

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵԴԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 59 № **5** 2024

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Աթաբեկյան

Կ. Լ. Ավետիսյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Մ. Ս. Գինովյան

Ա. Ս. Դալայան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ)

Խ. Ա. Խաչատրյան

Գ. Ա. Կարազուլյան

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Յ. Շահգուլյան

Ա. Շիրիկյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Ահարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

К. Л. Аветисян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

А. С. Далалян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

Б. С. Нахапетян

Г. А. Карагулян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

Х. А. Хачатрян

Г. Шахголян

А. Ширикян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 59, номер 5, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

К. Аветисян, Проекция типа Бергмана на пространствах Липшица	3
Г. Г. ГЕВОРКЯН, Некоторые оценки функций общей системы Франклина	15
Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН, Сравнение трехслойных многочленов многих переменных	29
С. МАДЖУМДЕР, Н. САРКАР и Дж. САРКАР, Мероморфная функция, делящая две пары малых функций IM	46 – 65

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 59, No. 5, 2024

CONTENTS

K. AVETISYAN, Bergman type proection on Lipshice plane	3
G. G. GEVORGYAN, Some estimates of functions of general Franklin system	15
G. G. KAZARYAN, V. G. MARGARYAN, Comparision of three-layer polynomials of many variables	29
S. MAJUMDER, N. SARKAR AND J. SARKAR, Meromorphic function sharing two pairs of small functions IM	46 – 65

ПРОЕКЦИЯ ТИПА БЕРГМАНА НА ПРОСТРАНСТВАХ ЛИПШИЦА

К. АВЕТИСЯН

Ереванский государственный университет¹

E-mail: *avetkaren@ysu.am*

Аннотация. В единичном шаре пространства $\mathbb{R}^n$ с использованием дробных производных и воспроизводящих ядер типа Пуассона–Бергмана определены весовые операторы типа Бергмана, которые ограничено действуют в липшицевых пространствах. В специальном случае эти операторы отображают пространство Липшица достаточно гладких функций на свое гармоническое подпространство.

MSC2020 number: 31B05; 46E15; 47B32.

Ключевые слова: Проекция Бергмана; пространство Липшица; дробная производная; ядро Пуассона–Бергмана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как показали Стейн [1] и Лигоцка [2], невесовая проекция Бергмана сохраняет классы Липшица–Гельдера в единичном шаре и строго псевдовыпуклых областях из $\mathbb{C}^n$. Подобная инвариантность классов Липшица имеет место также для весовых проекций Бергмана в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$, см. [3], [4]. В настоящей статье мы намерены обобщить некоторые наши результаты из [4], [5] для весовых гармонических проекционных операторов типа Бергмана, которые действуют на пространствах Липшица в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$.

Пусть $B = B_n$ – открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), а $S = \partial B$ – его граница, единичная сфера. Множество всех (вещественных) гармонических функций в шаре B обозначим через $h(B)$. В статье используем обычные обозначения. Точки в $\mathbb{R}^n$ всегда будем представлять как $x = r\zeta$, $y = \rho\eta$ или $x = rx'$, $y = \rho y'$, где $|x| = r$, $|y| = \rho$ и $\zeta, \eta, x', y' \in S$. Буквы $C(\alpha, \beta, \dots)$, C_α и т.п. обозначают различные положительные постоянные, зависящие только от указанных параметров. Иногда эту зависимость явно указывать не будем. Множество положительных

¹Настоящее исследование выполнено в рамках внутреннего гранта ЕГУ и при поддержке Центра Математических Исследований Ереванского Государственного Университета

целых чисел обозначим через $\mathbb{N}$, а также $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Символ $[\alpha]$ означает целую часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$, т.е. наибольшее целое число, не превышающее α . Будем писать $T : X \rightarrow Y$, если T – ограниченный оператор, отображающий X в Y , т.е. $\|Tf\|_Y \leq C\|f\|_X \quad \forall f \in X$. Через dV обозначим объемную меру Лебега на B , нормированную условием $V(B) = 1$. В полярных координатах имеем $dV(x) = n r^{n-1} dr d\sigma(\zeta)$, где $d\sigma$ – $(n-1)$ -мерная поверхностная мера на S , нормированная так, что $\sigma(S) = 1$.

Определение 1.1. Скажем, что определенная в единичном шаре B функция $f(x)$ принадлежит пространству роста $G_\alpha(B)$, $\alpha \geq 0$, если

$$|f(x)| \leq \frac{C_\alpha}{(1-|x|)^\alpha}, \quad x \in B,$$

с некоторой постоянной $C_\alpha > 0$. Пространство $G_\alpha(B)$ снабжено нормой

$$\|f\|_{G_\alpha} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in B} (1-|x|)^\alpha |f(x)|.$$

Подпространство, состоящее из гармонических функций, обозначим через hG_α , т.е. $hG_\alpha := h(B) \cap G_\alpha$. Иногда hG_α называют пространствами Берса.

Часто эту норму удобно представлять через полярные координаты:

$$\|f\|_{G_\alpha} = \sup_{0 \leq r < 1} (1-r)^\alpha M_\infty(f; r), \quad \text{где } M_\infty(f; r) := \|f(r \cdot)\|_{L^\infty(S)}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Определение 1.2. Функция f , достаточно гладкая в единичном шаре B , по определению принадлежит пространству Липшица Λ_α ($\alpha > 0$), если

$$(1-|x|)^{[\alpha]+1-\alpha} |\mathcal{D}^{[\alpha]+1} f(x)| \leq C(\alpha, n), \quad x \in B.$$

Здесь $\mathcal{D}^\gamma$ – оператор дробного дифференцирования порядка $\gamma > 0$, который будет определен в Разделе 2. Норму в Λ_α можно определить как

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} := \|\mathcal{D}^{[\alpha]+1} f\|_{G_{[\alpha]+1-\alpha}}.$$

Предположение гладкости функции f можно взять с порядком $[\alpha] + 1$, т.е. $f(x) \in C^{[\alpha]+1}(B)$. Обозначим через $h\Lambda_\alpha$ подпространство пространства Λ_α , состоящее из гармонических функций, $h\Lambda_\alpha := h(B) \cap \Lambda_\alpha$.

Заметим, что для $f \in h\Lambda_\alpha$ индекс $[\alpha] + 1$ можно заменить на любое $\gamma > \alpha$, при этом получаются эквивалентные нормы $\|f\|_{\Lambda_\alpha} \approx \|\mathcal{D}^\gamma f\|_{G_{\gamma-\alpha}}$, см., например, [6].

Воспроизводящая интегральная формула (1.1) в следующей теореме хорошо известна и обычно приводится для гармонических пространств Бергмана $h_\alpha^p(B)$,

см., например, [7] – [9],

$$L_\alpha^p(B) := L^p(B, (1 - |x|)^\alpha dV(x)), \quad h_\alpha^p(B) := L_\alpha^p(B) \cap h(B), \quad 0 < p < \infty, \alpha > -1.$$

Для широких весовых классов и значений параметров, в частности для пространств роста hG_α , формулу (1.1) можно найти в [10].

Теорема А. *Если $\beta > \alpha > 0$, то для произвольной функции $u \in hG_\alpha(B)$ или $u \in h_{\beta-1}^1(B)$ имеет место представление*

$$(1.1) \quad u(x) = \frac{2}{n \Gamma(\beta)} \int_B (1 - |y|^2)^{\beta-1} P_\beta(x, y) u(y) dV(y), \quad x \in B,$$

где P_β – гармоническое воспроизводящее ядро типа Пуассона–Бергмана, определенное в Разделе 3.

Интегральная формула (1.1) порождает семейство проекционных операторов Бергмана

$$T_\beta(u)(x) := \frac{2}{n \Gamma(\beta)} \int_B (1 - |y|^2)^{\beta-1} P_\beta(x, y) u(y) dV(y), \quad x \in B.$$

Теорема А утверждает, что оператор T_β есть тождественное отображение на hG_α или на h_α^p . Голоморфные и гармонические версии оператора T_β изучены, например в [7], [9], [11] – [16]. Одним из основных результатов с оператором T_β в этих работах является факт непрерывной проекции весового пространства Лебега L_α^p на свое гармоническое подпространство Бергмана, $T_\beta : L_\alpha^p \xrightarrow{\text{onto}} h_\alpha^p$, $\beta > (\alpha + 1)/p > 0$, $1 \leq p < \infty$.

В нашей основной теореме найдено семейство ограниченных операторов типа Бергмана на пространствах Липшица Λ_α .

Теорема 1.1. *Для параметров $0 < \alpha < \delta \leq [\alpha] + 1$, $0 \leq \lambda < \alpha + \beta - \delta$, оператор (типа Бергмана)*

$$\Phi_{\beta, \lambda, \delta}(f)(x) := \frac{2}{n \Gamma(\beta)} \int_B (1 - |y|^2)^{\beta-1} P_\lambda(x, y) \mathcal{D}^\delta f(y) dV(y)$$

непрерывно отображает пространство Липшица достаточно гладких функций Λ_α на гармоническое пространство $h\Lambda_{\alpha+\beta-\delta-\lambda}$,

$$\Phi_{\beta, \lambda, \delta} : \Lambda_\alpha \xrightarrow{\text{onto}} h\Lambda_{\alpha+\beta-\delta-\lambda},$$

с неравенством для норм

$$\|\Phi_{\beta, \lambda, \delta}(f)\|_{h\Lambda_{\alpha+\beta-\delta-\lambda}} \leq C(\alpha, \beta, \delta, \lambda, n) \|f\|_{\Lambda_\alpha}.$$

В частности, при $\beta = \delta + \lambda$ оператор $\Phi_{\beta, \lambda, \beta - \lambda}$ ограниченно отображает пространство Липшица Λ_α на свое гармоническое подпространство $h\Lambda_\alpha$, т.е. $\Phi_{\beta, \lambda, \beta - \lambda} : \Lambda_\alpha \xrightarrow{\text{onto}} h\Lambda_\alpha$.

2. О ДРОБНОМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ В $\mathbb{R}^n$

В этом разделе мы приводим (а затем уточняем) определения хорошо известного оператора дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля D^α , а также его разновидностей $\mathcal{D}^\alpha$ и $\mathcal{D}_{n, \lambda}^\alpha$, введенных в [10], [17].

Определение 2.1. (Классический дробный оператор Римана–Лиувилля)

Для функции $f(r)$ одной переменной $r \in [0, 1]$ определим оператор интегродифференцирования

$$D^{-\alpha} f(r) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tr) dt,$$

$$D^m f(r) := \left(\frac{d}{dr} \right)^m f(r), \quad D^\alpha f(r) := D^{-(m-\alpha)} D^m f(r), \quad D^0 f := f,$$

где $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$.

Определение 2.2. (Дробный интеграл и производная в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)

Для заданной функции $f(x)$ в единичном шаре B и параметров $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n, \lambda}^{-\alpha} f(x) &:= r^{-(\alpha + \lambda + n/2 - 1)} D^{-\alpha} \left\{ r^{\lambda + n/2 - 1} f(x) \right\} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tx) t^{\lambda + n/2 - 1} dt, \\ \mathcal{D}_{n, \lambda}^\alpha f(x) &:= r^{-(\lambda + n/2 - 1)} D^\alpha \left\{ r^{\lambda + n/2 - 1} f(x) \right\}, \quad \mathcal{D}_{n, \lambda}^0 f := f, \quad r = |x|. \end{aligned}$$

При $\lambda = 0$ будем просто писать $\mathcal{D}^\beta := \mathcal{D}_{n, 0}^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Очевидно $\mathcal{D}_{n, \lambda}^{-\alpha} |f(x)| \leq \mathcal{D}^{-\alpha} |f(x)|$ при $\lambda \geq 0$. Общая формула

$$\mathcal{D}_{n, \lambda}^m f(x) = r^{-(\lambda + n/2 - 1)} \frac{\partial^m}{\partial r^m} \left[r^{m + \lambda + n/2 - 1} f(x) \right], \quad m \in \mathbb{N},$$

в частности приводит к явному виду дробных производных низших порядков

$$(2.1) \quad \mathcal{D}_{n, \lambda}^1 f(x) = \left(\lambda + \frac{n}{2} \right) f + r \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda f(x) + \mathcal{D}^1 f(x),$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{n, \lambda}^2 f(x) &= \left(\lambda + 1 + \frac{n}{2} \right) \left(\lambda + \frac{n}{2} \right) f(x) + 2 \left(\lambda + 1 + \frac{n}{2} \right) r \frac{\partial f}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \\ &= \lambda(\lambda + 1) f(x) + 2\lambda \mathcal{D}^1 f(x) + \mathcal{D}^2 f(x). \end{aligned}$$

Определение 2.2 приводит также к формуле обращения для достаточно гладких функций $f(x)$:

$$(2.3) \quad \mathcal{D}_{n,\lambda}^\alpha \mathcal{D}_{n,\lambda}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{n,\lambda}^{-\alpha} \mathcal{D}_{n,\lambda}^\alpha f(x) = f(x), \quad x \in B, \quad \alpha > 0, \quad \lambda \geq 1 - \frac{n}{2}.$$

Некоторые другие свойства дробных операторов, такие как полугрупповые и коммутационные формулы, установлены в [10], [17] и в следующих двух леммах.

Лемма 2.1. *Для достаточно гладкой функции $f(x)$ в единичном шаре B имеют место следующие полугрупповые и коммутационные формулы ($\delta \geq 1 - n/2$):*

$$(2.4) \quad \mathcal{D}_{n,\alpha}^{-(\beta-\alpha)} f(x) = \mathcal{D}^{-\beta} \mathcal{D}^\alpha f(x), \quad \beta > \alpha > 0,$$

$$(2.5) \quad \mathcal{D}^\beta \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} \mathcal{D}^\beta f(x), \quad \alpha, \beta > 0,$$

$$(2.6) \quad \text{в частности для } \delta = 0, \quad \mathcal{D}^\beta \mathcal{D}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}^{-\alpha} \mathcal{D}^\beta f(x), \quad \alpha, \beta > 0,$$

$$(2.7) \quad \mathcal{D}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{n,\alpha}^{-(\beta-\alpha)} \mathcal{D}^\beta f(x), \quad \beta > \alpha > 0,$$

$$(2.8) \quad \mathcal{D}^{\alpha+\beta} f(x) = \mathcal{D}_{n,\alpha}^\beta \mathcal{D}^\alpha f(x), \quad \alpha, \beta > 0.$$

Доказательство. Определения 2.1, 2.2 и формулы (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-\beta} \mathcal{D}^\alpha f &= r^{-(\beta+n/2-1)} D^{-\beta} \{r^{n/2-1} \mathcal{D}^\alpha f(x)\} = \\ &= r^{-(\beta+n/2-1)} D^{-(\beta-\alpha)} \left[r^{\alpha+n/2-1} r^{-(\alpha+n/2-1)} D^{-\alpha} \{r^{n/2-1} \mathcal{D}^\alpha f(x)\} \right] = \\ &= r^{-(\beta+n/2-1)} D^{-(\beta-\alpha)} \left[r^{\alpha+n/2-1} \mathcal{D}^{-\alpha} \mathcal{D}^\alpha f(x) \right] = \\ &= r^{-\alpha} r^{-(\beta-\alpha+n/2-1)} D^{-(\beta-\alpha)} \left[r^{n/2-1} r^\alpha f(x) \right] = r^{-\alpha} \mathcal{D}^{-(\beta-\alpha)} \left[r^\alpha f(x) \right] = \\ &= r^{-\alpha} r^\alpha \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-\alpha-1} f(tx) t^{\alpha+n/2-1} dt = \mathcal{D}_{n,\alpha}^{-(\beta-\alpha)} f(x), \end{aligned}$$

для $\beta > \alpha > 0$. Это доказывает формулу (2.4). Предположим, что $\beta = m$ целое число и покажем, что

$$(2.9) \quad \mathcal{D}^m \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} \mathcal{D}^m f(x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Действительно, сперва покажем более простую коммутационную формулу

$$(2.10) \quad r^m \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} \{r^m \mathcal{D}^m f(x)\}, \quad x = r\zeta.$$

Для этого разложим ее, используя очевидную формулу $\frac{\partial^m}{\partial r^m} f(tr\zeta) = t^m \frac{\partial^m}{\partial (tr)^m} f(tr\zeta)$,

$$\begin{aligned} r^m \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} f(x) &= r^m \frac{\partial^m}{\partial r^m} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tx) t^{\delta+n/2-1} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \left[(tr)^m \frac{\partial^m}{\partial (tr)^m} f(tx) \right] t^{\delta+n/2-1} dt = \\ &= \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} \{r^m \mathcal{D}^m f(x)\}, \end{aligned}$$

что совпадает с (2.10). Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ найдутся постоянные $c_k = c_k(m, n) > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$) такие, что

$$(2.11) \quad \mathcal{D}^m f(x) = r^{-(n/2-1)} D^m \{r^{m+n/2-1} f(x)\} = \sum_{k=0}^m c_k r^k D^k f(x).$$

Тогда посредством (2.10) и (2.11) получим (2.9):

$$\mathcal{D}^m \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^n c_k r^k D^k \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^m c_k r^k D^k f(x) \right\} = \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} \mathcal{D}^m f(x).$$

Теперь используя (2.4), (2.9) и теорему Фубини, приходим к

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} \mathcal{D}^\beta f(x) &= \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} \mathcal{D}^m \mathcal{D}_{n,\beta}^{-(m-\beta)} f(x) = \mathcal{D}^m \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} \mathcal{D}_{n,\beta}^{-(m-\beta)} f(x) = \\ &= \mathcal{D}^m \mathcal{D}_{n,\beta}^{-(m-\beta)} \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}^\beta \mathcal{D}_{n,\delta}^{-\alpha} f(x), \end{aligned}$$

при $m > \beta$. Это завершает доказательство (2.5) и (2.6).

Формулы (2.7) и (2.8) выводятся сочетанием (2.4) и (2.6) вместе с формулой обращения (2.3) или подстановкой $\mathcal{D}^\beta f =: g$. $\square$

Формулы (2.8) и (2.1) немедленно приводят к рекуррентному соотношению для дробных производных.

Лемма 2.2. *Имеет место рекуррентная формула*

$$(2.12) \quad \mathcal{D}^{m+1} f = (m + \mathcal{D}^1) \mathcal{D}^m f = \mathcal{D}^m (m + \mathcal{D}^1) f = \mathcal{D}_{n,m}^1 \mathcal{D}^m f = \mathcal{D}^m \mathcal{D}_{n,m}^1 f,$$

для $m \in \mathbb{N}_0$ и всех достаточно гладких функций.

Отметим, что формула (2.12) есть обобщение такой же формулы с ядром Пуассона P_0 взамен общей функции f , см. [13, р.91], [14, р.238]. Нам также потребуются стандартные интегральные неравенства:

$$(2.13) \quad \int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - x|^{\alpha+n-1}} \leq C(\alpha, n) \frac{1}{(1 - |x|)^\alpha}, \quad x \in B,$$

$$(2.14) \quad \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt \leq C(\alpha, \beta) \frac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}, \quad 0 < r < 1,$$

$$(2.15) \quad \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{|\eta - tx|^\beta} dt \leq C(\alpha, \beta, n) \frac{1}{|\eta - x|^{\beta-\alpha}}, \quad \eta \in S, x \in B,$$

для $\beta > \alpha > 0$. Оценки (2.13)-(2.15) хорошо известны и могут быть найдены, например, в [8], [9], [13] – [15].

3. Ядро Пуассона–Бергмана P_α и оценки СВЕРХУ

Расширенное ядро Пуассона в единичном шаре дается в виде

$$P(x, y) \equiv P_0(x, y) := \frac{1 - |x|^2|y|^2}{(1 - 2x \cdot y + |x|^2|y|^2)^{n/2}} = \frac{1 - |x|^2|y|^2}{[x, y]^n}, \quad x \in B, \ y \in \bar{B}.$$

Здесь и после будем использовать обозначение $[x, y] := \sqrt{1 - 2x \cdot y + |x|^2|y|^2}$, где $x \cdot y$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.1. (Гармоническое ядро Пуассона–Бергмана в B , [10])

$$P_\alpha(x, y) := \mathcal{D}^\alpha P(x, y), \quad x, y \in B, \quad \alpha \geq 0,$$

где дифференцирование $\mathcal{D}^\alpha$ подразумеваем относительно x либо y , поскольку $\mathcal{D}_x^\alpha P(x, y) = \mathcal{D}_y^\alpha P(x, y)$.

Эквивалентные или схожие ядра, в основном определенные посредством разложений в ряд зональных и сферических гармоник, можно найти в [11] (для целых α), [7] – [10], [13] – [16]. Заметим, что ядро Пуассона–Бергмана $P_\alpha(x, y)$ гармонично в B по обоим переменным x и y , $P_\alpha(x, y) = P_\alpha(y, x)$, а также непрерывно продолжаемо на $\bar{B}$ по одной переменной, когда вторая фиксирована в B . Вывод явной формулы ядра Пуассона–Бергмана первого порядка $P_1 = \mathcal{D}^1 P_0$ прямым дифференцированием через (2.1) дает замкнутый явный вид ядра P_1 ,

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= \frac{n}{2} P_0 + r \frac{\partial P_0}{\partial r} = \frac{(n-4)|x|^4|y|^4 + (8x \cdot y - 2n - 4)|x|^2|y|^2 + n}{2[x, y]^{n+2}} = \\ &= \frac{1}{2[x, y]^n} \left[\frac{n(1 - |x|^2|y|^2)^2}{[x, y]^2} - 4|x|^2|y|^2 \right]. \end{aligned}$$

Применение формул (2.7)–(2.8) из Леммы 2.1 к расширенному ядру Пуассона P_0 приводит к полезным представлениям для ядер $P_\alpha = \mathcal{D}^\alpha P_0$:

$$(3.1) \quad P_\alpha(x, y) = \mathcal{D}_{n, \alpha}^{-(m-\alpha)} P_m(x, y), \quad m > \alpha > 0, \ m \in \mathbb{N},$$

$$(3.2) \quad P_{\alpha+\beta}(x, y) = \mathcal{D}_{n, \alpha}^\beta P_\alpha(x, y), \quad \alpha, \beta > 0.$$

Скорость роста ядра Пуассона–Бергмана и его производных/градиентов хорошо известна, см. [11], [7], [8], [9], [14],

$$(3.3) \quad |P_\alpha(x, y)| \leq \frac{C(\alpha, n)}{[x, y]^{\alpha+n-1}} \quad \text{и} \quad |\nabla_x P_\alpha(x, y)| \leq \frac{C(\alpha, n)}{[x, y]^{\alpha+n}}, \quad x, y \in B.$$

Хотя оценки (3.3) хорошо известны, ниже мы дадим их прямое доказательство, включая дробные производные и градиенты высших порядков, основанное на наших Определениях 2.1, 2.2, 3.1.

Лемма 3.1. Для $k > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $x, y \in B$, справедливы

$$(3.4) \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} [x, y]^{-k} \right| \leq \frac{k}{[x, y]^{k+1}} \quad u \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^m [x, y]^{-k} \right| \leq \frac{C(k, m)}{[x, y]^{k+m}}.$$

Доказательство. Поскольку $[x, y] = [y, x] = |y' - x|y| = |x' - y|x|$, $x, y \neq 0$, сперва посчитаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial [x, y]^2}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} |x' - yr|^2 = -2y \cdot (x' - yr), \\ \frac{\partial}{\partial r} [x, y]^{-k} &= -\frac{k}{2} \left(|x' - yr|^2 \right)^{-k/2-1} \frac{\partial}{\partial r} |x' - yr|^2 = \frac{k y \cdot (x' - yr)}{|x' - yr|^{k+2}}. \end{aligned}$$

Отсюда первая оценка в (3.4) следует немедленно. Полагая, что имеет место последнее неравенство в (3.4) для всех производных порядка $1, 2, \dots, m-1$, случай производного порядка m следует по индукции. Действительно, по правилу Лейбница

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^m [x, y]^{-k} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} [x, y]^{-k} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{m-1} \frac{k y \cdot (x' - yr)}{[x, y]^{k+2}} = \\ &= k y \cdot (x' - yr) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{m-1} [x, y]^{-k-2} - (m-1)k|y|^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{m-2} [x, y]^{-k-2}. \end{aligned}$$

Ввиду индукционного предположения получаем

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^m [x, y]^{-k} \right| \leq k |x' - yr| \frac{C(k, m)}{[x, y]^{k+m+1}} + \frac{C(k, m)}{[x, y]^{k+m}} = \frac{C(k, m)}{[x, y]^{k+m}},$$

что и требовалось. $\square$

Лемма 3.2. Пусть символ $U = U^1$ обозначает любой из следующих четырех дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial r}$, $r \frac{\partial}{\partial r}$, ∇ , $\mathcal{D}^1$. Тогда при $x, y \in B$, $m \in \mathbb{N}_0$, имеет место

$$(3.5) \quad |U^m P_0(x, y)| \leq \frac{C(m, n)}{[x, y]^{m+n-1}} \quad u \quad |P_m(x, y)| \leq \frac{C(m, n)}{[x, y]^{m+n-1}}.$$

В последнем неравенстве (3.5), фактически мы взяли $U^m = \mathcal{D}^m$. Более того, в общем случае $\alpha \geq 0$, $\gamma > 0$, $\lambda \geq 1 - n/2$, имеем

$$(3.6) \quad |P_\alpha(x, y)| \leq \frac{C(\alpha, n)}{[x, y]^{\alpha+n-1}},$$

$$(3.7) \quad |\mathcal{D}_{n, \lambda}^\gamma P_\alpha(x, y)| \leq \frac{C(\alpha, \gamma, \lambda, n)}{[x, y]^{\alpha+\gamma+n-1}}, \quad x, y \in B.$$

Дифференциальный оператор в (3.7) можно заменить на любой градиент высшего порядка ∇^m .

