α с m -кратными представлениями в виде рядов с пропусками были исследованы Капуром и Мишрой [18], Сриваставой-Мишрой-Кундом [19] соответственно. Хамиди-Халим-Джахангири [20, 21] использовал полиномы Фабера для исследования границ коэффициентов двояковыпуклых функций. Для более поздних исследований мероморфных функций можно посмотреть [22] – [28].

По существу мотивированные вышеизложенными оценками коэффициентов мероморфных функций, мы определим общий класс $\mathcal{MSC}(n, b)$ мероморфных функций, включающих высшую производную, который обобщает и объединяет предыдущее исследование в литературе. Предоставляется всестороннее и детальное понимание оценок коэффициентов мероморфных функций, и выводятся оценки коэффициентов этого общего класса мероморфных функций.

Пусть $\mathcal{P}$ обозначает класс аналитических функций p в $\mathbb{D}$ вида

$$(1.3) \quad p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

таких, что $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ в $\mathbb{D}$.

Определение 1.1. *Предположим, что $\phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n \in \mathcal{P}$. Говорят, что функция $f \in \Sigma$ принадлежит классу $\mathcal{MSC}(n, b)$, если она удовлетворяет условию*

$$1 - \frac{2}{b} \left(\frac{1}{n+1} \frac{z f^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)} + 1 \right) \prec \phi(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Выбирая специальные n , b и $\phi(z)$, мы получаем следующие подклассы мероморфных функций.

1. Для $n = 0$, $b = 2$ и $\phi(z) = 1 + \sin z$, мы получаем

$$\mathcal{MS}_{\sin}^* = \left\{ f \in \Sigma : -\frac{z f'(z)}{f(z)} \prec 1 + \sin z \right\}.$$

2. Для $n = 0$, $b = 2$ и $\phi(z) = 1 + \tanh z$, имеем

$$\mathcal{MS}_{\tanh}^* = \left\{ f \in \Sigma : -\frac{z f'(z)}{f(z)} \prec 1 + \tanh z \right\}.$$

3. Для $n = 0$, $b = 2$ и $\phi(z) = \sqrt{1+z}$, мы получаем

$$\mathcal{MS}_{BL}^* = \left\{ f \in \Sigma : -\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \sqrt{1+z} \right\}.$$

Целью данной статьи является вывод оценок коэффициентов, второго определителя Ганкеля $|H_2(1)|$ и коэффициентов обратных функций для обобщенного класса мероморфных функций, связанных с общей функцией $\phi(z)$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для вывода основных результатов нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2.1. (см. [29, стр. 41]) *Для функции $p \in \mathcal{P}$ вида (1.3) и для каждого $n \geq 1$ выполняется точное неравенство $|p_n| \leq 2$. Равенство выполняется для функции*

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Лемма 2.2. (см. [30]) *Для любых действительных чисел μ и v и функции Шварца $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, выполняются следующие точные соотношения. Если*

$$(2.1) \quad (\mu, v) \in \left\{ |\mu| \leq \frac{1}{2}, -1 \leq v \leq 1 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \leq |\mu| \leq 2, \frac{4}{27}(|\mu|+1)^3 - (|\mu|+1) \leq v \leq 1 \right\},$$

тогда

$$(2.2) \quad |c_3 + \mu c_1 c_3 + v c_1^3| \leq 1.$$

Если

$$D_1 = \left\{ 2 \leq |\mu| \leq 4, v \geq \frac{1}{12}(\mu^2 + 8) \right\} \cup \left\{ |\mu| \geq 4, v \geq \frac{2}{3}(|\mu| - 1) \right\},$$

тогда

$$|c_3 + \mu c_1 c_3 + v c_1^3| \leq |v|,$$

и $|c_n| \leq 1$.

