

МЕРОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ, ДЕЛЯЩАЯ ДВЕ ПАРЫ МАЛЫХ ФУНКЦИЙ IM

С. МАДЖУМДЕР, Н. САРКАР И ДЖ. САРКАР

Университет Райгандж, Индия

E-mails: *sm05math@gmail.com; naba.iitbmath@gmail.com*
jeetsarkar.math@gmail.com

Аннотация. В статье мы изучаем единственность мероморфной функции с несколькими полюсами, делящей две пары малых функций IM со своим k -м производным, и получаем два результата, которые улучшают, а также обобщают недавний результат Хуанг Хуанга и др. [1] в широком смысле.

MSC2020 number: 30D35; 34A20.

Ключевые слова: мероморфная функция; малая функция; теория Неванлинны; единственность; производная.

1. ВВЕДЕНИЕ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Мы предполагаем, что читатель знаком со стандартными обозначениями и основными результатами теории Неванлинны (см., например, [2, 3]). Обозначим через $\mathcal{S}(f)$ множество функций, малых по сравнению с f . Как обычно, аббревиатура CM означает подсчет кратностей, а IM — игнорирование кратностей.

Рубель и Янг [4] изучали проблему единственности целых функций, которые имеют одинаковые значения со своими производными. В 1977 году они доказали, что если целая функция f делит два конечных различных значения CM с f' , то $f \equiv f'$. В 1992 году Чжэн и Ян [5] улучшили результат Рубеля и Янга [4] и доказали, что целая функция f делит a, b CM с $f^{(k)}$ ($k \geq 1$), то $f \equiv f^{(k)}$, где $a, b \in \mathcal{S}(f)$ различны. В 1999 году Ли и Ян [6] улучшили результат Чжэна и Янга [5] от деления значения b CM до IM и доказали, что

Теорема А. [5] Пусть f — непостоянная целая функция, и $a, b \in \mathcal{S}(f)$ различны. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят a CM и b IM, то $f \equiv f^{(k)}$.

В 2021 году Хуанг и др. [1] усовершенствовали теорему А, добавив идею деления пары малых функций следующим образом.

Теорема В. [1] Пусть f — непостоянная целая функция и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие, что $a_1 \not\equiv b_1$ и $a_2 \not\equiv b_2$. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят (a_1, a_2) CM и (b_1, b_2) IM, то $(a_2 - b_2)f - (a_1 - b_1)f^{(k)} \equiv a_2b_1 - a_1b_2$.

В статье нашей главной целью является улучшение теоремы В путем сведения условий деления к “2 IM”.

Теперь сформулируем наш первый результат.

Теорема 1.1. Пусть f — непостоянная мероморфная функция такая, что $N(r, f) = S(r, f)$ и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ такие, что $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, то $(a_2 - b_2)f - (a_1 - b_1)f^{(k)} \equiv a_2b_1 - a_1b_2$.

В следующем результате мы предполагаем, что хотя бы одна из a_1, a_2, b_1, b_2 непостоянна.

Теорема 1.2. Пусть f — непостоянная мероморфная функция такая, что $N(r, f) = S(r, f)$ и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие, что $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$ и $\frac{(a_1' - b_1')(a_2 - b_2)}{a_1 - b_1}$ непостоянна, когда $k \geq 2$. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, то $(a_2 - b_2)f - (a_1 - b_1)f^{(k)} \equiv a_2b_1 - a_1b_2$.

Если $a_1 \equiv a_2$ и $b_1 \equiv b_2$, то из теоремы 1.2 получаем следующее следствие.

Следствие 1.1. Пусть f — непостоянная мероморфная функция такая, что $N(r, f) = S(r, f)$ и $a_1, b_1 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие, что $a_1' - b_1'$ непостоянна, когда $k \geq 2$. Если f и $f^{(k)}$ ($k \geq 1$) делят a_1 и b_1 ИМ, то $f \equiv f^{(k)}$.

Следующий пример показывает, что условие “ $a_1, a_2, b_1, b_2 \neq \infty$ ” является точным в Теорема 1.2.

Пример 1. Пусть $f(z) = c + e^{ce^z}$ и $a_1(z) = \frac{c^2}{c - e^{-z}}$, где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если $b_1 = \infty$, то f и f' делят b_1 СМ. С другой стороны, мы видим, что f и f' также делят a_1 СМ, но $f \neq f'$.

Следующие примеры подтверждают, что Теорема 1.2 неверна, когда $N(r, f) \neq S(r, f)$.

Пример 2. Пусть $f(z) = \frac{4}{1 - 3e^{-2z}}$. Очевидно, $N(r, f) \neq S(r, f)$. Обратите внимание, что $f'(z) = \frac{-24e^{-2z}}{(1 - 3e^{-2z})^2}$ и поэтому f и f' делят 0 СМ. С другой стороны, мы видим, что f и f' делят 2 ИМ, но $f \neq f'$.

Пример 3. Пусть $a(z) = -\frac{1}{3}e^{-2z} + ce^{-z}$, $b(z) = -\frac{1}{3}e^{-2z} - ce^{-z}$ и $h(z) = e^{2ce^z}$, где $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Определим $f(z) = b(z) + \frac{b(z) - a(z)}{h(z) - 1}$. Пусть $a_1(z) = b'(z)$ и $b_1(z) = a'(z)$. Очевидно, $a_1, b_1 \in \mathcal{S}(f)$ и $N(r, f) \neq S(r, f)$. Также мы делаем вывод, что $f'(z) - a_1(z) = e^{2z}(f(z) - a_1(z))(f(z) - b(z))$ и $f'(z) - b_1(z) = e^{2z}(f(z) - b_1(z))(f(z) - a(z))$. Очевидно, что f и f' делят a_1 и b_1 ИМ, но $f \neq f'$.

В этой статье нам также понадобятся следующие три определения.

Определение 1.1. Пусть $k, m, n \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2 \in \mathcal{S}(f)$. Обозначим $S_{(m,n)}(a_1, a_2)$ множество тех точек $z \in \mathbb{C}$, что z является a_1 -точкой f порядка m и a_2 -точкой $f^{(k)}$ порядка n . Аналогично определяется множество $S_{(m,n)}(b_1, b_2)$. Обозначим через $\bar{N}_{(m,n)}(r, a_1; f)$ приведенную считающую функцию f по множеству $S_{(m,n)}(a_1, a_2)$. Сходным образом $\bar{N}_{(m,n)}(r, b_1; f)$ обозначает приведенную считающую функцию f относительно множества $S_{(m,n)}(b_1, b_2)$.

Определение 1.2. Пусть f — непостоянная мероморфная функция и $a_1, a_2 \in \mathcal{S}(f)$. Мы используем термин $\bar{N}(r, 0; f - a_1, f^{(k)} - a_2) \geq 2$ для обозначения приведенной считающей функции общих кратных 0-точек $f - a_1$ и $f^{(k)} - a_2$, где $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1.3. Пусть f, g — две непостоянные мероморфные функции и $a_1, a_2 \in \mathcal{S}(f)$. Обозначим через $N(r, 0; g \mid f \neq a_1, b_1)$ считающую функцию тех 0-точек g , которые не являются ни a_1 , ни b_1 -точками f . Обозначим через $\bar{N}_{(l+1)}(r, 0; g \mid f = a_1, b_1)$ приведенную считающую функцию тех 0-точек g с кратностью, большей, чем l , которые являются 0-точками как $f - a_1$, так и $f - b_1$. Обозначим через $\bar{N}_{(l+1)}(r, a_1; f)$ приведенную считающую функцию a_1 -точек f с кратностью больше l .

2. Вспомогательные леммы

В этом разделе мы приведем некоторые необходимые леммы.

Лемма 2.1. Пусть f — непостоянная мероморфная функция и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие что $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$. Пусть

$$\delta(f) = \begin{vmatrix} f - a_1 & a_1 - b_1 \\ f' - a'_1 & a'_1 - b'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f - b_1 & a_1 - b_1 \\ f' - b'_1 & a'_1 - b'_1 \end{vmatrix}.$$

Тогда

- (1) $\delta(f) \neq 0$,
- (2) $m(r, \frac{\Delta(f)}{(f-a_1)(f-b_1)}) = S(r, f)$,
- (3) $m(r, \frac{\Delta(f)(f-\beta)}{(f-a_1)(f-b_1)}) = S(r, f), \quad \beta \in \mathcal{S}(f)$.

Доказательство. (1). Предположим, $\delta(f) \equiv 0$. Тогда $\frac{f'-a'_1}{f-a_1} \equiv \frac{a'_1-b'_1}{a_1-b_1}$ и проинтегрировав, получаем $f \equiv a_1 + a_0(a_1 - b_1)$, где $a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это показывает, что $T(r, f) = S(r, f)$, что является противоречием. Следовательно, $\delta(f) \neq 0$.

(2). Имеем, что $\delta(f) = (a'_1 - b'_1)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f' - a'_1)$, т. е.

$$\frac{\delta(f)}{f - a_1} = a'_1 - b'_1 - (a_1 - b_1) \frac{f' - a'_1}{f - a_1}.$$

Следовательно, получаем

$$m(r, \frac{\delta(f)}{f - a_1}) \leq m(r, a'_1 - b'_1) + m(r, a_1 - b_1) + m(r, \frac{f' - a'_1}{f - a_1}) + \log 2 = S(r, f).$$

Аналогично, имеем

$$m(r, \frac{\delta(f)}{f - b_1}) \leq S(r, f),$$

а также

$$\frac{\delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)} = \frac{1}{a_1 - b_1} \left[\frac{\delta(f)}{f - a_1} - \frac{\delta(f)}{f - b_1} \right].$$

Теперь (2) следует непосредственно.

