Известия НАН Армении, Математика, том 59, н. 5, 2024, стр. 29 – 45.

СРАВНЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Институт математики Национальной Академии Наук Армении
Российско - Армянский Университет[1]
E-mails: *haikghazaryan@mail.ru; vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. В работе описано множество многочленов, которые имеют меньшую мощность чем данный многочлен из определённого класса.

MSC2020 number: 12E10; 26C05; 35A23.

Ключевые слова: мощность многочлена; вырожденный многочлен; сравнение многочленов; многогранник Ньютона.

1. Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ оба n- мерные евклидовы пространства точек (векторов) $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ соответственно, $\mathbb{R}^{n,+} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j \geq 0,\ j = 1, ..., n\}$, $\mathbb{R}^{n,\,0} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1 ... \xi_n \neq 0\}$. Через $\mathbb{N}$ мы обозначим множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а через $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times ... \times \mathbb{N}_0$ множество всех $n-$мерных мультииндексов, т.е. множество всех точек с целыми неотрицательными координатами $\{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\ (i = 1, ..., n)\}$.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n :\ \lambda_j > 0\ (j = 1, ..., n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $t > 0$ обозначим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\xi, \lambda| = \sqrt{\xi_1^{2/\lambda_1} + ... + \xi_n^{2/\lambda_n}}$, $|\alpha\,| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $t^\lambda := (t^{\lambda_1}, ..., t^{\lambda_n})$, $t^\lambda\,\xi := (t^{\lambda_1}\,\xi_1, ..., t^{\lambda_n}\,\xi_1)$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{1}{i}\,\partial/\partial x_j$ или $D_j = \partial/\partial \xi_j\ \ (j = 1, ...n)$.

Пусть $\mathcal{A} = \{\nu^1, ..., \nu^N\}$ конечный набор точек из $\mathbb{R}^{n,+}$. Многогранником Ньютона набора $\mathcal{A}$ назовём наименьший выпуклый многогранник $\Re(\mathcal{A})$, содержащий все точки множества $\{\mathcal{A} \cup \{0\}\}$ (см., например, [1]). Многогранник $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется полным (см. [2] или [3]), если $\Re$ имеет вершину в начале координат $\mathbb{R}^{n,+}$ и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат.

[1]Исследование выполнено в рамках тематического финансирования РАУ из средтв МОБНРФ.

$k-$мерные грани многогранника $\Re$ обозначим через $\Re_i^k$ $(i = 1, ..., M_k^{'}, k = 0, 1, ..., n-1)$. Грани многогранника Ньютона будем, по определению, считать замкнутыми множествами.

Единичный вектор λ называется внешней нормалью (или $\Re-$ нормалью) грани Γ многогранника $\Re$, если 1) для произвольных α и β из Γ $(\lambda, \alpha) = (\lambda, \beta)$, 2) для произвольных $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in \Re(P) \setminus \Gamma$ $(\lambda, \alpha) > (\lambda, \beta)$. Другими словами $\Re-$ нормаль $k-$ мерной грани Γ многогранника $\Re$, $(0 \leq k \leq n-1)$ это единичная внешняя нормаль гиперплоскости, опорной к многограннику $\Re$, содержащей грань Γ и не содежащей какую - либо грань $\Re$, размерности больше чем k.

Таким образом, данный вектор λ может служить внешней нормалью одной и только одной грани многогранника $\Re$.

Обозначим через Λ_i^k множество внешных нормалей грани $\Re_i^k$ $(i = 1, ..., M_k^{'}, k = 0, 1, ..., n-1)$. Отметим, что или множество Λ_i^k состоит из одного вектора (когда $k = n-1$), или является открытым множеством (когда $0 \leq k < n-1$).

Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda_i^k$ $(1 \leq i \leq M_k^{'}, 0 \leq k \leq n-1)$ существует число $d = d_{i,k} = d_{i,k}(\lambda) \geq 0$ такое, что $(\lambda, \alpha) = d$ для всех $\alpha \in \Re_i^k$, и $(\lambda, \alpha) < d$ для любого $\alpha \in \Re \setminus \Re_i^k$. Более того, $\Re-$нормаль $(n-1)-$мерной (и только $(n-1)-$мерной) грани $\Re_i^{n-1}$ многогранника $\Re$ и число $d_{i,n-1}(\lambda)$ $(1 \leq i \leq M_{n-1}^{'})$ определяются однозначно.

Грань $\Re_i^k$ $(1 \leq i \leq M_k^{'}; 0 \leq k \leq n-1)$ многогранника $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется главной (см. [2]), если среди её внешних нормалей сушествует нормаль хотя бы одна координата которой положительна.

Пусть $P(D) = P(D_1, ..., D_n) = \sum_\beta \gamma_\beta D^\beta$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $P(\xi) = \sum_\beta \gamma_\beta \xi^\beta$ его символ (характеристический многочлен), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) := \{\beta \in \mathbb{N}_0^n; \gamma_\beta \neq 0\}$. Многогранник Ньютона множества точек $\{(P) \cup (0)\}$ назовём многогранником Ньютона оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) и обозначим через $\Re(P)$.