По лемме Шварца-Пика мы знаем, что

$$(2.3) \quad |c_2| \leq 1 - |c_1|^2.$$

Аналогично мы находим, что

$$(2.4) \quad |c_2 + \lambda c_1^2| \leq \max\{1, |\lambda|\} \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Лемма 2.3. (см. [31]) *Пусть $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ — функция Шварца. Тогда*

$$|c_3| \leq 1 - |c_1|^2 - \frac{|c_2|^2}{1 + |c_1|},$$

$$|c_4| \leq 1 - |c_1|^2 - |c_2|^2,$$

$$|c_5| \leq 1 - |c_1|^2 - |c_2|^2 - \frac{|c_3|^2}{1 + |c_1|}.$$

Лемма 2.4. (see [32]) Пусть $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ – функция Шварца. Тогда

$$|c_1 c_3 - c_2^2| \leq 1 - |c_1|^2.$$

Лемма 2.5. (see [33]) Пусть $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ – функция Шварца, и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$|c_4 + (1 + \lambda) c_1 c_3 + c_2^2 + (1 + 2\lambda) c_1^2 c_2 + \lambda c_1^4| \leq \max \{1, |\lambda|\},$$

и

$$|c_4 + 2c_1 c_3 + \lambda c_2^2 + (1 + 2\lambda) c_1^2 c_2 + \lambda c_1^4| \leq \max \{1, |\lambda|\}.$$

3. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ КЛАССА $\mathcal{MSC}(n, b)$

Сначала мы докажем следующий результат для начальных коэффициентов класса $\mathcal{MSC}(n, b)$.

Теорема 3.1. Пусть $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$ с $\phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n$. Тогда

$$(3.1) \quad |a_0| \leq \frac{n+1}{2} \left| \frac{bB_1}{\psi(0, n)} \right|,$$

$$(3.2) \quad |a_1| \leq \frac{n+1}{4} \left| \frac{bB_1}{\psi(1, n)} \right| \left(\max \left\{ 1, \left| \frac{2B_2 - b(n+1)B_1^2}{2B_1} \right| \right\} \right),$$

$$|a_2| \leq \frac{n+1}{6} \left| \frac{bB_1}{\psi(2, n)} \right|,$$

где

$$\psi(j, n) = \frac{\binom{j}{n}}{(-1)^n} \quad (j = 0, 1, 2),$$

$$|8B_2 - 3b(n+1)B_1^2| \leq 4|B_1|,$$

$$\left| b^2(n+1)^2 B_1^3 - 6bB_2(n+1)B_1 + 8B_3 \right| \leq 8|B_1|.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$. Тогда существует функция Шварца такая, что

$$(3.3) \quad 1 - \frac{2}{b} \left(\frac{1}{n+1} \frac{zf^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)} + 1 \right) = \phi(w(z)).$$

Легко видеть, что

$$(3.4) \quad f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} a_m z^{m-n}.$$

В силу (3.3) и (3.4), имеем

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & 1 - \frac{2}{b} \left(\frac{1}{n+1} \frac{z f^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)} + 1 \right) \\
 & = 1 + \frac{2}{b(n+1)} \left[-\psi(0, n) a_0 z + (\psi^2(0, n) a_0^2 - 2\psi(1, n) a_1) z^2 \right. \\
 & \quad \left. - (\psi^3(0, n) a_0^3 - 3\psi(0, n) \psi(1, n) a_0 a_1 + 3\psi(2, n) a_2) z^3 + \dots \right],
 \end{aligned}$$

где

$$\psi(m, n) = \frac{\binom{m}{n}}{(-1)^n},$$

$$(3.6) \quad \phi(w(z)) = 1 + B_1 c_1 z + (B_2 c_1^2 + B_1 c_2) z^2 + (B_3 c_1^3 + 2B_2 c_1 c_2 + B_1 c_3) z^3 + \dots.$$

Из (3.5) и (3.6) следует, что

$$(3.7) \quad a_0 = -\frac{1}{2} \frac{b B_1 c_1 (n+1)}{\psi(0, n)},$$

$$(3.8) \quad a_1 = \frac{1}{8} \frac{b(n+1)}{\psi(1, n)} [b c_1^2 (n+1) B_1^2 - 2B_1 c_2 - 2B_2 c_1^2],$$

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad a_2 = & -\frac{b(n+1)}{48\psi(2, n)} (b^2 n^2 B_1^3 c_1^3 + 2b^2 n B_1^3 c_1^3 - 6bn B_1 B_2 c_1^3 - 6bn B_1^2 c_1 c_2 \\
 & + B_1^3 c_1^3 b^2 - 6b B_1 B_2 c_1^3 - 6b B_1^2 c_1 c_2 + 8B_3 c_1^3 + 16B_2 c_1 c_2 + 8B_1 c_3).
 \end{aligned}$$