Доказательство. По правилу Лейбница и Лемме 3.1,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m P_0(x, y) &= (1 - |x|^2|y|^2) \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m [x, y]^{-n} - 2m|y|^2 r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{m-1} [x, y]^{-n} - \\ &\quad - \frac{m(m-1)}{2} 2m|y|^2 \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{m-2} [x, y]^{-n}. \end{aligned}$$

Применяя оценки из Леммы 3.1, получим

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m P_0(x, y) \right| &\leq (1 - |x|^2|y|^2) \frac{C(m, n)}{[x, y]^{m+n}} + \frac{C(m, n)}{[x, y]^{m+n-1}} + \frac{C(m, n)}{[x, y]^{m+n-2}} \leq \\ &\leq \frac{C(m, n)}{[x, y]^{m+n-1}}. \end{aligned}$$

Остальные три неравенства в (3.5) можно доказать тем же образом, учитывая определение $P_m = \mathcal{D}^m P_0 = r^{-(n/2-1)} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m [r^{m+n/2-1} P_0]$.

Для нецелых $\alpha > 0$, $m-1 < \alpha < m$ ($m \in \mathbb{N}$) ввиду (3.1), (3.5), (2.15) и Определения 2.2 мы получим

$$\begin{aligned} |P_\alpha(x, y)| &= |\mathcal{D}_{n,\alpha}^{-(m-\alpha)} P_m(x, y)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha+n/2-1} (1-t)^{m-\alpha-1} |P_m(tx, y)| dt \leq \\ &\leq C(\alpha, m) \int_0^1 \frac{t^{\alpha+n/2-1} (1-t)^{m-\alpha-1}}{|x' - y|x|^{m+n-1}} dt \leq \frac{C(\alpha, n)}{|x' - y|x|^{\alpha+n-1}}, \end{aligned}$$

что совпадает с неравенством (3.6). Далее, формулу (3.7) можно доказать по сути таким же способом с использованием рекуррентной формулы (2.12) или (3.2). Мы опускаем детали. $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Нам понадобится модификация [17] известного неравенства Харди-Литтлвуда [18] о дробном интегрировании в весовых классах Лебега. Применим их к пространствам роста $G_\alpha(B)$ и приспособим к нашим дробным операторам:

$$(4.1) \quad \|\mathcal{D}_{n,\delta}^{-\beta} f\|_{G_{\alpha-\beta}} \leq C(\alpha, \beta, \delta) \|f\|_{G_\alpha}, \quad \alpha > \beta > 0, \quad \delta > -\frac{n}{2},$$

если норма в правой части конечна.

Доказательство Теоремы 1.1. Для заданной функции $f(x) \in \Lambda_\alpha$ нам достаточно доказать

$$(4.2) \quad \|\mathcal{D}^\gamma \Phi_{\beta, \lambda, \delta}(f)\|_{G_{\gamma-\alpha-\beta+\delta+\lambda}} \leq C \|\mathcal{D}^{[\alpha]+1} f\|_{G_{[\alpha]+1-\alpha}}$$

для некоторого $\gamma > \alpha + \beta - \delta - \lambda > 0$. Поскольку $f(x) \in \Lambda_\alpha$, то $\mathcal{D}^m f \in G_{m-\alpha}$ с обозначением $m = [\alpha] + 1$. Формула (2.7) из Леммы 2.1, $\mathcal{D}^\delta f(x) = \mathcal{D}_{n, \delta}^{-(m-\delta)} \mathcal{D}^m f(x)$, $m \geq \delta > 0$, дает возможность оценить норму, используя (4.1):

$$(4.3) \quad \|\mathcal{D}^\delta f\|_{G_{\delta-\alpha}} = \|\mathcal{D}_{n, \delta}^{-(m-\delta)} \mathcal{D}^m f\|_{G_{\delta-\alpha}} \leq C \|\mathcal{D}^m f\|_{G_{m-\alpha}}.$$

Отсюда следует $\mathcal{D}^\delta f(x) \in G_{\delta-\alpha}$ и

$$(1-r)^{\delta-\alpha} M_\infty(\mathcal{D}^\delta f; r) \leq C \|\mathcal{D}^m f\|_{G_{m-\alpha}}.$$

Дифференцирование $\Phi_{\beta, \lambda, \delta}(f)$ посредством $\mathcal{D}^\gamma$ вместе с оценками ядер (3.7) при $\gamma > \alpha + \beta - \delta - \lambda > 0$ дает

$$\mathcal{D}^\gamma \Phi_{\beta, \lambda, \delta}(f)(x) = \frac{2}{n \Gamma(\beta)} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1} \mathcal{D}^\gamma P_\lambda(x, y) \mathcal{D}^\delta f(y) dV(y),$$

$$|\mathcal{D}^\gamma \Phi_{\beta, \lambda, \delta}(f)(x)| \leq C(\beta, \gamma, \lambda, n) \int_B \frac{(1-\rho^2)^{\beta-1}}{|\rho x - \eta|^{\gamma+\lambda+n-1}} |\mathcal{D}^\delta f(\rho \eta)| \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\eta).$$

Здесь заменим x на Qx , где Q – произвольное ортогональное линейное преобразование $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. $|Qx| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Произведя также замену $\eta \mapsto Q\eta$, находим

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^\gamma \Phi_{\beta, \lambda, \delta}(f)(Qx)| &\leq C \int_B \frac{(1-\rho^2)^{\beta-1}}{|\rho Qx - Q\eta|^{\gamma+\lambda+n-1}} |\mathcal{D}^\delta f(\rho Q\eta)| \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\eta) = \\ &= C \int_B \frac{(1-\rho^2)^{\beta-1}}{|\rho x - \eta|^{\gamma+\lambda+n-1}} |\mathcal{D}^\delta f(\rho Q\eta)| \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\eta). \end{aligned}$$

Далее, используем оценки (2.13)-(2.15), чтобы получить

$$\begin{aligned} M_\infty(\mathcal{D}^\gamma \Phi_{\beta, \lambda, \delta}(f); r) &\leq C(\beta, \gamma, \lambda, n) \int_0^1 \int_S \frac{(1-\rho^2)^{\beta-1}}{|\rho x - \eta|^{\gamma+\lambda+n-1}} M_\infty(\mathcal{D}^\delta f; \rho) d\rho d\sigma(\eta) \leq \\ &\leq C(\beta, \gamma, \lambda, n) \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^{\beta-1}}{(1-r\rho)^{\lambda+\gamma}} M_\infty(\mathcal{D}^\delta f; \rho) d\rho \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, n) \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta-1}}{(1-r\rho)^{\lambda+\gamma}} \frac{\|\mathcal{D}^m f\|_{G_{m-\alpha}}}{(1-\rho)^{\delta-\alpha}} d\rho \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, n) \frac{\|\mathcal{D}^m f\|_{G_{m-\alpha}}}{(1-r)^{\lambda+\gamma-\alpha-\beta+\delta}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\mathcal{D}^\gamma \Phi_{\beta, \lambda, \delta}(f)\|_{G_{\gamma-\alpha-\beta+\delta+\lambda}} \leq C \|\mathcal{D}^m f\|_{G_{m-\alpha}},$$

т.е. $\|\Phi_{\beta,\lambda,\delta}(f)\|_{\Lambda_{\alpha+\beta-\delta-\lambda}} \leq C\|f\|_{\Lambda_\alpha}$. Таким образом, доказали, что оператор $\Phi_{\beta,\lambda,\delta}$ ограниченно отображает Λ_α в $h\Lambda_{\alpha+\beta-\delta-\lambda}$, т.е. $\Phi_{\beta,\lambda,\delta} : \Lambda_\alpha \xrightarrow{\text{into}} h\Lambda_{\alpha+\beta-\delta-\lambda}$.

Чтобы доказать сюръективность этого отображения, возьмем произвольную гармоническую функцию $g \in h\Lambda_{\alpha+\beta-\delta-\lambda}$, так что $\mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g \in hG_{\delta-\alpha}$. В силу непрерывных вложений из [19, Теор.1.1],

$$\mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g \in hG_{\delta-\alpha} \subset h_{\beta-\lambda-1}^1 \subset h_{\beta-1}^1,$$

ибо $\beta - \lambda > \delta - \alpha > 0$. По Теореме А для пространств Бергмана $\mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g(x) = T_\beta(\mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g)(x)$, и затем, взяв обратный оператор $\mathcal{D}_{n,\lambda}^{-(\beta-\lambda)}$, мы получим

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{n\Gamma(\beta)} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1} \left[\mathcal{D}_{n,\lambda}^{-(\beta-\lambda)} \mathcal{D}^\beta P_0(x, y) \right] \mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g(y) dV(y) = \\ &= \frac{2}{n\Gamma(\beta)} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1} P_\lambda(x, y) \mathcal{D}^\delta \left[\mathcal{D}^{-\delta} \mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g(y) \right] dV(y) = \\ &=: \Phi_{\beta,\lambda,\delta}(\psi)(x), \end{aligned}$$

где использована Лемма 2.1 и формула обращения (2.3). Теперь остается показать, что функция $\psi := \mathcal{D}^{-\delta} \mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g$ принадлежит $h\Lambda_\alpha$. Для целого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \delta > \alpha > 0$, применим теорему типа Харди-Литтлвуда о действии дробного интегродифференцирования на гармонических пространствах hG_α (см. [20]). Кроме того, используя коммутационную формулу (2.6), мы последовательно получаем следующую цепочку импликаций:

$$\begin{aligned} g \in h\Lambda_{\alpha+\beta-\delta-\lambda}^{p,q} &\implies \mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g \in hG_{\delta-\alpha} \\ &\implies \mathcal{D}^m \mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g \in hG_{\delta-\alpha+m} \\ &\implies \mathcal{D}^{-\delta} \mathcal{D}^m \mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g = \mathcal{D}^m \mathcal{D}^{-\delta} \mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g \in hG_{m-\alpha} \\ &\implies \mathcal{D}^m \psi = \mathcal{D}^m (\mathcal{D}^{-\delta} \mathcal{D}_{n,\lambda}^{\beta-\lambda} g) \in hG_{m-\alpha} \\ &\implies \psi \in h\Lambda_\alpha. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство Теоремы 1.1. □

Abstract. On the unit ball of $\mathbb{R}^n$, some Bergman type operators are defined with the use of fractional derivatives and reproducing kernels of Poisson–Bergman type, which act boundedly in the Lipschitz spaces. In a special case, these operators continuously map the Lipschitz space of sufficiently smooth functions onto its harmonic subspace.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. M. Stein, “Singular integrals and estimates for the Cauchy–Riemann equations”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79**, 440 – 445 (1973).
- [2] E. Ligocka, “The Hölder continuity of the Bergman projection and proper holomorphic mappings”, *Studia Math.*, **80**, 89 – 107 (1984).
- [3] A. E. Djrbashian, “Integral representations for Riesz systems in the unit ball and some applications”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117**, 395 – 403 (1993).
- [4] K. L. Avetisyan, “Poisson–Bergman type operators on Lipschitz and mixed norm spaces in the real ball”, *Lobachevskii J. Math.*, **40**(8), 1025 – 1033 (2019).
- [5] K. Avetisyan, “Estimates for harmonic reproducing kernel and Bergman type operators on mixed norm and Besov spaces in the real ball”, *Ann. Funct. Anal.*, **14**(2), Article 40, 29 pp. (2023).
- [6] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1970).
- [7] A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian, *Topics in the Theory of A^p_α Spaces*, Teubner–Texte zur Math., b. 105, Teubner, Leipzig (1988).
- [8] J. Miao, “Reproducing kernels for harmonic Bergman spaces of the unit ball”, *Monatsh. Math.*, **125**, 25 – 35 (1998).
- [9] M. Jevtić, M. Pavlović, “Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ ”, *Acta Math. Hungar.*, **85**, 81 – 96 (1999).
- [10] K. Avetisyan, Y. Tonoyan, “On the fractional integro-differentiation operator in $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **50**, no. 5, 236 – 245 (2015).
- [11] R. Coifman, R. Rochberg, “Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p ”, *Asterisque*, **77**, 11 – 66 (1980).
- [12] M. Jevtić, M. Pavlović, “Harmonic Besov spaces on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ ”, *Rocky Mountain J. Math.*, **31**(3), 1305 – 1316 (2001).
- [13] G. Ren, “Harmonic Bergman spaces with small exponents in the unit ball”, *Collect. Math.*, **53**, 83 – 98 (2002).
- [14] G. Ren, U. Kähler, “Weighted harmonic Bloch spaces and Gleason’s problem”, *Complex Variables Theory Appl.* **48**, 235 – 245 (2003).
- [15] B. R. Choe, H. Koo, K. Nam, “Optimal norm estimate of operators related to the harmonic Bergman projection on the ball”, *Tohoku Math. J.*, **62**, 357 – 374 (2010).
- [16] S. Gergün, H. T. Kaptanoğlu, A. E. Üreyen, “Harmonic Besov spaces on the ball”, *Int. J. Math.*, **27**(9), 1650070, 59 pp. (2016).
- [17] K. Avetisyan, “Fractional integration in weighted Lebesgue spaces”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **56**, no.2, 57 – 67 (2021).
- [18] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “Some properties of fractional integrals (II)”, *Math. Z.*, **34**, 403 – 439 (1932).
- [19] K. Avetisyan, Y. Tonoyan, “Continuous embeddings in harmonic mixed norm spaces on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **47**, no. 5, 209 – 220 (2012).
- [20] M. Pavlović, “Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **216**, 499 – 509 (1997).

Поступила 27 ноября 2023

После доработки 19 марта 2024

Принята к публикации 29 марта 2024

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет ¹

E-mail: *GGG@ysu.am*

Аннотация. В работе получены некоторые оценки функций общей системы Франклина, которые уточняют ранее известные оценки. С применением этих оценок исследуются взаимное расположение нулей некоторых функций общей системы Франклина. Такие оценки могут быть полезными при выявлении новых свойств общей системы Франклина.

MSC2000 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: Общая система Франклина; неравенства для общей функции Франклина.; нули общей функции Франклина.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1928 году Ф. Франклин [1] построил первый пример полного ортонормированного базиса в $C[0; 1]$. Эта система состоит из кусочно линейных непрерывных функций. Систематическое изучение системы Франклина началось с работ З. Чисельского [2], [3]. В этих работах, в частности, получены знаменитые экспоненциальные оценки функций системы Франклина. С применением этих оценок получены многие важные свойства системы Франклина. Эта система оказалась очень полезной при решении разных задач. В работе [4] сделан подробный обзор исследований рядов по системе Франклина на тот момент.

В 1997 году была введена [5] общая система Франклина. определение которой будет дано в следующем разделе. В работе [6] получены некоторые оценки для функций общей системы Франклина, с применением которых доказаны многие теоремы о рядах по общей системе Франклина. В работах [7] и [8] получены некоторые улучшения этих оценок. С применением этих оценок, в работах [8], [9] окончательно решены вопросы базисности и безусловной базисности общей системы Франклина в пространствах $H^1[0, 1]$ и $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке комитета по науке министерства ОНКС Республики Армения (грант No. 21T-1A055).

В настоящей работе получены некоторые уточнения оценок функций общей системы Франклина, а также исследовано взаимное расположение нулей функций общей системы Франклина. Изучение взаимного расположения нулей функций классической системы Франклина сыграла важную роль в вопросе единственности рядов по системе Франклина [10].

В работе α_γ , $C_{\gamma,k}$ -постоянные зависящие от своих индексов и могут принимать разные значения в разных формулах.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА И ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМ

Следуя работам [5] и [6] приведем некоторые определения.

Определение 2.1. Последовательность точек $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ назовем допустимой, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0, 1)$ для любого $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0, 1]$ и каждая точка $t \in (0, 1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем два раза.

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 1$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n+1\}$. Пусть π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через $\mathbf{S}_n$ обозначим пространство функций определенных на $[0, 1]$, непрерывных слева, линейных на (τ_i^n, τ_{i+1}^n) и непрерывных в τ_i^n , если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$ для любого $i = 0, 1, \dots, n$. Ясно, что $\dim \mathbf{S}_n = n+1$ и $\mathbf{S}_{n-1} \subset \mathbf{S}_n$. Следовательно существует (с точностью до знака) единственная функция $f_n \in \mathbf{S}_n$, которая ортогональна $\mathbf{S}_{n-1}$ и $\|f_n\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n -ной функцией Франклина, соответствующей разбиению (последовательности) $\mathcal{T}$. Назовем разбиение простым, если каждая точка $t \in (0, 1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем один раз. В дальнейшем мы будем исследовать только случай простых разбиений.

Определение 2.2. Общая система Франклина $\{f_n : n \geq 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = \sqrt{3}(2t-1),$$

и для $n \geq 2$, f_n есть n -ная функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$. Предполагается, что $f_n(t_n) > 0$.

Отметим, что когда $t_n = \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}$, где $n = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, 2, \dots$, $\nu = 1, 2, \dots, 2^\mu$, получается классическая система Франклина, эквивалентным образом определенная в [1].

Из оценок L^∞ -норм ортогональных проекций на пространство кусочно-линейных функций (см. [5]) следует, что для каждой последовательности узлов $\mathcal{T}$, соответствующая общая система Франклина является базисом в $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ и если все узлы из $\mathcal{T}$ простые, то соответствующая общая система Франклина является базисом в $C[0, 1]$. Г. Геворкян и А. Камонт [8] доказали, что общая система Франклина является безусловным базисом в пространствах $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

Следуя работе [6], введем следующие определения.

Определение 2.3. Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется квазидвоичным разбиением отрезка $[0, 1]$, если $\tau_{2\nu}^{2^{\mu+1}} = \tau_\nu^{2^\mu}$ для всех μ, ν , $0 \leq \nu \leq 2^\mu$, т. е. $\pi_{2^{\mu+1}}$ получается из π_{2^μ} прибавлением по одной точке в каждом интервале $(\tau_\nu^{2^\mu}, \tau_{\nu+1}^{2^\mu})$ для всех $1 \leq \nu \leq 2^\mu$.

Определение 2.4. Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется сильно регулярной с параметром γ , если $\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n} \leq \gamma$ для всех $n \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Здесь и далее $\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i-1}^n$.

Договоримся, что если $n = 2^\mu + \nu$, $1 \leq \nu \leq 2^\mu$, то μ назовем рангом чисел n , t_n и функции f_n . Ранг чисел n и t_n обозначим, соответственно, через $[n]$ и $[t_n]$.

В настоящей работе рассматриваются только квазидвоичные разбиения. Для таких разбиений доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.1. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$, ξ_1^n -нуль функции f_n на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, ξ_2^n -нуль на отрезке $[\tau_{2\nu-1}^n, \tau_{2\nu}^n]$. Тогда выполняются

$$(2.1) \quad \frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_1^n}{\tau_{2\nu}^n - \tau_{2\nu-2}^n} > \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{\xi_2^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu}^n - \tau_{2\nu-2}^n} > \frac{1}{3}.$$

Теорема 2.2. Если $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$, ξ_1^n -нуль функции f_n на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, а η_1^n -нуль функции f_{n+1} на том же отрезке, то $\xi_1^n > \eta_1^n$. И если $\mathcal{T}$ -сильно регулярная, то существует такое $\alpha_\gamma > 0$, что

$$(2.2) \quad \frac{\xi_1^n - \eta_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} > \alpha_\gamma.$$

Теорема 2.3. Если $n = 2^\mu + \nu$, $1 \leq \nu < 2^\mu$, ξ_2^n -нуль функции f_n на отрезке $[\tau_{2\nu-1}^n, \tau_{2\nu}^n]$, а η_2^n -нуль функции f_{n+1} на том же отрезке, то $\xi_2^n > \eta_2^n$. И если $\mathcal{T}$ -сильно регулярная, то существует такое $\alpha_\gamma > 0$, что

$$(2.3) \quad \frac{\xi_2^n - \eta_2^n}{\lambda_{2\nu}^n} > \alpha_\gamma.$$

Теорема 2.4. Если $n = 2^\mu + \nu$, $1 \leq \nu < 2^\mu$, θ_1^n -(единственный) нуль функции f_{n-1} на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu}^n]$, а ξ_1^n, ξ_2^n -нули функции f_n на отрезках $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, $[\tau_{2\nu-1}^n, \tau_{2\nu}^n]$, соответственно, то $\xi_1^n < \theta_1^n < \xi_2^n$. И если $\mathcal{T}$ -сильно регулярная, то существует такое $\alpha_\gamma > 0$, что

$$(2.4) \quad \frac{\theta_1^n - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} > \alpha_\gamma, \quad \frac{\xi_2^n - \theta_1^n}{\lambda_{2\nu}^n} > \alpha_\gamma.$$

Теорема 2.5. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$, ξ_1^n -нуль функции f_n на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$. Тогда если $[m] = [n] + 1$, $t_m < \tau_{2\nu-2}^n$ и ζ_1 -нуль функции f_m на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, то $\xi_1^n < \zeta_1$. И если $\mathcal{T}$ -сильно регулярная, то существует такое $\alpha_\gamma > 0$, что

$$(2.5) \quad \frac{\zeta_1 - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} > \alpha_\gamma.$$

Очевидно, что в теоремах 2.2-2.5 достаточно доказать неравенства (2.2)-(2.5).

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Следующие замечания легко проверяются.

Замечание 3.1. Пусть функции $y(x)$ и $z(x)$ линейны на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$(3.1) \quad \int_a^b y(x)z(x)dx = (b-a) \left[\frac{y(a)z(a) + y(b)z(b)}{3} + \frac{y(a)z(b) + y(b)z(a)}{6} \right].$$

Замечание 3.2. Пусть a, b, c, d -положительны. Тогда

$$(3.2) \quad \min \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right) \leq \frac{az + b}{cz + d} \leq \max \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right), \quad z \geq 0.$$

Пусть δ_{jk} -символ Кронекера, т.е. $\delta_{jk} = 1$, если $j = k$, и $\delta_{jk} = 0$, если $j \neq k$. Для $n \geq 2$ функции $\{N_{n,j}(t)\}_{j=0}^n$ определяются следующим образом:

$$(3.3) \quad N_j^n(x) = \begin{cases} \delta_{jk}, & \text{когда } x = \tau_k^n, \quad k = 0, \dots, n; \\ \text{линейная} & \text{на } [\tau_{k-1}^n; \tau_k^n], \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Функции $\{N_j^n(t)\}_{j=0}^n$ нормированы в пространстве $C[0, 1]$ и из $N_j^n(\tau_k^n) = \delta_{jk}$ следует, что система $\{N_j^n(t)\}_{j=0}^n$ образует базис в $\mathbf{S}_n$. Следовательно,

$$(3.4) \quad (N_j^{n-1}, f_n) := \int_0^1 N_j^{n-1}(x)f_n(x)dx = 0 \text{ когда } n \geq 2 \text{ и } 0 \leq j \leq n-1.$$

Замечание 3.3. Если разбиение $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ , то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $c_{\gamma,k} > 0$, что если $0 < [t_m] - [t_n] \leq k$, то

$$(3.5) \quad |t_m - t_n| \geq c_{\gamma,k} |\Delta_n|.$$

Действительно, пусть $p := [t_m] - [t_n]$ и $t_{m'}$ среди чисел ранга $[n] + p$ ближайшая к t_n . Тогда либо $t_{m'} \in [\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, либо $t_{m'} \in [\tau_{2\nu-1}^n, \tau_{2\nu}^n]$. С учетом сильной регулярности, получим

$$|t_n - t_{m'}| > \frac{|\Delta_n|}{(\gamma + 1)^p},$$

из которого следует (3.5).