(3). Мы видим, что

$$\frac{\delta(f)(f - \beta)}{(f - a_1)(f - b_1)} = \frac{\delta(f)}{f - a_1} + \frac{(b_1 - \beta)\delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)}$$

и

$$m(r, \frac{\delta(f)(f - \beta)}{(f - a_1)(f - b_1)}) \leq m(r, \frac{\delta(f)}{f - a_1}) + m(r, b_1 - \beta) + m(r, \frac{\delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)}).$$

Теперь (3) следует непосредственно из (2). □

В статье для непостоянной мероморфной функции определяются следующие вспомогательные функции

$$(2.1) \quad \phi = \frac{\delta(f)L(f, f^{(k)})}{(f - a_1)(f - b_1)},$$

$$(2.2) \quad \psi = \frac{\delta(f^{(k)})L(f, f^{(k)})}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)},$$

$$(2.3) \quad H_{nm} = n\phi - m\psi,$$

$$(2.4) \quad H = \frac{\delta(f)}{(f - a_1)(f - b_1)} - \frac{\delta(f^{(k)})}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$ и

$$L(f, f^{(k)}) = (a_2 - b_2)f - (a_1 - b_1)f^{(k)} + a_1b_2 - a_2b_1.$$

Обратите внимание, что

$$L(f, f^{(k)}) = (a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2) = (a_2 - b_2)(f - b_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - b_2).$$

Для доказательства леммы 2.4 нам потребуются следующие три леммы.

Лемма 2.2. [7] Пусть f — непостоянная мероморфная функция и

$$R(f) = \frac{P(f)}{Q(f)}, \quad \text{где } P(f) = \sum_{k=0}^p a_k f^k, \text{ и } Q(f) = \sum_{j=0}^q b_j f^j$$

— два взаимно простых многочлена от f . Если $a_k, b_j \in \mathcal{S}(f)$ такие, что $a_p \neq 0$ и $b_q \neq 0$, то

$$T(r, R(f)) = \max\{p, q\} T(r, f) + S(r, f).$$

Лемма 2.3. [2] Пусть f — непостоянная мероморфная функция и $a_1, b_1 \in \mathcal{S}(f)$. Тогда

$$T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r,).$$

Лемма 2.4. [8] Если f и g — непостоянные мероморфные функции, то

$$N(r, fg) - N(r, 0; fg) = N(r, f) + N(r, g) - N(r, 0; f) - N(r, g) - N(r, 0;).$$

Лемма 2.5. Пусть f — непостоянная мероморфная функция такая, что $N(r, f) = S(r, f)$ и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{S}(f) \setminus \{\infty\}$ такие, что $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$.

Если f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ и

$$T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f),$$

тогда $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$.

Доказательство. Лемму 2.5 докажем от противного.

Предположим, что $L(f, f^{(k)}) \neq 0$. Из леммы 2.1 ясно, что $\Delta(f) \neq 0$ и $\Delta(f^{(k)}) \neq 0$ и поэтому $\phi \neq 0$ и $\psi \neq 0$. Обратите внимание, что

$$m(r, \phi) \leq m\left(r, \frac{\Delta(f)f}{(f-a_1)(f-b_1)} \left((a_2 - b_2) - (a_1 - b_1) \frac{f^{(k)}}{f} \right) \right) +$$

$$+m\left(r, \frac{(a_1b_2-a_2b_1)\Delta(f)}{(f-a_1)(f-b_1)}\right) \leq m\left(r, \frac{\Delta(f)f}{(f-a_1)(f-b_1)}\right) + m\left(r, (a_2-b_2) - (a_1-b_1)\frac{f^{(k)}}{f}\right) + \\ +m\left(r, \frac{\Delta(f)}{(f-a_1)(f-b_1)}\right)$$

и поэтому по лемме 2.1 получаем $m(r, \phi) = S(r, f)$. Теперь докажем, что $N(r, \phi) = S(r, f)$.

По лемме 2.3 имеем $T(r, f) \leq \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f)$. Поскольку f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, мы имеем

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) \leq N(r, 0; L(f, f^{(k)})) + S(r, f) \\ &\leq T(r, L(f, f^{(k)})) + S(r, f) \leq m(r, L(f, f^{(k)})) + S(r, f) \\ &\leq m(r, f) + m\left(r, a_2 - b_2 - (a_1 - b_1)\frac{f^{(k)}}{f}\right) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

следовательно,

$$(2.5) \quad T(r, f) = m(r, L(f, f^{(k)})) + S(r, f) = \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Пусть $z_{p,q} \in S_{(p,q)}(a_1, a_2)$ такая, что

$$\phi(z_{p,q}) \neq 0, \infty, \quad a_i(z_{p,q}) - b_i(z_{p,q}) \neq 0, \infty, \quad a'_i(z_{p,q}) - b'_i(z_{p,q}) \neq 0$$

для $i = 1, 2$. Путем несложных вычислений из (2.1) выводим, что ϕ голоморфна в точке $z_{p,q}$.

Если $\hat{z}_{p,q} \in S_{(p,q)}(b_1, b_2)$ такая, что

$$\phi(\hat{z}_{p,q}) \neq 0, \infty, \quad a_i(\hat{z}_{p,q}) - b_i(\hat{z}_{p,q}) \neq 0, \infty, \quad a'_i(\hat{z}_{p,q}) - b'_i(\hat{z}_{p,q}) \neq 0$$

для $i = 1, 2$, то с помощью простых вычислений мы можем вывести из (2.1), что ϕ также голоморфна в $\hat{z}_{p,q}$. Мы знаем, что $N(r, f) = S(r, f)$, имеем $N(r, \phi) = S(r, f)$.

Поскольку $m(r, \phi) = S(r, f)$, имеем $T(r, \phi) = S(r, f)$, т.е. $\phi \in \mathcal{S}()$.

Теперь из (2.1) мы видим, что

$$\begin{aligned} \overline{N}(r, 0; f - a_1, f^{(k)} - a_2 \mid \geq 2) &+ \overline{N}(r, 0; f - b_1, f^{(k)} - b_2 \mid \geq 2) \\ &\leq 2N(r, 0; \phi) \leq 2T(r, \phi) = S(r, f), \end{aligned}$$

т.е.

$$(2.6) \quad \overline{N}(r, 0; f - a_1, f^{(k)} - a_2 \mid \geq 2) + \overline{N}(r, 0; f - b_1, f^{(k)} - b_2 \mid \geq 2) = S(r, f).$$

Аналогично мы можем вывести из (2.1), что

$$(2.7) \quad \overline{N}_{(2)}(r, 0; L(f, f^{(k)}) \mid f = a_1, b_1) + N(r, 0; \Delta(f)L(f, f^{(k)}) \mid f \neq a_1, b_1) = S(r, f).$$

Пусть $a_3 = a_1 + l(a_1 - b_1)$, где $l \in \mathbb{N}$. Очевидно, $a_3 \neq a_1, b_1$. Пусть $F = \frac{f-a_1}{b_1-a_1}$. Теперь, используя вторую фундаментальную теорему и (2.5), мы имеем

$$\begin{aligned} 2T(r, f) &\leq \overline{N}(r, \infty; F) + \overline{N}(r, 0; F) + \overline{N}(r, 1; F) + \overline{N}(r, -l; F) + S(r, f) \\ (2.8) \quad &\leq T(r, f) + \overline{N}(r, a_3; f) + S(r, f) \leq 2T(r, f) - m(r, a_3; f) + S(r, f), \end{aligned}$$

т.е., $m(r, a_3; f) = S(r, f)$.

Пусть $a_4 = a_2 + l(a_2 - b_2)$, где $l \in \mathbb{N}$ и $G = \frac{f^{(k)} - a_2}{b_2 - a_2}$. Теперь, используя вторую фундаментальную теорему и (2.5), мы имеем

$$\begin{aligned}
 2T(r, f^{(k)}) &\leq \bar{N}(r, 0; G) + \bar{N}(r, 1; G) + \bar{N}(r, -l; G) + S(r, f) \\
 &\leq \bar{N}(r, a_2; f^{(k)}) + \bar{N}(r, b_2; f^{(k)}) + \bar{N}(r, a_4; f^{(k)}) + S(r, f) \\
 &= \bar{N}(r, a_1; f) + \bar{N}(r, b_1; f) + T(r, f^{(k)}) - m(r, a_4; f^{(k)}) + S(r, f) \\
 (2.9) \quad &= 2T(r, f^{(k)}) - m(r, a_4; f^{(k)}) + S(r, f),
 \end{aligned}$$

т.е., $m(r, a_4; f^{(k)}) = S(r, f)$.