Многочлен $P^{i,k}(\xi) := \sum\limits_{\alpha \in \Re_i^k(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ $(1 \leq i \leq M_k^{'}; 0 \leq k \leq n-1)$ назовём подмногочленом многочлена $P(\xi)$, отвечающим грани $\Re_i^k(P)$ многогранника $\Re(P)$. В работе [2] доказано, что подмногочлен $P^{i,k}$ является $\lambda-$однородным (обобщённо - однородным) для любого вектора $\lambda \in \Lambda_i^k$, т.е. существует число

$d = d(\lambda) = d_{i,k}(\lambda)$ такое, что $P^{i,k}(t^{\lambda}\,\xi) = P^{i,k}(t^{\lambda_1}\,\xi_1, ..., t^{\lambda_n}\,\xi_n) = t^d\,P^{i,k}(\xi)$ для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1.1. *(см. [2]) Грань $\Re_i^k = \Re_i^k(P)$ $(1 \le i \le M_k^{'}; 0 \le k \le n-1)$ многогранника $\Re(P)$ называется невырожденной, если $P^{i,k}(\xi) \neq 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^{n,0}$. Многочлен P называется невырожденным, если невырождены все главные грани его многогранника Ньютона $\Re(P)$.*

Определение 1.2. *(см. [4]) Говорят, что оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) мощнее оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$) и записывают $Q < P$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $|Q(\xi)| \le c\,[P(\xi)| + 1]$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.*

Замечание 1.1. *Известно (см. [2] и [5] Лемма 1.1), что многочлен $P(\xi)$ с полным многогранником Ньютона $\Re(P)$ является невырожденным тогда и только тогда, когда существует постоянная $c > 0$ такая, что* $\sum_{\alpha \in \Re(P)} |\xi^{\alpha}| \le c\,[|P(\xi)| + 1]$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что если многочлен P невырожден, то соотношение $Q < P$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Re(Q) \subset \Re(P)$.

Замечание 1.2. *Отметим, что условие $\Re(Q) \subset \Re(P)$ является необходимым для выполнения соотношения $Q < P$ независимо от вырожденности или невырожденности многочлена P с которым сравниваются многочлены $\{Q\}$.* В самом деле, пусть $\Re(Q) \not\subset \Re(P)$ для сравнимых многочленов P и Q. Тогда, очевидно, существует вершина $\nu \neq 0$ многогранника $\Re(Q)$, не принадлежащая многограннику $\Re(P)$. Пусть λ какая - нибудь внешняя нормаль вершины ν многогранника $\Re(Q)$ и $(\lambda, \alpha) = d$ уравнение опорной к $\Re(Q)$ гиперплоскости, проходящей через точку ν и не содержащей ни одной точки множества $\Re(Q) \cup \Re(P)$, отличной от ν. Тогда $d > 0$, $(\lambda, \nu) > (\lambda, \alpha)$ для всех $\alpha \in \Re(Q) \cup \Re(P)$, $\alpha \neq \nu$.

Пусть $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ и $\xi^s = s^{\lambda}\,\eta$ $(s = 1.2....)$, тогда при $s \to \infty$ $Q(\xi^s) = s^d\,\eta^{\nu}(1 + o(1))$, $P(\xi^s) = o(s^d)$. Так как $\eta^{\nu} \neq 0$, то это означает, что $Q \not< P$.

Из приведённых замечаний следует, что при сравнении мощности многочленов $\{Q\}$ с заданным многочленом P интерес представляет только случай, когда многочлен P является вырожденным и $\Re(Q) \subset \Re(P)$.

Введём понятие $k-$слойного вырождающегося многочлена P, при этом будем предполагать, что все главные грани многогранник $\Re(P)$ невырождены, кроме одной $(n-1)-$мерной главной грани $\mathit{\Gamma} = \Re_{i_0}^{n-1}(P)$ $(1 \le i_0 \le M_{n-1})$ с внешней нормалью $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$. Представим многочлен P в виде суммы

$\mu-$ однородных многочленов

$$P(\xi)=\sum_{j=0}^{M(\mu)}P_j(\xi)=\sum_{j=0}^{M(\mu)}P_{d_j(\lambda)}(\xi)=\sum_{j=0}^{M(\mu)}\sum_{(\lambda,\alpha)=d_j(\lambda)}\gamma_\alpha\,\xi^\alpha. \tag{1.1}$$

Определение 1.3. *Для $\mu-$однородного многочлена P_0 обозначим $\Sigma(P_0):=\{\eta\in\mathbb{R}^{n,0},R(\eta)=0\}$. Многочлен P вида (1.1) назовём $r=r(\eta)-$**слойным** $(1\le r(\eta)-1\le M(\mu))$ **относительно точки** $\eta\in\Sigma(P_0)$, если $P_0(\eta)=P_1(\eta)=...=P_{r-2}(\eta)=0$, а $P_{r-1}(\eta)\neq 0$ и назовём $k=k(P)-$**слойным**, где $k(P):=$* $\max_{\eta\in\Sigma(P_0)} r(\eta)$.

2. Вспомогательные предложения

Ниже всюду $d_0>d_1>d_2\ge 0$ и $\kappa>0$. При $\rho\in[d_2,d_0]$ обозначим

$$\Psi_\kappa^1=\{(y,u):y\in\mathbb{R}^1,u\ge 0,\,|y|\le\kappa\,u^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)}\}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Для всех $(y,u)\in\Psi_\kappa^1$ выполняется неравенство*

$$x^\rho\,|y|\le\kappa\,(x^{d_0}\,u+x^{d_1}\,v+x^{d_2})\ \ \forall x>0,v\ge 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Так как утверждение леммы при $\rho=d_0$ и $\rho=d_2$ очевидно (см. определение множества Ψ_κ^1), то пусть $\rho\in(d_2,d_0)$.