Обозначим

$$(3.6) \quad a_i^{(n)} := f_n(\tau_i^n), \quad n = 3, 4, \dots, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Очевидно, что функция f_n однозначно определяется значениями $a_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

С учетом замечания 3.1, из соотношений (3.4) для $n = 2^\mu + \nu$, $\mu = 1, 2, \dots$, $\nu = 2, 3, \dots, 2^\mu - 1$, получается система линейных уравнений

$$(3.7) \quad 2a_0^{(n)} + a_1^{(n)} = 0,$$

$$(3.8) \quad a_{i-1}^{(n)} \lambda_i^n + 2a_i^{(n)} (\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n) + a_{i+1}^{(n)} \lambda_{i+1}^n = 0, \quad \text{для } 0 < i < 2\nu - 2,$$

$$(3.9) \quad a_{2\nu-3}^{(n)} \lambda_{2\nu-2}^n + a_{2\nu-2}^{(n)} \left(2\lambda_{2\nu-2}^n + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) +$$

$$a_{2\nu-1}^{(n)} (\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + a_{2\nu}^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} = 0,$$

$$(3.10) \quad a_{2\nu-2}^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + a_{2\nu-1}^{(n)} (2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) +$$

$$a_{2\nu}^{(n)} \left(2\lambda_{2\nu}^n + 2\lambda_{2\nu+1}^n + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) + a_{2\nu+1}^{(n)} \lambda_{2\nu+1}^n = 0,$$

$$(3.11) \quad a_{i-1}^{(n)} \lambda_i^n + 2a_i^{(n)} (\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n) + a_{i+1}^{(n)} \lambda_{i+1}^n = 0, \quad \text{для } 2\nu < i < n,$$

$$(3.12) \quad a_{n-1}^{(n)} + 2a_n^{(n)} = 0$$

В случае $\nu = 1$ выполняются соотношения (3.10)-(3.12) и

$$(3.13) \quad a_0^{(n)} \lambda_1^n (2\lambda_1^n + 3\lambda_2^n) + a_1^{(n)} ((\lambda_1^n)^2 + 3\lambda_1^n \lambda_2^n + 2(\lambda_2^n)^2) + a_2^{(n)} (\lambda_2^n)^2 = 0.$$

Когда $\nu = 2^\mu$, т.е. $n = 2\nu$, выполняются соотношения (3.7)-(3.9) и

$$(3.14) \quad a_{n-2}^{(n)} (\lambda_{n-1}^n)^2 + a_{n-1}^{(n)} (2(\lambda_{n-1}^n)^2 + 3\lambda_{n-1}^n \lambda_n^n + (\lambda_n^n)^2) + a_n^{(n)} (3\lambda_{n-1}^n + 2\lambda_n^n) \lambda_n^n = 0.$$

Следующая лемма доказана в работе [6]. Однако, нам придется повторить ее, в связи с уточнением некоторых важных деталей. Верна следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $\mu = 1, 2, \dots$, $\nu = 2, 3, \dots, 2^\mu - 1$, и $a_i^{(n)} := f_n(\tau_{n,i})$. Тогда

- А) $a_i^{(n)} \cdot a_{i+1}^{(n)} < 0$ когда $i = 0, 1, \dots, n-1$,
 В) $a_1^{(n)} = -2a_0^{(n)}$,
 С) $a_i^{(n)} = -a_{i-1}^{(n)} \left(2 + \frac{\lambda_{i-1}^{n,*}}{\lambda_i^n} \right)$, когда $i \leq 2\nu - 2$, где $\frac{3\lambda_{i-1}^n}{2} \leq \lambda_{i-1}^{n,*} \leq 2\lambda_{i-1}^n$ и $\lambda_{i-1}^{n,*}$ зависит только от λ_j^n , $j < i$,
 D) $a_{n-1}^{(n)} = -2a_n^{(n)}$,
 Е) $a_i^{(n)} = -a_{i+1}^{(n)} \left(2 + \frac{\lambda_{i+2}^{n,*}}{\lambda_{i+1}^n} \right)$, когда $i \geq 2\nu$, где $\frac{3\lambda_{i+2}^n}{2} \leq \lambda_{i+2}^{n,*} \leq 2\lambda_{i+2}^n$ и $\lambda_{i+2}^{n,*}$ зависит только от λ_j^n , $j > i+2$.

Доказательство. Пункт А) доказан в [6]. В) следует из (3.7). Из (3.7) и (3.8) для $i = 1$, получим

$$(3.15) \quad a_2^{(n)} = -\frac{1}{\lambda_2^n} (a_0^{(n)} \lambda_1^n + 2a_1^{(n)} (\lambda_1^n + \lambda_2^n)) = -a_1^{(n)} \left(2 + \frac{3\lambda_1^n}{2\lambda_2^n} \right).$$

Следовательно $\lambda_1^{n,*} = \frac{3\lambda_1^n}{2}$, т.е. С) верно для $i = 1$. Если С) имеет место для i , то из (3.8) получим

$$(3.16) \quad a_{i+1}^{(n)} = -\frac{1}{\lambda_{i+1}^n} (a_{i-1}^{(n)} \lambda_i^n + 2a_i^{(n)} (\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n)) = -a_i^{(n)} \left(2 + \frac{\lambda_i^{n,*}}{\lambda_{i+1}^n} \right),$$

где

$$(3.17) \quad \lambda_i^{n,*} = \lambda_i^n \left(2 - \frac{1}{2 + \frac{\lambda_{i-1}^{n,*}}{\lambda_i^n}} \right) = \lambda_i^n \frac{3\lambda_i^n + 2\lambda_{i-1}^{n,*}}{2\lambda_i^n + \lambda_{i-1}^{n,*}}.$$

Из (3.16) и замечания 3.2 следует С). Аналогично доказываются D) и E). Лемма доказана.

Применив (3.17) и С) леммы 3.1, получим

$$(3.18) \quad (a_{2\nu-3}^{(n)} + 2a_{2\nu-2}^{(n)}) \lambda_{2\nu-2}^n = a_{2\nu-2}^{(n)} \lambda_{2\nu-2}^n \left(2 - \frac{1}{2 + \frac{\lambda_{2\nu-3}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-2}^n}} \right) =$$

$$a_{2\nu-2}^{(n)} \lambda_{2\nu-2}^n \frac{3\lambda_{2\nu-2}^n + 2\lambda_{2\nu-3}^{n,*}}{2\lambda_{2\nu-2}^n + \lambda_{2\nu-3}^{n,*}} = a_{2\nu-2}^{(n)} \lambda_{2\nu-2}^{n,*}.$$

Следовательно, вместо (3.9) можем писать

$$(3.19) \quad a_{2\nu-2}^{(n)} \left(\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) +$$

$$a_{2\nu-1}^{(n)} (\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + a_{2\nu}^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} = 0,$$

Аналогично, из (3.10) получим

$$(3.20) \quad \begin{aligned} & a_{2\nu-2}^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + a_{2\nu-1}^{(n)} (2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) + \\ & a_{2\nu}^{(n)} \left(2\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) = 0, \end{aligned}$$

Складывая (3.19), (3.20) получим

$$(3.21) \quad a_{2\nu-2}^{(n)} (\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 3\lambda_{2\nu-1}^n) + a_{2\nu-1}^{(n)} (3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n) + a_{2\nu}^{(n)} (3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}) = 0.$$

Учитывая А) леммы 3.1 и $f_n(t_n) > 0$, получим следующее

Свойство 3.1.

$$(3.22) \quad f_n(t_n) = a_{2\nu-1}^{(n)} \geq \min(|a_{2\nu-2}^{(n)}|, |a_{2\nu}^{(n)}|).$$

Продолжим исследование соотношений (3.7)-(3.12). Обозначив

$$(3.23) \quad x^{(n)} := -\frac{a_{2\nu-2}^{(n)}}{a_{2\nu-1}^{(n)}} \quad \text{и} \quad y^{(n)} := -\frac{a_{2\nu}^{(n)}}{a_{2\nu-1}^{(n)}}$$

из (3.19), (3.20) получим систему линейных уравнений

$$(3.24) \quad \begin{cases} x^{(n)} \left(\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) + y^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} = \lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n \\ x^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + y^{(n)} \left(2\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) = 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n \end{cases}$$

Решив систему (3.24) методом Крамера, получим следующую лемму.

Лемма 3.2. *Решение системы (3.24) будет*

$$(3.25) \quad x^{(n)} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{и} \quad y^{(n)} = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где

$$(3.26) \quad \Delta_x = \lambda_{2\nu+1}^{n,*} (\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + 3\lambda_{2\nu}^n (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n),$$

$$(3.27) \quad \Delta_y = \lambda_{2\nu-2}^{n,*} (2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) + 3\lambda_{2\nu-1}^n (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n),$$

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \Delta &= \lambda_{2\nu+1}^{n,*} \left(\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n (2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) + \\ & \lambda_{2\nu-2}^{n,*} \frac{\lambda_{2\nu}^n (3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 6\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n. \end{aligned}$$

Лемма 3.3. *Для $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$ верны следующие неравенства.*

$$(3.29) \quad \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n (2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\Delta}{\Delta_x} \leq \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} \frac{(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 6\lambda_{2\nu-1}^n}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)},$$

$$(3.30) \quad \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\Delta}{\Delta_x} \leq \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n},$$

$$(3.31) \quad \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\Delta}{\Delta_y} \leq \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} \frac{(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 6\lambda_{2\nu}^n}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)},$$

$$(3.32) \quad \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\Delta}{\Delta_y} \leq \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Доказательство. Легко убедиться (простыми умножениями), что

$$(3.33) \quad \frac{1}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\frac{(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}$$

и

$$(3.34) \quad \frac{\frac{\lambda_{2\nu-1}^n(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{6\lambda_{2\nu-1}^n}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}.$$

Из (3.33) и (3.34) получим

$$(3.35) \quad \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} \frac{(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 6\lambda_{2\nu-1}^n}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}.$$

Применяя замечание 3.2, из (3.35) получим (3.29) (в качестве z выступает $\lambda_{2\nu+1}^{n,*}$).

В силу очевидных неравенств

$$2 < \frac{3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \quad \text{и} \quad \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} < 3,$$

из (3.29) получим (3.30). Аналогично доказываются (3.31) и (3.32). Лемма доказана.

Лемма 3.4. Если $\mathcal{T}$ -квазидиадическая и сильно регулярная с параметром γ , то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $C_{\gamma,k} > 0$, что для любого j выполняется

$$(3.36) \quad \min_{|i| \leq k} |f_n(\tau_{j+i}^n)| > C_{\gamma,k} \max_{|i| \leq k} |f_n(\tau_{j+i}^n)|.$$

Доказательство. В силу сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$, из (3.23), (3.24), (3.30), (3.32) получим

$$(3.37) \quad \min_{|i| \leq 1} |f_n(\tau_{2\nu-1+i}^n)| > C_{\gamma,1} \max_{|i| \leq 1} |f_n(\tau_{2\nu-1+i}^n)|.$$

С учетом сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ и свойств $C)$, $E)$ леммы 3.1, из (3.37) получим (3.36). Лемма доказана.

Лемма 3.5. Для $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$ имеет место следующее неравенство.

$$(3.38) \quad (f_n, N_{2\nu-1}^n) > \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{6} (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n).$$

Доказательство. Применяя замечание 3.1, получим

$$(3.39) \quad \begin{aligned} (f_n, N_{2\nu-1}^n) &= \lambda_{2\nu-1}^n \left(\frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{3} + \frac{a_{2\nu-2}^{(n)}}{6} \right) + \lambda_{2\nu}^n \left(\frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{3} + \frac{a_{2\nu}^{(n)}}{6} \right) = \\ &= \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{6} (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) + \frac{a_{2\nu-2}^{(n)}}{6} \lambda_{2\nu-1}^n + \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{6} (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) + \frac{a_{2\nu}^{(n)}}{6} \lambda_{2\nu}^n. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a_{2\nu-2}^{(n)} < 0$ и $a_{2\nu}^{(n)} < 0$, с учетом (3.21) из (3.39) получим (3.38).

Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 2.1. Докажем только первое неравенство. Второе доказывается аналогично. Допустим обратное-выполняется

$$(4.1) \quad \frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_1^n}{\tau_{2\nu}^n - \tau_{2\nu-2}^n} \leq \frac{1}{3},$$

из которого следует, что

$$\frac{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n}{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n} \leq \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует

$$(4.2) \quad \left| \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{a_{2\nu-2}^{(n)}} \right| = \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n}{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n} \leq \frac{1}{2}.$$

С другой стороны из (3.30) имеем

$$(4.3) \quad \left| \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{a_{2\nu-2}^{(n)}} \right| = \frac{\Delta}{\Delta_x} \geq \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n}.$$

Из (4.2), (4.3) получается

$$\frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{1}{2}$$

или $\lambda_{2\nu-1}^n / \lambda_{2\nu}^n \leq 2/3$. Но из (4.1) имеем $2\lambda_{2\nu}^n < \lambda_{2\nu-1}^n$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 2.2. Ясно, что

$$(4.4) \quad \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \eta_1^n}{\eta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n} = \left| \frac{f_{n+1}(\tau_{2\nu-1}^n)}{f_{n+1}(\tau_{2\nu-2}^n)} \right| = \left| \frac{a_{2\nu-1}^{(n+1)}}{a_{2\nu-2}^{(n+1)}} \right| = 2 + \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n+1,*}}{\lambda_{2\nu-1}^{n+1}}.$$

Поскольку $\mathcal{T}$ -квазидиадическая и $\lambda_i^{n,*}$ зависит только от λ_j^n , $j < i < 2\nu - 1$, то $\lambda_{2\nu-1}^{n+1} = \lambda_{2\nu-1}^n$ и $\lambda_{2\nu-2}^{n+1,*} = \lambda_{2\nu-2}^{n,*}$. Следовательно, из (4.4) имеем

$$\frac{\tau_{2\nu-1}^n - \eta_1^n}{\eta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n} = \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu-2}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n}.$$

Отсюда получим

$$(4.5) \quad \frac{\eta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \eta_1^n}{\eta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}} = \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu-2}^{n,*}}.$$

Нетрудно заметить, что (см. (3.23))

$$\frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n} = \left| \frac{f_n(\tau_{2\nu-2}^n)}{f_n(\tau_{2\nu-1}^n)} \right| = \left| \frac{a_{2\nu-2}^{(n)}}{a_{2\nu-1}^{(n)}} \right| = x^{(n)} = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Следовательно

$$(4.6) \quad \frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta}{\Delta_x}}.$$

Из (4.6) и (3.29) получаем

$$(4.7) \quad \frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} \geq \frac{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-2}^{n,*}(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + 3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)(3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}.$$

Из (4.7) и (4.5) имеем

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \frac{\xi_1^n - \eta_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} &\geq \frac{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-2}^{n,*}(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + 3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)(3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)} - \\ &\quad \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu-2}^{n,*}} = \\ &\quad \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*}\lambda_{2\nu}^n(4\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n) + 6\lambda_{2\nu-1}^n\lambda_{2\nu}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}{(\lambda_{2\nu-2}^{n,*}(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + 3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)(3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n))(\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 3\lambda_{2\nu-1}^n)} \end{aligned}$$

Последнее равенство получается простыми преобразованиями. Учитывая сильную регулярность последовательности $\mathcal{T}$, из (4.8) получим (2.2). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Из (3.32) имеем

$$(4.9) \quad \frac{\Delta}{\Delta_y} \geq \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Ясно, что

$$\frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_2^n}{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n} = \left| \frac{f_n(\tau_{2\nu}^n)}{f_n(\tau_{2\nu-1}^n)} \right| = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Отсюда следует

$$(4.10) \quad \frac{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_2^n}{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta_y}{\Delta}}$$

С другой стороны из C) леммы 3.1 имеем

$$\frac{\tau_{2\nu}^n - \eta_2^n}{\eta_2^n - \tau_{2\nu-1}^n} = \left| \frac{f_{n+1}(\tau_{2\nu}^n)}{f_{n+1}(\tau_{2\nu-1}^n)} \right| = 2 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^{n,*}}{\lambda_{2\nu}^n}.$$

Следовательно

$$(4.11) \quad \frac{\eta_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{2\nu}^n - \eta_2^n}{\eta_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}} = \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}}.$$

Из (4.9) – (4.11) имеем (см. также C) леммы 3.1)

$$\begin{aligned} \frac{\xi_{2\nu}^n - \eta_2^n}{\lambda_{2\nu}^n} &= \frac{1}{1 + \frac{\Delta_y}{\Delta}} - \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}} \geq \frac{1}{1 + \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}} - \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}} = \\ &= \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}} - \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из очевидного неравенства

$$\frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}} > \frac{2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n}$$

следует

$$\frac{\xi_{2\nu}^n - \eta_2^n}{\lambda_{2\nu}^n} > \frac{2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n} - \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}} = \frac{3(\lambda_{2\nu}^n)^2}{(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)(\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)} > \alpha_\gamma.$$

Последнее неравенство выполняется в силу сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Функция f_{n-1} -линейная на $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu}^n]$ и (см. E) леммы 3.1)

$$\frac{\theta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu}^n - \theta_1^n} = \left| \frac{f_{n-1}(\tau_{2\nu-2}^n)}{f_{n-1}(\tau_{2\nu}^n)} \right| = 2 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Следовательно,

$$(4.12) \quad \frac{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\tau_{2\nu}^n - \theta_1^n} = 1 + \frac{\theta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu}^n - \theta_1^n} = 3 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

С учетом сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$, из (4.12) имеем

$$(4.13) \quad \frac{\tau_{2\nu}^n - \theta_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} = \frac{1}{3 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}} = \frac{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}} < \frac{1}{3} - \alpha_\gamma.$$

Из (4.13) и первого неравенства (2.1) из теоремы 2.1 следует первое неравенство (2.4).

Из (4.13) также имеем

$$(4.14) \quad \tau_{2\nu}^n - \theta_1^n = \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}}.$$

Нетрудно заметить, что (см. лемму 3.2)

$$\frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_2^n}{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n} = \left| \frac{f_n(\tau_{2\nu}^n)}{f_n(\tau_{2\nu-1}^n)} \right| = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Поэтому

$$(4.15) \quad \frac{\xi_2^n - \tau_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n - \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_2^n}{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}} - 1 = \frac{\Delta}{\Delta + \Delta_y} - 1.$$

Из (4.14) и (4.15) следует, что

$$(4.16) \quad \frac{\xi_2^n - \theta_1^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*})} - \frac{\Delta_y}{\Delta + \Delta_y}.$$

Обозначим $D := \Delta_y/(\Delta + \Delta_y)$ и оценим D сверху. Из (3.27) и (3.28) подставляя выражения для Δ и Δ_y , получим

$$D = \frac{a\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + b}{c\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + d}$$

где

$$\begin{aligned} a &= 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n, \quad c = \lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n, \\ b &= 3\lambda_{2\nu-1}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n), \quad d = \lambda_{2\nu+1}^{n,*} \frac{\lambda_{2\nu-1}^n(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 3\lambda_{2\nu-1}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n). \end{aligned}$$

Обозначим $D_1 = a/c$ и $D_2 = b/d$. В силу замечания 3.1 имеем, что $D \leq \max(D_1, D_2)$. Сначала оценим D_1/D_2 .

$$(4.17) \quad \frac{D_1}{D_2} = \frac{ad}{bc} = \frac{(2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) \left(\lambda_{2\nu+1}^{n,*} \frac{\lambda_{2\nu-1}^n(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 3\lambda_{2\nu-1}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n) \right)}{3\lambda_{2\nu-1}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) \left(\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n \right)}$$

Простыми вычислениями убеждаемся, что в (4.17) числитель больше знаменателя. Следовательно $D_1 > D_2$. Поэтому $D \leq D_1$, т.е.

$$(4.18) \quad \frac{\Delta_y}{\Delta + \Delta_y} \leq \frac{a}{c} = \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Из (4.16), (4.18) следует, что

$$(4.19) \quad \frac{\xi_2^n - \theta_1^n}{\lambda_{2\nu}^n} \geq \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*})} - \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Последнее выражение приводя к общему знаменателю и группируя подобные слагаемые в числителе, в числителе получим

$$D_3 = (\lambda_{2\nu-1}^n)^2 (\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n).$$

В силу сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ имеем, что D_3 и общий знаменатель в (4.19) имеют порядок $(\lambda_{2\nu}^n)^3$. Поэтому из (4.19) следует второе неравенство из (2.4). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.5. Из пункта E) леммы 3.1 имеем

$$(4.20) \quad \frac{\zeta_1 - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \zeta_1} = 2 + \frac{\lambda_{2\nu}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n}.$$

Следовательно,

$$(4.21) \quad \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \zeta_1}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\zeta_1 - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \zeta_1}} = \frac{1}{3 + \frac{\lambda_{2\nu}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n}} = \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^{n,*}}.$$

С другой стороны (см. (3.23) и (3.25)) имеем

$$(4.22) \quad \frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n} = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Поэтому

$$(4.23) \quad \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n}} = \frac{\Delta}{\Delta + \Delta_x}.$$

Из (4.21) и (4.23) следует

$$(4.24) \quad \frac{\zeta_1 - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{\Delta}{\Delta + \Delta_x} - \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^{n,*}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta_x}{\Delta}} - \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^{n,*}}.$$

Применяя (3.30) и пункт E) леммы 3.1, из (4.24) получим

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \frac{\zeta_1 - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} &\geq \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n}} - \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{6\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n} \geq \\ &\frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} - \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{6\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n} = \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}{(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)(6\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}. \end{aligned}$$

Учитывая сильную регулярность разбиения $\mathcal{T}$, из (4.25) получим неравенство (2.5). Теорема доказана.

Замечание 4.1. Если ζ_2 -нуль функции f_m из теоремы 2.5 на отрезке $[\tau_{2\nu-1}, \tau_{2\nu}]$, а ξ_2 -нуль функции f_n на том же отрезке, то возможны все три случая: $\zeta_2 < \xi_2$, $\zeta_2 = \xi_2$ и $\zeta_2 > \xi_2$.

Abstract. The paper obtains some estimates of the functions of a general Franklin system, which clarify the previously obtained estimates. Using these estimates, the relative position of the zeros of some functions of a general Franklin system is studied. Such estimates can be used to identify new properties of a general Franklin system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ph. Franklin, “A set of continuous orthonormal functions”, M -a th., (1928) Annalen, **100**, 522 – 529 (1928).
- [2] Z. Ciesielski, “Properties of the orthonormal Franklin system”, Studia Math., **23**, 141 – 157 (1963).
- [3] Z. Ciesielski, “Properties of the orthonormal Franklin system II”, Studia Math., **27**, 289 – 323 (1966).
- [4] Z. Ciesielski, A. Kamont, Survey on the orthogonal Franklin system, Approximation Theory, Darba, Sofia (2002).
- [5] Z. Ciesielski, A. Kamont, “Projections onto piecewise linear functions”, Funct. Approx. Comment. Math., **25**, 129 – 143 (1997).
- [6] G.G. Gevorkyan, A. Kamont, “On general Franklin systems”, Dissert. Math. (Rosprawy Mat.), **374**, 59pp. (1998).
- [7] G. G. Gevorkyan, A. A. Sahakian, “On unconditional basisness of general Franklin systems”, J. Contemp. Math. Anal., **35**:4, 2 – 22 (2000).
- [8] G.G. Gevorkyan, A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$ ”, Studia Math. **164**:2, 161 – 204 (2004).
- [9] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “General Franklin systems as bases in $H^1[0, 1]$ ”, Studia Math. **167**: 3, 259 – 292 (2005).
- [10] G. G. Gevorkyan, “Uniqueness theorems for Franklin series converging to integrable functions”, Sbornik Math., **209**: 6, 802 – 822 (2018).
- [11] Г. Г. Геворкян, “Теоремы единственности для рядов по системе Франклина”, Мат. Заметки, **98**: 5, 786 – 789 (2015).

Поступила 10 января 2024

После доработки 10 января 2024

Принята к публикации 24 апреля 2024

СРАВНЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Институт математики Национальной Академии Наук Армении
Российско - Армянский Университет¹
E-mails: *haikghazaryan@mail.ru; vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. В работе описано множество многочленов, которые имеют меньшую мощность чем данный многочлен из определённого класса.

MSC2020 number: 12E10; 26C05; 35A23.

Ключевые слова: мощность многочлена; вырожденный многочлен; сравнение многочленов; многогранник Ньютона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ оба n - мерные евклидовы пространства точек (векторов) $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ соответственно, $\mathbb{R}^{n,+} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$, $\mathbb{R}^{n,0} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1 \dots \xi_n \neq 0\}$. Через $\mathbb{N}$ мы обозначим множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а через $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ множество всех n -мерных мультииндексов, т.е. множество всех точек с целыми неотрицательными координатами $\{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}_0 (i = 1, \dots, n)\}$.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_j > 0 (j = 1, \dots, n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $t > 0$ обозначим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$, $|\xi, \lambda| = \sqrt{\xi_1^{2/\lambda_1} + \dots + \xi_n^{2/\lambda_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $t^\lambda := (t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n})$, $t^\lambda \xi := (t^{\lambda_1} \xi_1, \dots, t^{\lambda_n} \xi_n)$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{1}{i} \partial / \partial x_j$ или $D_j = \partial / \partial \xi_j (j = 1, \dots, n)$.

Пусть $\mathcal{A} = \{\nu^1, \dots, \nu^N\}$ конечный набор точек из $\mathbb{R}^{n,+}$. Многогранником Ньютона набора $\mathcal{A}$ назовём наименьший выпуклый многогранник $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$, содержащий все точки множества $\{\mathcal{A} \cup \{0\}\}$ (см., например, [1]). Многогранник $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется полным (см. [2] или [3]), если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат $\mathbb{R}^{n,+}$ и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат.

¹Исследование выполнено в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОБНРФ.

k -мерные грани многогранника $\mathfrak{R}$ обозначим через $\mathfrak{R}_i^k$ ($i = 1, \dots, M'_k, k = 0, 1, \dots, n-1$). Грани многогранника Ньютона будем, по определению, считать замкнутыми множествами.