Из (3.7), получаем

$$a_0 = -\frac{1}{2} \frac{b B_1 (n+1)}{\psi(0, n)} c_1,$$

откуда следует, что

$$|a_0| = \frac{1}{2} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(0, n)|} |B_1| |c_1|.$$

В силу леммы 2.2,

$$|a_0| \leq \frac{1}{2} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(0, n)|} |B_1|.$$

С учетом (3.8), получим, что

$$|a_1| = \frac{1}{8} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(1, n)|} |b c_1^2 (n+1) B_1^2 - 2B_1 c_2 - 2B_2 c_1^2|,$$

откуда следует, что

$$|a_1| = \frac{1}{4} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(1, n)|} |B_1| \left| c_2 + \frac{2B_2 - b(n+1)B_1^2}{2B_1} c_1^2 \right|.$$

По лемме 2.4 получаем, что

$$|a_1| \leq \frac{1}{4} \frac{|b| (n+1)}{|\psi(1, n)|} |B_1| \left(\max \left\{ 1, \left| \frac{2B_2 - b(n+1)B_1^2}{2B_1} \right| \right\} \right).$$

Из (3.9), имеем

$$\begin{aligned}
 a_2 = & -\frac{b(n+1)}{48\psi(2, n)} (b^2 n^2 B_1^3 c_1^3 + 2b^2 n B_1^3 c_1^3 - 6bn B_1 B_2 c_1^3 - 6bn B_1^2 c_1 c_2 \\
 & + B_1^3 c_1^3 b^2 - 6b B_1 B_2 c_1^3 - 6b B_1^2 c_1 c_2 + 8B_3 c_1^3 + 16B_2 c_1 c_2 + 8B_1 c_3),
 \end{aligned}$$

что приводит к

$$|a_2| = \frac{|b|(n+1)}{6|\psi(2, n)|} |B_1| \times \left| c_3 + \frac{8B_2 - 3b(n+1)B_1^2}{4B_1} c_1 c_2 + \frac{b^2(n+1)^2 B_1^3 - 6bB_2(n+1)B_1 + 8B_3}{8B_1} c_1^3 \right|.$$

Если

$$|8B_2 - 3b(n+1)B_1^2| \leq 4|B_1|$$

и имеет место

$$\left| b^2(n+1)^2 B_1^3 - 6bB_2(n+1)B_1 + 8B_3 \right| \leq |8B_1|,$$

тогда

$$|a_2| \leq \frac{n+1}{6} \frac{|bB_1|}{|\psi(2, n)|}.$$

Теорема 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.2. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$ и

$$|c_1| < \frac{|24\psi(0, n)\psi(2, n)B_1^2 - 1|}{|32B_1^2\psi^2(1, n) - 1| - |24\psi(0, n)\psi(2, n)B_1^2 - 1|},$$

тогда

$$|a_0 a_2 - a_1^2| \leq \frac{1}{192} \frac{|b|^2(n+1)^2}{\psi(0, n)\psi^2(1, n)\psi(2, n)} \left(\frac{1}{2} + \max\{g(|c_1|)\} \right),$$

где

$$g(|c_1|) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2} \left(A - \frac{D}{1+|c_1|} \right) |c_1| + \left(D \frac{|c_1|}{1+|c_1|} - A + E \right) |c_1|^2 - \left(\frac{A}{2} + E \right) |c_1|^3 + \left(F + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2} \frac{|c_1|}{1+|c_1|} D \right)$$

$$A = |24\psi(0, n)\psi(2, n)B_1^2 - 1|,$$

$$D = |32B_1^2\psi(1, n)^2 - 1|,$$

$$E = |(32\psi^2(1, n) - 24\psi(0, n)\psi(2, n))B_1B_2$$

$$-12b(n+1)(\psi^2(1, n) - \psi(0, n)\psi(2, n))B_1^3|,$$

$$F = |-12\psi(0, n)\psi(2, n)B_2^2 - 12b(n+1)(\psi^2(1, n) - \psi(0, n)\psi(2, n))B_1^2B_2$$

$$+b^2(n+1)^2(2\psi^2(1, n) - 3\psi(0, n)\psi(2, n))B_1^4 + 16B_1\psi^2(1, n)B_3|.$$