Обозначим $p:=(d_0-d_2)/(\rho-d_2)$ и $q:=\frac{p}{p-1}=\frac{d_0-d_2}{d_0-\rho}$. Учитывая, что $p>1$ и $\rho=d_0\,(\rho-d_2)/(d_0-d_2)\ +d_2\,(d_0-\rho)/(d_0-d_2)$, в силу определения множества Ψ_κ^1 (см. (2.1)) и неравенства Гёльдера имеем

$$x^\rho\,|y|\le\kappa\,x^\rho\,u^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)}=\kappa\,(x^{d_0}\,u)^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)}\,(x^{d_2})^{(d_0-\rho)/(d_0-d_2)}$$
$$\le\kappa\,(\frac{1}{p}x^{d_0}\,u+\frac{1}{q}x^{d_2})\le\kappa\,(x^{d_0}\,u+x^{d_1}\,v+x^{d_2}),$$

что доказывает лемму. □

При $\rho\in[d_2,d_1]$ обозначим

$$\Psi_\kappa^2:=\{(y,v):y\in\mathbb{R}^1,v\ge 0,\,|y|\le\kappa\,v^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)}\}. \tag{2.3}$$

Лемма 2.2 *При любых $x>0$ и $u\ge 0$ выполняется неравенство* (2.2) для всех $(y,v)\in\Psi_\kappa^2$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.1.

При $\rho\in[d_1,d_0],u\ge 0,v\ge 0$ обозначим

$$\Psi_\kappa^3:=\{(y,u,v):y\in\mathbb{R}^1,|y|\le\kappa u^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)}\,v^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)}\}. \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. *Для всех $(y,u,v)\in\Psi_\kappa^3$ выполняется оценка (2.2) при всех $x>0$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.1.

При $\rho \in [d_2, d_0]$ обозначим

$$\Psi^4_\kappa := \{(y,u,v) : y \in \mathbb{R}^1, u, v \in [0,1];\ x^\rho |y| \leq \kappa\,[x^{d_0}\,u + x^{d_1}\,v + x^{d_2}]\ \ \forall x \geq 1\}.$$

Лемма 2.4 *Пусть* $\rho \in [d_2, d_1]$. *Тогда для любого* $\kappa > 0$ *существует постоянная* $c = c(\kappa) > 0$ *такая, что для всех троек* $(y,u,v) \in \Psi^4_\kappa$ *выполняется оценка*

$$|y| \leq c\,[u^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} + v^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)}]. \tag{2.5}$$

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях леммы, существуют число $\kappa > 0$ и последовательность $\{y_s, u_s, v_s\} \in\ \Psi^4_\kappa,\ \ u_s\,v_s \neq 0\ (s = 1, 2, ...)$, для которых при $s \to \infty$

$$\theta_s := |y_s| / [u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} + v_s^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)}] \to \infty, \tag{2.6}$$

в то время, как для любого $x \geq 1$

$$x^\rho\,|y_s| \leq \kappa\,[x^{d_0}\,u_s + x^{d_1}\,v_s + x^{d_2}]\ \ s = 1, 2, ... \cdot \tag{2.7}$$

Множество натуральных чисел представим в виде объединения двух множеств: $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, так, что

$$1)\ u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} > v_s^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)}\ \ \forall s \in \mathbb{N}_1,$$

$$2)\ u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} \leq v_s^{(\rho-d_2)/(d_1-d_2)}\ \ \forall s \in \mathbb{N}_2.$$

Или, что то же самое,

$$1')\ u_s^{\frac{d_1-d_2}{d_0-d_2}} > v_s\ \ \forall s \in \mathbb{N}_1,\ \ 2')\ u_s^{\frac{d_1-d_2}{d_0-d_2}} \leq v_s\ \ \forall s \in \mathbb{N}_2.$$

Отметим, что при таком представлении множества $\mathbb{N}$, либо оба множества $\mathbb{N}_1$ и $\mathbb{N}_2$ состоят из бесконечного множества чисел, либо какое - нибудь из них состоит из конечного множества. В последнем случае, за счет выбора подпоследовательности, можно игнорировать элементы рассматриваемой последовательности, индексы которых принадлежат ограниченному множеству. Таким образом, достаточно рассматривать только случай, когда оба множества бесконечны и по отдельности рассматвывать каждый случай.

Рассмотрим случай, когда $s \in \mathbb{N}_1$. Так как в этом случае $u_s \in (0,1]$, то в силу условия $d_0 > d_2$ получаем, что $x_s := u_s^{-1/(d_0-d_2)} \geq 1\ \ s \in N_1\cdot$ А по определению чисел $\{\theta_s\}$ и $\{x_s\}$ имеем в этом случае

$$x_s^\rho\,|y_s| \geq \theta_s\,x_s^\rho\,u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} = \theta_s\,x_s^{\rho-(\rho-d_2)} = \theta_s\,x_s^{d_2},\ \ s \in N_1\cdot \tag{2.8}$$

Для слагаемых правой части неравенства (2.7) имеем при $x = x_s$ для всех $s \in N_1$

$$(2.9') \qquad x_s^{d_0}\, u_s = x_s^{d_0}\, x_s^{-(d_0-d_2)} = x_s^{d_2},$$

$$(2.9'') \qquad x_s^{d_1}\, v_s \le x_s^{d_1}\, u_s^{(d_1-d_2)/(d_0-d_2)} = x_s^{d_1-(d_1-d_2)} = x_s^{d_2}.$$

Так как $\theta_s \to \infty$ при $s \to \infty$, (см. (2.6)), то полученные соотношения (2.8), $(2.9'), (2.9'')$ вместе противоречат соотношению (2.7) и завершают рассмотрение случая 1).