Мы знаем, что $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Теперь из леммы 2.4, (2.8) и (2.9) получаем

$$\begin{aligned}
 m\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) &= T\left(r, \frac{f^{(k)} - a_4}{f - a_3}\right) - N\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) + O(1) \\
 &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)} - a_3^{(k)}}{f - a_3}\right) + m\left(r, \frac{a_3^{(k)} - a_4}{f - a_3}\right) + N\left(r, \frac{f^{(k)} - a_4}{f - a_3}\right) - N\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) + O(1) \\
 &\leq N(r, a_3; f) - N(r, a_4; f^{(k)}) + S(r, f) \\
 &\leq T(r, f) - T(r, f^{(k)}) + S(r, f) = S(r, f),
 \end{aligned}$$

т.е.

$$(2.10) \quad m\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) = S(r, f).$$

Обратите внимание, что

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - a_4)}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)} \left(\frac{(a_2 - b_2)(f - a_3) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_4)}{f^{(k)} - a_4} \right) \\
 &= \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - a_4)}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)} \left((a_2 - b_2) \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4} - (a_1 - b_1) \right)
 \end{aligned}$$

и поэтому, используя лемму 2.1 и (2.10), получаем, что

$$m(r, \psi) \leq m\left(r, \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - a_4)}{(f^{(k)} - a_1)(f^{(k)} - a_2)}\right) + m\left(r, \frac{f - a_3}{f^{(k)} - a_4}\right) + o(1) \leq S(r, f),$$

т.е. $m(r, \psi) = S(r, f)$. Поскольку f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) , (b_1, b_2) ИМ, легко доказать, что $N(r, \psi) = S(r, f)$. Следовательно, $N(r, \psi) = S(r, f)$, т. е. $\psi \in \mathcal{S}(f)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию H_{nm} , определенную формулой (2.3). Тогда из (2.1) и (2.2) получаем

$$\begin{aligned}
 H_{nm} &= L(f, f^{(k)}) \left[\left(n \frac{f' - b'_1}{f - b_1} - m \frac{f^{(k+1)} - b'_2}{f^{(k)} - b_2} \right) - \right. \\
 (2.11) \quad &\quad \left. - \left(n \frac{f' - a'_1}{f - a_1} - m \frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что $H_{nm} \not\equiv 0$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Если нет, предположим, что $H_{nm} \equiv 0$. Поскольку $L(f, f^{(k)}) \not\equiv 0$, из (2.11) получаем

$$n \left(\frac{f' - a'_1}{f - a_1} - \frac{f' - b'_1}{f - b_1} \right) \equiv m \left(\frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} - \frac{f^{(k+1)} - b'_2}{f^{(k)} - b_2} \right).$$

Следовательно,

$$(2.12) \quad \left(\frac{f - a_1}{f - b_1} \right)^n \equiv c_1 \left(\frac{f^{(k)} - a_2}{f^{(k)} - b_2} \right)^m,$$

где $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если $n \neq m$, то используя лемму 2.2 к (2.12), получаем

$$n T(r, f) = m T(r, f^{(k)}) + S(r, f),$$

что противоречит тому, что $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Следовательно, $n = m$ и из (2.12) получаем

$$\frac{f - a_1}{f - b_1} \equiv c_2 \frac{f^{(k)} - a_2}{f^{(k)} - b_2},$$

где $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если $c_2 = 1$, то $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно. Следовательно, $c_2 \neq 1$ и так $\frac{1-c_2}{c_2} \frac{f-a_5}{f-b_1} \equiv \frac{b_2-a_2}{f^{(k)}-b_2}$, где $a_5 = \frac{a_1-c_2b_1}{1-c_2}$. Поскольку f и $f^{(k)}$ имеют общий (b_1, b_2) ИМ, мы заключаем, что $N(r, a_5; f) = S(r, f)$. Поскольку $F = \frac{f-a_1}{b_1-a_1}$, имеем

$$F + \frac{c_2}{1-c_2} = \frac{f-a_1}{b_1-a_1} + \frac{c_2}{1-c_2} = \frac{f-a_5}{b_1-a_1}.$$

Теперь, используя вторую фундаментальную теорему и (2.5), мы получаем

$$2T(r, f) \leq \overline{N}(r, 0; F) + \overline{N}(r, 1; F) + \overline{N}\left(r, -\frac{c_2}{1-c_2}; F\right) + S(r, f) = T(r, f) + S(r, f),$$

что является противоречием. Следовательно, $H_{nm} \not\equiv 0$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Пусть $z_{m,n} \in S_{(m,n)}(a_1, a_2) \cup S_{(m,n)}(b_1, b_2)$ такой, что $a_i(z_{m,n}), b_i(z_{m,n}) \neq 0, \infty$ и $a_i(z_{m,n}) - b_i(z_{m,n}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Тогда из (2.11) получаем $H_{nm}(z_{m,n}) = 0$. Поскольку $T(r, \phi) = S(r, f)$ и $T(r, \psi) = S(r, f)$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \overline{N}_{(m,n)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(m,n)}(r, b_1; f) &\leq N(r, 0; H) + S(r, f) \leq T(r, H) + S(r, f) \\ &\leq T(r, \phi) + T(r, \psi) + S(r, f) = S(r, f) \end{aligned}$$

и поэтому из (2.5) мы получаем

$$\begin{aligned} T(r, f) &= \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f) \\ &= \sum_{m,n} (\overline{N}_{(m,n)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(m,n)}(r, b_1; f)) + S(r, f) \\ &= \sum_{m+n \geq 5} (\overline{N}_{(m,n)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(m,n)}(r, b_1; f)) + S(r, f) \\ &\leq \frac{1}{5} (N(r, a_1; f) + N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_1; f) + N(r, b_2; f^{(k)})) + S(r, f) \\ &\leq \frac{4}{5} T(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

что невозможно. Согласно всем приведенным выше рассуждениям, мы получаем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$. $\square$

Следующая лемма играет важную роль в доказательстве теорем 1.1 и 1.2.

Лемма 2.6. [9] Пусть $f \in \mathcal{M}_T(\mathbb{C})$ такая, что $f^n P(f) = Q(f)$, где $P(f)$ и $Q(f)$ — дифференциальные полиномы от f с функциями малой близости, связанными с f в качестве коэффициентов, а степень $Q(f)$ не превосходит n . Тогда, $m(r, P) = S(r, f)$.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.2. По заданным условиям мы видим, что f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) , (b_1, b_2) ИМ, $N(r, f) = S(r, f)$ и $\frac{(a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)}{a_1 - b_1}$ непостоянна, когда $k \geq 2$. Из леммы 2.1 мы видим, что $\delta(f) \neq 0$ и $\delta(f^{(k)}) \neq 0$. Если $\phi \equiv 0$, где ϕ определен как в (2.1), то мы имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$ и, следовательно, утверждение Теоремы 1.2 имеет место.

Далее, мы предполагаем, что $\phi \neq 0$. Теперь наша главная цель — получить противоречие.

Поскольку $\phi \neq 0$, имеем $L(f, f^{(k)}) \neq 0$. Опять же, поскольку $\delta(f^{(k)}) \neq 0$, из (2.2) получаем $\psi \neq 0$. Теперь из доказательства леммы 2.5 получаем $T(r, \phi) = S(r, f)$, т.е. $\phi \in \mathcal{S}(f)$. Также по данным условиям мы видим, что (2.6)-(2.8) выполняются.

Пусть $f_1 = f - a_3$, где $a_3 = a_1 + l(a_1 - b_1)$, $l \in \mathbb{N}$. Теперь из (2.1) мы получаем

$$(3.1) \quad f'_1 = \frac{\alpha_{1,2}f_1^2 + \alpha_{1,1}f_1 + \alpha_{1,0} + Q_1}{f_1 - \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}f_1^{(k)} + \beta},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0} &= -\frac{(a_3 - a_1)(a_3 - b_1)}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)}, & \alpha_{1,2} &= \frac{(a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2) - \phi}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)}, \\ \alpha_{1,1} &= \frac{(a'_1 - b'_1)((a_2 - b_2)a_3 - (a_1 - b_1)a_3^{(k)} + a_1b_2 - a_2b_1) - \phi(2a_3 - a_1 - b_1)}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)}, \\ Q_1 &= -\frac{a'_1 - b'_1}{a_2 - b_2}f_1f_1^{(k)}, \\ \beta &= \frac{(a_2 - b_2)a_3 - (a_1 - b_1)a_3^{(k)} + a_1b_2 - a_2b_1}{a_2 - b_2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. Пусть $\phi \neq (a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)$. Очевидно, $\alpha_{1,2} \neq 0$. Теперь по индукции и неоднократно используя (3.1) мы получаем

$$(3.2) \quad f_1^{(k)} = \frac{\sum_{j=0}^{2k} \alpha_{k,j} f_1^j + Q_k}{((a_2 - b_2)f_1 - (a_1 - b_1)f_1^{(k)} + \beta)^{2k-1}},$$

где

$$(3.3) \quad Q_k = \sum_{\substack{l < 2k \\ l+j_1+j_2+\dots+j_k \leq 2k}} \beta_{l,j_1,j_2,\dots,j_k} f_1^l (f_1^{(k)})^{j_1} (f_1^{(k+1)})^{j_2} \dots (f_1^{(2k-1)})^{j_k}.$$