Доказательство. В силу (3.7) – (3.9), имеем

$$\begin{aligned}
 & a_0 a_2 - a_1^2 \\
 &= \frac{1}{192} \frac{b^2 (n+1)^2}{\psi(0, n) \psi^2(1, n) \psi(2, n)} \{ 16 B_1^2 \psi^2(1, n) c_1 c_3 - 12 \psi(0, n) \psi(2, n) B_1^2 c_2^2 \\
 &+ [(32 \psi^2(1, n) - 24 \psi(0, n) \psi(2, n)) B_1 B_2 \\
 &- 12 b (n+1) (\psi^2(1, n) - \psi(0, n) \psi(2, n)) B_1^3] c_1^2 c_2 \\
 &+ [-12 \psi(0, n) \psi(2, n) B_2^2 - 12 b (n+1) (\psi^2(1, n) - \psi(0, n) \psi(2, n)) B_1^2 B_2 \\
 &+ b^2 (n+1)^2 (2 \psi^2(1, n) - 3 \psi(0, n) \psi(2, n)) B_1^4 + 16 B_1 \psi^2(1, n) B_3] c_1^4 \}.
 \end{aligned}$$

После простых вычислений получим, что

$$\begin{aligned}
 |a_0 a_2 - a_1^2| &= \frac{1}{192} \frac{|b|^2 (n+1)^2}{\psi(0, n) \psi^2(1, n) \psi(2, n)} \\
 &\times \left(\frac{1}{2} |c_1 c_3 - c_2^2| + \frac{1}{2} |c_1| |c_3| D + \frac{1}{2} |c_2|^2 A + E |c_1|^2 |c_2| + F |c_1|^4 \right).
 \end{aligned}$$

Упростив, получим

$$|a_0 a_2 - a_1^2| = \frac{1}{192} \frac{|b|^2 (n+1)^2}{\psi(0, n) \psi^2(1, n) \psi(2, n)} \left(\frac{1}{2} L_1 + L_2 \right),$$

где

$$\begin{aligned}
 L_1 &= |c_1 c_3 - c_2^2|, \\
 L_2 &= \frac{1}{2} |c_1| |c_3| D + \frac{1}{2} |c_2|^2 A + E |c_1|^2 |c_2| + F |c_1|^4.
 \end{aligned}$$

Теперь, по лемме 2.4, получим $L_1 \leq 1$. Для получения оценки L_2 , в силу леммы 2.3, имеем, что

$$L_2 = \frac{1}{2} |c_1| \left(1 - |c_1|^2 - \frac{|c_2|^2}{1 + |c_1|} \right) D + \frac{1}{2} |c_2|^2 A + E |c_1|^2 |c_2| + F |c_1|^4,$$

что эквивалентно

$$L_2 = \frac{1}{2} |c_1| - \frac{1}{2} |c_1|^3 + \frac{1}{2} |c_2|^2 \left(A - \frac{|c_1|}{1 + |c_1|} D \right) + E |c_1|^2 |c_2| + F |c_1|^4.$$

Если $|c_1| < \left| \frac{A}{D-A} \right|$, то

$$L_2 = \left(\frac{1}{2} |c_1| - \frac{1}{2} |c_1|^3 \right) D + \frac{1}{2} (1 - |c_1|^2)^2 \left(A - \frac{|c_1|}{1 + |c_1|} D \right) + E |c_1|^2 (1 - |c_1|) + F |c_1|^4.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 g(|c_1|) &= \frac{1}{2} A + \left(-A + \frac{1}{2} D + E \right) |c_1|^2 + \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} D - E + F \right) |c_1|^4, \\
 L_2 &\leq \max\{g(|c_1|)\},
 \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$|a_0 a_2 - a_1^2| \leq \frac{1}{192} \frac{|b|^2 (n+1)^2}{\psi(0, n) \psi^2(1, n) \psi(2, n)} \left(\frac{1}{2} + \max\{g(|c_1|)\} \right).$$