В случае $s \in \mathbb{N}_2$ противоречие с (2.7) получается аналогичным образом, если в качестве $\{x_s\}$ брать $x_s := v_s^{-1/(d_1-d_2)}$. Лемма 2.4 доказана. □

Из лемм 2.1, 2.2 и 2.4 непосредственно следует

Следствие 2.1. *Пусть $d_0 > d_1 > d_2 \ge 0$ и $\rho \in [d_2, d_1]$. Соотношение (2.2) для всех $x \ge 1, u, v \in [0,1)$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение* (2.5). □

Лемма 2.5. *Пусть $\rho \in [d_1, d_0]$. Тогда для любого $\kappa > 0$ существует постоянная $c = c(\kappa) > 0$ такая, что для всех троек $(y, u, v) \in \Psi_\kappa^4$ выполняется оценка*

$$(2.10) \qquad |y| \le c\,[u^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} + u^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)} v^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)}].$$

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях леммы существуют число $\kappa > 0$ и последовательность $\{y_s, u_s, v_s\} \in \Psi_\kappa^4$ (при этом, не умаляя общности, можно считать, что $u_s\, v_s \ne 0 \quad s = 1, 2, ...$), для которых при $s \to \infty$

$$\theta_s := |y_s| / [u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} + u_s^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)}\; v_s^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)}] \to \infty,$$

в то время, как для всех $x \ge 1$

$$(2.11) \qquad x^\rho\, |y_s| \le \kappa\, [x^{d_0}\, u_s + x^{d_1}\, v_s + x^{d_2}] \;\; s = 1, 2, ...\cdot$$

Представим, как при доказательстве предыдущей леммы, множество натуральных чисел в виде объединения двух множеств: $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, так, что

$$1)\; u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} > u_s^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)}\; v_s^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)} \;\; s \in \mathbb{N}_1,$$

$$2)\; u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} \le u_s^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)}\; v_s^{(d_0-\rho)/(d_0-d_1)} \;\; s \in \mathbb{N}_2,$$

Эти соотношения эквивалентны соответственно следующим

$$1')\, u_s^{(d_1-d_2)/(d_0-d_2)} > v_s \;\; s \in \mathbb{N}_1, 2')\, u_s^{(d_1-d_2)/(d_0-d_2)} \le v_s \;\; s \in \mathbb{N}_2.$$

Рассмотрим случай $1^{'}$). Так как $u_s \in (0,1]$ $s=1,2,...,$, то в силу условия $d_0 > d_2$ получаем, что $x_s := u_s^{-1/(d_0-d_2)} \geq 1$ $s=1,2,...\cdot$ Оценим по отдельности обе части соотношения (2.5) при $x = x_s$ $s=1,2,...\cdot$ По определению чисел $\{\theta_s\}$ и $\{x_s\}$ имеем для всех $s=1,2,...$

$$x_s^\rho\,|y_s| \geq \theta_s\, x_s^\rho\, u_s^{(\rho-d_2)/(d_0-d_2)} = \theta_s\, u_s^{-d_0/(d_0-d_2)} = \theta_s\, u_s^{-d_2/(d_0-d_2)},$$

$$x_s^{d_0}\, u_s = u_s^{-d_0/(d_0-d_2)}\, u_s = u_s^{-d_2/(d_0-d_2)}$$

$$x_s^{d_1}\, v_s \leq x_s^{d_1}\, u_s^{(d_1-d_2)/(d_0-d_2)} = u_s^{-d_1/(d_0-d_2)+(d_1-d_2)\,/(d_0-d_2)} = u_s^{-d_2/(d_0-d_2)},$$

$$x_s^{d_2} = u_s^{-d_2/(d_0-d_2)}.$$

Так как $\theta_s \to \infty$ при $s\to\infty$, то полученные соотношения противоречат (2.5).

Рассмотрим случай $2^{'}$). Так как $u_s \in (0,1]$ $s=1,2,...,$, то в этом случае из условия $d_0 > d_1 > d_2$ следует, что $v_s \geq u_s$ $s=1,2,...\cdot$ Следовательно, $x_s := (v_s/u_s)^{1/(d_0-d_1)} \geq 1$ для всех $s=1,2,...\cdot$ Оценим обе части соотношения (2.5) при $x=x_s$ $s=1,2,...\cdot$ Из определения чисел $\{\theta_s\}$ и $\{x_s\}$ имеем для всех $s=1,2,...$

$$x_s^\rho\,|y_s| \geq \theta_s\, x_s^\rho\, u_s^{(\rho-d_1)/(d_0-d_1)}\, v_s^{(d_0-\rho)\,/(d_0-d_1)}$$

$$= \theta_s\, v_s^{\rho/(d_0-d_1)+(d_0-\rho)\,/(d_0-d_1)}\ u_s^{-\rho/(d_0-d_1)+(\rho-d_1)/(d_0-d_1)}$$

$$= \theta_s\, v_s^{d_0/(d_0-d_1)}\, u_s^{-d_1/(d_0-d_1)},$$

$$x_s^{d_0}\, u_s = v_s^{d_0/(d_0-d_1)}\, u_s^{-d_0/(d_0-d_1)+1} = v_s^{d_0/(d_0-d_1)}\, u_s^{-d_1/(d_0-d_1)},$$

$$x_s^{d_1}\, v_s = v_s^{d_1/(d_0-d_1)+1}\, u_s^{-d_1/(d_0-d_1)} = v_s^{d_0/(d_0-d_1)+1}\, u_s^{-d_1/(d_0-d_1)}$$