Единичный вектор λ называется внешней нормалью (или $\mathfrak{R}$ -нормалью) грани Γ многогранника $\mathfrak{R}$, если 1) для произвольных α и β из Γ $(\lambda, \alpha) = (\lambda, \beta)$, 2) для произвольных $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in \mathfrak{R}(P) \setminus \Gamma$ $(\lambda, \alpha) > (\lambda, \beta)$. Другими словами $\mathfrak{R}$ -нормаль k -мерной грани Γ многогранника $\mathfrak{R}$, ($0 \leq k \leq n-1$) это единичная внешняя нормаль гиперплоскости, опорной к многограннику $\mathfrak{R}$, содержащей грань Γ и не содержащей какую-либо грань $\mathfrak{R}$, размерности больше чем k .

Таким образом, данный вектор λ может служить внешней нормалью одной и только одной грани многогранника $\mathfrak{R}$.

Обозначим через Λ_i^k множество внешних нормалей грани $\mathfrak{R}_i^k$ ($i = 1, \dots, M'_k, k = 0, 1, \dots, n-1$). Отметим, что или множество Λ_i^k состоит из одного вектора (когда $k = n-1$), или является открытым множеством (когда $0 \leq k < n-1$).

Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda_i^k$ ($1 \leq i \leq M'_k, 0 \leq k \leq n-1$) существует число $d = d_{i,k} = d_{i,k}(\lambda) \geq 0$ такое, что $(\lambda, \alpha) = d$ для всех $\alpha \in \mathfrak{R}_i^k$, и $(\lambda, \alpha) < d$ для любого $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}_i^k$. Более того, $\mathfrak{R}$ -нормаль $(n-1)$ -мерной (и только $(n-1)$ -мерной) грани $\mathfrak{R}_i^{n-1}$ многогранника $\mathfrak{R}$ и число $d_{i,n-1}(\lambda)$ ($1 \leq i \leq M'_{n-1}$) определяются однозначно.

Грань $\mathfrak{R}_i^k$ ($1 \leq i \leq M'_k, 0 \leq k \leq n-1$) многогранника $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется главной (см. [2]), если среди её внешних нормалей существует нормаль хотя бы одна координата которой положительна.

Пусть $P(D) = P(D_1, \dots, D_n) = \sum_{\beta} \gamma_{\beta} D^{\beta}$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $P(\xi) = \sum_{\beta} \gamma_{\beta} \xi^{\beta}$ его символ (характеристический многочлен), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) := \{\beta \in \mathbb{N}_0^n; \gamma_{\beta} \neq 0\}$. Многогранник Ньютона множества точек $\{(P) \cup (0)\}$ назовём многогранником Ньютона оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) и обозначим через $\mathfrak{R}(P)$.

Многочлен $P^{i,k}(\xi) := \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_i^k(P)} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ ($1 \leq i \leq M'_k, 0 \leq k \leq n-1$) назовём подмногочленом многочлена $P(\xi)$, отвечающим грани $\mathfrak{R}_i^k(P)$ многогранника $\mathfrak{R}(P)$. В работе [2] доказано, что подмногочлен $P^{i,k}$ является λ -однородным (обобщённо - однородным) для любого вектора $\lambda \in \Lambda_i^k$, т.е. существует число

$d = d(\lambda) = d_{i,k}(\lambda)$ такое, что $P^{i,k}(t^\lambda \xi) = P^{i,k}(t^{\lambda_1} \xi_1, \dots, t^{\lambda_n} \xi_n) = t^d P^{i,k}(\xi)$ для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1.1. (см. [2]) Грань $\mathfrak{R}_i^k = \mathfrak{R}_i^k(P)$ ($1 \leq i \leq M'_k; 0 \leq k \leq n-1$) многогранника $\mathfrak{R}(P)$ называется невырожденной, если $P^{i,k}(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^{n,0}$. Многочлен P называется невырожденным, если невырождены все главные грани его многогранника Ньютона $\mathfrak{R}(P)$.

Определение 1.2. (см. [4]) Говорят, что оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) мощнее оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$) и записывают $Q < P$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $|Q(\xi)| \leq c[P(\xi) + 1] \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 1.1. Известно (см. [2] и [5] Лемма 1.1), что многочлен $P(\xi)$ с полным многогранником Ньютона $\mathfrak{R}(P)$ является невырожденным тогда и только тогда, когда существует постоянная $c > 0$ такая, что $\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}(P)} |\xi^\alpha| \leq c[P(\xi) + 1] \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что если многочлен P невырожден, то соотношение $Q < P$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}(P)$.

Замечание 1.2. Отметим, что условие $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}(P)$ является необходимым для выполнения соотношения $Q < P$ независимо от вырожденности или невырожденности многочлена P с которым сравниваются многочлены $\{Q\}$. В самом деле, пусть $\mathfrak{R}(Q) \not\subset \mathfrak{R}(P)$ для сравнимых многочленов P и Q . Тогда, очевидно, существует вершина $\nu \neq 0$ многогранника $\mathfrak{R}(Q)$, не принадлежащая многограннику $\mathfrak{R}(P)$. Пусть λ какая-нибудь внешняя нормаль вершины ν многогранника $\mathfrak{R}(Q)$ и $(\lambda, \alpha) = d$ уравнение опорной к $\mathfrak{R}(Q)$ гиперплоскости, проходящей через точку ν и не содержащей ни одной точки множества $\mathfrak{R}(Q) \cup \mathfrak{R}(P)$, отличной от ν . Тогда $d > 0$, $(\lambda, \nu) > (\lambda, \alpha)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{R}(Q) \cup \mathfrak{R}(P)$, $\alpha \neq \nu$.

Пусть $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ и $\xi^s = s^\lambda \eta$ ($s = 1, 2, \dots$), тогда при $s \rightarrow \infty$ $Q(\xi^s) = s^d \eta^\nu (1 + o(1))$, $P(\xi^s) = o(s^d)$. Так как $\eta^\nu \neq 0$, то это означает, что $Q \not< P$.

Из приведённых замечаний следует, что при сравнении мощности многочленов $\{Q\}$ с заданным многочленом P интерес представляет только случай, когда многочлен P является вырожденным и $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}(P)$.

Введём понятие k -слойного вырождающегося многочлена P , при этом будем предполагать, что все главные грани многогранник $\mathfrak{R}(P)$ невырождены, кроме одной $(n-1)$ -мерной главной грани $\Gamma = \mathfrak{R}_{i_0}^{n-1}(P)$ ($1 \leq i_0 \leq M_{n-1}$) с внешней нормалью $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Представим многочлен P в виде суммы

μ –однородных многочленов

$$(1.1) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\mu)} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\mu)} P_{d_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\mu)} \sum_{(\lambda, \alpha)=d_j(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

Определение 1.3. Для μ –однородного многочлена P_0 обозначим $\Sigma(P_0) := \{\eta \in \mathbb{R}^{n,0}, R(\eta) = 0\}$. Многочлен P вида (1.1) назовём $r = r(\eta)$ –**слоённым** ($1 \leq r(\eta) - 1 \leq M(\mu)$) **относительно точки** $\eta \in \Sigma(P_0)$, если $P_0(\eta) = P_1(\eta) = \dots = P_{r-2}(\eta) = 0$, а $P_{r-1}(\eta) \neq 0$ и назовём $k = k(P)$ –**слоённым**, где $k(P) := \max_{\eta \in \Sigma(P_0)} r(\eta)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Ниже всюду $d_0 > d_1 > d_2 \geq 0$ и $\kappa > 0$. При $\rho \in [d_2, d_0]$ обозначим

$$(2.1) \quad \Psi_\kappa^1 = \{(y, u) : y \in \mathbb{R}^1, u \geq 0, |y| \leq \kappa u^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)}\}.$$

Лемма 2.1. Для всех $(y, u) \in \Psi_\kappa^1$ выполняется неравенство

$$(2.2) \quad x^\rho |y| \leq \kappa (x^{d_0} u + x^{d_1} v + x^{d_2}) \quad \forall x > 0, v \geq 0.$$

Доказательство. Так как утверждение леммы при $\rho = d_0$ и $\rho = d_2$ очевидно (см. определение множества Ψ_κ^1), то пусть $\rho \in (d_2, d_0)$.

Обозначим $p := (d_0 - d_2)/(\rho - d_2)$ и $q := \frac{p}{p-1} = \frac{d_0-d_2}{d_0-\rho}$. Учитывая, что $p > 1$ и $\rho = d_0 (\rho - d_2)/(d_0 - d_2) + d_2 (d_0 - \rho)/(d_0 - d_2)$, в силу определения множества Ψ_κ^1 (см. (2.1)) и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} x^\rho |y| &\leq \kappa x^\rho u^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} = \kappa (x^{d_0} u)^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} (x^{d_2})^{(d_0-\rho)/(d_0-d_2)} \\ &\leq \kappa \left(\frac{1}{p} x^{d_0} u + \frac{1}{q} x^{d_2} \right) \leq \kappa (x^{d_0} u + x^{d_1} v + x^{d_2}), \end{aligned}$$

что доказывает лемму. □

При $\rho \in [d_2, d_1]$ обозначим

$$(2.3) \quad \Psi_\kappa^2 := \{(y, v) : y \in \mathbb{R}^1, v \geq 0, |y| \leq \kappa v^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)}\}.$$

Лемма 2.2 При любых $x > 0$ и $u \geq 0$ выполняется неравенство (2.2) для всех $(y, v) \in \Psi_\kappa^2$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.1.

При $\rho \in [d_1, d_0]$, $u \geq 0, v \geq 0$ обозначим

$$(2.4) \quad \Psi_\kappa^3 := \{(y, u, v) : y \in \mathbb{R}^1, |y| \leq \kappa u^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)} v^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)}\}.$$

Лемма 2.3. Для всех $(y, u, v) \in \Psi_\kappa^3$ выполняется оценка (2.2) при всех $x > 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.1.

При $\rho \in [d_2, d_0]$ обозначим

$$\Psi_\kappa^4 := \{(y, u, v) : y \in \mathbb{R}^1, u, v \in [0, 1]; x^\rho |y| \leq \kappa [x^{d_0} u + x^{d_1} v + x^{d_2}] \ \forall x \geq 1\}.$$

Лемма 2.4 Пусть $\rho \in [d_2, d_1]$. Тогда для любого $\kappa > 0$ существует постоянная $c = c(\kappa) > 0$ такая, что для всех троек $(y, u, v) \in \Psi_\kappa^4$ выполняется оценка

$$(2.5) \quad |y| \leq c [u^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} + v^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)}].$$

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях леммы, существуют число $\kappa > 0$ и последовательность $\{y_s, u_s, v_s\} \in \Psi_\kappa^4$, $u_s v_s \neq 0$ ($s = 1, 2, \dots$), для которых при $s \rightarrow \infty$

$$(2.6) \quad \theta_s := |y_s| / [u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} + v_s^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)}] \rightarrow \infty,$$

в то время, как для любого $x \geq 1$

$$(2.7) \quad x^\rho |y_s| \leq \kappa [x^{d_0} u_s + x^{d_1} v_s + x^{d_2}] \quad s = 1, 2, \dots$$

Множество натуральных чисел представим в виде объединения двух множеств: $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, так, что

$$1) \ u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} > v_s^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)} \quad \forall s \in \mathbb{N}_1,$$

$$2) \ u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} \leq v_s^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)} \quad \forall s \in \mathbb{N}_2.$$

Или, что то же самое,

$$1') \ u_s^{\frac{d_1-d_2}{d_0-d_2}} > v_s \quad \forall s \in \mathbb{N}_1, \quad 2') \ u_s^{\frac{d_1-d_2}{d_0-d_2}} \leq v_s \quad \forall s \in \mathbb{N}_2.$$

Отметим, что при таком представлении множества $\mathbb{N}$, либо оба множества $\mathbb{N}_1$ и $\mathbb{N}_2$ состоят из бесконечного множества чисел, либо какое-нибудь из них состоит из конечного множества. В последнем случае, за счет выбора подпоследовательности, можно игнорировать элементы рассматриваемой последовательности, индексы которых принадлежат ограниченному множеству. Таким образом, достаточно рассматривать только случай, когда оба множества бесконечны и по отдельности рассматривать каждый случай.

Рассмотрим случай, когда $s \in \mathbb{N}_1$. Так как в этом случае $u_s \in (0, 1]$, то в силу условия $d_0 > d_2$ получаем, что $x_s := u_s^{-1/(d_0-d_2)} \geq 1 \quad s \in \mathbb{N}_1$. А по определению чисел $\{\theta_s\}$ и $\{x_s\}$ имеем в этом случае

$$(2.8) \quad x_s^\rho |y_s| \geq \theta_s x_s^\rho u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} = \theta_s x_s^{\rho-(\rho-d_2)} = \theta_s x_s^{d_2}, \quad s \in \mathbb{N}_1.$$

Для слагаемых правой части неравенства (2.7) имеем при $x = x_s$ для всех $s \in N_1$

$$(2.9') \quad x_s^{d_0} u_s = x_s^{d_0} x_s^{-(d_0-d_2)} = x_s^{d_2},$$

$$(2.9'') \quad x_s^{d_1} v_s \leq x_s^{d_1} u_s^{(d_1-d_2)/(d_0-d_2)} = x_s^{d_1-(d_1-d_2)} = x_s^{d_2}.$$

Так как $\theta_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, (см. (2.6)), то полученные соотношения (2.8), (2.9'), (2.9'') вместе противоречат соотношению (2.7) и завершают рассмотрение случая 1).

В случае $s \in N_2$ противоречие с (2.7) получается аналогичным образом, если в качестве $\{x_s\}$ брать $x_s := v_s^{-1/(d_1-d_2)}$. Лемма 2.4 доказана. $\square$

Из лемм 2.1, 2.2 и 2.4 непосредственно следует

Следствие 2.1. Пусть $d_0 > d_1 > d_2 \geq 0$ и $\rho \in [d_2, d_1]$. Соотношение (2.2) для всех $x \geq 1, u, v \in [0, 1]$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (2.5). $\square$

Лемма 2.5. Пусть $\rho \in [d_1, d_0]$. Тогда для любого $\kappa > 0$ существует постоянная $c = c(\kappa) > 0$ такая, что для всех троек $(y, u, v) \in \Psi_\kappa^4$ выполняется оценка

$$(2.10) \quad |y| \leq c [u^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} + u^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)} v^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)}].$$

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях леммы существуют число $\kappa > 0$ и последовательность $\{y_s, u_s, v_s\} \in \Psi_\kappa^4$ (при этом, не умаляя общности, можно считать, что $u_s v_s \neq 0$ $s = 1, 2, \dots$), для которых при $s \rightarrow \infty$

$$\theta_s := |y_s| / [u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} + u_s^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)} v_s^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)}] \rightarrow \infty,$$

в то время, как для всех $x \geq 1$

$$(2.11) \quad x^\rho |y_s| \leq \kappa [x^{d_0} u_s + x^{d_1} v_s + x^{d_2}] \quad s = 1, 2, \dots$$

Представим, как при доказательстве предыдущей леммы, множество натуральных чисел в виде объединения двух множеств: $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, так, что

$$1) \quad u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} > u_s^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)} v_s^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)} \quad s \in \mathbb{N}_1,$$

$$2) \quad u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} \leq u_s^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)} v_s^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)} \quad s \in \mathbb{N}_2,$$

Эти соотношения эквивалентны соответственно следующим

$$1') \quad u_s^{(d_1-d_2)/(d_0-d_2)} > v_s \quad s \in \mathbb{N}_1, 2') \quad u_s^{(d_1-d_2)/(d_0-d_2)} \leq v_s \quad s \in \mathbb{N}_2.$$

Рассмотрим случай 1'). Так как $u_s \in (0, 1]$ $s = 1, 2, \dots$, то в силу условия $d_0 > d_2$ получаем, что $x_s := u_s^{-1/(d_0-d_2)} \geq 1$ $s = 1, 2, \dots$. Оценим по отдельности обе части соотношения (2.5) при $x = x_s$ $s = 1, 2, \dots$. По определению чисел $\{\theta_s\}$ и $\{x_s\}$ имеем для всех $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} x_s^\rho |y_s| &\geq \theta_s x_s^\rho u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} = \theta_s u_s^{-d_0/(d_0-d_2)} = \theta_s u_s^{-d_2/(d_0-d_2)}, \\ x_s^{d_0} u_s &= u_s^{-d_0/(d_0-d_2)} u_s = u_s^{-d_2/(d_0-d_2)} \\ x_s^{d_1} v_s &\leq x_s^{d_1} u_s^{(d_1-d_2)/(d_0-d_2)} = u_s^{-d_1/(d_0-d_2)+(d_1-d_2)/(d_0-d_2)} = u_s^{-d_2/(d_0-d_2)}, \\ x_s^{d_2} &= u_s^{-d_2/(d_0-d_2)}. \end{aligned}$$

Так как $\theta_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то полученные соотношения противоречат (2.5).

Рассмотрим случай 2'). Так как $u_s \in (0, 1]$ $s = 1, 2, \dots$, то в этом случае из условия $d_0 > d_1 > d_2$ следует, что $v_s \geq u_s$ $s = 1, 2, \dots$. Следовательно, $x_s := (v_s/u_s)^{1/(d_0-d_1)} \geq 1$ для всех $s = 1, 2, \dots$. Оценим обе части соотношения (2.5) при $x = x_s$ $s = 1, 2, \dots$. Из определения чисел $\{\theta_s\}$ и $\{x_s\}$ имеем для всех $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} x_s^\rho |y_s| &\geq \theta_s x_s^\rho u_s^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)} v_s^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)} \\ &= \theta_s v_s^{\rho/(d_0-d_1)+(d_0-\rho)/(d_0-d_1)} u_s^{-\rho/(d_0-d_1)+(\rho-d_1)/(d_0-d_1)} \\ &= \theta_s v_s^{d_0/(d_0-d_1)} u_s^{-d_1/(d_0-d_1)}, \\ x_s^{d_0} u_s &= v_s^{d_0/(d_0-d_1)} u_s^{-d_0/(d_0-d_1)+1} = v_s^{d_0/(d_0-d_1)} u_s^{-d_1/(d_0-d_1)}, \\ x_s^{d_1} v_s &= v_s^{d_1/(d_0-d_1)+1} u_s^{-d_1/(d_0-d_1)} = v_s^{d_0/(d_0-d_1)+1} u_s^{-d_1/(d_0-d_1)} \end{aligned}$$

и, наконец

$$\begin{aligned} x_s^{d_2} &= v_s^{d_2/(d_0-d_1)} u_s^{-d_2/(d_0-d_1)} = v_s^{d_0/(d_0-d_1)} v_s^{-(d_0-d_2)/(d_0-d_1)} u_s^{-d_2/(d_0-d_1)} \\ &\leq v_s^{d_0/(d_0-d_1)} u_s^{-(d_1-d_2)/(d_0-d_1)} u_s^{-d_2/(d_0-d_1)} = v_s^{d_0/(d_0-d_1)} u_s^{-d_1/(d_0-d_1)}. \end{aligned}$$

Так как $\theta_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то полученные соотношения противоречат (2.11). $\square$

Следствие 2.2. Пусть $d_0 > d_1 > d_2 \geq 0$ и $\rho \in (d_1, d_0]$. Для выполнения оценки (2.2) для всех $x \geq 1$ и $u, v \in (0, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $\kappa > 0$ выполнялось неравенство $x^\rho |y| \leq \kappa [x^{d_0} u + x^{d_1} v + x^{d_2}]$.

Доказательство непосредственно следует из лемм 2.1, 2.3 и 2.5.

Лемма 2.6. Пусть $d_0 > d_1 \geq 0$ и $\rho \in (d_1, d_0]$. Для того, чтобы с некоторой постоянной $c > 0$ и для всех $x \geq 1$, $u, v \in (0, 1)$ выполнялась оценка $x^\rho |y| \leq c [x^{d_0} u + x^{d_1} v]$ необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $\kappa > 0$ выполнялось неравенство $|y| \leq \kappa u^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)}$.

Доказательство проводится аналогично доказательствам лемм 2.1 и 2.4.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для $\lambda \in \mathbb{R}^{n,0} \cap \mathbb{R}^{n,+}$ и λ -однородного многочлена R положим $\Sigma(R, \lambda) := \{\eta : \eta \in \mathbb{R}^{n,0}, |\eta, \lambda| = 1, R(\eta) = 0\}$.

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ и $\lambda \in \mathbb{R}^{n,0} \cap \mathbb{R}^{n,+}$. Представим многочлен P по вектору λ в виде суммы λ -однородных многочленов

$$(3.1) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^{M_P} P_j(\xi) := \sum_{j=0}^{M_P} \sum_{(\lambda, \alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

где $d_0 > d_1 > \dots > d_{M_P} \geq 0$.

Через $\mathbb{I}_n^+$ обозначим множество (неотрицательных) многочленов n переменных с вещественными коэффициентами, таких, что $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Отметим, что таковыми являются, например, неотрицательные символы гипотетических по Л. Хёрмандеру дифференциальных операторов (см. [7] или [10]).

Замечание 3.1. Из определения множества $\mathbb{I}_n^+$ очевидно следует, что многочлен P из этого множества не может принимать нулевые значения вне некоторого круга $K = K(P)$ с центром в начале координат, т.е. вне этого круга принимает значения одинакового знака. Поэтому, при необходимости, умножением на минус единицу и добавлением положительной константы (которые не влияют на мощность многочлена P), далее можем считать, что $P(\xi) > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. После такой обусловленности имеет место следующее предложение, которым мы часто будем пользоваться.

Лемма 3.1. (см. [8] Лемма 1.2) Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ многогранник Ньютона многочлена $P \in \mathbb{I}_n^+$ и $\mathfrak{R}_i^k$ ($i = 1, 2, \dots, M_k, k = 0, 1, \dots, n-1$) — его главные грани. Тогда

- a) многогранник $\mathfrak{R}$ полный
- b) $P^{i,k}(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, M_k, k = 0, 1, \dots, n-1$)
- c) пусть пара (i, k) ($1 \leq i \leq M_k, 0 \leq k \leq n-1$), вектор $\lambda \in \mathfrak{R}_i^k$ и точка $\eta \in \Sigma(\mathfrak{R}_i^k, \lambda)$ фиксированы; более того (см. представление (3.1)) $P_j(\eta) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, l-1$), $P_l(\eta) \neq 0$ $0 \leq l \leq M_P$. Тогда $d_l > 0$ и $P_l(\eta) > 0$.

Лемма 3.2. Пусть все главные грани многогранника $\mathfrak{R}(P)$ многочлена $P \in \mathbb{I}_n^+$, за исключением быть может $(n-1)$ -мерной грани $\Gamma := \mathfrak{R}_{i_0}^{n-1}$ с внешней

нормалью $\lambda \in R^{n,0} \cap R^{n,+}$ невырождены, $d_0 - \lambda$ — порядок многочлена P , а Q некоторый многочлен с λ — порядком $\delta_Q \leq d_0$.

I) Если грань Γ невырождена, то $Q < P$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{R}(Q) \subset \mathbb{R}(P)$

II) Если грань Γ вырождена, то $Q < P$ тогда и только тогда, когда II.a) $\mathbb{R}(Q) \subset \mathbb{R}(P)$, II.b) существует постоянная $c > 0$ такая, что для произвольных $t > 0$ и $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$

$$|Q(t^\lambda \xi)| \leq c[1 + |P(t^\lambda \xi)|] \quad \forall \xi \in S_1(\eta, \lambda) := \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi - \eta, \lambda| < 1\}.$$

Доказательство. Утверждение пункта I) и необходимость пункта II) следуют из Замечаний 1.1 и 1.2.

Докажем достаточность пункта II). Предположим обратное, что при выполнении условий этого пункта существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ такая, что при $s \rightarrow \infty$ $|\xi^s| \rightarrow \infty$ и

$$(3.2) \quad |Q(\xi^s)|/[1 + |P(\xi^s)|] \rightarrow \infty.$$

Обозначим $\eta^s := \xi^s/|\xi^s, \lambda|^\lambda$ $s = 1, 2, \dots$. Так как $|\eta^s, \lambda| = 1$ ($s = 1, 2, \dots$), то из условия $\lambda \in \mathbb{R}^{n,0} \cap \mathbb{R}^{n,+}$ и из теоремы Больцано - Вейерштрасса следует существование подпоследовательности последовательности $\{\eta^s\}$ (которую также обозначим через $\{\eta^s\}$) и точки $\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta, \lambda| = 1$ таких, что $|\eta^s, \lambda| \rightarrow |\eta, \lambda|$ при $s \rightarrow \infty$.

Покажем, что $P_0(\eta) = 0$. Предполагая обратное, что $P_0(\eta) \neq 0$, получим

$$(3.3) \quad |P(\xi^s)| = ||\xi^s, \lambda|^{d_0} P_0(\eta^s) + o(|\xi^s, \lambda|^{d_0})| = |\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta)|(1 + o(1)).$$

Так как $\delta_Q \leq d_0$, и $|\xi^s, \lambda| \geq 1$ для достаточно больших s , то для таких s , имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$(3.4) \quad |Q(\xi^s)| \leq c_1 |\xi^s, \lambda|^{\delta_Q} \leq c_1 |\xi^s, \lambda|^{d_0}.$$

Полученные соотношения (3.3) - (3.4) противоречат (3.2) и доказывают, что $P_0(\eta) = 0$.

Рассмотрим следующие два возможных случая: 1) $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ и 2) $\eta \notin \mathbb{R}^{n,0}$.