Теорема 3.2 доказана. $\square$

Теорема 3.3. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$, тогда

$$|a_0 a_1 - a_2| \leq \frac{n+1}{6} \left| \frac{bB_1}{\psi(2, n)} \right|$$

для $|A_1| \leq \frac{|A_3|}{2}$ и $|A_2| \leq |A_3|$, где

$$A_1 = 16\psi(0, n)\psi(1, n)B_2 - 6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) - \psi(2, n))B_1^2,$$

$$A_2 = 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_3 - 6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) - \psi(2, n))B_1B_2 \\ + b^2(n+1)^2(\psi(0, n)\psi(1, n) - 3\psi(2, n))B_1^3,$$

$$A_3 = 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_1.$$

Доказательство. В силу (3.7) – (3.9), имеем

$$|a_0 a_1 - a_2| = \left| \frac{(n+1)b}{48\psi(0, n)\psi(1, n)\psi(2, n)} \right| |A_1 c_1 c_2 + A_2 c_1^3 + A_3 c_3|.$$

После вычислений,

$$|a_0 a_1 - a_2| = \left| \frac{(n+1)b}{6\psi(2, n)} B_1 \right| \left| c_3 + \frac{A_1}{A_3} c_1 c_2 + \frac{A_2}{A_3} c_1^3 \right|.$$

Из $|A_1| \leq \frac{|A_3|}{2}$ и $|A_2| \leq |A_3|$, заключаем, что утверждение теоремы 3.3 имеет место. $\square$

Теорема 3.4. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$, тогда

$$|a_1 - \lambda a_0^2| \leq \frac{n+1}{4} |bB_1| \left| \frac{\psi(0, n)}{\psi(1, n)} \right| \\ \times \left(\max \left\{ 1, \left| \frac{b(n+1)}{2\psi^2(0, n)} \{ [2\psi(1, n)\lambda - \psi^2(0, n)] B_1^2 + 2\psi^2(0, n) B_2 \} \right| \right\} \right).$$

Доказательство. В силу (3.7) и (3.8), имеем

$$|a_1 - \lambda a_0^2| = \frac{1}{4} \frac{|b|(n+1)\psi(0, n)}{|\psi(1, n)|} |B_1| \\ \times \left| c_2 + \frac{b(n+1)}{2\psi^2(0, n)} \{ [2\psi(1, n)\lambda - \psi^2(0, n)] B_1^2 + 2\psi^2(0, n) B_2 \} c_1^2 \right|.$$

По лемме 2.4, получим утверждение теоремы 3.4. $\square$

4. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Для функции вида (1.1), $f^{-1}(\omega)$ есть обратная функция функции $f(z)$ и определена равенством

$$(4.1) \quad f^{-1}(\omega) = \frac{1}{\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n = \frac{1}{\omega} - a_0 - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \Lambda_{n+1}^n \omega^n,$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda_{n+1}^n &= na_0^{n-1}a_1 + n(n-1)a_0^{n-2}a_2 + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)a_0^{n-3}(a_3 + a_1^2) \\ &\quad + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(n-3)a_0^{n-4}(a_4 + 3a_1a_2) + \sum_{l \geq 5} a_0^{n-l}\eta_l\end{aligned}$$

а η_l with $5 \leq l \leq n$ – однородный полином степени l относительно переменных $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Из (4.1), имеем

$$\begin{aligned}(4.2) \quad b_0 &= -a_0, b_1 = -a_1, b_2 = -(a_2 + a_0a_1), \\ b_3 &= -(a_3 + 2a_0a_2 + a_0^2a_1 + a_1^2).\end{aligned}$$

Теорема 4.1. Пусть $f \in \text{MSC}(n, b)$ с обратными коэффициентами задана в (4.1). Тогда

$$\begin{aligned}|b_0| &\leq \frac{n+1}{2} \left| \frac{bB_1}{\psi(0, n)} \right|, \\ |b_1| &\leq \frac{n+1}{4} \left| \frac{bB_1}{\psi(0, n)} \right| \cdot \max \left\{ 1, \left| \frac{1}{2}b(n+1)B_1 - \frac{B_2}{B_1} \right| \right\}, \\ |b_2| &\leq \frac{n+1}{6} \left| \frac{bB_1}{\psi(2, n)} \right|\end{aligned}$$

для $|A| \leq \frac{|E|}{2}$ и $|D| \leq |E|$, где A, D и E определены в (4.6).