и, наконец

$$x_s^{d_2} = v_s^{d_2/(d_0-d_1)}\, u_s^{-d_2/(d_0-d_1)} = v_s^{d_0/(d_0-d_1)}\, v_s^{-(d_0-d_2)/(d_0-d_1)}\, u_s^{-d_2/(d_0-d_1)}$$

$$\leq v_s^{d_0/(d_0-d_1)}\, u_s^{-(d_1-d_2)/(d_0-d_1)}\, u_s^{-d_2/(d_0-d_1)} = v_s^{d_0/(d_0-d_1)}\, u_s^{-d_1/(d_0-d_1)}.$$

Так как $\theta_s \to \infty$ при $s\to\infty$, то полученные соотношения противоречат (2.11). □

Следствие 2.2. *Пусть $d_0 > d_1 > d_2 \geq 0$ и $\rho \in (d_1, d_0]$. Для выполнения оценки (2.2) для всех $x \geq 1$ и $u, v \in (0,1)$ необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $\kappa > 0$ выполнялось неравенство $x^\rho\,|y| \leq \kappa\,[x^{d_0}\,u + x^{d_1}\,v + x^{d_2}]$.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 2.1, 2.3 и 2.5.

Лемма 2.6. *Пусть $d_0 > d_1 \geq 0$ и $\rho \in (d_1, d_0]$. Для того, чтобы с некоторой постоянной $c > 0$ и для всех $x \geq 1$, $u, v \in (0,1)$ выполнялась оценка $x^\rho\,|y| \leq c[x^{d_0} u + x^{d_1}]$ необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $\kappa > 0$ выполнялось неравенство $|y| \leq \kappa\, u^{(\rho-d_1)\,(d_0-d_1)}$.*

Доказательство проводится аналогично доказательствам лемм 2.1 и 2.4.

3. Основные пезультаты

Для $\lambda \in \mathbb{R}^{n,0} \cap \mathbb{R}^{n,+}$ и $\lambda-$однородного многочлена R положим $\Sigma(R, \lambda) := \{\eta : \eta \in \mathbb{R}^{n,0}, |\eta, \lambda| = 1, R(\eta) = 0\}$.

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ и $\lambda \in \mathbb{R}^{n,0} \cap \mathbb{R}^{n,+}$. Представим многочлен P по вектору λ в виде суммы $\lambda-$ однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M_P} P_j(\xi) := \sum_{j=0}^{M_P} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{3.1}$$

где $d_0 > d_1 > ... > d_{M_P} \geq 0$.

Через $\mathbb{I}_n^+$ обозначим множество (неотрицательных) многочленов n переменных с вещественными коэффициентами, таких, что $P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. Отметим, что таковыми являются, например, неотрицательные символы гипоэллиптических по Л. Хёрмандеру дифференциальных операторов (см. [7] или [10]).

Замечание 3.1. Из определения множества $\mathbb{I}_n^+$ очевидно следует, что многочлен P из этого множества не может принимать нулевые значения вне некоторого круга $K = K(P)$ с центром в начале координат, т.е вне этого круга принимает значения одинакого знака. Поэтому, при необходимости, умножением на минус единицу и добавлением положительной константы (которые не влияют на мощность многочлена P), далее можем считать, что $P(\xi) > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. После такой обусловленности имеет место следующее предложение, которым мы часто будем пользоваться.

Лемма 3.1. (см. [8] Лемма 1.2) *Пусть $\Re = \Re(P)$ многогранник Ньютона многочлена $P \in \mathbb{I}_n^+$ и $\Re_i^k$ $(i = 1, 2, ..., M_k, k = 0, 1, ..., n-1)-$ его главные грани. Тогда*

a) многогранник $\Re$ полный

b) $P^{i,k}(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, ..., M_k, k = 0, 1, ..., n-1)$

c) пусть пара $(i, k)\,(1 \leq i \leq M_k, 0 \leq k \leq n-1)$, вектор $\lambda \in \Re_i^k$ и точка $\eta \in \Sigma(\Re_i^k, \lambda)$ фиксированы; более того (см. представление (3.1)) $P_j(\eta) = 0$ $(j = 0, 1, ..., l-1)$, $P_l(\eta) \neq 0$ $0 \leq l \leq M_P$. Тогда $d_l > 0$ и $P_l(\eta) > 0$.

Лемма 3.2. *Пусть все главные грани многогранника $\Re(P)$ многочлена $P \in \mathbb{I}_n^+$, за исключением быть может $(n-1)-$мерной грани $\Gamma := \Re_{i_0}^{n-1}$ с внешней* *нормалью* $\lambda \in R^{n,0} \cap R^{n,+}$ *невырождены,* d_0- $\lambda-$ *порядок многочлена* P, *а* Q *некоторый многочлен с* $\lambda-$ *порядком* $\delta_Q \le d_0$.

I) Если грань Γ *невырождена, то* $Q < P$ *тогда и только тогда, когда* $\Re(Q) \subset \Re(P)$

II) Если грань Γ *вырождена, то* $Q < P$ *тогда и только тогда, когда II.a)* $\Re(Q) \subset \Re(P)$, *II.b) существует постоянная* $c > 0$ *такая, что для произвольных* $t > 0$ и $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$

$$|Q(t^\lambda \xi)| \le c\,[1 + |P(t^\lambda \xi)|] \;\; \forall \xi \in S_1(\eta, \lambda) := \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi - \eta, \lambda| < 1\}.$$

Доказательство. Утверждение пункта I) и необходимость пункта II) следуют из Замечаний 1.1 и 1.2.