Так как $\eta^s \rightarrow \eta$ при $s \rightarrow \infty$, то в случае 1), в силу пункта II) b) леммы, при достаточно больших s (для которых $\eta^s \in S_1(\eta, \lambda)$) имеем

$$|Q(\xi^s)| = |Q(|\xi^s, \lambda|^\lambda \eta^s)| \leq c[1 + |P(|\xi^s, \lambda|^\lambda \eta^s)|] = c[1 + |P(\xi^s)|],$$

что противоречит предположению (3.2).

В случае 2) мы будем пользоваться Предложением 2.1 работы [6], где доказано, что если при условиях настоящей леммы последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $\xi^s \rightarrow \infty$ и $\xi^s/|\xi^s, \lambda|^\lambda \rightarrow \eta$ при $s \rightarrow \infty$, при этом $\eta_1 \dots \eta_n = 0$, то существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что для всех $\nu \in \mathfrak{R}(P)$ имеет место неравенство $|(\xi^s)^\nu| \leq c_2 [|P(\xi^s)| + 1]$ $s = 1, 2, \dots$. Так как по условию леммы $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}(P)$, то с некоторой постоянной $c_3 > 0$ справедливо неравенство $|Q(\xi^s)| \leq c [|P(\xi^s)| + 1]$ $s = 1, 2, \dots$.

Это противоречит нашему предположению (3.2) и доказывает справедливость второго пункта леммы. $\square$

Через $\mathbb{G}_n$ обозначим множество многочленов $P \in \mathbb{I}_n$ для которых все главные грани многогранника Ньютона $\mathfrak{R}(P)$ кроме, быть может одной $(n-1)$ -мерной главной грани $\Gamma := \mathfrak{R}_{i_0}^{n-1}$ ($1 \leq i_0 \leq n-1$) с внешней нормалью λ ($\lambda_j > 0$ $j = 1, \dots, n$) невырождены. При этом, если грань Γ вырождена и по вектору λ многочленов P представлен в виде (3.1), то $\Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda) \cap \Sigma(P_2, \lambda) = \emptyset$ и с некоторой постоянной $c > 0$

$$(3.5) \quad 1 + |P(\xi)| \geq c [|P_0(\xi)| + |P_1(\xi)| + |P_2(\xi)|] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 3.1 Пусть многочлен $P \in \mathbb{G}_n$ представлен по вектору λ в виде (3.1), а R, λ -однородный многочлен λ -степени δ . Тогда

I) если $\delta \leq d_2$, то $R < P$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{R}(R) \subset \mathfrak{R}(P)$,

II) если $\delta \in (d_2, d_0]$, то $R < P$ в том и только в том случае, когда II.a) $\mathfrak{R}(R) \subset \mathfrak{R}(P)$,

II.b) для любой точки $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ существует окрестность $O(\eta)$ такая, что с некоторой постоянной $\kappa > 0$ и для всех $\xi \in O(\eta)$

II.b.1) $|R(\xi)| \leq \kappa [|P_0(\xi)|^{(\delta-d_2)/(d_0-d_2)} + |P_1(\xi)|^{(\delta-d_2)/(d_1-d_2)}]$, если $\delta \in (d_2, d_1]$, $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$,

II.b.2) $|R(\xi)| \leq \kappa [|P_0(\xi)|^{(\delta-d_2)/(d_0-d_2)} + |P_1(\xi)|^{(d_0-\delta)/(d_0-d_1)}]$, если $\delta \in (d_1, d_0]$, $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$,

II.b.3) $|R(\xi)| \leq \kappa [|P_0(\xi)|^{(\delta-d_1)/(d_0-d_1)}]$, если $\delta \in (d_1, d_0]$, $\eta \notin \Sigma(P_1, \lambda)$.

Доказательство. Так как утверждение пункта I) следует из Леммы 1.1 работы [10], то нам надо доказать лишь пункт II).

Необходимость условия II.a) также следует из упомянутой леммы. Докажем необходимость пункта II.b). Сначала докажем необходимость подпунктов II.b.1) - II.b.2).

Пусть $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$, $P_2(\eta^0) \neq 0$. Тогда (см. Замечание 3.1) существует окрестность $O_0(\eta^0) \subset S_1(\eta^0, \lambda)$ такая, что $|P_0(\xi)| < 1$, $|P_1(\xi)| < 1$, и $|P_2(\xi)| < \frac{3}{2} |P_2(\eta^0)| \quad \forall \xi \in O_0(\eta^0)$. Следовательно, в силу Леммы 3.1 имеем с некоторыми постоянными $c_j > 0 \quad j = 1, 2, 3$ для всех $t \geq 1$ и $\xi \in O_0(\eta^0)$

$$|t^\delta R(\xi)| = |R(t^\lambda \xi)| \leq c_1 [1 + |P(t^\lambda \xi)|] \leq c_1 [1 + \sum_{j=0}^2 t^{d_j} |P_j(\xi)|]$$

$$\leq c_2 [1 + \sum_{j=0}^{M_P} t^{d_j} |P_j(\xi)|] \leq c_3 [t^{d_0} |P_0(\xi)| + t^{d_1} |P_1(\xi)| + t^{d_2}].$$

В силу Следствия 2.1, отсюда получаем доказательство необходимости условия П.б.1) при $\delta \in (d_2, d_1]$ и необходимости условия П.б.2) при $\delta \in (d_1, d_0]$.

Необходимость условия П.б.3) получается аналогично, с использованием Леммы 2.6, если заметить, что в этом случае $P_1(\eta^0) \neq 0$ и с некоторой постоянной $c_4 > 0$ $1 + |t^\delta R(\xi)| \leq c_1 [1 + |P(t^\lambda \xi)|] \leq c_4 [t^{d_0} |P_0(\xi)| + t^{d_1}]$ для всех $t \geq 1$ и $\xi \in O_1(\eta^0) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |P_0(\xi)| < 1, |P_1(\xi)| < \frac{3}{2} |P_1(\eta^0)|\} \cap S_1(\eta^0, \lambda)$.

Достаточность. Предположим обратное, что при выполнении условий теоремы, существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что при $s \rightarrow \infty$

$$(3.6) \quad |R(\xi^s)|/[1 + |P(\xi^s)|] \rightarrow \infty.$$

Так как из соотношения (3.6) следует, что $|\xi^s, \lambda| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то далее будем считать, что $|\xi^s, \lambda| \geq 1$ для всех $s = 1, 2, \dots$.

Проводя аналогичные рассуждения, проводимые при доказательстве достаточности пункта II) Леммы 3.1 (при необходимости, переходя на подпоследовательность) можно показать, что при выполнении соотношения (3.6), существует точка $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ такая, что $\eta^s := \xi^s / |\xi^s, \lambda|^\lambda \rightarrow \eta$ при $s \rightarrow \infty$. Следовательно, при достаточно больших s (будем считать, что для всех s) $\eta^s \in O(\eta)$, где окрестность $O(\eta)$ выбрана по условию П.б) теоремы.

Рассмотрим следующие возможные случаи: 1) $\eta \notin \Sigma(P_1, \lambda)$. и 2) $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$.

Так как $P_1(\eta^s) \rightarrow P_1(\eta^0) \neq 0$ при $s \rightarrow \infty$, то в случае 1), применяя оценку (3.5), получим с некоторыми постоянными $c_5 > 0, c_6 > 0$ при достаточно больших s

$$(3.7) \quad \begin{aligned} 1 + |P(\xi^s)| &\geq c_5 [|P_0(\xi^s)| + |P_1(\xi^s)|] = c_5 [|\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1} |P_1(\eta^s)|] \\ &\geq c_6 [|\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1}] \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Так как $R(\xi^s) = |\xi^s, \lambda|^\delta \cdot |R(\eta^s)|$ ($s = 1, 2, \dots$), то при $\delta \leq d_1$ полученные соотношения противоречат (3.6). Если же в случае 1) $\delta \in (d_1, d_0]$, то из пункта II.b.3), в силу Леммы 2.6, с некоторой постоянной $c_7 > 0$ при $x = x_s = |\xi^s, \lambda|$, $y = y_s = R(\eta^s)$, $u = u_s = |P_0(\eta^s)|$ для достаточно больших s имеем $|\xi^s, \lambda|^\delta \cdot |R(\eta^s)| \leq c_7 [|\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1}]$. Это, вместе с оценкой (3.7) противоречат нашему предположению (3.6).

В случае 2) из условий II.b.1), II.b.2) и Следствий 2.1, 2.2 с некоторой постоянной $c_8 > 0$ при $x = x_s = |\xi^s, \lambda|$, $y = y_s = R(\eta^s)$, $u = u_s = |P_0(\eta^s)|$, $v = v_s := |P_1(\eta^s)|$ для достаточно больших s имеем $|\xi^s, \lambda|^\delta |R(\eta^s)| \leq c_8 [|\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1} |P_1(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_2}]$. Так как в этом случае $P_2(\eta) \neq 0$, то отсюда в силу оценки (3.5) для достаточно больших s имеем с некоторыми постоянными $c_9 > 0, c_{10} > 0$

$$\begin{aligned} |R(\xi^s)| &= |\xi^s, \lambda|^\lambda |R(\eta^s)| \leq c_8 [|P_0(\xi^s)| + |P_1(\xi^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_2}] \\ &\leq c_9 [|P_0(\xi^s)| + |P_1(\xi^s)| + |P_2(\xi^s)|] \leq c_{10} [1 + |P(\xi^s)|]. \end{aligned}$$

Полученное соотношение противоречит (3.6) и доказывает достаточную часть пункта II). $\square$

Для λ -однородного многочлена R ($\lambda_j > 0$ $j = 1, \dots, n$) и точки $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$ через $\Delta(R, \eta)$ обозначим λ -кратность точки η многочлена R , т.е. наименьшее положительное число для которого $D^\alpha R(\eta) = 0$ при $(\lambda, \alpha) < \Delta(R, \eta)$ и $\sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(R, \eta)} |D^\alpha R(\eta)| \neq 0$.

Теорема 3.2 Пусть $n = 2$, многочлен $P \in \mathbb{G}_2$ представлен по вектору λ в виде (3.1), а R λ -однородный многочлен λ -степени δ .

I) Если $\delta \leq d_2$, то $R < P$ тогда и только тогда, когда $\Re(R) \subset \Re(P)$

II) если $\delta \in (d_2, d_0]$ то $R < P$ тогда и только тогда, когда

II.a) $\Re(R) \subset \Re(P)$

II.b.) для любой точки $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ выполняются следующие соотношения

II.b.1) $\Delta(R, \eta) \geq \min\{\Delta(P_0, \eta) \frac{\delta - d_2}{d_0 - d_2}, \Delta(P_0, \eta) \frac{\delta - d_2}{d_1 - d_2}\}$, если $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$ и $\delta \in (d_2, d_1]$

II.b.2) $\Delta(R, \eta) \geq \min\{\Delta(P_0, \eta) \frac{\delta - d_2}{d_0 - d_2}, \Delta(P_0, \eta) \frac{\delta - d_1}{d_0 - d_2}, + \Delta(P_1, \eta) \frac{d_0 - \delta}{d_0 - d_1}\}$ если $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$ и $\delta \in (d_1, d_0]$

II.b.3) $\Delta(R, \eta) \geq l_{P_0}(\eta) \frac{\delta - d_1}{d_0 - d_1}$ если $\eta \notin \Sigma(P_1, \lambda)$ и $\delta \in (d_1, d_0]$.

Доказательство. Достаточно показать, что утверждения пунктов II) б. j ($j = 1, 2, 3$) эквивалентны соответствующим пунктам теоремы 3.1.

В работе [11] доказано, что для любого λ -однородного ($\lambda_j > 0 \ j = 1, \dots, n$) нелинейного многочлена $R(\xi) = R(\xi_1, \xi_2)$ такого, что $\Sigma(R, \lambda) \neq \emptyset$, существуют мультииндекс β , однородный эллиптический многочлен $r(\xi)$, натуральное число K , вещественные числа $a_j \ (j = 1, \dots, K; \ a_i \neq a_j \text{ при } i \neq j)$, и натуральные числа $l_j = l_j(\eta) \ (j = 1, \dots, K, \ \eta \in \Sigma(R, \lambda))$ такие, что

$$(3.8) \quad R(\xi) = \xi^\beta r(\xi_1^{t_0 \lambda_2}, \xi_2^{t_0 \lambda_1}) \cdot \prod_{j=1}^K (\xi_1^{t_0 \lambda_2} - a_j \xi_2^{t_0 \lambda_1})^{l_j} \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь t_0 наименьшее число такое, что $t_0 \lambda_1$ и $t_0 \lambda_2$ взаимнопростые натуральные числа, при этом, для каждой точки $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$ существует однозначно определяемый номер $j_0 = j_0(\eta)$ такой, что $a_{j_0}(\eta) = \eta_1^{t_0 \lambda_2} / \eta_2^{t_0 \lambda_1}$. Отметим что, $\Delta(R, \eta) = l(R, \eta) \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ при $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$

Так как эквивалентность пунктов II.b.3) Теоремы 3.1 и II.b.j) $j = 1, 2, 3$ Теоремы 3.2 доказываются аналогично, то мы докажем только эквивалентность пунктов II.b.1) обоих теорем.

Сначала отметим, что в силу представления (3.1) следующие две оценки эквивалентны:

существует постоянная $\kappa > 0$ такая, что при $\delta \in (d_2, d_1]$, $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$

$$(3.9) \quad |R(\xi)| \leq \kappa [|P_0(\xi)|^{(\delta-d_2)/(d_0-d_2)} + |P_1(\xi)|^{(\delta-d_2)/(d_1-d_2)}] \quad \forall \xi \in O(\eta),$$

существует постоянная $c = c(\kappa) > 0$ такая, что

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & |\xi_1^{t_0 \lambda_2} - a_{j_0} \xi_2^{t_0 \lambda_1}|^{l(R, \eta)} \leq c [(\xi_1^{t_0 \lambda_2} - a_{j_0} \xi_2^{t_0 \lambda_1})^{l(P_0, \eta)}]^{(\delta-d_2)/(d_0-d_2)} \\ & + |(\xi_1^{t_0 \lambda_2} - a_{j_0} \xi_2^{t_0 \lambda_1})^{l(P_1, \eta)}]^{(\delta-d_2)/(d_1-d_2)} \quad \forall \xi \in O(\eta). \end{aligned}$$

Очевидно, что оценка (3.10) выполняется тогда и только тогда, когда

$$(3.11) \quad l(R, \eta) \geq \min\{l(P_0, \eta) \frac{\delta - d_2}{d_0 - d_2}, l(P_1, \eta) \frac{\delta - d_2}{d_1 - d_2}\}.$$

Так как $\Delta(R, \eta) = l(R, \eta) \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, то соотношение (3.10) можно переписать в виде

$$\Delta(R, \eta) \geq \min\{\Delta(P_0, \eta) \frac{\delta - d_2}{d_0 - d_2}, \Delta(P_1, \eta) \frac{\delta - d_2}{d_1 - d_2}\}.$$

Это доказывает эквивалентность пунктов II.b.1) Теоремы 3.2 с соответствующим пунктом Теоремы 3.1. $\square$

Следующие примеры иллюстрируют доказанную теорему.

Пример 3.2 (относится к случаю II.b.1) Пусть $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6 + (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + (\xi_1^2 + \xi_2^2) =: P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi)$, $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 r(\xi)$, где $r(\xi)$ любой однородный многочлен второй степени.

Здесь P представлен в виде суммы однородных многочленов, т.е. можно считать, что $\lambda = (1, 1)$, при этом $d_0 = 6$, $d_1 = 4$, $d_2 = 2$, $\delta = 4 \in (d_2, d_1]$, $\Sigma(P_0, \lambda) = \{\pm\eta = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$, $l_{P_0}(\pm\eta) = 6$, $l_{P_1}(\pm\eta) = 2$, $l_R(\eta) = 2$.

Так как $P \in \mathbb{G}_2$, $\Re(R) \subset \Re(P)$, $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$, $2 = l_R(\eta) \geq 2 \frac{4-2}{6-2} = l_{P_1}(\eta) \frac{\delta-d_2}{d_0-d_2}$ ($\leq 6 \frac{4-2}{6-2} = l_{P_0}(\eta) \frac{\delta-d_2}{d_0-d_2}$), $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cup \mathbb{R}^{n,0}$, то в силу Теоремы 3.2 $R < P$.

Пример 3.3 (относится к случаю II.b.1)) $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6 (\xi_1^6 + \xi_2^6) + (\xi_1 - \xi_2)^3 (\xi_1^4 + \xi_2^4) + (\xi_1^4 + \xi_2^4) =: P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi)$, $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1^3 + \xi_2^3)$.

Здесь $d_0 = 12$, $d_1 = 7$, $d_2 = 4$, $\delta = 5 \in (d_2, d_1]$. $\Sigma(P_0, \lambda) = \{\pm\eta = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$, $l_{P_0}(\pm\eta) = 6$, $l_{P_1}(\pm\eta) = 3$, $l_R(\pm\eta) = 2$.

Так как $P \in \mathbb{G}_2$, $\Re(R) \subset \Re(P)$, $\pm\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$, и $2 = l_R(\pm\eta) \geq 6 \frac{5-4}{12-4} = l_{P_0}(\pm\eta) \frac{\delta-d_2}{d_0-d_2}$, то в силу Теоремы 2.2 $R < P$.

Пример 3.4 (относится к случаю II.b.2)) пусть P многочлен из примера 3.2, а $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^4 (\xi_1 + \xi_2)$. Здесь $l_R(\pm\eta) = 4$, $\delta = 5 \in (d_1, d_0]$.

Так как $P \in \mathbb{G}_2$, $\Re(R) \subset \Re(P)$, $\pm\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$ и $4 = l_R(\pm\eta) \geq 6 \frac{5-4}{6-4} + 2 \frac{6-5}{6-4} = l_{P_0}(\pm\eta) \frac{\delta-d_2}{d_0-d_2} + l_{P_1}(\pm\eta) \frac{d_0-\delta}{d_0-d_1}$, ($\leq 6 \frac{5-2}{6-2} = l_{P_0}(\pm\eta) \frac{\delta-d_2}{d_0-d_2}$), то в силу Теоремы 2.2 $R < P$.

Пример 3.5 (относится к случаю II.b.2)) пусть P многочлен из примера 3.3, а $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^3 r(\xi)$, где $r(\xi)$ любой однородный многочлен степени 5, т.е. $\delta = 8 \in (7, 12) = (d_1, d_0)$, $l_R(\pm\eta) \geq 3$.

Так как $P \in \mathbb{G}_2$, $\Re(R) \subset \Re(P)$, $\pm\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$ и $l_R(\pm\eta) \geq 3 \geq 6 \frac{8-4}{12-4} = l_{P_0}(\pm\eta) \frac{\delta-d_2}{d_0-d_2}$, то в силу Теоремы 2.2 $R < P$.

Лемма 3.3 Пусть многочлен $P \in \mathbb{G}_n$ представлен в виде (3.1) по вектору $\lambda = \lambda(P)$. Тогда I) существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что для всех $\nu \in \Re(P) \cap \{\alpha \in \mathbb{R}^{n,+}, (\lambda, \alpha) \leq d_2\} =: \Re^*$

$$(3.12) \quad |\xi^\alpha| \leq c_1 [1 + |P(\xi)|] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

II) существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что для всех $t \geq 1$

$$(3.13) \quad c_2^{-1} t^{-d_0} [1 + |P(t^\lambda \xi)|] \leq 1 + |P(\xi)| \leq c_2 [1 + |P(t^\lambda \xi)|] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Докажем оценку (3.12). Предположим обратное, что существуют точка $\nu^0 \in \Re^*$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что при $s \rightarrow \infty$

$$(3.14) \quad |(\xi^s)^{\nu^0}| / [1 + |P(\xi^s)|] \rightarrow \infty.$$

Из (3.14) следует, что $|\xi^s, \lambda| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. обозначим $\eta^s := \xi^s / |\xi^s, \lambda|^\lambda$ $s = 1, 2, \dots$. Так как $|\eta^s, \lambda| = 1$ ($s = 1, 2, \dots$) и $\lambda_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$), то на основании теоремы Больцано - Вейерштрасса существует подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) и точка $\eta : |\eta, \lambda| = 1$ такие, что $|\eta^s - \eta, \lambda| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Рассмотрим следующие возможные случаи: 1) $P_0(\eta) \neq 0$ и 2) $P_0(\eta) = 0$. В случае 1) из условия $P \in \mathbb{G}_n$, при $s \rightarrow \infty$ имеем с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$(3.15) \quad 1 + |P(\xi^s)| \geq c_3 |P_0(\xi^s)| = c_3 |\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)| = c_3 |\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta)| [1 + o(1)].$$

Для $|(\xi^s)^{\nu^0}|$ в силу условия $\nu^0 \in \mathfrak{R}^*$ при всех $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$(3.16) \quad |(\xi^s)^{\nu^0}| \leq |\xi^s, \lambda|^{d_q}.$$

Соотношения (3.15), (3.16) вместе противоречат нашему предположению (3.14).

В случае 2) рассмотрим следующие возможные подслучаи: 2.1) $\eta \notin \mathbb{R}^{n,0}$ т.е. $\eta_1 \dots \eta_n = 0$, 2.2) $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ т.е. $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$. В подслучае 2.1) в силу Предложения 2.1 работы [6] для $\nu^0 \in \mathfrak{R}(P)$ с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем $|(\xi^s)^{\nu^0}| \leq c_4 [1 + |P(\xi^s)|]$ $s = 1, 2, \dots$, что противоречит (3.14). Подслучай 2.2) делим на следующие возможные подслучаи: 2.2.1) $\eta \notin \Sigma(P_1, \lambda)$, т.е. $P_1(\eta) \neq 0$, 2.2.2) $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$, тогда, в силу условия $P \in \mathbb{G}_n$, $P_2(\eta) \neq 0$. В подслучае 2.2.1), из условия $P \in \mathbb{G}_n$, при $s \rightarrow \infty$, имеем с некоторой постоянной $c_5 > 0$

$$(3.17) \quad \begin{aligned} 1 + |P(\xi^s)| &\geq c_5 |P_1(\xi^s)| = c_5 |\xi^s, \lambda|^{d_1} |P_1(\eta^s)| \\ &= c_5 |\xi^s, \lambda|^{d_1} |P_1(\eta)| [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Для $|(\xi^s)^{\nu^0}|$ в силу условия $\nu^0 \in \mathfrak{R}^*$ при достаточно больших s имеем

$$(3.18) \quad |(\xi^s)^{\nu^0}| \leq |\xi^s, \lambda|^{d_2} \leq |\xi^s, \lambda|^{d_1}.$$

Соотношения (3.17), (3.18) вместе противоречат предположению (3.14).

В подслучае 2.2.2), из условия $P \in \mathbb{G}_n$, при $s \rightarrow \infty$, имеем с некоторой постоянной $c_6 > 0$

$$(3.19) \quad 1 + |P(\xi^s)| \geq c_6 |P_2(\xi^s)| = c_6 |\xi^s, \lambda|^{d_2} |P_2(\eta)| [1 + o(1)].$$

В этом случае при достаточно больших s имеем $|(\xi^s)^{\nu^0}| \leq |\xi^s, \lambda|^{d_2}$, что вместе с (3.19) противоречит (3.14) и доказывает первую часть леммы. Докажем вторую часть леммы. Сначала докажем левую часть неравенства (3.13). В силу представления (3.1), условия $P \in \mathbb{G}_n$, и доказанной первой части настоящей леммы,

для любых $t \geq 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} 1 + |P(t^\lambda \xi^s)| &\leq 1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(t^\lambda \xi^s)| \leq 1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(\xi)| \leq t^{d_0} [1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(\xi)|] \\ &\leq \frac{1}{c} t^{d_0} [1 + |P(\xi)|], \end{aligned}$$

что доказывает левую часть неравенства (3.13). Докажем правую часть. Из условия $P \in \mathbb{G}_n$, и первого пункта настоящей леммы с некоторой постоянной $c_6 > 0$ имеем при всех $t \geq 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} 1 + |P(t^\lambda \xi)| &\geq c_6 [1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(t^\lambda \xi)|] = c_6 [1 + \sum_{j=0}^{M_P} t^{d_j} |P_j(\xi)|] \\ &\geq c_6 [1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(\xi)|] \geq c_6 [1 + |P(\xi)|], \end{aligned}$$

откуда непосредственно следует правая часть (3.13). $\square$

Лемма 3.4 Пусть $P \in \mathbb{G}_n$, $\lambda = \lambda(P)$ и

$$(3.20) \quad Q(\xi) = \sum_{j=0}^{M_Q} Q_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M_Q} \left[\sum_{(\lambda, \alpha) = \delta_j} q_\alpha \xi^\alpha \right].$$

$Q < P$ тогда и только тогда, когда $Q_j < P$ $j = 0, 1, \dots, M_Q$.