Доказательство. В силу (3.7) – (3.9) и (4.2), имеем

$$(4.3) \quad b_0 = \frac{1}{2} \frac{bB_1c_1(n+1)}{\psi(0, n)},$$

$$(4.4) \quad b_1 = \frac{1}{8} \frac{b(n+1)}{\psi(0, n)} \{2B_1c_2 - [b(n+1)B_1^2 - 2B_2]c_1^2\},$$

и

$$(4.5) \quad b_2 = \frac{1}{48} \frac{b(n+1)}{\psi(0, n)\psi(1, n)\psi(2, n)} (Ac_1c_2 + Dc_1^3 + Ec_3),$$

где

$$\begin{aligned}(4.6) \quad A &= -6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) + \psi(2, n))B_1^2 + 16\psi(0, n)\psi(1, n)B_2, \\ D &= -6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) + \psi(2, n))B_1B_2 + 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_3 \\ &\quad + b^2(n+1)^2(\psi(0, n)\psi(1, n) + 3\psi(2, n))B_1^3, \\ E &= 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_1.\end{aligned}$$

Из (4.3), находим, что

$$b_0 = \frac{1}{2} \frac{bB_1c_1(n+1)}{\psi(0, n)}.$$

Отметив, что $|c_1| \leq 1$, находим, что

$$|b_0| \leq \frac{1}{2} \frac{n+1}{|\psi(0, n)|} |bB_1|.$$

Аналогично, в силу (4.4), находим, что

$$\begin{aligned} |b_1| &= \frac{1}{8} \frac{|b|(n+1)}{|\psi(0, n)|} |2B_1c_2 - (b(n+1)B_1^2 - 2B_2)c_1^2| \\ &= \frac{1}{4} \frac{|b|(n+1)}{|\psi(0, n)|} |B_1| \left| c_2 - \left(\frac{1}{2}b(n+1)B_1 - \frac{B_2}{B_1} \right) c_1^2 \right|. \end{aligned}$$

С учетом (2.4) получаем, что

$$|b_1| \leq \frac{1}{4} \frac{|b|(n+1)}{|\psi(0, n)|} |B_1| \cdot \max \left\{ 1, \left| \frac{1}{2}b(n+1)B_1 - \frac{B_2}{B_1} \right| \right\}.$$

Теперь, из (4.5) следует, что

$$b_2 = \frac{1}{48} \frac{b(n+1)}{\psi(0, n)\psi(1, n)\psi(2, n)} (Ac_1c_2 + Dc_1^3 + Ec_3).$$

С помощью простых вычислений, получаем

$$|b_2| \leq \frac{1}{6} \frac{n+1}{|\psi(2, n)|} |bB_1| \left| c_3 + \frac{A}{E}c_1c_2 + \frac{D}{E}c_1^3 \right|.$$

Если $|A| \leq \frac{|E|}{2}$ и $|D| \leq |E|$, в силу леммы 2.2, заключаем, что

$$|b_2| \leq \frac{1}{6} \frac{n+1}{|\psi(2, n)|} |bB_1|.$$

Теорема 4.2. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$ с обратными коэффициентами как в (4.1), тогда

$$|b_0b_1 - b_2| \leq \frac{n+1}{6} \left| \frac{bB_1}{\psi(2, n)} \right|$$

для $|D_1| \leq \frac{|D_3|}{2}$ и $|D_2| \leq |D_3|$, где

$$\begin{aligned} D_1 &= 16\psi(1, n)\psi(0, n)B_2 - 6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) + 2\psi(2, n))B_1^2, \\ D_2 &= 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_3 - 6b(n+1)(\psi(0, n)\psi(1, n) + 2\psi(2, n))B_1B_2 \\ &\quad + b^2(n+1)^2(\psi(0, n)\psi(1, n) + 6\psi(2, n))B_1^3, \\ D_3 &= 8\psi(0, n)\psi(1, n)B_1. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу (4.3) – (4.5) имеем, что

$$|b_0b_1 - b_2| = \frac{1}{48} \frac{|b|(n+1)}{|\psi(0, n)||\psi(1, n)||\psi(2, n)|} |D_3c_3 + D_1c_1c_2 + D_2c_1^3|.$$