Докажем достаточность пункта II). Предположим обратное, что при выполнении условий этого пункта существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ такая, что при $s \to \infty$ $|\xi^s| \to \infty$ и

$$|Q(\xi^s)|/[1 + |P(\xi^s)] \to \infty. \tag{3.2}$$

Обозначим $\eta^s := \xi^s/|\xi^s, \lambda|^\lambda$ $s = 1, 2, ...\cdot$ Так как $|\eta^s, \lambda| = 1$ $(s = 1, 2, ...)$, то из условия $\lambda \in \mathbb{R}^{n,0} \cap \mathbb{R}^{n,+}$ и из теоремы Больцано - Вееpштрасса следует существование подпоследовательности последовательности $\{\eta^s\}$ (которую также обозначим через $\{\eta^s\}$) и точки $\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta, \lambda| = 1$ таких, что $|\eta^s, \lambda| \to |\eta, \lambda|$ при $s \to \infty$.

Покажем, что $P_0(\eta) = 0$. Предполагая обратное, что $P_0(\eta) \neq 0$, получим

$$|P(\xi^s) = ||\xi^s, \lambda|^{d_0} P_0(\eta^s) + o(|\xi^s, \lambda|^{d_0})| = |\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta)|(1 + o(1)). \tag{3.3}$$

Так как $\delta_Q \le d_0$, и $|\xi^s, \lambda| \ge 1$ для достаточно больших s, то для таких s, имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$|Q(\xi^s)| \le c_1\, |\xi^s, \lambda|^{\delta_Q} \le c_1\, |\xi^s, \lambda|^{d_0}. \tag{3.4}$$

Полученные соотношения (3.3) - (3.4) противоречат (3.2) и доказывают, что $P_0(\eta) = 0$.

Рассмотрим следующие два возможных случая: 1) $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ и 2) $\eta \notin \mathbb{R}^{n,0}$.

Так как $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$, то в случае 1), в силу пункта II) b леммы, при достаточно больших s (для которых $\eta^s \in S_1(\eta, \lambda)$) имеем

$$|Q(\xi^s)| = |Q(|\xi^s, \lambda|^\lambda \eta^s)| \le c\,[1 + |P(|\xi^s, \lambda|^\lambda \eta^s)|] = c\,[1 + |P(\xi^s)|],$$

что противоречит предположению (3.2).

В случае 2) мы будем пользоваться Предложением 2.1 работы [6], где доказано, что если при условиях настоящей леммы последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $\xi^s \to \infty$ и $\xi^s/|\xi^s, \lambda,|^\lambda \to \eta$ при $s \to \infty$, при этом $\eta_1 ... \eta_n = 0$, то существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что для всех $\nu \in \Re(P)$ имеет место неревенство $|(\xi^s)^\nu| \le c_2\,[|P(\xi^s)| + 1]$ $s = 1, 2, ...\cdot$ Так как по условию леммы $\Re(Q) \subset \Re(P)$, то с некоторой постоянной $c_3 > 0$ справедливо неревенство $|Q(\xi^s)| \le c\,[|P(\xi^s)| + 1]$ $s = 1, 2, ...\cdot$

Это противоречит нашему предположению (3.2) и доказывает справедливость второго пункта леммы. □

Через $\mathbb{G}_n$ обозначим множество многочленов $P \in \mathbb{I}_n$ для которых все главные грани многогранника Ньютона $\Re(P)$ кроме, быть может одной $(n-1)-$ мерной главной грани $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ $(1 \le i_0 \le n-1)$ с внешной нормалью λ $(\lambda_j > 0$ $j = 1, ..., n)$ невырождены. При этом, если грань Γ вырождена и по вектору λ многочленов P представлен в виде (3.1), то $\Sigma(P_0, \lambda) \cap$ $\Sigma(P_1, \lambda) \cap$ $\Sigma(P_2, \lambda) = \emptyset$ и с некоторой постоянной $c > 0$

$$1 + |P(\xi)| \ge c\,[\,|P_0(\xi)| + |P_1(\xi)| + |P_2(\xi)|\,] \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Теорема 3.1 Пусть многочлен $P \in \mathbb{G}_n$ представлен по вектору λ в виде (3.1), а R, λ -однородный многочлен λ -степени δ. Тогда

I) если $\delta \le d_2$, то $R < P$ в том и только в том случае, когда $\Re(R) \subset \Re(P)$,

II) если $\delta \in (d_2, d_o]$, то $R < P$ в том и только в том случае, когда II.a) $\Re(R) \subset \Re(P)$,

II.b) для любой точки $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ существует окрестность $O(\eta)$ такая, что с некоторой постоянной $\kappa > 0$ и для всех $\xi \in O(\eta)$

II.b.1) $|R(\xi)| \le \kappa\,[|P_0(\xi)|^{(\delta-d_2)/(d_0-d_2)} + |P_1(\xi)|^{(\delta-d_2)/(d_1-d_2)}]$, если $\delta \in (d_2, d_1]$, $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$,

II.b.2) $|R(\xi)| \le \kappa\,[|P_0(\xi)|^{(\delta-d_2)/(d_0-d_2)} + |P_1(\xi)|^{(d_0-\delta)/(d_0-d_1)}]$, если $\delta \in (d_1, d_0]$, $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$,

II.b.3) $|R(\xi)| \le \kappa\,[|P_0(\xi)|^{(\delta-d_1)/(d_0-d_1)}$, если $\delta \in (d_1, d_0]$, $\eta \notin \Sigma(P_1, \lambda)$.