Здесь $\alpha_{k,j}, \beta_{l,j_1,j_2,\dots,j_k} \in \mathcal{S}(f)$ и $\psi_i := \alpha_{i,2i}$ удовлетворяет рекуррентной формуле

$$(3.4) \quad \psi_1 = \alpha_{1,2}, \quad \psi_{i+1} = \psi'_i + \psi_1 \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 1.1. Пусть $\psi_k = \alpha_{k,2k} \neq 0$. Теперь из (2.8) мы имеем $m(r, \frac{1}{f_1}) = S(r, f)$ и, следовательно, из (3.3) получаем $m(r, \frac{Q_k}{f_1^{2k-1} f_1^{(k)}}) = S(r, f)$. Поэтому

$$(3.5) \quad m\left(r, \left((a_2 - b_2) - (a_1 - b_1) \frac{f_1^{(k)}}{f_1} + \frac{\beta}{f_1}\right)^{2k-1} - \frac{Q_k}{f_1^{2k-1} f_1^{(k)}}\right) = S(r, f).$$

Опять же из (3.2) мы имеем

$$\sum_{j=0}^{2k} \alpha_{k,j} f_1^j = f_1^{(k)} \left((a_2 - b_2) f_1 - (a_1 - b_1) f_1^{(k)} + \beta \right)^{2k-1} - Q_k$$

и поэтому, используя лемму 2.2 и (3.5), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} 2kT(r, f_1) + S(r, f) &= T\left(r, \sum_{j=0}^{2k} \alpha_{k,j} f_1^j\right) = m\left(r, \sum_{j=0}^{2k} \alpha_{k,j} f_1^j\right) \\ &\leq m\left(r, \left((a_2 - b_2) - (a_1 - b_1) \frac{f_1^{(k)}}{f_1} + \frac{\beta}{f_1}\right)^{2k-1} - \frac{Q_k}{f_1^{2k-1} f_1^{(k)}}\right) \\ &\quad + m(r, f_1^{2k-1} f_1^{(k)}) + S(r, f) \\ &\leq m(r, f_1^{2k-1}) + m(r, f_1^{(k)}) + S(r, f) \\ &\leq (2k-1)T(r, f_1) + T(r, f_1^{(k)}) + S(r, f), \end{aligned}$$

т.е. $T(r, f_1) \leq T(r, f_1^{(k)}) + S(r, f)$, т.е. $T(r, f) \leq T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Поскольку $N(r, f) = S(r, f)$, имеем $T(r, f^{(k)}) = m(r, f^{(k)}) + S(r, f) \leq m(r, f) + S(r, f) = T(r, f) + S(r, f)$. Следовательно, $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$ и, по лемме 2.5 имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно.

Подслучай 1.2. Пусть $\psi_k = \alpha_{k,2k} \equiv 0$. Теперь из (3.4) мы легко получаем, что

$$(3.6) \quad \psi_1^k + Q(\psi_1) = \psi_k = 0,$$

где $Q(\psi_1)$ — дифференциальный многочлен от ψ_1 степени, меньшей или равной $k-1$.

Опять же из (3.4) мы получаем $\psi'_{k-1} + \psi_1 \psi_{k-1} \equiv 0$. При интегрировании имеем $\psi_{k-1}(z) = c_0 e^{\xi(z)}$, где $\xi(z) = - \int_0^z \psi_1(z) dz$ и $c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Мы утверждаем, что $\xi(z)$

— целая функция. Если нет, то предположим, что z_0 — полюс $\xi(z)$. Тогда z_0 должна быть существенной особенностью $e^{\xi(z)}$. С $\psi_{k-1}(z)$ — мероморфная функция, приходим к противоречию. Следовательно, $\xi(z)$ — целая функция, а значит, $\psi_1(z)$ — целая функция. Если возможно, предположим, что $\psi_1(z)$ — полином. Очевидно, $\xi(z)$ — полином. Также из (3.4) мы заключаем, что $\psi_{k-1}(z)$ также является полиномом. Поскольку $\psi_{k-1}(z) = c_0 e^{\xi(z)}$, получаем противоречие. Следовательно, $\psi_1(z)$ — трансцендентная целая функция. Теперь, используя лемму 2.6 для

(3.6), мы получаем $m(r, \psi_1) = S(r, \psi_1)$ и, следовательно, $T(r, \psi_1) = S(r, \psi_1)$, что невозможно.

Случай 2. Пусть $\phi = (a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)$. Теперь $\phi \not\equiv 0$ показывает, что $(a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2) \not\equiv 0$. Поскольку $\Delta(f) = (a'_1 - b'_1)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f' - a'_1) = (a'_1 - b'_1)(f - b_1) - (a_1 - b_1)(f' - b'_1)$, из (2.1), мы имеем

$$(3.7) \quad \begin{aligned} f^{(k)} - a_2 &= -\frac{(a_2 - b_2)(f - a_1)(f' - b'_1)}{()}; \\ f^{(k)} - b_2 &= -\frac{(a_2 - b_2)(f - b_1)(f' - a'_1)}{\Delta(f)}. \end{aligned}$$

Теперь мы рассмотрим следующие два подслучая.

Подслучай 2.1. Пусть $k \geq 2$. Дифференцируя (2.1), получаем

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \left((a''_1 - b''_1)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f'' - a''_1) \right) \\ & \times \left((a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2) \right) \\ & + \left((a'_1 - b'_1)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f' - a'_1) \right) \times \left((a'_2 - b'_2)(f - a_1) \right. \\ & \left. + (a_2 - b_2)(f' - a'_1) - (a'_1 - b'_1)(f^{(k)} - a_2) - (a_1 - b_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \right) \\ & = \phi'(f - a_1)(f - b_1) + \phi(f' - a'_1)(f - b_1) + \phi(f - a_1)(f' - b'_1), \end{aligned}$$

то есть,

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & (a''_1 - b''_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)^2 - (a''_1 - b''_1)(a_1 - b_1)(f - a_1)(f^{(k)} - a_2) \\ & - (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)(f'' - a''_1) + (a_1 - b_1)^2(f'' - a''_1)(f^{(k)} - a_2) \\ & + (a'_1 - b'_1)(a'_2 - b'_2)(f - a_1)^2 - (a_1 - b_1)(a'_2 - b'_2)(f - a_1)(f' - a'_1) \\ & + (a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)(f' - a'_1) - (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(f' - a'_1)^2 \\ & - (a'_1 - b'_1)^2(f - a_1)(f^{(k)} - a_2) + (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f' - a'_1)(f^{(k)} - a_2) \\ & - (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f - a_1)(f^{(k+1)} - a'_2) + (a_1 - b_1)^2(f' - a'_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \\ & = \phi'(f - a_1)(f - b_1) + \phi(f' - a'_1)(f - b_1) + \phi(f - a_1)(f' - b'_1). \end{aligned}$$

Пусть $z_{p,1} \in S_{(p,1)}(a_1, a_2)$ ($p \geq 2$) такая, что $a_i(z_{p,1}) - b_i(z_{p,1}) \neq 0, \infty$ и $a'_i(z_{p,1}) - b'_i(z_{p,1}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Тогда в некоторой окрестности $z_{p,1}$ получим

$$(3.10) \quad \begin{aligned} f(z) - a_1(z) &= c_p(z - z_{p,1})^p + c_{p+1}(z - z_{p,1})^{p+1} + \dots \quad (c_p \neq 0), \\ f^{(k)}(z) - a_2(z) &= d_1(z - z_{p,1}) + d_2(z - z_{p,1})^2 + \dots \quad (d_1 \neq 0), \\ \phi(z) &= f_0 + f_1(z - z_{p,1}) + f_2(z - z_{p,1})^2 + \dots \quad (f_0 \neq 0), \\ a_i(z) - b_i(z) &= e_{i,0} + e_{i,1}(z - z_{p,1}) + e_{i,2}(z - z_{p,1})^2 + \dots \quad (e_{i,0} \neq 0), i = 1, 2, \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} f'(z) - a'_1(z) &= pc_p(z - z_{p,1})^{p-1} + (p+1)c_{p+1}(z - z_{p,1})^p + \dots, \\ f''(z) - a''_1(z) &= p(p-1)c_p(z - z_{p,1})^{p-2} + p(p+1)c_{p+1}(z - z_{p,1})^{p-1} + \dots, \\ f^{(k+1)}(z) - a'_2(z) &= d_1 + 2d_2(z - z_{p,1}) + 3d_3(z - z_{p,1})^2 + \dots, \\ f^{(k+2)}(z) - a''_2(z) &= 2d_2(z - z_{p,1}) + 6d_3(z - z_{p,1}) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi'(z) &= f_1 + 2f_2(z - z_{p,1}) + 3f_3(z - z_{p,1})^2 \dots, \\
 \phi''(z) &= 2f_2 + 6f_3(z - z_{p,1}) \dots, \\
 a'_i(z) - b'_i(z) &= e_{i,1} + 2e_{i,2}(z - z_{p,1}) + \dots, i = 1, 2.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Теперь из (3.10) и (3.11) мы имеем

$$L(f(z), f^{(k)}(z)) = -e_{2,0}d_1(z - z_{p,1}) - \dots \tag{3.12}$$

Затем из (3.8), (3.10)-(3.12) легко заключить, что $f_0 = pd_1e_{1,0}$, т.е. ,

$$\begin{aligned}
 f^{(k+1)}(z_{p,1}) - a'_2(z_{p,1}) &= d_1 = \frac{\phi(z_{p,1})}{p(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))} \\
 &= \frac{(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1}))}{p(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))}.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Следовательно, из (3.9)-(3.13) легко вычислить, что

$$\begin{aligned}
 &\left(p^2(p+1)c_p d_2(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))^2 + (p-1)c_p(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2(a_2(z_{p,1}) \right. \\
 &- b_2(z_{p,1})) - pc_p\phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - pc_p\phi(z_{p,1})(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \\
 &+ (p+1)^2c_{p+1}(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \\
 &\left. - p(p+1)c_{p+1}\phi(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) \right)(z - z_{p,1})^p + O((z - z_{p,1})^{p+1}) \equiv 0,
 \end{aligned}$$