Следовательно,

$$|b_0b_1 - b_2| = \frac{1}{6} \frac{n+1}{|\psi(2, n)|} |bB_1| \left| c_3 + \frac{D_1}{D_3}c_1c_2 + \frac{D_2}{D_3}c_1^3 \right|.$$

Если $|D_1| \leq \frac{|D_3|}{2}$ и $|D_2| \leq |D_3|$, по лемме 2.2 заключаем, что утверждение теоремы 4.2 имеет место. $\square$

Теорема 4.3. Если $f \in \mathcal{MSC}(n, b)$ с обратными коэффициентами как в (4.1), тогда

$$|b_1^2 - \lambda b_0| \leq \frac{n+1}{4} \left| \frac{bB_1}{\psi(1, n)} \right| \times \left(\max \left\{ 1, \left| \frac{[b(n+1)(\psi^2(0, n) + 2\lambda\psi(1, n))B_1^2 - 2\psi^2(0, n)B_2]}{2\psi^2(0, n)B_1} \right| \right\} \right).$$

Доказательство. Из (4.3) и (4.4), имеем, что

$$|b_1^2 - \lambda b_0| = \frac{1}{4} \frac{n+1}{|\psi(1, n)|} |bB_1| \times \left| c_2 - \frac{[b(n+1)(\psi^2(0, n) + 2\lambda\psi(1, n))B_1^2 - 2\psi^2(0, n)B_2]}{2\psi^2(0, n)B_1} c_1^2 \right|.$$

В силу (2.4), заключаем, что утверждение теоремы 4.3 имеет место. $\square$

Замечание 4.1. Выбрав в полученных результатах специальным образом n, b и $\phi(z)$, мы получим некоторые известные результаты. Мы опускаем подробности.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения, которые существенным образом повысили качество данной статьи.

Abstract. The main purpose of this paper is to study coefficient bounds of a class of meromorphic functions involving higher order derivative. Several similar inequalities are also established for the inverse functions of the considered class of meromorphic functions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Clunie, "On meromorphic schlicht functions", J. London Math. Soc., **34**, 115 – 116 (1959).
- [2] C. Pommerenke, "Über einige Klassen meromorpher schlichter Funktionen", Math. Z., **78**, 263 – 284 (1962).
- [3] R. Libera, M. S. Robertson, "Meromorphic close-to-convex functions", Michigan Math. J., **8**, 167 – 175 (1961).
- [4] L. de Branges, "A proof of Bieberbach conjecture", Acta Math., **154**, 137 – 152 (1985).
- [5] W. K. Hayman, "On the second Hankel determinant of mean univalent function", Proc. London. Math. Soc., **3**, 77 – 94 (1968).
- [6] K. I. Noor, "On the Hankel determinant problem for strongly close-to-convex functions", J. Nat. Geom., **11**, 29 – 34 (1997).
- [7] Z.-G. Wang, H. M. Srivastava, M. Arif, Z.-H. Liu, K. Ullah, "Sharp bounds on Hankel determinants of bounded turning functions involving the hyperbolic tangent function", Appl. Anal. Discrete Math., doi: 10.2298/AADM221203013W, (2024).
- [8] Z.-G. Wang, M. Raza, M. Arif, K. Ahmad, "On the third and fourth Hankel determinants of a subclass of analytic functions", Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **45**, 323 – 359 (2022).
- [9] K. O. Babalola, "On $H_3(1)$ Hankel determinants for some classes of univalent functions", Inequality Theory and Applications, 1 – 7 (2010).