Доказательство. Так как утверждение пункта I) следует из Леммы 1.1 работы [10], то нам надо доказать лишь пункт II).

Необходимость условия II.a) также следует из упомянутой леммы. Докажем необходимость пункта II.b). Сначала докажем необходимость подпунктов II.b.1) - II.b.2).

Пусть $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$, $P_2(\eta^0) \neq 0$. Тогда (см. Замечание 3.1) существует окрестность $O_0(\eta^0) \subset S_1(\eta^0, \lambda)$ такая, что $|P_0(\xi)| < 1$, $|P_1(\xi)| < 1$, и $|P_2(\xi)| < \frac{3}{2}\,|P_2(\eta^0)|$ $\forall \xi \in O_0(\eta^0)$. Следовательно, в силу Леммы 3.1 имеем с некоторыми постоянными $c_j > 0$ $j = 1, 2, 3$ для всех $t \geq 1$ и $\xi \in O_0(\eta^0)$

$$|t^{\delta}\, R(\xi)| = |R(t^{\lambda}\, \xi)| \leq c_1\, [1 + |P(t^{\lambda}\, \xi)|] \leq c_1\, [1 + \sum_{j=0}^{2} t^{d_j}\, |P_j(\xi)|]$$

$$\leq c_2\, [1 + \sum_{j=0}^{M_P} t^{d_j}\, |P_j(\xi)|] \leq c_3\, [t^{d_0}\, |P_0(\xi)| + t^{d_1}\, |P_1(\xi)| + t^{d_2}].$$

В силу Следетвия 2.1, отсюда получаем доказательство необходимости условия II.b.1) при $\delta \in (d_2, d_1]$ и необходимости условия II.b.2) при $\delta \in (d_1, d_0]$.

Необходимость условия II.b.3) получается аналогично, с использованием Леммы 2.6 , если заметить, что в этом случае $P_1(\eta^0) \neq 0$ и с некоторой постоянной $c_4 > 0$ $1 + |t^{\delta}\, R(\xi)| \leq c_1[1 + |P(t^{\lambda\, \xi})|] \leq c_4\, [t^{d_0}\, |P_0(\xi)| + t^{d_1}]$ для всех $t \geq 1$ и $\xi \in O_1(\eta^0) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |P_0(\xi)| < 1, |P_1(\xi)| < \frac{3}{2}\,|P_1(\eta^0)|\} \cap S_1(\eta^0, \lambda)$.

Достаточность. Предположим обратное, что при выполнении условий теоремы, существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что при $s \to \infty$

$$|R(\xi^s)|/[1 + |P(\xi^s)|] \to \infty. \tag{3.6}$$

Так как из соотнощения (3.6) следует, что $|\xi^s, \lambda| \to \infty$ при $s \to \infty$, то далее будем считать, что $|\xi^s, \lambda| \geq 1$ для всех $s = 1, 2, ...\cdot$

Проводя аналогичные рассуждения, проводимые при доказательстве достаточности пункта II) Леммы 3.1 (при необходимости, переходя на подпоследовательность) можно показать, что при выполнении соотношения (3.6), существует точка $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ такая, что $\eta^s := \xi^s/|\xi^s, \lambda|^{\lambda} \to \eta$ при $s \to \infty$. Следовательно, при достаточно больших s (будем считать, что для всех s) $\eta^s \in O(\eta)$, где окрестность $O(\eta)$ выбрана по условию II.b) теоремы.

Рассмотрим следующие возможные случаи: 1) $\eta \notin \Sigma(P_1, \lambda)$. и 2) $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$.

Так как $P_1(\eta^s) \to P_1(\eta^0) \neq 0$ при $s \to \infty$, то в случае 1), применяя оценку (3.5), получим с некоторыми постоянными $c_5 > 0, c_6 > 0$ при достаточно больших s

$$1 + |P(\xi^s)| \geq c_5\, [\,|P_0(\xi^s)| + |P_1(\xi^s)|\,] = c_5\, [\,|\xi^s, \lambda|^{d_0}\, |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1}\, |P_1(\eta^s)|\,]$$

$$\geq c_6\, [\,|\xi^s, \lambda|^{d_0}\, |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1}\,|\,]\ \ s = 1, 2, ...\cdot \tag{3.7}$$

Так как $R(\xi^s) = |\xi^s, \lambda|^{\delta} \cdot |R(\eta^s)|$ $(s = 1, 2, ...)$, то при $\delta \le d_1$ полученные соотношения противоречат (3.6). Если же в случае 1) $\delta \in (d_1, d_0]$, то из пункта II.b.3), в силу Леммы 2.6, с некоторой постоянной $c_7 > o$ при $x = x_s = |\xi^s, \lambda|$, $y = y_s = R(\eta^s)$, $u = u_s = |P_0(\eta^s)|$ для достаточно больших s имеем $|\xi^s, \lambda|^{\delta} \cdot |R(\eta^s)| \le c_7 [|\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1}]$. Это, вместе с оценкой (3.7) противоречат нашему предположению (3.6).