Доказательство. Часть, относящейся к достаточности очевидна. Докажем необходимость. Из условия $Q < P$ следует, что с некоторой постоянной $c_1 > 0$ справедливо неравенство

$$|Q(t^\lambda \xi)| \leq c_1 [1 + |P(t^\lambda \xi)|] \quad \forall t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В силу Леммы 3.3 отсюда получаем, что для любого $t > 0$ с некоторой постоянной $c_2 = c_2(t) > 0$

$$(3.21) \quad |Q(t^\lambda \xi)| \leq c_2 [1 + |P(\xi)|] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $t_j > 1$ ($j = 0, 1, \dots, M_Q$) попарно различные числа. Рассмотрим следующую систему уравнений относительно Q_j ($j = 0, 1, \dots, M_Q$) $\sum_{j=0}^{M_Q} t_l^{\delta_j} Q_j(\xi) = Q(t_l^\lambda \xi)$ $l = 0, 1, \dots, M_Q$. Так как матрица

$$\begin{pmatrix} t_0^{\delta_0} & \dots & t_0^{\delta_{M_Q}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{M_Q}^{\delta_0} & \dots & t_{M_Q}^{\delta_{M_Q}} \end{pmatrix}$$

невырождена, то для любого $j = 0, 1, \dots, M_Q$ существуют числа κ_l^j ($l = 0, 1, \dots, M_Q$) такие, что

$$Q_j(\xi) = \sum_{l=0}^{M_Q} \kappa_l^j Q(t_l^\lambda \xi) \quad j = 0, 1, \dots, M_Q.$$

Применяя неравенство (3.21) для конечного числа значений $t_0, t_1, \dots, t_{M_Q}$, получаем, что $Q < P$. $\square$

Теорема 3.3 Пусть многочлен $P \in \mathbb{G}_n$, по вектору $\lambda = \lambda(P)$ представлен в виде (3.1), а многочлен Q по тому же вектору в виде (3.20). $Q < P$ тогда и только тогда, когда а) $\mathbb{R}(Q) \subset \mathbb{R}(P)$, б) для любого $j : 0 \leq j \leq M_Q$, такого, что $\delta_j > d_2$, пара $\{Q_j, P\}$ λ -однородного многочлена Q_j и общего многочлена P удовлетворяет условию II.b) Теоремы 3.1.

Доказательство непосредственно следует из Теоремы 3.1 и Леммы 3.4. $\square$

Abstract. The work describes a set of polynomials that have less power than a given polynomial from a certain class.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A.G. Khovanskii, “Newton Polyhedra” (algebra and geometry), Amer. Math. Soc. Transl. **153**, no. 2, 1 – 15 (1992).
- [2] В. П. Михайлов, “О поведении на бесконечности одного класса многочленов”, Труды МИАН., **19**, 59 – 81 (1967).
- [3] S. G. Gindikin, L. R. Volevich, “The method of Newton’s polyhedron in the theory of PDF. Mathematics and applications”, Soviet Series, Kluwer Academic Publishers (1992).
- [4] Г. Г. Казарян, “Сравнение мощности многочленов и их гипоеллиптичность”, Труды МИАН, **150**, 143 – 159 (1979).
- [5] Г. Г. Казарян, “О почти гипоеллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности”, Известия НАН Армении, Математика, **46**, no. 6, 11 – 30 (2011).
- [6] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, “On the comparison of powers of differential operators (polynomials)”, Boll Unione Mat Ital (2023) //doi.org/10.1007/s 40574 - 023 - 00363 x.
- [7] Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, **2**, Москва, Мир (1986).
- [8] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, “Об одном классе вырождающихся гипоеллиптических многочленов”, Труды Московского Математического общества, **83**, no. 1, 181 – 217 (2022).
- [9] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, “Критерии гипоеллиптичности в терминах мощности и силы операторов”, Труды МИАН. **150**, 128 – 142 (1979).
- [10] Г. Г. Казарян, “Оценки дифференциальных операторов и гипоеллиптические операторы”, Труды МИАН. **140**, 130 – 161 (1976).
- [11] В. Н. Маргарян, “Об одном представлении обобщённо - однородных многочленов от двух переменных”, Сб. 10 -ой годичной научной конф. РАУ, 19 – 23 (2015).

Поступила 20 сентября 2023

После доработки 15 февраля 2024

Принята к публикации 21 февраля 2024

МЕРОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ, ДЕЛЯЩАЯ ДВЕ ПАРЫ МАЛЫХ ФУНКЦИЙ IM

С. МАДЖУМДЕР, Н. САРКАР И ДЖ. САРКАР

Университет Райгандж, Индия

E-mails: *sm05math@gmail.com; naba.iitbmath@gmail.com*
jeetsarkar.math@gmail.com

Аннотация. В статье мы изучаем единственность мероморфной функции с несколькими полюсами, делящей две пары малых функций IM со своим k -м производным, и получаем два результата, которые улучшают, а также обобщают недавний результат Хуанг Хуанга и др. [1] в широком смысле.

MSC2020 number: 30D35; 34A20.

Ключевые слова: мероморфная функция; малая функция; теория Неванлинны; единственность; производная.

1. ВВЕДЕНИЕ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Мы предполагаем, что читатель знаком со стандартными обозначениями и основными результатами теории Неванлинны (см., например, [2, 3]). Обозначим через $\mathcal{S}(f)$ множество функций, малых по сравнению с f . Как обычно, аббревиатура CM означает подсчет кратностей, а IM — игнорирование кратностей.

Рубель и Янг [4] изучали проблему единственности целых функций, которые имеют одинаковые значения со своими производными. В 1977 году они доказали, что если целая функция f делит два конечных различных значения CM с f' , то $f \equiv f'$. В 1992 году Чжэн и Ян [5] улучшили результат Рубеля и Янга [4] и доказали, что целая функция f делит a, b CM с $f^{(k)}$ ($k \geq 1$), то $f \equiv f^{(k)}$, где $a, b \in \mathcal{S}(f)$ различны. В 1999 году Ли и Ян [6] улучшили результат Чжэна и Янга [5] от деления значения b CM до IM и доказали, что

Теорема А. [5] Пусть f — непостоянная целая функция, и $a, b \in \mathcal{S}(f)$ различны. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят a CM и b IM, то $f \equiv f^{(k)}$.

В 2021 году Хуанг и др. [1] усовершенствовали теорему А, добавив идею деления пары малых функций следующим образом.

Теорема В. [1] Пусть f — непостоянная целая функция и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие, что $a_1 \not\equiv b_1$ и $a_2 \not\equiv b_2$. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят (a_1, a_2) CM и (b_1, b_2) IM, то $(a_2 - b_2)f - (a_1 - b_1)f^{(k)} \equiv a_2b_1 - a_1b_2$.

В статье нашей главной целью является улучшение теоремы В путем сведения условий деления к “2 IM”.

Теперь сформулируем наш первый результат.

Теорема 1.1. Пусть f — непостоянная мероморфная функция такая, что $N(r, f) = S(r, f)$ и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ такие, что $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, то $(a_2 - b_2)f - (a_1 - b_1)f^{(k)} \equiv a_2b_1 - a_1b_2$.

В следующем результате мы предполагаем, что хотя бы одна из a_1, a_2, b_1, b_2 непостоянна.

Теорема 1.2. Пусть f — непостоянная мероморфная функция такая, что $N(r, f) = S(r, f)$ и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие, что $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$ и $\frac{(a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)}{a_1 - b_1}$ непостоянна, когда $k \geq 2$. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, то $(a_2 - b_2)f - (a_1 - b_1)f^{(k)} \equiv a_2b_1 - a_1b_2$.

Если $a_1 \equiv a_2$ и $b_1 \equiv b_2$, то из теоремы 1.2 получаем следующее следствие.

Следствие 1.1. Пусть f — непостоянная мероморфная функция такая, что $N(r, f) = S(r, f)$ и $a_1, b_1 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие, что $a'_1 - b'_1$ непостоянна, когда $k \geq 2$. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят a_1 и b_1 ИМ, то $f \equiv f^{(k)}$.

Следующий пример показывает, что условие “ $a_1, a_2, b_1, b_2 \neq \infty$ ” является точным в Теорема 1.2.

Пример 1. Пусть $f(z) = c + e^{ce^z}$ и $a_1(z) = \frac{c^2}{c - e^{-z}}$, где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если $b_1 = \infty$, то f и f' делят b_1 СМ. С другой стороны, мы видим, что f и f' также делят a_1 СМ, но $f \neq f'$.

Следующие примеры подтверждают, что Теорема 1.2 неверна, когда $N(r, f) \neq S(r, f)$.

Пример 2. Пусть $f(z) = \frac{4}{1 - 3e^{-2z}}$. Очевидно, $N(r, f) \neq S(r, f)$. Обратите внимание, что $f'(z) = \frac{-24e^{-2z}}{(1 - 3e^{-2z})^2}$ и поэтому f и f' делят 0 СМ. С другой стороны, мы видим, что f и f' делят 2 ИМ, но $f \neq f'$.

Пример 3. Пусть $a(z) = -\frac{1}{3}e^{-2z} + ce^{-z}$, $b(z) = -\frac{1}{3}e^{-2z} - ce^{-z}$ и $h(z) = e^{2ce^z}$, где $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Определим $f(z) = b(z) + \frac{b(z) - a(z)}{h(z) - 1}$. Пусть $a_1(z) = b'(z)$ и $b_1(z) = a'(z)$. Очевидно, $a_1, b_1 \in \mathcal{S}(f)$ и $N(r, f) \neq S(r, f)$. Также мы делаем вывод, что $f'(z) - a_1(z) = e^{2z}(f(z) - a_1(z))(f(z) - b(z))$ и $f'(z) - b_1(z) = e^{2z}(f(z) - b_1(z))(f(z) - a(z))$. Очевидно, что f и f' делят a_1 и b_1 ИМ, но $f \neq f'$.

В этой статье нам также понадобятся следующие три определения.

Определение 1.1. Пусть $k, m, n \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2 \in \mathcal{S}(f)$. Обозначим $S_{(m,n)}(a_1, a_2)$ множество тех точек $z \in \mathbb{C}$, что z является a_1 -точкой f порядка m и a_2 -точкой $f^{(k)}$ порядка n . Аналогично определяется множество $S_{(m,n)}(b_1, b_2)$. Обозначим через $\bar{N}_{(m,n)}(r, a_1; f)$ приведенную считающую функцию f по множеству $S_{(m,n)}(a_1, a_2)$. Сходным образом $\bar{N}_{(m,n)}(r, b_1; f)$ обозначает приведенную считающую функцию f относительно множества $S_{(m,n)}(b_1, b_2)$.

Определение 1.2. Пусть f — непостоянная мероморфная функция и $a_1, a_2 \in \mathcal{S}(f)$. Мы используем термин $\bar{N}(r, 0; f - a_1, f^{(k)} - a_2) \geq 2$ для обозначения приведенной считающей функции общих кратных 0-точек $f - a_1$ и $f^{(k)} - a_2$, где $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1.3. Пусть f, g — две непостоянные мероморфные функции и $a_1, a_2 \in \mathcal{S}(f)$. Обозначим через $N(r, 0; g \mid f \neq a_1, b_1)$ считающую функцию тех 0-точек g , которые не являются ни a_1 , ни b_1 -точками f . Обозначим через $\bar{N}_{(l+1)}(r, 0; g \mid f = a_1, b_1)$ приведенную считающую функцию тех 0-точек g с кратностью, большей, чем l , которые являются 0-точками как $f - a_1$, так и $f - b_1$. Обозначим через $\bar{N}_{(l+1)}(r, a_1; f)$ приведенную считающую функцию a_1 -точек f с кратностью больше l .

2. Вспомогательные леммы

В этом разделе мы приведем некоторые необходимые леммы.

Лемма 2.1. Пусть f — непостоянная мероморфная функция и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие что $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$. Пусть

$$\delta(f) = \begin{vmatrix} f - a_1 & a_1 - b_1 \\ f' - a'_1 & a'_1 - b'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f - b_1 & a_1 - b_1 \\ f' - b'_1 & a'_1 - b'_1 \end{vmatrix}.$$

Тогда

- (1) $\delta(f) \neq 0$,
- (2) $m(r, \frac{\Delta(f)}{(f-a_1)(f-b_1)}) = S(r, f)$,
- (3) $m(r, \frac{\Delta(f)(f-\beta)}{(f-a_1)(f-b_1)}) = S(r, f), \quad \beta \in \mathcal{S}(f)$.

Доказательство. (1). Предположим, $\delta(f) \equiv 0$. Тогда $\frac{f'-a'_1}{f-a_1} \equiv \frac{a'_1-b'_1}{a_1-b_1}$ и проинтегрировав, получаем $f \equiv a_1 + a_0(a_1 - b_1)$, где $a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это показывает, что $T(r, f) = S(r, f)$, что является противоречием. Следовательно, $\delta(f) \neq 0$.

(2). Имеем, что $\delta(f) = (a'_1 - b'_1)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f' - a'_1)$, т. е.

$$\frac{\delta(f)}{f - a_1} = a'_1 - b'_1 - (a_1 - b_1) \frac{f' - a'_1}{f - a_1}.$$

Следовательно, получаем

$$m(r, \frac{\delta(f)}{f - a_1}) \leq m(r, a'_1 - b'_1) + m(r, a_1 - b_1) + m(r, \frac{f' - a'_1}{f - a_1}) + \log 2 = S(r, f).$$

Аналогично, имеем

$$m(r, \frac{\delta(f)}{f - b_1}) \leq S(r, f),$$

а также

$$\frac{\delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)} = \frac{1}{a_1 - b_1} \left[\frac{\delta(f)}{f - a_1} - \frac{\delta(f)}{f - b_1} \right].$$

Теперь (2) следует непосредственно.

(3). Мы видим, что

$$\frac{\delta(f)(f - \beta)}{(f - a_1)(f - b_1)} = \frac{\delta(f)}{f - a_1} + \frac{(b_1 - \beta)\delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)}$$

и

$$m(r, \frac{\delta(f)(f - \beta)}{(f - a_1)(f - b_1)}) \leq m(r, \frac{\delta(f)}{f - a_1}) + m(r, b_1 - \beta) + m(r, \frac{\delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)}).$$

Теперь (3) следует непосредственно из (2). □

В статье для непостоянной мероморфной функции определяются следующие вспомогательные функции

$$(2.1) \quad \phi = \frac{\delta(f)L(f, f^{(k)})}{(f - a_1)(f - b_1)},$$

$$(2.2) \quad \psi = \frac{\delta(f^{(k)})L(f, f^{(k)})}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)},$$

$$(2.3) \quad H_{nm} = n\phi - m\psi,$$

$$(2.4) \quad H = \frac{\delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)} - \frac{\delta(f^{(k)})}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$ и

$$L(f, f^{(k)}) = (a_2 - b_2)f - (a_1 - b_1)f^{(k)} + a_1b_2 - a_2b_1.$$

Обратите внимание, что

$$L(f, f^{(k)}) = (a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2) = (a_2 - b_2)(f - b_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - b_2).$$

Для доказательства леммы 2.4 нам потребуются следующие три леммы.

Лемма 2.2. [7] Пусть f — непостоянная мероморфная функция и

$$R(f) = \frac{P(f)}{Q(f)}, \quad \text{где } P(f) = \sum_{k=0}^p a_k f^k, \text{ и } Q(f) = \sum_{j=0}^q b_j f^j$$

— два взаимно простых многочлена от f . Если $a_k, b_j \in \mathcal{S}(f)$ такие, что $a_p \neq 0$ и $b_q \neq 0$, то

$$T(r, R(f)) = \max\{p, q\} T(r, f) + S(r, f).$$

Лемма 2.3. [2] Пусть f — непостоянная мероморфная функция и $a_1, b_1 \in \mathcal{S}(f)$. Тогда

$$T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r,).$$

Лемма 2.4. [8] Если f и g — непостоянные мероморфные функции, то

$$N(r, fg) - N(r, 0; fg) = N(r, f) + N(r, g) - N(r, 0; f) - N(r, g) - N(r, 0;).$$

Лемма 2.5. Пусть f — непостоянная мероморфная функция такая, что $N(r, f) = S(r, f)$ и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие, что $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$.

Если f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ и

$$T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f),$$

тогда $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$.

Доказательство. Лемму 2.5 докажем от противного.

Предположим, что $L(f, f^{(k)}) \neq 0$. Из леммы 2.1 ясно, что $\Delta(f) \neq 0$ и $\Delta(f^{(k)}) \neq 0$ и поэтому $\phi \neq 0$ и $\psi \neq 0$. Обратите внимание, что

$$m(r, \phi) \leq m\left(r, \frac{\Delta(f)f}{(f-a_1)(f-b_1)} \left((a_2 - b_2) - (a_1 - b_1) \frac{f^{(k)}}{f} \right) \right) +$$

$$+m\left(r, \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) \Delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)}\right) \leq m\left(r, \frac{\Delta(f)f}{(f - a_1)(f - b_1)}\right) + m\left(r, (a_2 - b_2) - (a_1 - b_1) \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \\ + m\left(r, \frac{\Delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)}\right)$$

и поэтому по лемме 2.1 получаем $m(r, \phi) = S(r, f)$. Теперь докажем, что $N(r, \phi) = S(r, f)$.

По лемме 2.3 имеем $T(r, f) \leq \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f)$. Поскольку f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, мы имеем

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) \leq N(r, 0; L(f, f^{(k)})) + S(r, f) \\ &\leq T(r, L(f, f^{(k)})) + S(r, f) \leq m(r, L(f, f^{(k)})) + S(r, f) \\ &\leq m(r, f) + m\left(r, a_2 - b_2 - (a_1 - b_1) \frac{f^{(k)}}{f}\right) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

следовательно,

$$(2.5) \quad T(r, f) = m(r, L(f, f^{(k)})) + S(r, f) = \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Пусть $z_{p,q} \in S_{(p,q)}(a_1, a_2)$ такая, что

$$\phi(z_{p,q}) \neq 0, \infty, \quad a_i(z_{p,q}) - b_i(z_{p,q}) \neq 0, \infty, \quad a'_i(z_{p,q}) - b'_i(z_{p,q}) \neq 0$$

для $i = 1, 2$. Путем несложных вычислений из (2.1) выводим, что ϕ голоморфна в точке $z_{p,q}$.

Если $\hat{z}_{p,q} \in S_{(p,q)}(b_1, b_2)$ такая, что

$$\phi(\hat{z}_{p,q}) \neq 0, \infty, \quad a_i(\hat{z}_{p,q}) - b_i(\hat{z}_{p,q}) \neq 0, \infty, \quad a'_i(\hat{z}_{p,q}) - b'_i(\hat{z}_{p,q}) \neq 0$$

для $i = 1, 2$, то с помощью простых вычислений мы можем вывести из (2.1), что ϕ также голоморфна в $\hat{z}_{p,q}$. Мы знаем, что $N(r, f) = S(r, f)$, имеем $N(r, \phi) = S(r, f)$.

Поскольку $m(r, \phi) = S(r, f)$, имеем $T(r, \phi) = S(r, f)$, т.е. $\phi \in \mathcal{S}()$.

Теперь из (2.1) мы видим, что

$$\begin{aligned} \overline{N}(r, 0; f - a_1, f^{(k)} - a_2 \mid \geq 2) &+ \overline{N}(r, 0; f - b_1, f^{(k)} - b_2 \mid \geq 2) \\ &\leq 2N(r, 0; \phi) \leq 2T(r, \phi) = S(r, f), \end{aligned}$$

т.е.

$$(2.6) \quad \overline{N}(r, 0; f - a_1, f^{(k)} - a_2 \mid \geq 2) + \overline{N}(r, 0; f - b_1, f^{(k)} - b_2 \mid \geq 2) = S(r, f).$$

Аналогично мы можем вывести из (2.1), что

$$(2.7) \quad \overline{N}_{(2)}(r, 0; L(f, f^{(k)}) \mid f = a_1, b_1) + N(r, 0; \Delta(f)L(f, f^{(k)}) \mid f \neq a_1, b_1) = S(r, f).$$

Пусть $a_3 = a_1 + l(a_1 - b_1)$, где $l \in \mathbb{N}$. Очевидно, $a_3 \neq a_1, b_1$. Пусть $F = \frac{f - a_1}{b_1 - a_1}$. Теперь, используя вторую фундаментальную теорему и (2.5), мы имеем

$$\begin{aligned} 2T(r, f) &\leq \overline{N}(r, \infty; F) + \overline{N}(r, 0; F) + \overline{N}(r, 1; F) + \overline{N}(r, -l; F) + S(r, f) \\ (2.8) \quad &\leq T(r, f) + \overline{N}(r, a_3; f) + S(r, f) \leq 2T(r, f) - m(r, a_3; f) + S(r, f), \end{aligned}$$

т.е., $m(r, a_3; f) = S(r, f)$.

Пусть $a_4 = a_2 + l(a_2 - b_2)$, где $l \in \mathbb{N}$ и $G = \frac{f^{(k)} - a_2}{b_2 - a_2}$. Теперь, используя вторую фундаментальную теорему и (2.5), мы имеем

$$\begin{aligned}
 2T(r, f^{(k)}) &\leq \bar{N}(r, 0; G) + \bar{N}(r, 1; G) + \bar{N}(r, -l; G) + S(r, f) \\
 &\leq \bar{N}(r, a_2; f^{(k)}) + \bar{N}(r, b_2; f^{(k)}) + \bar{N}(r, a_4; f^{(k)}) + S(r, f) \\
 &= \bar{N}(r, a_1; f) + \bar{N}(r, b_1; f) + T(r, f^{(k)}) - m(r, a_4; f^{(k)}) + S(r, f) \\
 (2.9) \quad &= 2T(r, f^{(k)}) - m(r, a_4; f^{(k)}) + S(r, f),
 \end{aligned}$$

т.е., $m(r, a_4; f^{(k)}) = S(r, f)$.

Мы знаем, что $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Теперь из леммы 2.4, (2.8) и (2.9) получаем

$$\begin{aligned}
 m\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) &= T\left(r, \frac{f^{(k)} - a_4}{f - a_3}\right) - N\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) + O(1) \\
 &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)} - a_3^{(k)}}{f - a_3}\right) + m\left(r, \frac{a_3^{(k)} - a_4}{f - a_3}\right) + N\left(r, \frac{f^{(k)} - a_4}{f - a_3}\right) - N\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) + O(1) \\
 &\leq N(r, a_3; f) - N(r, a_4; f^{(k)}) + S(r, f) \\
 &\leq T(r, f) - T(r, f^{(k)}) + S(r, f) = S(r, f),
 \end{aligned}$$

т.е.

$$(2.10) \quad m\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) = S(r, f).$$

Обратите внимание, что

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - a_4)}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)} \left(\frac{(a_2 - b_2)(f - a_3) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_4)}{f^{(k)} - a_4} \right) \\
 &= \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - a_4)}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)} \left((a_2 - b_2) \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4} - (a_1 - b_1) \right)
 \end{aligned}$$

и поэтому, используя лемму 2.1 и (2.10), получаем, что

$$m(r, \psi) \leq m\left(r, \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - a_4)}{(f^{(k)} - a_1)(f^{(k)} - a_2)}\right) + m\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) + o(1) \leq S(r, f),$$

т.е. $m(r, \psi) = S(r, f)$. Поскольку f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) , (b_1, b_2) ИМ, легко доказать, что $N(r, \psi) = S(r, f)$. Следовательно, $N(r, \psi) = S(r, f)$, т. е. $\psi \in \mathcal{S}(f)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию H_{nm} , определенную формулой (2.3). Тогда из (2.1) и (2.2) получаем

$$\begin{aligned}
 H_{nm} &= L(f, f^{(k)}) \left[\left(n \frac{f' - b'_1}{f - b_1} - m \frac{f^{(k+1)} - b'_2}{f^{(k)} - b_2} \right) - \right. \\
 (2.11) \quad &\quad \left. - \left(n \frac{f' - a'_1}{f - a_1} - m \frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что $H_{nm} \not\equiv 0$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Если нет, предположим, что $H_{nm} \equiv 0$. Поскольку $L(f, f^{(k)}) \not\equiv 0$, из (2.11) получаем

$$n \left(\frac{f' - a'_1}{f - a_1} - \frac{f' - b'_1}{f - b_1} \right) \equiv m \left(\frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} - \frac{f^{(k+1)} - b'_2}{f^{(k)} - b_2} \right).$$

Следовательно,

$$(2.12) \quad \left(\frac{f - a_1}{f - b_1} \right)^n \equiv c_1 \left(\frac{f^{(k)} - a_2}{f^{(k)} - b_2} \right)^m,$$

где $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если $n \neq m$, то используя лемму 2.2 к (2.12), получаем

$$n T(r, f) = m T(r, f^{(k)}) + S(r, f),$$

что противоречит тому, что $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Следовательно, $n = m$ и из (2.12) получаем

$$\frac{f - a_1}{f - b_1} \equiv c_2 \frac{f^{(k)} - a_2}{f^{(k)} - b_2},$$

где $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если $c_2 = 1$, то $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно. Следовательно, $c_2 \neq 1$ и так $\frac{1-c_2}{c_2} \frac{f-a_5}{f-b_1} \equiv \frac{b_2-a_2}{f^{(k)}-b_2}$, где $a_5 = \frac{a_1-c_2 b_1}{1-c_2}$. Поскольку f и $f^{(k)}$ имеют общий (b_1, b_2) ИМ, мы заключаем, что $N(r, a_5; f) = S(r, f)$. Поскольку $F = \frac{f-a_1}{b_1-a_1}$, имеем

$$F + \frac{c_2}{1-c_2} = \frac{f-a_1}{b_1-a_1} + \frac{c_2}{1-c_2} = \frac{f-a_5}{b_1-a_1}.$$

Теперь, используя вторую фундаментальную теорему и (2.5), мы получаем

$$2T(r, f) \leq \overline{N}(r, 0; F) + \overline{N}(r, 1; F) + \overline{N}\left(r, -\frac{c_2}{1-c_2}; F\right) + S(r, f) = T(r, f) + S(r, f),$$

что является противоречием. Следовательно, $H_{nm} \not\equiv 0$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Пусть $z_{m,n} \in S_{(m,n)}(a_1, a_2) \cup S_{(m,n)}(b_1, b_2)$ такой, что $a_i(z_{m,n}), b_i(z_{m,n}) \neq 0, \infty$ и $a_i(z_{m,n}) - b_i(z_{m,n}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Тогда из (2.11) получаем $H_{nm}(z_{m,n}) = 0$. Поскольку $T(r, \phi) = S(r, f)$ и $T(r, \psi) = S(r, f)$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \overline{N}_{(m,n)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(m,n)}(r, b_1; f) &\leq N(r, 0; H) + S(r, f) \leq T(r, H) + S(r, f) \\ &\leq T(r, \phi) + T(r, \psi) + S(r, f) = S(r, f) \end{aligned}$$

и поэтому из (2.5) мы получаем

$$\begin{aligned} T(r, f) &= \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f) \\ &= \sum_{m,n} (\overline{N}_{(m,n)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(m,n)}(r, b_1; f)) + S(r, f) \\ &= \sum_{m+n \geq 5} (\overline{N}_{(m,n)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(m,n)}(r, b_1; f)) + S(r, f) \\ &\leq \frac{1}{5} (N(r, a_1; f) + N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_1; f) + N(r, b_2; f^{(k)})) + S(r, f) \\ &\leq \frac{4}{5} T(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

что невозможно. Согласно всем приведенным выше рассуждениям, мы получаем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$. $\square$

Следующая лемма играет важную роль в доказательстве теорем 1.1 и 1.2.