что показывает, что

$$\begin{aligned}
 &\left(p^2(p+1)c_p d_2(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))^2 + (p-1)c_p(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2 \right. \\
 &\times (a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) - pc_p\phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - pc_p\phi(z_{p,1}) \\
 &\times (a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) + (p+1)^2c_{p+1}(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \\
 &\left. \times (a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) - p(p+1)c_{p+1}\phi(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) \right) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Снова продифференцировав (3.9) один раз, получим

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad &((a''_1 - b''_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)^2)' - ((a''_1 - b''_1)(a_1 - b_1)(f - a_1)(f^{(k)} - a_2))' \\
 &- ((a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)(f'' - a''_1))' + 2(a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f'' - a''_1)(f^{(k)} - a_2) \\
 &+ (a_1 - b_1)^2(f''' - a'''_1)(f^{(k)} - a_2) + (a_1 - b_1)^2(f'' - a''_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \\
 &+ ((a'_1 - b'_1)(a'_2 - b'_2)(f - a_1)^2)' - ((a_1 - b_1)(a'_2 - b'_2)(f - a_1)(f' - a'_1))' \\
 &+ ((a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)(f - a_1)(f' - a'_1))' - ((a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(f' - a'_1)^2)' \\
 &- ((a'_1 - b'_1)^2(f - a_1)(f^{(k)} - a_2))' + (a'_1 - b'_1)^2(f' - a'_1)(f^{(k)} - a_2) \\
 &+ (a_1 - b_1)(a''_1 - b''_1)(f' - a'_1)(f^{(k)} - a_2) + (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f'' - a''_1)(f^{(k)} - a_2) \\
 &+ (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f' - a'_1)(f^{(k+1)} - a'_2) - (a'_1 - b'_1)^2(f - a_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \\
 &- (a_1 - b_1)(a''_1 - b''_1)(f - a_1)(f^{(k+1)} - a'_2) - (a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f' - a'_1)(f^{(k+1)} - a'_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f - a_1)(f^{(k+2)} - a''_2) + 2(a_1 - b_1)(a'_1 - b'_1)(f' - a'_1)(f^{(k+1)} - a'_2) \\
 & + (a_1 - b_1)^2(f'' - a''_1)(f^{(k+1)} - a'_2) + (a_1 - b_1)^2(f' - a'_1)(f^{(k+2)} - a''_2) \\
 = & 2\phi'(f' - a'_1)(f - b_1) + \phi(f'' - a''_1)(f - b_1) + 2\phi(f' - a'_1)(f' - b'_1).
 \end{aligned}$$

Теперь легко вычислить из (3.10), (3.11) и (3.15), что

$$\begin{aligned}
 & \left(p^2(p+1)c_p d_2(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))^2 + (3p-1)c_p(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \right. \\
 & - 2pc_p\phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - 2pc_p\phi(z_{p,1})(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \\
 & + (p+1)^2c_{p+1}(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \\
 & \left. - p(p+1)c_{p+1}\phi(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) \right) (z - z_{p,1})^{p-1} + O((z - z_{p,1})^p) \equiv 0,
 \end{aligned}$$

что показывает, что

$$\begin{aligned}
 & p^2(p+1)c_p d_2(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))^2 + (3p-1)c_p(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \\
 & - 2pc_p\phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - 2pc_p\phi(z_{p,1})(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \\
 & + (p+1)^2c_{p+1}(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1}))(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \\
 (3.16) \quad & - p(p+1)c_{p+1}\phi(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) = 0.
 \end{aligned}$$

Теперь из (3.14) и (3.16) мы имеем

$$\begin{aligned}
 & pc_p \left(2(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1}))^2(a_2(z_{p,1}) - b_2(z_{p,1})) \right. \\
 & \left. - \phi'(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) - \phi(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Поскольку $c_p \neq 0$ и $\phi = (a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)$, сверху получаем

$$(3.17) \quad \phi(z_{p,1})(a'_1(z_{p,1}) - b'_1(z_{p,1})) - \phi'(z_{p,1})(a_1(z_{p,1}) - b_1(z_{p,1})) = 0.$$

Поскольку $\frac{(a'_1 - b'_1)(a_2 - b_2)}{a_1 - b_1}$ непостоянна, мы получаем $\phi(a'_1 - b'_1) - \phi'(a_1 - b_1) \neq 0$ и, следовательно, из (3.17) имеем

$$(3.18) \quad \sum_{p \geq 2} \bar{N}_{(p,1)}(r, a_1; f) \leq N(r, 0; \phi(a'_1 - b'_1) - \phi'(a_1 - b_1)) \leq S(r, f).$$

Пусть $\hat{z}_{p,1} \in S_{(p,1)}(b_1, b_2)$ ($p \geq 2$) такая, что $a_i(\hat{z}_{p,1}) - b_i(\hat{z}_{p,1}) \neq 0, \infty$ и $a'_i(\hat{z}_{p,1}) - b'_i(\hat{z}_{p,1}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Тогда в некоторой окрестности $\hat{z}_{p,q}$ получим

$$\begin{aligned}
 f(z) - b_1(z) &= \hat{c}_p(z - \hat{z}_{p,1})^p + \hat{c}_{p+1}(z - \hat{z}_{p,1})^{p+1} + \dots (\hat{c}_p \neq 0), \\
 f^{(k)}(z) - b_2(z) &= \hat{d}_1(z - \hat{z}_{p,1}) + \hat{d}_2(z - \hat{z}_{p,1})^2 + \dots (\hat{d}_1 \neq 0), \\
 (3.19) \quad \phi(z) &= \hat{f}_0 + \hat{f}_1(z - \hat{z}_{p,1}) + \hat{f}_2(z - \hat{z}_{p,1})^2 + \dots (\hat{f}_0 \neq 0), \\
 a_i(z) - b_i(z) &= \hat{e}_{i,0} + \hat{e}_{i,1}(z - \hat{z}_{p,1}) + \hat{e}_{i,2}(z - \hat{z}_{p,1})^2 + \dots (\hat{e}_{i,0} \neq 0), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Поэтому мы легко получаем $L(f(z), f^{(k)}(z)) = -\hat{e}_{2,0}\hat{d}_1(z - \hat{z}_{p,1}) - \dots$ и

$$\begin{aligned}
 f^{(k+1)}(\hat{z}_{p,1}) - a'_2(\hat{z}_{p,1}) &= \hat{d}_1 = -\frac{\phi(\hat{z}_{p,1})}{p(a_1(\hat{z}_{p,1}) - b_1(\hat{z}_{p,1}))} \\
 &= -\frac{(a'_1(\hat{z}_{p,1}) - b'_1(\hat{z}_{p,1}))(a_2(\hat{z}_{p,1}) - b_2(\hat{z}_{p,1}))}{p(a_1(\hat{z}_{p,1}) - b_1(\hat{z}_{p,1}))}.
 \end{aligned}$$

Теперь, действуя так же, как это было сделано выше, и используя (3.19) вместо (3.10), можно легко заключить, что

$$\phi(\hat{z}_{p,1})(a'_1(\hat{z}_{p,1}) - b'_1(\hat{z}_{p,1})) - \phi'(\hat{z}_{p,1})(a_1(\hat{z}_{p,1}) - b_1(\hat{z}_{p,1})) = 0$$

и

$$(3.20) \quad \sum_{p \geq 2} \bar{N}_{(p,1)}(r, b_1; f) \leq N(r, 0; \phi(a'_1 - b'_1) - \phi'(a_1 - b_1)) \leq S(r, f).$$

Следовательно, из (2.6), (3.18) и (3.20) мы заключаем, что

$$(3.21) \quad \bar{N}_{(2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(2)}(r, b_1; f) \leq \sum_{p \geq 2} (\bar{N}_{(p,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(p,1)}(r, b_1; f)) = S(r, f).$$