- [10] A. K. Mishra, J. K. Prajapat, S. Maharana, “Bounds on Hankel determinant for starlike and convex functions with respect to symmetric points”, *Cogent Math.*, **3**, Art. ID 1160557, 9 pp. (2016).
- [11] M. Raza, S. N. Malik, “Upper bound of the third Hankel determinant for a class of analytic functions related with lemniscate of Bernoulli”, *J. Inequal. Appl.*, **2013**, 2013:412, 8 pp.
- [12] Z.-G. Wang; M. Hussain, X.-Y. Wang, “On sharp solutions to majorization and Fekete-Szegő problems for starlike functions”, *Miskolc Math. Notes*, **24**, 1003 – 1019 (2023).
- [13] M. Schiffer, “Sur un problème d’extremum de la représentation conforme”, *Bull. Soc. Math. France*, **66**, 48 – 55 (1938).
- [14] P. L. Duren, “Coefficients of meromorphic schlicht functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **28**, 169 – 172 (1971).
- [15] G. Springer, “The coefficient problem for schlicht mappings of the exterior of the unit circle”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70**, 421 – 450 (1951).
- [16] Y. Kubota, “Coefficients of meromorphic univalent functions”, *Kodai Math. Semin. Rep.*, **28**, 253 – 261 (1977).
- [17] G. Schober, “Coefficients of inverses of meromorphic univalent functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **67**, 111 – 116 (1977).
- [18] G. P. Kapoor, A. K. Mishra, “Coefficient estimates for inverses of starlike functions of positive order”, *J. Math. Anal. Appl.*, **329**, 922 – 934 (2007).
- [19] H. M. Srivastava, A. K. Mishra, S. N. Kund, “Coefficient estimates for the inverses of starlike functions represented by symmetric gap series”, *Panamer. Math. J.*, **21**, 105 – 123 (2011).
- [20] S. G. Hamidi, S. A. Halim, J. M. Jahangiri, “Faber polynomial coefficient estimates for meromorphic bi-starlike functions”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, Art. ID 498159, 4 pp. (2013).
- [21] S. G. Hamidi, S. A. Halim, J. M. Jahangiri, “Coefficient estimates for a class of meromorphic bi-univalent functions”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **351**, 349 – 352 (2013).
- [22] R. Chandrashekar, R. M. Ali; S. K. Lee, V. Ravichandran, “Convolutions of meromorphic multivalent functions with respect to n -ply points and symmetric conjugate points”, *Appl. Math. Comput.*, **218**, 723 – 728 (2011).
- [23] R. M. Ali, R. Chandrashekar, S. K. Lee, A. Swaminathan, V. Ravichandran, “Differential sandwich theorem for multivalent meromorphic functions associated with the Liu-Srivastava operator”, *Kyungpook Math. J.*, **51**, 217 – 232 (2011).
- [24] R. M. Ali, V. Ravichandran, N. Seenivasagan, “On subordination and superordination of the multiplier transformation for meromorphic functions”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)*, **33**, 311 – 324 (2010).
- [25] D. Breaz, K. R. Karthikeyan, E. Umadevi, “Subclasses of multivalent meromorphic functions with a pole of order p at the origin”, *Mathematics*, **10**, Article 600 (2022).
- [26] E. E. Ali, H. M. Srivastava, A. Y. Lashin, A. M. Albalahi, “Applications of some subclasses of meromorphic functions associated with the q -derivatives of the q -binomials”, *Mathematics*, **11**, Article 2496 (2023).
- [27] I. Al-Shbeil, J. Gong, S. Ray, S. Khan, N. Khan, H. Alaqad, “The properties of meromorphic multivalent q -starlike functions in the Janowski domain”, *Fractal Fract.*, **7**, Article 438 (2023).
- [28] E.-A. Tatoi, L.-I. Cotîrlă, “Preserving classes of meromorphic functions through integral operators”, *Symmetry*, **14**, Article 1545 (2022).
- [29] P. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag (1983).
- [30] D. V. Prokhorov, J. Szynal, “Inverse coefficients for (a, b) -convex functions”, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, **35**, 125 – 143 (1981).
- [31] F. Carlson, *Sur les Coefficients D’une Fonction Bornée Dans Le Cercle Unité*; Almqvist Wiksell: Stockholm, Sweden (1940).
- [32] P. Zaprawa, “On coefficient problems for functions starlike with respect to symmetric points”, *Bol. Soc. Mat. Mex. (3)*, **28**, No. 17, 12 pp. (2022).
- [33] I. Efraimidis, “A generalization of Livingston’s coefficient inequalities for functions with positive real part”, *J. Math. Anal. Appl.*, **435**, 369–379 (2016).

Поступила 11 ноября 2023

После доработки 22 января 2024

Принята к публикации 04 февраля 2024