Лемма 2.6. [9] Пусть $f \in \mathcal{M}_T(\mathbb{C})$ такая, что $f^n P(f) = Q(f)$, где $P(f)$ и $Q(f)$ — дифференциальные полиномы от f с функциями малой близости, связанными с f в качестве коэффициентов, а степень $Q(f)$ не превосходит n . Тогда, $m(r, P) = S(r, f)$.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.2. По заданным условиям мы видим, что f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) , (b_1, b_2) ИМ, $N(r, f) = S(r, f)$ и $\frac{(a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)}{a_1 - b_1}$ непостоянна, когда $k \geq 2$. Из леммы 2.1 мы видим, что $\delta(f) \neq 0$ и $\delta(f^{(k)}) \neq 0$. Если $\phi \equiv 0$, где ϕ определен как в (2.1), то мы имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$ и, следовательно, утверждение Теоремы 1.2 имеет место.

Далее, мы предполагаем, что $\phi \neq 0$. Теперь наша главная цель — получить противоречие.

Поскольку $\phi \neq 0$, имеем $L(f, f^{(k)}) \neq 0$. Опять же, поскольку $\delta(f^{(k)}) \neq 0$, из (2.2) получаем $\psi \neq 0$. Теперь из доказательства леммы 2.5 получаем $T(r, \phi) = S(r, f)$, т.е. $\phi \in \mathcal{S}(f)$. Также по данным условиям мы видим, что (2.6)-(2.8) выполняются.

Пусть $f_1 = f - a_3$, где $a_3 = a_1 + l(a_1 - b_1)$, $l \in \mathbb{N}$. Теперь из (2.1) мы получаем

$$(3.1) \quad f'_1 = \frac{\alpha_{1,2}f_1^2 + \alpha_{1,1}f_1 + \alpha_{1,0} + Q_1}{f_1 - \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}f_1^{(k)} + \beta},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0} &= -\frac{(a_3 - a_1)(a_3 - b_1)}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)}, & \alpha_{1,2} &= \frac{(a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2) - \phi}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)}, \\ \alpha_{1,1} &= \frac{(a'_1 - b'_1)((a_2 - b_2)a_3 - (a_1 - b_1)a_3^{(k)} + a_1b_2 - a_2b_1) - \phi(2a_3 - a_1 - b_1)}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)}, \\ Q_1 &= -\frac{a'_1 - b'_1}{a_2 - b_2}f_1f_1^{(k)}, \\ \beta &= \frac{(a_2 - b_2)a_3 - (a_1 - b_1)a_3^{(k)} + a_1b_2 - a_2b_1}{a_2 - b_2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. Пусть $\phi \neq (a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)$. Очевидно, $\alpha_{1,2} \neq 0$. Теперь по индукции и неоднократно используя (3.1) мы получаем

$$(3.2) \quad f_1^{(k)} = \frac{\sum_{j=0}^{2k} \alpha_{k,j} f_1^j + Q_k}{((a_2 - b_2)f_1 - (a_1 - b_1)f_1^{(k)} + \beta)^{2k-1}},$$

где

$$(3.3) \quad Q_k = \sum_{\substack{l < 2k \\ l+j_1+j_2+\dots+j_k \leq 2k}} \beta_{l,j_1,j_2,\dots,j_k} f_1^l (f_1^{(k)})^{j_1} (f_1^{(k+1)})^{j_2} \dots (f_1^{(2k-1)})^{j_k}.$$

Здесь $\alpha_{k,j}, \beta_{l,j_1,j_2,\dots,j_k} \in \mathcal{S}(f)$ и $\psi_i := \alpha_{i,2i}$ удовлетворяет рекуррентной формуле

$$(3.4) \quad \psi_1 = \alpha_{1,2}, \quad \psi_{i+1} = \psi'_i + \psi_1 \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 1.1. Пусть $\psi_k = \alpha_{k,2k} \neq 0$. Теперь из (2.8) мы имеем $m(r, \frac{1}{f_1}) = S(r, f)$ и, следовательно, из (3.3) получаем $m(r, \frac{Q_k}{f_1^{2k-1} f_1^{(k)}}) = S(r, f)$. Поэтому

$$(3.5) \quad m\left(r, \left((a_2 - b_2) - (a_1 - b_1) \frac{f_1^{(k)}}{f_1} + \frac{\beta}{f_1}\right)^{2k-1} - \frac{Q_k}{f_1^{2k-1} f_1^{(k)}}\right) = S(r, f).$$

Опять же из (3.2) мы имеем

$$\sum_{j=0}^{2k} \alpha_{k,j} f_1^j = f_1^{(k)} \left((a_2 - b_2) f_1 - (a_1 - b_1) f_1^{(k)} + \beta \right)^{2k-1} - Q_k$$

и поэтому, используя лемму 2.2 и (3.5), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} 2kT(r, f_1) + S(r, f) &= T\left(r, \sum_{j=0}^{2k} \alpha_{k,j} f_1^j\right) = m\left(r, \sum_{j=0}^{2k} \alpha_{k,j} f_1^j\right) \\ &\leq m\left(r, \left((a_2 - b_2) - (a_1 - b_1) \frac{f_1^{(k)}}{f_1} + \frac{\beta}{f_1}\right)^{2k-1} - \frac{Q_k}{f_1^{2k-1} f_1^{(k)}}\right) \\ &\quad + m(r, f_1^{2k-1} f_1^{(k)}) + S(r, f) \\ &\leq m(r, f_1^{2k-1}) + m(r, f_1^{(k)}) + S(r, f) \\ &\leq (2k-1)T(r, f_1) + T(r, f_1^{(k)}) + S(r, f), \end{aligned}$$

т.е. $T(r, f_1) \leq T(r, f_1^{(k)}) + S(r, f)$, т.е. $T(r, f) \leq T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Поскольку $N(r, f) = S(r, f)$, имеем $T(r, f^{(k)}) = m(r, f^{(k)}) + S(r, f) \leq m(r, f) + S(r, f) = T(r, f) + S(r, f)$. Следовательно, $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$ и, по лемме 2.5 имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно.

Подслучай 1.2. Пусть $\psi_k = \alpha_{k,2k} \equiv 0$. Теперь из (3.4) мы легко получаем, что

$$(3.6) \quad \psi_1^k + Q(\psi_1) = \psi_k = 0,$$

где $Q(\psi_1)$ — дифференциальный многочлен от ψ_1 степени, меньшей или равной $k-1$.

Опять же из (3.4) мы получаем $\psi'_{k-1} + \psi_1 \psi_{k-1} \equiv 0$. При интегрировании имеем $\psi_{k-1}(z) = c_0 e^{\xi(z)}$, где $\xi(z) = - \int_0^z \psi_1(z) dz$ и $c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Мы утверждаем, что $\xi(z)$

— целая функция. Если нет, то предположим, что z_0 — полюс $\xi(z)$. Тогда z_0 должна быть существенной особенностью $e^{\xi(z)}$. С $\psi_{k-1}(z)$ — мероморфная функция, приходим к противоречию. Следовательно, $\xi(z)$ — целая функция, а значит, $\psi_1(z)$ — целая функция. Если возможно, предположим, что $\psi_1(z)$ — полином. Очевидно, $\xi(z)$ — полином. Также из (3.4) мы заключаем, что $\psi_{k-1}(z)$ также является полиномом. Поскольку $\psi_{k-1}(z) = c_0 e^{\xi(z)}$, получаем противоречие. Следовательно, $\psi_1(z)$ — трансцендентная целая функция. Теперь, используя лемму 2.6 для

(3.6), мы получаем $m(r, \psi_1) = S(r, \psi_1)$ и, следовательно, $T(r, \psi_1) = S(r, \psi_1)$, что невозможно.

Случай 2. Пусть $\phi = (a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)$. Теперь $\phi \not\equiv 0$ показывает, что $(a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2) \not\equiv 0$. Поскольку $\Delta(f) = (a'_1 - b'_1)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f' - a'_1) = (a'_1 - b'_1)(f - b_1) - (a_1 - b_1)(f' - b'_1)$, из (2.1), мы имеем

$$(3.7) \quad \begin{aligned} f^{(k)} - a_2 &= -\frac{(a_2 - b_2)(f - a_1)(f' - b'_1)}{()}; \\ f^{(k)} - b_2 &= -\frac{(a_2 - b_2)(f - b_1)(f' - a'_1)}{\Delta(f)}. \end{aligned}$$

Теперь мы рассмотрим следующие два подслучая.

Подслучай 2.1. Пусть $k \geq 2$. Дифференцируя (2.1), получаем

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \left((a''_1 - b''_1)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f'' - a''_1) \right) \\ & \times \left((a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2) \right) \\ & + \left((a'_1 - b'_1)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f' - a'_1) \right) \times \left((a'_2 - b'_2)(f - a_1) \right. \\ & \left. + (a_2 - b_2)(f' - a'_1) - (a'_1 - b'_1)(f^{(k)} - a_2) - (a_1 - b_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \right) \\ & = \phi'(f - a_1)(f - b_1) + \phi(f' - a'_1)(f - b_1) + \phi(f - a_1)(f' - b'_1), \end{aligned}$$

то есть,

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & (a''_1 - b''_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)^2 - (a''_1 - b''_1)(a_1 - b_1)(f - a_1)(f^{(k)} - a_2) \\ & - (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)(f'' - a''_1) + (a_1 - b_1)^2(f'' - a''_1)(f^{(k)} - a_2) \\ & + (a'_1 - b'_1)(a'_2 - b'_2)(f - a_1)^2 - (a_1 - b_1)(a'_2 - b'_2)(f - a_1)(f' - a'_1) \\ & + (a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)(f' - a'_1) - (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(f' - a'_1)^2 \\ & - (a'_1 - b'_1)^2(f - a_1)(f^{(k)} - a_2) + (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f' - a'_1)(f^{(k)} - a_2) \\ & - (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f - a_1)(f^{(k+1)} - a'_2) + (a_1 - b_1)^2(f' - a'_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \\ & = \phi'(f - a_1)(f - b_1) + \phi(f' - a'_1)(f - b_1) + \phi(f - a_1)(f' - b'_1). \end{aligned}$$

Пусть $z_{p,1} \in S_{(p,1)}(a_1, a_2)$ ($p \geq 2$) такая, что $a_i(z_{p,1}) - b_i(z_{p,1}) \neq 0, \infty$ и $a'_i(z_{p,1}) - b'_i(z_{p,1}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Тогда в некоторой окрестности $z_{p,1}$ получим

$$(3.10) \quad \begin{aligned} f(z) - a_1(z) &= c_p(z - z_{p,1})^p + c_{p+1}(z - z_{p,1})^{p+1} + \dots \quad (c_p \neq 0), \\ f^{(k)}(z) - a_2(z) &= d_1(z - z_{p,1}) + d_2(z - z_{p,1})^2 + \dots \quad (d_1 \neq 0), \\ \phi(z) &= f_0 + f_1(z - z_{p,1}) + f_2(z - z_{p,1})^2 + \dots \quad (f_0 \neq 0), \\ a_i(z) - b_i(z) &= e_{i,0} + e_{i,1}(z - z_{p,1}) + e_{i,2}(z - z_{p,1})^2 + \dots \quad (e_{i,0} \neq 0), i = 1, 2, \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} f'(z) - a'_1(z) &= pc_p(z - z_{p,1})^{p-1} + (p+1)c_{p+1}(z - z_{p,1})^p + \dots, \\ f''(z) - a''_1(z) &= p(p-1)c_p(z - z_{p,1})^{p-2} + p(p+1)c_{p+1}(z - z_{p,1})^{p-1} + \dots, \\ f^{(k+1)}(z) - a'_2(z) &= d_1 + 2d_2(z - z_{p,1}) + 3d_3(z - z_{p,1})^2 + \dots, \\ f^{(k+2)}(z) - a''_2(z) &= 2d_2(z - z_{p,1}) + 6d_3(z - z_{p,1}) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi'(z) &= f_1 + 2f_2(z - z_{p,1}) + 3f_3(z - z_{p,1})^2 \dots, \\
 \phi''(z) &= 2f_2 + 6f_3(z - z_{p,1}) \dots, \\
 a'_i(z) - b'_i(z) &= e_{i,1} + 2e_{i,2}(z - z_{p,1}) + \dots, i = 1, 2.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Теперь из (3.10) и (3.11) мы имеем

$$L(f(z), f^{(k)}(z)) = -e_{2,0}d_1(z - z_{p,1}) - \dots \tag{3.12}$$

Затем из (3.8), (3.10)-(3.12) легко заключить, что $f_0 = pd_1e_{1,0}$, т.е. ,

$$\begin{aligned}
 f^{(k+1)}(z_{p,1}) - a'_2(z_{p,1}) &= d_1 = \frac{\phi(z_{p,1})}{p(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))} \\
 &= \frac{(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1}))}{p(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))}.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Следовательно, из (3.9)-(3.13) легко вычислить, что

$$\begin{aligned}
 &\left(p^2(p+1)c_p d_2(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))^2 + (p-1)c_p(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2(a_2(z_{p,1}) \right. \\
 &- b_2(z_{p,1})) - pc_p\phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - pc_p\phi(z_{p,1})(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \\
 &+ (p+1)^2c_{p+1}(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \\
 &\left. - p(p+1)c_{p+1}\phi(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) \right)(z - z_{p,1})^p + O((z - z_{p,1})^{p+1}) \equiv 0,
 \end{aligned}$$

что показывает, что

$$\begin{aligned}
 &\left(p^2(p+1)c_p d_2(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))^2 + (p-1)c_p(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2 \right. \\
 &\times (a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) - pc_p\phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - pc_p\phi(z_{p,1}) \\
 &\times (a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) + (p+1)^2c_{p+1}(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \\
 &\left. \times (a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) - p(p+1)c_{p+1}\phi(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) \right) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Снова продифференцировав (3.9) один раз, получим

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad &((a''_1 - b''_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)^2)' - ((a''_1 - b''_1)(a_1 - b_1)(f - a_1)(f^{(k)} - a_2))' \\
 &- ((a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)(f'' - a''_1))' + 2(a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f'' - a''_1)(f^{(k)} - a_2) \\
 &+ (a_1 - b_1)^2(f''' - a'''_1)(f^{(k)} - a_2) + (a_1 - b_1)^2(f'' - a''_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \\
 &+ ((a'_1 - b'_1)(a'_2 - b'_2)(f - a_1)^2)' - ((a_1 - b_1)(a'_2 - b'_2)(f - a_1)(f' - a'_1))' \\
 &+ ((a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)(f' - a'_1))' - ((a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(f' - a'_1)^2)' \\
 &- ((a'_1 - b'_1)^2(f - a_1)(f^{(k)} - a_2))' + (a'_1 - b'_1)^2(f' - a'_1)(f^{(k)} - a_2) \\
 &+ (a_1 - b_1)(a''_1 - b''_1)(f' - a'_1)(f^{(k)} - a_2) + (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f'' - a''_1)(f^{(k)} - a_2) \\
 &+ (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f' - a'_1)(f^{(k+1)} - a'_2) - (a'_1 - b'_1)^2(f - a_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \\
 &- (a_1 - b_1)(a''_1 - b''_1)(f - a_1)(f^{(k+1)} - a'_2) - (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f' - a'_1)(f^{(k+1)} - a'_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f - a_1)(f^{(k+2)} - a''_2) + 2(a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f' - a'_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \\
 & + (a_1 - b_1)^2(f'' - a''_1)(f^{(k+1)} - a'_2) + (a_1 - b_1)^2(f' - a'_1)(f^{(k+2)} - a''_2) \\
 = & 2\phi'(f' - a'_1)(f - b_1) + \phi(f'' - a''_1)(f - b_1) + 2\phi(f' - a'_1)(f' - b'_1).
 \end{aligned}$$

Теперь легко вычислить из (3.10), (3.11) и (3.15), что

$$\begin{aligned}
 & \left(p^2(p+1)c_p d_2(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))^2 + (3p-1)c_p(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \right. \\
 & - 2pc_p\phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - 2pc_p\phi(z_{p,1})(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \\
 & + (p+1)^2c_{p+1}(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \\
 & \left. - p(p+1)c_{p+1}\phi(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) \right) (z - z_{p,1})^{p-1} + O((z - z_{p,1})^p) \equiv 0,
 \end{aligned}$$

что показывает, что

$$\begin{aligned}
 & p^2(p+1)c_p d_2(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))^2 + (3p-1)c_p(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \\
 & - 2pc_p\phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - 2pc_p\phi(z_{p,1})(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \\
 & + (p+1)^2c_{p+1}(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \\
 (3.16) \quad & - p(p+1)c_{p+1}\phi(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) = 0.
 \end{aligned}$$

Теперь из (3.14) и (3.16) мы имеем

$$\begin{aligned}
 & pc_p \left(2(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \right. \\
 & \left. - \phi'(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - \phi(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Поскольку $c_p \neq 0$ и $\phi = (a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)$, сверху получаем

$$(3.17) \quad \phi(z_{p,1})(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) - \phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) = 0.$$

Поскольку $\frac{(a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)}{a_1 - b_1}$ непостоянна, мы получаем $\phi(a'_1 - b'_1) - \phi'(a_1 - b_1) \neq 0$ и, следовательно, из (3.17) имеем

$$(3.18) \quad \sum_{p \geq 2} \bar{N}_{(p,1)}(r, a_1; f) \leq N(r, 0; \phi(a'_1 - b'_1) - \phi'(a_1 - b_1)) \leq S(r, f).$$

Пусть $\hat{z}_{p,1} \in S_{(p,1)}(b_1, b_2)$ ($p \geq 2$) такая, что $a_i(\hat{z}_{p,1}) - b_i(\hat{z}_{p,1}) \neq 0, \infty$ и $a'_i(\hat{z}_{p,1}) - b'_i(\hat{z}_{p,1}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Тогда в некоторой окрестности $\hat{z}_{p,q}$ получим

$$\begin{aligned}
 f(z) - b_1(z) &= \hat{c}_p(z - \hat{z}_{p,1})^p + \hat{c}_{p+1}(z - \hat{z}_{p,1})^{p+1} + \dots \quad (\hat{c}_p \neq 0), \\
 f^{(k)}(z) - b_2(z) &= \hat{d}_1(z - \hat{z}_{p,1}) + \hat{d}_2(z - \hat{z}_{p,1})^2 + \dots \quad (\hat{d}_1 \neq 0), \\
 (3.19) \quad \phi(z) &= \hat{f}_0 + \hat{f}_1(z - \hat{z}_{p,1}) + \hat{f}_2(z - \hat{z}_{p,1})^2 + \dots \quad (\hat{f}_0 \neq 0), \\
 a_i(z) - b_i(z) &= \hat{e}_{i,0} + \hat{e}_{i,1}(z - \hat{z}_{p,1}) + \hat{e}_{i,2}(z - \hat{z}_{p,1})^2 + \dots \quad (\hat{e}_{i,0} \neq 0), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Поэтому мы легко получаем $L(f(z), f^{(k)}(z)) = -\hat{e}_{2,0}\hat{d}_1(z - \hat{z}_{p,1}) - \dots$ и

$$\begin{aligned}
 f^{(k+1)}(\hat{z}_{p,1}) - a'_2(\hat{z}_{p,1}) &= \hat{d}_1 = -\frac{\phi(\hat{z}_{p,1})}{p(a_1(\hat{z}_{p,1}) - b_1(\hat{z}_{p,1}))} \\
 &= -\frac{(a'_1(\hat{z}_{p,1}) - b'_1(\hat{z}_{p,1}))(a_2(\hat{z}_{p,1}) - b_2(\hat{z}_{p,1}))}{p(a_1(\hat{z}_{p,1}) - b_1(\hat{z}_{p,1}))}.
 \end{aligned}$$

Теперь, действуя так же, как это было сделано выше, и используя (3.19) вместо (3.10), можно легко заключить, что

$$\phi(\hat{z}_{p,1})(a'_1(\hat{z}_{p,1}) - b'_1(\hat{z}_{p,1})) - \phi'(\hat{z}_{p,1})(a_1(\hat{z}_{p,1}) - b_1(\hat{z}_{p,1})) = 0$$

и

$$(3.20) \quad \sum_{p \geq 2} \bar{N}_{(p,1)}(r, b_1; f) \leq N(r, 0; \phi(a'_1 - b'_1) - \phi'(a_1 - b_1)) \leq S(r, f).$$

Следовательно, из (2.6), (3.18) и (3.20) мы заключаем, что

$$(3.21) \quad \bar{N}_{(2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(2)}(r, b_1; f) \leq \sum_{p \geq 2} (\bar{N}_{(p,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(p,1)}(r, b_1; f)) = S(r, f).$$

Пусть $\beta_1 = \frac{(a_1 - b_1)\alpha + a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2 - b_2}$, где $\alpha \in \mathcal{S}(f)$. f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) , (b_1, b_2) ИМ и $N(r, f) = S(r, f)$, отсюда следует, что $N(r, \psi) = S(r, f)$. Теперь, используя леммы 2.1 и 2.4 для (2.2), мы получаем

$$\begin{aligned} T(r, \psi) &= m(r, \psi) + S(r, f) \\ &= m\left(r, \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - \alpha)}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)} \left((a_2 - b_2) \frac{f - \beta_1}{f^{(k)} - \alpha} - (a_1 - b_1) \right) \right) \\ &\leq m\left(r, \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - \alpha)}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)}\right) + m\left(r, (a_2 - b_2) \frac{f - \beta_1}{f^{(k)} - \alpha} - (a_1 - b_1)\right) \\ &\leq m\left(r, \frac{f - \beta_1}{f^{(k)} - \alpha}\right) + S(r, f) \\ &= m\left(r, \frac{f^{(k)} - \alpha}{f - \beta_1}\right) + N\left(r, \frac{f^{(k)} - \alpha}{f - \beta_1}\right) - N\left(r, \frac{f - \beta_1}{f^{(k)} - \alpha}\right) + S(r, f) \\ &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)} - \beta_1^{(k)}}{f - \beta_1}\right) + m\left(r, \frac{\beta_1^{(k)} - \alpha}{f - \beta_1}\right) + N(r, f^{(k)} - \alpha) + N(r, 0; f - \beta_1) \\ &\quad - N(r, f - \beta_1) - N(r, 0; f^{(k)} - \alpha) + S(r, f) \\ &\leq m(r, \beta_1; f) + N(r, \beta_1; f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f) \\ &= T(r, f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f), \end{aligned}$$

следовательно,

$$(3.22) \quad T(r, \psi) \leq T(r, f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f).$$

Пусть

$$(3.23) \quad \varphi_1 = \frac{L(f, f^{(k)})}{(f - a_1)(f - b_1)} = \frac{(a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2)}{(f - a_1)(f - b_1)}.$$

Поскольку $L(f, f^{(k)}) \not\equiv 0$, имеем $\varphi_1 \not\equiv 0$. Мы утверждаем, что $\varphi_1 \notin \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если предположим, что $\varphi_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, из (3.23) мы получаем

$$(3.24) \quad fP(f) = Q(f),$$

где $P(f) = f$ и $Q(f) = (\varphi_1(a_1 + b_1) + (a_2 - b_2))f - (a_1 - b_1)f^{(k)} + a_1 b_2 - a_2 b_1 - \varphi_1 a_1 b_1$. Поэтому, применяя лемму 2.6 к (3.24), получаем $m(\cdot, f) = S(r, f)$ и, следовательно, $T(r, f) = S(r, f)$, что невозможно. Следовательно, $\varphi_1 \notin \mathbb{C}$.