Пусть $\beta_1 = \frac{(a_1 - b_1)\alpha + a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2 - b_2}$, где $\alpha \in \mathcal{S}(f)$. f и $f^{(k)}$ делят (a_1, a_2) , (b_1, b_2) ИМ и $N(r, f) = S(r, f)$, отсюда следует, что $N(r, \psi) = S(r, f)$. Теперь, используя леммы 2.1 и 2.4 для (2.2), мы получаем

$$\begin{aligned} T(r, \psi) &= m(r, \psi) + S(r, f) \\ &= m\left(r, \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - \alpha)}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)} \left((a_2 - b_2) \frac{f - \beta_1}{f^{(k)} - \alpha} - (a_1 - b_1) \right) \right) \\ &\leq m\left(r, \frac{\Delta(f^{(k)})(f^{(k)} - \alpha)}{(f^{(k)} - a_2)(f^{(k)} - b_2)}\right) + m\left(r, (a_2 - b_2) \frac{f - \beta_1}{f^{(k)} - \alpha} - (a_1 - b_1)\right) \\ &\leq m\left(r, \frac{f - \beta_1}{f^{(k)} - \alpha}\right) + S(r, f) \\ &= m\left(r, \frac{f^{(k)} - \alpha}{f - \beta_1}\right) + N\left(r, \frac{f^{(k)} - \alpha}{f - \beta_1}\right) - N\left(r, \frac{f - \beta_1}{f^{(k)} - \alpha}\right) + S(r, f) \\ &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)} - \beta_1^{(k)}}{f - \beta_1}\right) + m\left(r, \frac{\beta_1^{(k)} - \alpha}{f - \beta_1}\right) + N(r, f^{(k)} - \alpha) + N(r, 0; f - \beta_1) \\ &\quad - N(r, f - \beta_1) - N(r, 0; f^{(k)} - \alpha) + S(r, f) \\ &\leq m(r, \beta_1; f) + N(r, \beta_1; f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f) \\ &= T(r, f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f), \end{aligned}$$

следовательно,

$$(3.22) \quad T(r, \psi) \leq T(r, f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f).$$

Пусть

$$(3.23) \quad \varphi_1 = \frac{L(f, f^{(k)})}{(f - a_1)(f - b_1)} = \frac{(a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2)}{(f - a_1)(f - b_1)}.$$

Поскольку $L(f, f^{(k)}) \not\equiv 0$, имеем $\varphi_1 \not\equiv 0$. Мы утверждаем, что $\varphi_1 \notin \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если предположим, что $\varphi_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, из (3.23) мы получаем

$$(3.24) \quad fP(f) = Q(f),$$

где $P(f) = f$ и $Q(f) = (\varphi_1(a_1 + b_1) + (a_2 - b_2))f - (a_1 - b_1)f^{(k)} + a_1 b_2 - a_2 b_1 - \varphi_1 a_1 b_1$. Поэтому, применяя лемму 2.6 к (3.24), получаем $m(\cdot, f) = S(r, f)$ и, следовательно, $T(r, f) = S(r, f)$, что невозможно. Следовательно, $\varphi_1 \notin \mathbb{C}$.

Пусть

$$(3.25) \quad \phi_1 = \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}.$$

Очевидно, что $\phi_1 \not\equiv 0$. Пусть $z_{1,q} \in S_{(1,q)}(a_1, a_2)$ такой, что $a_i(z_{1,q}) - b_i(z_{1,q}) \neq 0, \infty$ для $i = 1, 2$. Тогда $z_{1,q}$ является нулем $(a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2)$. Следовательно, $\varphi_1(z_{1,q}) \neq \infty$. Аналогично, если $\hat{z}_{1,q} \in S_{(1,q)}(b_1, b_2)$ такой, что $a_i(\hat{z}_{1,q}) - b_i(\hat{z}_{1,q}) \neq 0, \infty$, тогда $\varphi_1(\hat{z}_{1,q}) \neq \infty$. Теперь из (2.6), (2.7) и (3.21) мы заключаем, что $\overline{N}(r, 0; \varphi_1) + \overline{N}(r, \varphi_1) = S(r, f)$. Тогда из (3.25) получаем $T(r, \phi_1) = S(r, f)$, т. е. $\phi_1 \in \mathcal{S}(f)$. Теперь, проводя логарифмическое дифференцирование (3.23), мы получаем

$$(3.26) \quad \phi_1 = \frac{L'(f, f^{(k)})}{L(f, f^{(k)})} - \frac{f' - a_1'}{f - a_1} - \frac{f' - b_1'}{f - b_1}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} L(f, f^{(k)}) &= (a_2 - b_2)(f - a_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - a_2) \\ &= (a_2 - b_2)(f - b_1) - (a_1 - b_1)(f^{(k)} - b_2), \end{aligned}$$

из (3.26) получаем

$$\begin{aligned} (3.27) \quad & (a_2 - b_2)\phi_1(f - a_1)^2(f - b_1) - (a_1 - b_1)\phi_1(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k)} - a_2) \\ &= (a_2' - b_2')(f - a_1)^2(f - b_1) - (a_1' - b_1')(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k)} - a_2) \\ &- (a_1 - b_1)(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k+1)} - a_2') + (a_1 - b_1)(f' - a_1')(f - b_1)(f^{(k)} - a_2) \\ &- (a_2 - b_2)(f - a_1)^2(f' - b_1') + (a_1 - b_1)(f' - a_1')(f - b_1)(f^{(k)} - a_2) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (3.28) \quad & (a_2 - b_2)\phi_1(f - a_1)(f - b_1)^2 - (a_1 - b_1)\phi_1(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k)} - b_2) \\ &= (a_2' - b_2')(f - a_1)(f - b_1)^2 - (a_1' - b_1')(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k)} - b_2) \\ &- (a_1 - b_1)(f - a_1)(f - b_1)(f^{(k+1)} - b_2') + (a_1 - b_1)(f' - a_1')(f - b_1)(f^{(k)} - b_2) \\ &- (a_2 - b_2)(f - b_1)^2(f' - a_1') + (a_1 - b_1)(f' - a_1')(f - b_1)(f^{(k)} - b_2). \end{aligned}$$

Пусть $z_{1,q} \in S_{(1,q)}(a_1, a_2)$ ($q \geq 3$) такая, что $a_i(z_{1,q}) - b_i(z_{1,q}) \neq 0, \infty$ и $a_i'(z_{1,q}) - b_i'(z_{1,q}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Очевидно, что $\Delta(f(z_{1,q})) \neq 0$ и, следовательно, из (3.7) заключаем, что $z_{1,q}$ является нулем $f' - b_1'$ кратности $q - 1$. Затем из (3.27) мы видим, что $z_{1,q}$ должен быть нулем ϕ_1 . Поскольку $\phi_1 \not\equiv 0$, получаем

$$\sum_{q \geq 3} \overline{N}_{(1,q)}(r, a_1; f) \leq N(r, 0; \phi_1) \leq S(r, f)$$

и поэтому из (2.6) мы можем легко заключить, что

$$(3.29) \quad \overline{N}_{(3)}(r, a_2; f^{(k)}) = S(r, f).$$

Пусть $\hat{z}_{1,q} \in S_{(1,q)}(b_1, b_2)$ ($q \geq 3$) такая, что $a_i(\hat{z}_{1,q}) - b_i(\hat{z}_{1,q}) \neq 0, \infty$ и $a_i'(\hat{z}_{1,q}) - b_i'(\hat{z}_{1,q}) \neq 0$ для $i = 1, 2$. Очевидно, что $\Delta(f(\hat{z}_{1,q})) \neq 0$ и, следовательно, из (3.7)

мы видим, что $\hat{z}_{1,q}$ — нуль $f' - a'_1$ кратности $q - 1$. Тогда (3.28) дает $\phi_1(\hat{z}_{1,q}) = 0$ и, следовательно, $\sum_{q \geq 3} \bar{N}_{(1,q)}(r, b_1; f) \leq S(r, f)$ и с учетом (2.6), мы получаем

$$(3.30) \quad \bar{N}_{(3)}(r, b_2; f^{(k)}) = S(r, f).$$

Следовательно, из (2.5), (3.21), (3.29) и (3.30) имеем

$$(3.31) \quad \begin{aligned} T(r, f) &= \bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) \\ &+ \bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Теперь из (2.1) и (2.2) получаем

$$(3.32) \quad \begin{aligned} H_{11} &= \phi - \psi \\ &= L(f, f^{(k)}) \left[\left(\frac{f' - b'_1}{f - b_1} - \frac{f^{(k+1)} - b'_2}{f^{(k)} - b_2} \right) - \left(\frac{f' - a'_1}{f - a_1} - \frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если $H_{11} \equiv 0$, то сразу $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$ и, следовательно, по лемме 2.5, получим $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно. Следовательно, $H_{11} \not\equiv 0$.

Пусть $z_{1,1} \in S_{(1,1)}(a_1, a_2) \cup S_{(1,1)}(b_1, b_2)$. Легко получить, что $H_{11}(z_{1,1}) = 0$. Поскольку $T(r, \phi) = S(r, f)$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) &\leq N(r, 0; H_{11}) + S(r, f) \\ &\leq T(r, H_{11}) + S(r, f) \leq T(r, \psi) + S(r, f) \end{aligned}$$

и поэтому из (3.22) получаем

$$(3.33) \quad \bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) \leq T(r, f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f),$$

где $\alpha \in \mathcal{S}(f)$ произвольно. Следовательно, из (3.31) и (3.33) имеем

$$(3.34) \quad \bar{N}(r, \alpha; f^{(k)}) \leq \bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Пусть $\alpha = a_2$. Поскольку

$$\bar{N}(r, a_2; f^{(k)}) = \bar{N}(r, a_1; f) = \bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + S(r, f),$$

из (3.34) получаем $\bar{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) \leq \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f)$. Опять же, если мы возьмем $\alpha = b_2$, то из (3.34) получим $\bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) \leq \bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + S(r, f)$. Следовательно, из (3.31) имеем

$$(3.35) \quad T(r, f) \leq 2(\bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f)) + S(r, f).$$

Если $\bar{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) + \bar{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) = S(r, f)$, то из (3.21) выводим, что $\bar{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) = S(r, f)$ и, следовательно, из (3.35) получаем противоречие:

$$\bar{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) + \bar{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) \neq S(r, f).$$

Теперь разделим следующие три подслучая.