Пусть

$$(3.25) \quad \phi_1 = \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}.$$

Очевидно, что $\phi_1 \not\equiv 0$. Пусть $z_{1,q} \in S_{(1,q)}(a_1, a_2)$ такой, что $a_i(z_{1,q}) - b_i(z_{1,q}) \neq 0, \infty$ для $i = 1, 2$. Тогда $z_{1,q}$ является нулем $(a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2)$. Следовательно, $\varphi_1(z_{1,q}) \neq \infty$. Аналогично, если $\hat{z}_{1,q} \in S_{(1,q)}(b_1, b_2)$ такой, что $a_i(\hat{z}_{1,q}) - b_i(\hat{z}_{1,q}) \neq 0, \infty$, тогда $\varphi_1(\hat{z}_{1,q}) \neq \infty$. Теперь из (2.6), (2.7) и (3.21) мы заключаем, что $\overline{N}(r, 0; \varphi_1) + \overline{N}(r, \varphi_1) = S(r, f)$. Тогда из (3.25) получаем $T(r, \phi_1) = S(r, f)$, т. е. $\phi_1 \in \mathcal{S}(f)$. Теперь, проводя логарифмическое дифференцирование (3.23), мы получаем

$$(3.26) \quad \phi_1 = \frac{L'(f, f^{(k)})}{L(f, f^{(k)})} - \frac{f' - a_1'}{f - a_1} - \frac{f' - b_1'}{f - b_1}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} L(f, f^{(k)}) &= (a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2) \\ &= (a_2 - b_2)(f - b_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - b_2), \end{aligned}$$

из (3.26) получаем

$$\begin{aligned} (3.27) \quad & (a_2 - b_2)\phi_1(f - a_1)^2(f - b_1) - (a_1 - b_1)\phi_1(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k)} - a_2) \\ &= (a_2' - b_2')(f - a_1)^2(f - b_1) - (a_1' - b_1')(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k)} - a_2) \\ &- (a_1 - b_1)(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k+1)} - a_2') + (a_1 - b_1)(f' - a_1')(f - b_1)(f^{(k)} - a_2) \\ &- (a_2 - b_2)(f - a_1)^2(f' - b_1') + (a_1 - b_1)(f' - a_1')(f - b_1)(f^{(k)} - a_2) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (3.28) \quad & (a_2 - b_2)\phi_1(f - a_1)(f - b_1)^2 - (a_1 - b_1)\phi_1(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k)} - b_2) \\ &= (a_2' - b_2')(f - a_1)(f - b_1)^2 - (a_1' - b_1')(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k)} - b_2) \\ &- (a_1 - b_1)(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k+1)} - b_2') + (a_1 - b_1)(f' - a_1')(f - b_1)(f^{(k)} - b_2) \\ &- (a_2 - b_2)(f - b_1)^2(f' - a_1') + (a_1 - b_1)(f' - a_1')(f - b_1)(f^{(k)} - b_2). \end{aligned}$$

Пусть $z_{1,q} \in S_{(1,q)}(a_1, a_2)$ ($q \geq 3$) такая, что $a_i(z_{1,q}) - b_i(z_{1,q}) \neq 0, \infty$ и $a_i'(z_{1,q}) - b_i'(z_{1,q}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Очевидно, что $\Delta(f(z_{1,q})) \neq 0$ и, следовательно, из (3.7) заключаем, что $z_{1,q}$ является нулем $f' - b_1'$ кратности $q - 1$. Затем из (3.27) мы видим, что $z_{1,q}$ должен быть нулем ϕ_1 . Поскольку $\phi_1 \not\equiv 0$, получаем

$$\sum_{q \geq 3} \overline{N}_{(1,q)}(r, a_1; f) \leq N(r, 0; \phi_1) \leq S(r, f)$$

и поэтому из (2.6) мы можем легко заключить, что

$$(3.29) \quad \overline{N}_{(3)}(r, a_2; f^{(k)}) = S(r, f).$$

Пусть $\hat{z}_{1,q} \in S_{(1,q)}(b_1, b_2)$ ($q \geq 3$) такая, что $a_i(\hat{z}_{1,q}) - b_i(\hat{z}_{1,q}) \neq 0, \infty$ и $a_i'(\hat{z}_{1,q}) - b_i'(\hat{z}_{1,q}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Очевидно, что $\Delta(f(\hat{z}_{1,q})) \neq 0$ и, следовательно, из (3.7)

мы видим, что $\hat{z}_{1,q}$ — нуль $f' - a'_1$ кратности $q - 1$. Тогда (3.28) дает $\phi_1(\hat{z}_{1,q}) = 0$ и, следовательно, $\sum_{q \geq 3} \bar{N}_{(1,q)}(r, b_1; f) \leq S(r, f)$ и с учетом (2.6), мы получаем

$$(3.30) \quad \bar{N}_{(3)}(r, b_2; f^{(k)}) = S(r, f).$$

Следовательно, из (2.5), (3.21), (3.29) и (3.30) имеем

$$(3.31) \quad \begin{aligned} T(r, f) &= \bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) \\ &+ \bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Теперь из (2.1) и (2.2) получаем

$$(3.32) \quad \begin{aligned} H_{11} &= \phi - \psi \\ &= L(f, f^{(k)}) \left[\left(\frac{f' - b'_1}{f - b_1} - \frac{f^{(k+1)} - b'_2}{f^{(k)} - b_2} \right) - \left(\frac{f' - a'_1}{f - a_1} - \frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если $H_{11} \equiv 0$, то сразу $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$ и, следовательно, по лемме 2.5, получим $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно. Следовательно, $H_{11} \not\equiv 0$.

Пусть $z_{1,1} \in S_{(1,1)}(a_1, a_2) \cup S_{(1,1)}(b_1, b_2)$. Легко получить, что $H_{11}(z_{1,1}) = 0$. Поскольку $T(r, \phi) = S(r, f)$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) &\leq N(r, 0; H_{11}) + S(r, f) \\ &\leq T(r, H_{11}) + S(r, f) \leq T(r, \psi) + S(r, f) \end{aligned}$$

и поэтому из (3.22) получаем

$$(3.33) \quad \bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) \leq T(r, f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f),$$

где $\alpha \in \mathcal{S}(f)$ произвольно. Следовательно, из (3.31) и (3.33) имеем

$$(3.34) \quad \bar{N}(r, \alpha; f^{(k)}) \leq \bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Пусть $\alpha = a_2$. Поскольку

$$\bar{N}(r, a_2; f^{(k)}) = \bar{N}(r, a_1; f) = \bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + S(r, f),$$

из (3.34) получаем $\bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) \leq \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f)$. Опять же, если мы возьмем $\alpha = b_2$, то из (3.34) получим $\bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) \leq \bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + S(r, f)$. Следовательно, из (3.31) имеем

$$(3.35) \quad T(r, f) \leq 2(\bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f)) + S(r, f).$$

Если $\bar{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) + \bar{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) = S(r, f)$, то из (3.21) выводим, что $\bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) = S(r, f)$ и, следовательно, из (3.35) получаем противоречие:

$$\bar{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) + \bar{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) \neq S(r, f).$$

Теперь разделим следующие три подслучая.

Подслучай 2.1.1. Пусть $\bar{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) = S(r, f)$ и $\bar{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) \neq S(r, f)$. В этом случае из (3.21) мы заключаем, что

$$(3.36) \quad \bar{N}(r, a_1; f) = N_{(1,1)}(r, a_1; f) + S(r, f).$$

Если $H \equiv 0$, то из (2.4) получаем $\frac{f-a_1}{f-b_1} \equiv c_2 \frac{f^{(k)}-a_2}{f^{(k)}-b_2}$, где $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и, следовательно, по лемме 2.2 получаем $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Теперь по лемме 2.5

имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно. Следовательно, $H \neq 0$. Легко проверить, что $m(r, H) = S(r, f)$ и $N(r, H) = \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f)$. Поэтому

$$(3.37) \quad T(r, H) = m(r, H) + N(r, H) = \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Теперь из (2.5) имеем $T(r, f) = m(r, L(f, f^{(k)})) + S(r, f)$. Следовательно, из (2.1), (2.2), (3.22) и (3.37) имеем

$$\begin{aligned} T(r, f) = m\left(r, \frac{\phi - \psi}{H}\right) + S(r, f) &= T\left(r, \frac{H}{\phi - \psi}\right) + S(r, f) \\ &\leq T(r, \psi) + T(r, H) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f) \end{aligned}$$

и так,

$$(3.38) \quad N(r, \alpha; f^{(k)}) \leq \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Пусть $\alpha = b_2$. Тогда из (3.38) имеем

$$(3.39) \quad \overline{N}(r, b_2; f^{(k)}) \leq \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Поскольку f и $f^{(k)}$ делят (b_1, b_2) ИМ, из (2.6) и (3.21) получаем

$$\overline{N}(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f) = \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f) = \sum_{i=1}^2 \overline{N}_{(1,i)}(r, b_1; f) + S(r, f)$$

и поэтому из (3.39) получаем $\overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) = S(r, f)$. Пусть

$$(3.40) \quad G_1 = \frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} - \frac{f' - a'_1}{f - a_1} - \frac{b'_2 - a'_2}{b_1 - a_2}.$$

Очевидно, что $G_1 \neq 0$. Из (3.36) следует, что $N(r, G_1) = S(r, f)$. Поскольку $m(r, G_1) = S(r, f)$, имеем $G_1 \in \mathcal{S}(f)$. Пусть $\hat{z}_{1,2} \in S_{(1,2)}(b_1, b_2)$ такая, что

$$a_i(\hat{z}_{1,2}) - b_i(\hat{z}_{1,2}) \neq 0, \infty, \quad a'_i(\hat{z}_{1,2}) - b'_i(\hat{z}_{1,2}) \neq 0$$

для $i = 1, 2$ и $\phi(\hat{z}_{1,2}) \neq 0, \infty$. Тогда $f^{(k)}(\hat{z}_{1,2}) = b_2(\hat{z}_{1,2})$ и $f^{(k+1)}(\hat{z}_{1,2}) = b'_2(\hat{z}_{1,2})$. Также из (3.7) можно легко заключить, что $\hat{z}_{1,2}$ является простым нулем $f' - a'_1$, т.е. $f'(\hat{z}_{1,2}) = a'_1(\hat{z}_{1,2})$.

Теперь из (3.40) мы видим, что $G_1(\hat{z}_{1,2}) = 0$ и $\overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \leq N(r, 0; G_1) + S(r, f) \leq S(r, f)$. Следовательно, $\overline{N}_{(2)}(r, b_1; f) = S(r, f)$, что невозможно.

Подслучай 2.1.2. Пусть $\overline{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) \neq S(r, f)$ и $\overline{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) = S(r, f)$. Теперь, действуя так же, как это было сделано при доказательстве подслучая 2.1.1, получаем противоречие.

Подслучай 2.1.3. Предположим, $\overline{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) \neq S(r, f)$ и $\overline{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) \neq S(r, f)$. Обратите внимание, что

$$\begin{aligned} H_{21} &= 2\phi - \psi \\ (3.41) \quad &= L(f, f^{(k)}) \left[\left(2 \frac{f' - b'_1}{f - b_1} - \frac{f^{(k+1)} - b'_2}{f^{(k)} - b_2} \right) - \left(2 \frac{f' - a'_1}{f - a_1} - \frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что $H_{21} \neq 0$. Если нет, предположим, что $H_{21} \equiv 0$. При интегрировании получаем $\left(\frac{f-a_1}{f-b_1}\right)^2 = c_1 \frac{f^{(k)}-a_2}{f^{(k)}-b_2}$, где $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Теперь, используя

лемму 2.2, получаем $2T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Поскольку $N(r, f) = S(r, f)$, имеем $T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f) + S(r, f)$. Следовательно, имеем $T(r, f) = S(r, f)$, что невозможно. Следовательно, $H_{21} \neq 0$.

Пусть $z_{1,2} \in S_{(1,2)}(a_1, a_2) \cup S_{(1,2)}(b_1, b_2)$. Очевидно, $H_{21}(z_{1,2}) = 0$ и, следовательно, из (3.41) получаем

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) &\leq N(r, 0; H_{21}) + S(r, f) \\ &\leq T(r, H_{21}) + S(r, f) \leq T(r, \psi) + S(r, f). \end{aligned}$$

Теперь из (3.22) и (3.42) мы получаем

$$(3.43) \quad \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \leq T(r, f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f),$$

где $\alpha \in \mathcal{S}(f)$ произвольно. В частности, из (3.43) мы имеем

$$(3.44) \quad \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \leq T(r, f) - N(r, a_2; f^{(k)}) + S(r, f),$$

$$(3.45) \quad \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \leq T(r, f) - N(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f).$$

Сложив (3.44) и (3.45), получим

$$(3.46) \quad \begin{aligned} &2(\overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f)) \\ &\leq 2T(r, f) - N(r, a_2; f^{(k)}) - N(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f). \end{aligned}$$

Теперь, используя (3.35), из (3.46) мы получаем

$$(3.47) \quad N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_2; f^{(k)}) \leq T(r, f) + S(r, f).$$

Опять же из (3.35) и (3.47) получаем

$$(3.48) \quad \begin{aligned} &N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_2; f^{(k)}) \\ &\leq 2(\overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f)) + S(r, f). \end{aligned}$$

Обратите внимание, что

$$\begin{aligned} &\overline{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + 2\overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + 2\overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \\ &\leq N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f) \end{aligned}$$

и поэтому из (3.48) получаем $\overline{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) = S(r, f)$.

Мы знаем, что $T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f) + S(r, f)$. Следовательно, из (3.31) получаем

$$\begin{aligned} T(r, f) &= \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) + \overline{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f) \\ &\leq \frac{1}{2}(N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_2; f^{(k)})) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f^{(k)}) + S(r, f) \leq T(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

т.е. $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$ и поэтому по лемме 2.5 имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно.

Подслучай 2.2. Пусть $k = 1$. Тогда из (2.6) имеем

$$(3.49) \quad \overline{N}(r, 0; f - a_1, f' - a_2 \mid \geq 2) + \overline{N}(r, 0; f - b_1, f' - b_2 \mid \geq 2) = S(r, f).$$

Теперь мы рассмотрим следующие три подслучая.

Подслучай 2.2.1. Пусть $a'_1 \neq a_2$ и $b'_1 \neq b_2$. Поскольку f и f' имеют общие (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, кратные нули $f - a_1$ и $f - b_1$ являются нулями $a'_1 - a_2$ и $b'_1 - b_2$ соответственно. Поэтому

$$(3.50) \quad \begin{aligned} & \overline{N}_{(2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(2)}(r, b_1; f) \\ &= \sum_{p \geq 2, q \geq 1} (\overline{N}_{(p,q)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(p,q)}(r, b_1; f)) = S(r, f). \end{aligned}$$

Пусть $z_{1,p} \in S_{(1,p)}(a_1, a_2)$ ($p \geq 2$) такой, что $a_i(z_{1,p}) - b_i(z_{1,p}) \neq 0, \infty$. Очевидно, $f'(z_{1,p}) = a_2(z_{1,p})$. Также из (3.7) мы видим, что $z_{1,p}$ является нулем $f' - b'_1$, т.е. $f'(z_{1,p}) = b'_1(z_{1,p})$. Итак, $a_2(z_{1,p}) = b'_1(z_{1,p})$. Сначала предположим, что $a_2 \equiv b'_1$. Тогда из (3.7) мы получаем

$$\frac{f' - a'_1}{f - a_1} \equiv \frac{a'_1 - b'_1}{a_1 - b_1} + \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}$$

и поэтому $T(r, f') = T(r, f) + S(r, f)$. Теперь по лемме 2.5 получаем $L(f, f') \equiv 0$, что невозможно.

Далее мы предполагаем $a_2 \not\equiv b'_1$. В этом случае мы легко заключаем, что

$$(3.51) \quad \sum_{p \geq 2} \overline{N}_{(1,p)}(r, a_1; f) + \sum_{p \geq 2} \overline{N}_{(1,p)}(r, b_1; f) = S(r, f).$$

Тогда из (2.5), (3.49)-(3.51) получаем, что

$$T(r, f) = \overline{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + S(r, f)$$

и, таким образом, из (3.33) получаем $N(r, \alpha; f') = S(r, f)$. В частности, имеем $\overline{N}(r, a_2; f') + \overline{N}(r, b_2; f') = S(r, f)$. Поскольку f и f' имеют общие (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, мы имеем $\overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) = S(r, f)$ и, следовательно, $T(r, f) = \overline{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) = S(r, f)$, что невозможно.

Подслучай 2.2.2. Пусть либо $a'_1 \equiv a_2$, либо $b'_1 \equiv b_2$. Без ограничения общности можно считать, что $a'_1 \equiv a_2$ и $b'_1 \neq b_2$. Теперь согласно подслучаю 2.2.1 имеем

$$(3.52) \quad \overline{N}(r, b_1; f) = \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Обратите внимание, что $f' - a_2 = f' - a'_1$. Поскольку f и f' делят (a_1, a_2) ИМ, из (3.49) получаем

$$(3.53) \quad \sum_{q \geq 1} \overline{N}_{(1,q)}(r, a_1; f) = S(r, f).$$

Следовательно, из (2.5), (3.49), (3.52) и (3.53) получаем

$$(3.54) \quad \begin{aligned} T(r, f) &= \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f) \\ &= \overline{N}_{(2,1)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Пусть

$$(3.55) \quad G_2 = \frac{f'' - b'_2}{f' - b_2} - \frac{f' - b'_1}{f - b_1} - \frac{a'_2 - b'_2}{a_2 - b_2} + \frac{a'_1 - b'_1}{a_1 - b_1}.$$

Очевидно, $G_2 \neq 0$. Также из (3.54) легко доказать, что $G_2 \in \mathcal{S}(f)$. Пусть $z_{2,1} \in S_{(2,1)}(a_1, a_2)$ такая, что $a_i(z_{2,1}) - b_i(z_{2,1}) \neq 0, \infty$ и $a'_i(z_{2,1}) - b'_i(z_{2,1}) \neq 0$ для

$i = 1, 2$. Тогда $f(z_{2,1}) = a_1(z_{2,1})$, $f'(z_{2,1}) = a_2(z_{2,1})$ и $f''(z_{2,1}) = a'_2(z_{2,1})$. Теперь из (3.55) мы получаем $G_2(z_{2,1}) = 0$ и $\bar{N}_{(2,1)}(r, a_1; f) \leq N(r, 0; G_2) + S(r, f) \leq S(r, f)$. Тогда из (3.54) имеем $T(r, f) = \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + S(r, f)$ и, следовательно, из (3.33) получаем $N(r, \alpha; f') = S(r, f)$. В частности, имеем $\bar{N}(r, b_2; f') = S(r, f)$. Поскольку f и f' делят (b_1, b_2) ИМ, мы имеем $\bar{N}(r, b_1; f) = S(r, f)$ и, следовательно, $T(r, f) = \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) = S(r, f)$, что невозможно.

Подслучай 2.2.3. Пусть $a'_1 \equiv a_2$ и $b'_1 \equiv b_2$. В этом случае мы имеем

$$(3.56) \quad \sum_{q \geq 1} (\bar{N}_{(1,q)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,q)}(r, b_1; f)) = S(r, f).$$

Следовательно, из (2.5), (3.49) и (3.56) получаем

$$(3.57) \quad \begin{aligned} T(r, f) &= \bar{N}(r, a_1; f) + \bar{N}(r, b_1; f) + S(r, f) \\ &= \bar{N}_{(2,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(2,1)}(r, b_1; f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Положим

$$(3.58) \quad G_3 = 2 \frac{f'' - a'_2}{f' - a_2} - \frac{f' - a'_1}{f - a_1} - 2 \frac{a'_2 - b'_2}{a_2 - b_2} + \frac{a'_1 - b'_1}{a_1 - b_1}.$$

Пусть $\hat{z}_{2,1} \in S_{(2,1)}(b_1, b_2)$ такой, что $a_i(\hat{z}_{2,1}) - b_i(\hat{z}_{2,1}) \neq 0, \infty$ для $i = 1, 2$. Тогда $f(\hat{z}_{2,1}) = b_1(z_{2,1})$, $f'(\hat{z}_{2,1}) = b_2(\hat{z}_{2,1})$ и $f''(\hat{z}_{2,1}) = b'_2(\hat{z}_{2,1})$.

Сначала предположим, что $G_3 \equiv 0$. Затем

$$(3.59) \quad (f' - a_2)^2 = d_0 \frac{(a_2 - b_2)^2}{a_1 - b_1} (f - a_1),$$

где $d_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Теперь из (3.59) мы видим, что

$$(b_2(\hat{z}_{2,1}) - a_2(\hat{z}_{2,1}))^2 = d_0 \frac{(a_2(\hat{z}_{2,1}) - b_2(\hat{z}_{2,1}))^2}{a_1(\hat{z}_{2,1}) - b_1(\hat{z}_{2,1})} (b_1(\hat{z}_{2,1}) - a_1(\hat{z}_{2,1})),$$

откуда следует, что $d_0 = -1$. Следовательно, из (3.59) имеем

$$(3.60) \quad (f' - b_2)(f' + b_2 - 2a_2) = -\frac{(a_2 - b_2)^2}{a_1 - b_1} (f - b_1).$$

Теперь (3.60) показывает, что $\hat{z}_{2,1}$ является нулем $f' + b_2 - 2a_2$, т.е. $a_2(\hat{z}_{2,1}) - b_2(\hat{z}_{2,1}) = 0$, что невозможно.

Далее предположим, что $G_3 \not\equiv 0$. Очевидно, $G_3 \in \mathcal{S}(f)$. Обратите внимание, что $G_3(\hat{z}_{2,1}) = 0$ и поэтому $\bar{N}_{(2,1)}(r, b_1; f) \leq N(r, 0; G_3) \leq S(r, f)$. Наконец, из (3.57) мы имеем $T(r, f) = \bar{N}_{(2,1)}(r, a_1; f) + S(r, f) \leq \frac{1}{2}T(r, f) + S(r, f)$, что невозможно.

Случай 2. Пусть $\phi \equiv 0$. Поскольку $\Delta(f) \not\equiv 0$, имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$. Это завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Если a_1, a_2, b_1, b_2 константы, то $a'_1 - a'_2 = 0$ и $a'_2 - b'_2 = 0$. Теперь если $\phi \equiv (a'_1 - a'_2)(a_2 - b_2)$, то сразу $\phi \equiv 0$. Поэтому если следовать доказательству теоремы 1.2, то подслучай 1.2 не встречается в доказательстве теоремы 1.1. Следовательно, нам не придется сталкиваться с какими-либо трудностями при доказательстве теоремы 1.1. $\square$

4. Заключительное замечание

Очевидно, что теорема 1.2 является улучшением теоремы В. Но наш метод не работает, если $\frac{(a'_1-b'_1)(a_2-b_2)}{a_1-b_1}$ константа, когда $k \geq 2$. Поэтому мы считаем этот вопрос открытым.

Вопрос: Можно ли представить теорему 1.2 без условия “ $\frac{(a'_1-b'_1)(a_2-b_2)}{a_1-b_1}$ непостоянной, когда $k \geq 2$ ” ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] X. Huang, B. Deng and M. Fang, “Entire functions that share two pairs of small functions”, *Open Mathematics*, **19** (1), 144 – 156 (2021).
- [2] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford (1964).
- [3] C. C. Yang and H. X. Yi, “Uniqueness theory of meromorphic functions”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (2003).
- [4] L. A. Rubel and C. C. Yang, “Values shared by an entire function and its derivative”, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, **599**, 101 – 103 (1977).
- [5] J. H. Zheng and S. P. Wang, “On unicity properties of meromorphic functions and their derivatives”, *Adv. in Math. (China)*, **21** (3), 334 – 341 (1992).
- [6] P. Li and C. C. Yang, “Value sharing of an entire function and its derivatives”, *J. Math. Soc. Japan*, **51** (4), 781 – 799 (1999).
- [7] A. Z. Mohon'ko, “On the Nevanlinna characteristics of some meromorphic functions”, *Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications*, **14**, 83 – 87 (1971).
- [8] L. Yang, *Value Distribution Theory*, Springer-Verlag, New York (1993).
- [9] J. Clunie, “On integral and meromorphic functions”, *J. London Math. Soc.*, **37**, 17 – 22 (1962).

Поступила 09 сентября 2023

После доработки 06 февраля 2024

Принята к публикации 11 февраля 2024

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал "Известия НАН Армении, Математика" публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата А4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
 - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
 - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
 - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы, место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала "Известия НАН Армении, Математика", пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
E-mail: sart@ysu.am, URL: <http://www.maik.ru>
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале "Journal of Contemporary Mathematical Analysis". URL: <http://www.springer.com>.

Заказ N1287. Тираж 150. Подписано к печати 22.01.24.

Печ. л. 6.25. Бумага офсетная. Цена договорная.

Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24