Подслучай 2.1.1. Пусть $\bar{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) = S(r, f)$ и $\bar{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) \neq S(r, f)$. В этом случае из (3.21) мы заключаем, что

$$(3.36) \quad \bar{N}(r, a_1; f) = N_{(1,1)}(r, a_1; f) + S(r, f).$$

Если $H \equiv 0$, то из (2.4) получаем $\frac{f-a_1}{f-b_1} \equiv c_2 \frac{f^{(k)}-a_2}{f^{(k)}-b_2}$, где $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и, следовательно, по лемме 2.2 получаем $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Теперь по лемме 2.5

имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно. Следовательно, $H \neq 0$. Легко проверить, что $m(r, H) = S(r, f)$ и $N(r, H) = \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f)$. Поэтому

$$(3.37) \quad T(r, H) = m(r, H) + N(r, H) = \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Теперь из (2.5) имеем $T(r, f) = m(r, L(f, f^{(k)})) + S(r, f)$. Следовательно, из (2.1), (2.2), (3.22) и (3.37) имеем

$$\begin{aligned} T(r, f) = m\left(r, \frac{\phi - \psi}{H}\right) + S(r, f) &= T\left(r, \frac{H}{\phi - \psi}\right) + S(r, f) \\ &\leq T(r, \psi) + T(r, H) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f) \end{aligned}$$

и так,

$$(3.38) \quad N(r, \alpha; f^{(k)}) \leq \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Пусть $\alpha = b_2$. Тогда из (3.38) имеем

$$(3.39) \quad \overline{N}(r, b_2; f^{(k)}) \leq \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Поскольку f и $f^{(k)}$ делят (b_1, b_2) ИМ, из (2.6) и (3.21) получаем

$$\overline{N}(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f) = \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f) = \sum_{i=1}^2 \overline{N}_{(1,i)}(r, b_1; f) + S(r, f)$$

и поэтому из (3.39) получаем $\overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) = S(r, f)$. Пусть

$$(3.40) \quad G_1 = \frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} - \frac{f' - a'_1}{f - a_1} - \frac{b'_2 - a'_2}{b_1 - a_2}.$$

Очевидно, что $G_1 \neq 0$. Из (3.36) следует, что $N(r, G_1) = S(r, f)$. Поскольку $m(r, G_1) = S(r, f)$, имеем $G_1 \in \mathcal{S}(f)$. Пусть $\hat{z}_{1,2} \in S_{(1,2)}(b_1, b_2)$ такая, что

$$a_i(\hat{z}_{1,2}) - b_i(\hat{z}_{1,2}) \neq 0, \infty, \quad a'_i(\hat{z}_{1,2}) - b'_i(\hat{z}_{1,2}) \neq 0$$

для $i = 1, 2$ и $\phi(\hat{z}_{1,2}) \neq 0, \infty$. Тогда $f^{(k)}(\hat{z}_{1,2}) = b_2(\hat{z}_{1,2})$ и $f^{(k+1)}(\hat{z}_{1,2}) = b'_2(\hat{z}_{1,2})$. Также из (3.7) можно легко заключить, что $\hat{z}_{1,2}$ является простым нулем $f' - a'_1$, т.е. $f'(\hat{z}_{1,2}) = a'_1(\hat{z}_{1,2})$.

Теперь из (3.40) мы видим, что $G_1(\hat{z}_{1,2}) = 0$ и $\overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \leq N(r, 0; G_1) + S(r, f) \leq S(r, f)$. Следовательно, $\overline{N}_{(2)}(r, b_1; f) = S(r, f)$, что невозможно.

Подслучай 2.1.2. Пусть $\overline{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) \neq S(r, f)$ и $\overline{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) = S(r, f)$. Теперь, действуя так же, как это было сделано при доказательстве подслучая 2.1.1, получаем противоречие.

Подслучай 2.1.3. Предположим, $\overline{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) \neq S(r, f)$ и $\overline{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) \neq S(r, f)$. Обратите внимание, что

$$\begin{aligned} H_{21} &= 2\phi - \psi \\ (3.41) \quad &= L(f, f^{(k)}) \left[\left(2 \frac{f' - b'_1}{f - b_1} - \frac{f^{(k+1)} - b'_2}{f^{(k)} - b_2} \right) - \left(2 \frac{f' - a'_1}{f - a_1} - \frac{f^{(k+1)} - a'_2}{f^{(k)} - a_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что $H_{21} \neq 0$. Если нет, предположим, что $H_{21} \equiv 0$. При интегрировании получаем $\left(\frac{f-a_1}{f-b_1}\right)^2 = c_1 \frac{f^{(k)}-a_2}{f^{(k)}-b_2}$, где $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Теперь, используя

лемму 2.2, получаем $2T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$. Поскольку $N(r, f) = S(r, f)$, имеем $T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f) + S(r, f)$. Следовательно, имеем $T(r, f) = S(r, f)$, что невозможно. Следовательно, $H_{21} \neq 0$.

Пусть $z_{1,2} \in S_{(1,2)}(a_1, a_2) \cup S_{(1,2)}(b_1, b_2)$. Очевидно, $H_{21}(z_{1,2}) = 0$ и, следовательно, из (3.41) получаем

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) &\leq N(r, 0; H_{21}) + S(r, f) \\ &\leq T(r, H_{21}) + S(r, f) \leq T(r, \psi) + S(r, f). \end{aligned}$$

Теперь из (3.22) и (3.42) мы получаем

$$(3.43) \quad \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \leq T(r, f) - N(r, \alpha; f^{(k)}) + S(r, f),$$

где $\alpha \in \mathcal{S}(f)$ произвольно. В частности, из (3.43) мы имеем

$$(3.44) \quad \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \leq T(r, f) - N(r, a_2; f^{(k)}) + S(r, f),$$

$$(3.45) \quad \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \leq T(r, f) - N(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f).$$

Сложив (3.44) и (3.45), получим

$$(3.46) \quad \begin{aligned} &2(\overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f)) \\ &\leq 2T(r, f) - N(r, a_2; f^{(k)}) - N(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f). \end{aligned}$$

Теперь, используя (3.35), из (3.46) мы получаем

$$(3.47) \quad N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_2; f^{(k)}) \leq T(r, f) + S(r, f).$$

Опять же из (3.35) и (3.47) получаем

$$(3.48) \quad \begin{aligned} &N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_2; f^{(k)}) \\ &\leq 2(\overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f)) + S(r, f). \end{aligned}$$

Обратите внимание, что

$$\begin{aligned} &\overline{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + 2\overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + 2\overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) \\ &\leq N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f) \end{aligned}$$

и поэтому из (3.48) получаем $\overline{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) = S(r, f)$.

Мы знаем, что $T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f) + S(r, f)$. Следовательно, из (3.31) получаем

$$\begin{aligned} T(r, f) &= \overline{N}_{(1,2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,2)}(r, b_1; f) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N}_{(2)}(r, a_2; f^{(k)}) + \overline{N}_{(2)}(r, b_2; f^{(k)}) + S(r, f) \\ &\leq \frac{1}{2}(N(r, a_2; f^{(k)}) + N(r, b_2; f^{(k)})) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f^{(k)}) + S(r, f) \leq T(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

т.е. $T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f)$ и поэтому по лемме 2.5 имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$, что невозможно.

Подслучай 2.2. Пусть $k = 1$. Тогда из (2.6) имеем

$$(3.49) \quad \overline{N}(r, 0; f - a_1, f' - a_2 \mid \geq 2) + \overline{N}(r, 0; f - b_1, f' - b_2 \mid \geq 2) = S(r, f).$$

Теперь мы рассмотрим следующие три подслучая.

Подслучай 2.2.1. Пусть $a'_1 \neq a_2$ и $b'_1 \neq b_2$. Поскольку f и f' имеют общие (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, кратные нули $f - a_1$ и $f - b_1$ являются нулями $a'_1 - a_2$ и $b'_1 - b_2$ соответственно. Поэтому

$$(3.50) \quad \begin{aligned} & \overline{N}_{(2)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(2)}(r, b_1; f) \\ &= \sum_{p \geq 2, q \geq 1} (\overline{N}_{(p,q)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(p,q)}(r, b_1; f)) = S(r, f). \end{aligned}$$

Пусть $z_{1,p} \in S_{(1,p)}(a_1, a_2)$ ($p \geq 2$) такой, что $a_i(z_{1,p}) - b_i(z_{1,p}) \neq 0, \infty$. Очевидно, $f'(z_{1,p}) = a_2(z_{1,p})$. Также из (3.7) мы видим, что $z_{1,p}$ является нулем $f' - b'_1$, т.е. $f'(z_{1,p}) = b'_1(z_{1,p})$. Итак, $a_2(z_{1,p}) = b'_1(z_{1,p})$. Сначала предположим, что $a_2 \equiv b'_1$. Тогда из (3.7) мы получаем

$$\frac{f' - a'_1}{f - a_1} \equiv \frac{a'_1 - b'_1}{a_1 - b_1} + \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}$$

и поэтому $T(r, f') = T(r, f) + S(r, f)$. Теперь по лемме 2.5 получаем $L(f, f') \equiv 0$, что невозможно.

Далее мы предполагаем $a_2 \not\equiv b'_1$. В этом случае мы легко заключаем, что

$$(3.51) \quad \sum_{p \geq 2} \overline{N}_{(1,p)}(r, a_1; f) + \sum_{p \geq 2} \overline{N}_{(1,p)}(r, b_1; f) = S(r, f).$$

Тогда из (2.5), (3.49)-(3.51) получаем, что

$$T(r, f) = \overline{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + S(r, f)$$

и, таким образом, из (3.33) получаем $N(r, \alpha; f') = S(r, f)$. В частности, имеем $\overline{N}(r, a_2; f') + \overline{N}(r, b_2; f') = S(r, f)$. Поскольку f и f' имеют общие (a_1, a_2) и (b_1, b_2) ИМ, мы имеем $\overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) = S(r, f)$ и, следовательно, $T(r, f) = \overline{N}_{(1,1)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) = S(r, f)$, что невозможно.

Подслучай 2.2.2. Пусть либо $a'_1 \equiv a_2$, либо $b'_1 \equiv b_2$. Без ограничения общности можно считать, что $a'_1 \equiv a_2$ и $b'_1 \neq b_2$. Теперь согласно подслучаю 2.2.1 имеем

$$(3.52) \quad \overline{N}(r, b_1; f) = \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + S(r, f).$$

Обратите внимание, что $f' - a_2 = f' - a'_1$. Поскольку f и f' делят (a_1, a_2) ИМ, из (3.49) получаем

$$(3.53) \quad \sum_{q \geq 1} \overline{N}_{(1,q)}(r, a_1; f) = S(r, f).$$

Следовательно, из (2.5), (3.49), (3.52) и (3.53) получаем

$$(3.54) \quad \begin{aligned} T(r, f) &= \overline{N}(r, a_1; f) + \overline{N}(r, b_1; f) + S(r, f) \\ &= \overline{N}_{(2,1)}(r, a_1; f) + \overline{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Пусть

$$(3.55) \quad G_2 = \frac{f'' - b'_2}{f' - b_2} - \frac{f' - b'_1}{f - b_1} - \frac{a'_2 - b'_2}{a_2 - b_2} + \frac{a'_1 - b'_1}{a_1 - b_1}.$$

Очевидно, $G_2 \neq 0$. Также из (3.54) легко доказать, что $G_2 \in \mathcal{S}(f)$. Пусть $z_{2,1} \in S_{(2,1)}(a_1, a_2)$ такая, что $a_i(z_{2,1}) - b_i(z_{2,1}) \neq 0, \infty$ и $a'_i(z_{2,1}) - b'_i(z_{2,1}) \neq 0$ для

$i = 1, 2$. Тогда $f(z_{2,1}) = a_1(z_{2,1})$, $f'(z_{2,1}) = a_2(z_{2,1})$ и $f''(z_{2,1}) = a'_2(z_{2,1})$. Теперь из (3.55) мы получаем $G_2(z_{2,1}) = 0$ и $\bar{N}_{(2,1)}(r, a_1; f) \leq N(r, 0; G_2) + S(r, f) \leq S(r, f)$. Тогда из (3.54) имеем $T(r, f) = \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) + S(r, f)$ и, следовательно, из (3.33) получаем $N(r, \alpha; f') = S(r, f)$. В частности, имеем $\bar{N}(r, b_2; f') = S(r, f)$. Поскольку f и f' делят (b_1, b_2) ИМ, мы имеем $\bar{N}(r, b_1; f) = S(r, f)$ и, следовательно, $T(r, f) = \bar{N}_{(1,1)}(r, b_1; f) = S(r, f)$, что невозможно.

Подслучай 2.2.3. Пусть $a'_1 \equiv a_2$ и $b'_1 \equiv b_2$. В этом случае мы имеем

$$(3.56) \quad \sum_{q \geq 1} (\bar{N}_{(1,q)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(1,q)}(r, b_1; f)) = S(r, f).$$

Следовательно, из (2.5), (3.49) и (3.56) получаем

$$(3.57) \quad \begin{aligned} T(r, f) &= \bar{N}(r, a_1; f) + \bar{N}(r, b_1; f) + S(r, f) \\ &= \bar{N}_{(2,1)}(r, a_1; f) + \bar{N}_{(2,1)}(r, b_1; f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Положим

$$(3.58) \quad G_3 = 2 \frac{f'' - a'_2}{f' - a_2} - \frac{f' - a'_1}{f - a_1} - 2 \frac{a'_2 - b'_2}{a_2 - b_2} + \frac{a'_1 - b'_1}{a_1 - b_1}.$$

Пусть $\hat{z}_{2,1} \in S_{(2,1)}(b_1, b_2)$ такой, что $a_i(\hat{z}_{2,1}) - b_i(\hat{z}_{2,1}) \neq 0, \infty$ для $i = 1, 2$. Тогда $f(\hat{z}_{2,1}) = b_1(z_{2,1})$, $f'(\hat{z}_{2,1}) = b_2(\hat{z}_{2,1})$ и $f''(\hat{z}_{2,1}) = b'_2(\hat{z}_{2,1})$.

Сначала предположим, что $G_3 \equiv 0$. Затем

$$(3.59) \quad (f' - a_2)^2 = d_0 \frac{(a_2 - b_2)^2}{a_1 - b_1} (f - a_1),$$

где $d_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Теперь из (3.59) мы видим, что

$$(b_2(\hat{z}_{2,1}) - a_2(\hat{z}_{2,1}))^2 = d_0 \frac{(a_2(\hat{z}_{2,1}) - b_2(\hat{z}_{2,1}))^2}{a_1(\hat{z}_{2,1}) - b_1(\hat{z}_{2,1})} (b_1(\hat{z}_{2,1}) - a_1(\hat{z}_{2,1})),$$

откуда следует, что $d_0 = -1$. Следовательно, из (3.59) имеем

$$(3.60) \quad (f' - b_2)(f' + b_2 - 2a_2) = -\frac{(a_2 - b_2)^2}{a_1 - b_1} (f - b_1).$$

Теперь (3.60) показывает, что $\hat{z}_{2,1}$ является нулем $f' + b_2 - 2a_2$, т.е. $a_2(\hat{z}_{2,1}) - b_2(\hat{z}_{2,1}) = 0$, что невозможно.

Далее предположим, что $G_3 \not\equiv 0$. Очевидно, $G_3 \in \mathcal{S}(f)$. Обратите внимание, что $G_3(\hat{z}_{2,1}) = 0$ и поэтому $\bar{N}_{(2,1)}(r, b_1; f) \leq N(r, 0; G_3) \leq S(r, f)$. Наконец, из (3.57) мы имеем $T(r, f) = \bar{N}_{(2,1)}(r, a_1; f) + S(r, f) \leq \frac{1}{2}T(r, f) + S(r, f)$, что невозможно.

Случай 2. Пусть $\phi \equiv 0$. Поскольку $\Delta(f) \not\equiv 0$, имеем $L(f, f^{(k)}) \equiv 0$. Это завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Если a_1, a_2, b_1, b_2 константы, то $a'_1 - a'_2 = 0$ и $a'_2 - b'_2 = 0$. Теперь если $\phi \equiv (a'_1 - a'_2)(a_2 - b_2)$, то сразу $\phi \equiv 0$. Поэтому если следовать доказательству теоремы 1.2, то подслучай 1.2 не встречается в доказательстве теоремы 1.1. Следовательно, нам не придется сталкиваться с какими-либо трудностями при доказательстве теоремы 1.1. $\square$

4. Заключительное замечание

Очевидно, что теорема 1.2 является улучшением теоремы В. Но наш метод не работает, если $\frac{(a'_1-b'_1)(a_2-b_2)}{a_1-b_1}$ константа, когда $k \geq 2$. Поэтому мы считаем этот вопрос открытым.

Вопрос: Можно ли представить теорему 1.2 без условия “ $\frac{(a'_1-b'_1)(a_2-b_2)}{a_1-b_1}$ непостоянной, когда $k \geq 2$ ” ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] X. Huang, B. Deng and M. Fang, “Entire functions that share two pairs of small functions”, *Open Mathematics*, **19** (1), 144 – 156 (2021).
- [2] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford (1964).
- [3] C. C. Yang and H. X. Yi, “Uniqueness theory of meromorphic functions”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (2003).
- [4] L. A. Rubel and C. C. Yang, “Values shared by an entire function and its derivative”, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, **599**, 101 – 103 (1977).
- [5] J. H. Zheng and S. P. Wang, “On unicity properties of meromorphic functions and their derivatives”, *Adv. in Math. (China)*, **21** (3), 334 – 341 (1992).
- [6] P. Li and C. C. Yang, “Value sharing of an entire function and its derivatives”, *J. Math. Soc. Japan*, **51** (4), 781 – 799 (1999).
- [7] A. Z. Mohon'ko, “On the Nevanlinna characteristics of some meromorphic functions”, *Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications*, **14**, 83 – 87 (1971).
- [8] L. Yang, *Value Distribution Theory*, Springer-Verlag, New York (1993).
- [9] J. Clunie, “On integral and meromorphic functions”, *J. London Math. Soc.*, **37**, 17 – 22 (1962).

Поступила 09 сентября 2023

После доработки 06 февраля 2024

Принята к публикации 11 февраля 2024