В случае 2) из условий II.b.1), II.b.2) и Следствий 2.1, 2.2 с некоторой постоянной $c_8 > o$ при $x = x_s = |\xi^s, \lambda|$, $y = y_s = R(\eta^s)$, $u = u_s = |P_0(\eta^s)|$, $v = v_s := |P_1(\eta^s)|$ для достаточно больших s имеем $|\xi^s, \lambda|^{\delta} R(\eta^s) \le c_8 [|\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1} |P_1(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_2}]$. Так как в этом случае $P_2(\eta) \ne 0$, то отсюда в силу оценки (3.5) для достаточно больших s имеем с некоторымы постоянными $c_9 > o, c_{10} > 0$

$$|R(\xi^s)| = |\xi^s, \lambda|^{\lambda} |R(\eta^s)| \le c_8 [|P_0(\xi^s)| + |P_1(\xi^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_2}]$$

$$\le c_9 [|P_0(\xi^s)| + |P_1(\xi^s)| + |P_2(\xi^s)|] \le c_{10} [1 + |P(\xi^s)|].$$

Полученное соотношение противоречит (3.6) и доказывает достаточную часть пункта II). □

Для $\lambda-$ однородного многочлена R $(\lambda_j > 0\ j = 1, ..., n)$ и точки $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$ через $\Delta(R, \eta)$ обозначим $\lambda-$кратность точки η многочлена R, т.е. наименьшее положительное число для которого $D^{\alpha} R(\eta) = 0$ при $(\lambda, \alpha) < \Delta(R, \eta)$ и $\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(R,\eta)} |D^{\alpha} R(\eta)| \ne 0$.

Теорема 3.2 *Пусть $n = 2$, многочлен $P \in \mathbb{G}_2$ представлен по вектору λ в виде (3.1), а R $\lambda-$однородный многочлен $\lambda-$степени δ.*

I) Если $\delta \le d_2$, то $R < P$ тогда и только тогда, когда $\Re(R) \subset \Re(P)$

II) если $\delta \in (d_2, d_0]$ то $R < P$ тогда и только тогда, когда

II.a) $\Re(R) \subset \Re(P)$

II.b.) для любой точки $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ выполняются следующие соотношения

II.b.1) $\Delta(R, \eta) \ge min\{\Delta(P_0, \eta)\ \frac{\delta - d_2}{d_0 - d_2},\ \Delta(P_0, \eta)\ \frac{\delta - d_2}{d_1 - d_2}\}$, если $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$ и $\delta \in (d_2, d_1]$

II.b.2) $\Delta(R, \eta) \ge min\{\Delta(P_0, \eta)\ \frac{\delta - d_2}{d_0 - d_2}, \Delta(P_0, \eta)\ \frac{\delta - d_1}{d_0 - d_2}, + \ \Delta(P_1, \eta)\ \frac{d_0 - \delta}{d_0 - d_1}\}$ если $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$ и $\delta \in (d_1, d_0]$

II.b.3) $\Delta(R, \eta) \ge l_{P_0}(\eta)\ \frac{\delta - d_1}{d_0 - d_1}$ если $\eta \notin \Sigma(P_1, \lambda)$ и $\delta \in (d_1, d_0]$.

Доказательство. Достаточно показать, что утверждения пунктов II) b. j $(j = 1, 2, 3)$ эквивалентны соответствующим пунктам теоремы 3.1.

В работе [11] доказано, что для любого $\lambda-$однородного $(\lambda_j > 0\ j = 1, ..., n)$ нелинейного многочлена $R(\xi) = R(\xi_1, \xi_2)$ такого, что $\Sigma(R, \lambda) \neq 0$, существуют мультииндекс β, однородный эллиптический многочлен $r(\xi)$, натуральное число K, вещественные числа a_j $(j = 1, ..., K;\ \ a_i \neq a_j$ при $i \neq j)$, и натуральные числа $l_j = l_j(\eta)$ $(j = 1, ..., K,\ \eta \in \Sigma(R, \lambda))$ такие, что

$$R(\xi) = \xi^\beta\, r(\xi_1^{t_0\,\lambda_2}, \xi_2^{t_0\,\lambda_1}). \prod_{j=1}^{K} (\xi_1^{t_0\,\lambda_2} - a_j\, \xi_2^{t_0\,\lambda_1})^{l_j}\ \ \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{3.8}$$

Здесь t_0 наименьшее число такое, что $t_0\,\lambda_1$ и $t_0\,\lambda_2$ взаимнопростые натуральные числа, при этом, для каждой точки $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$ существует однозначно определяемый номер $j_0 = j_0(\eta)$ такой, что $a_{j_0}(\eta) = \eta_1^{t_0\,\lambda_2}/\eta_2^{t_0\,\lambda_1}$. Отметим что, $\Delta(R, \eta) = l(R, \eta)\, min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ при $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$

Так как эквивалентность пунктов II.b.3) Теоремы 3.1 и II.b.j) $j = 1, 2, 3$ Теоремы 3.2 доказываются аналогично, то мы докажем только эквивалентность пунктов II.b.1) обоих теорем.

Сначала отметим, что в силу представления (3.1) следующие две оценки эквивалентны:

существует постоянная $\kappa > 0$ такая, что при $\delta \in (d_2, d_1]$, $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$

$$|R(\xi)| \leq \kappa\, [|P_0(\xi)|^{(\delta - d_2)/(d_0 - d_2)} + |P_1(\xi)|^{(\delta - d_2)/(d_1 - d_2)}]\ \ \forall \xi \in O(\eta), \tag{3.9}$$

существует постоянная $c = c(\kappa) > 0$ такая, что

$$|\xi_1^{t_0\,\lambda_2} - a_{j_0}\, \xi_2^{t_0\,\lambda_1}|^{l(R,\eta)} \leq c\, [|(\xi_1^{t_0\,\lambda_2} - a_{j_0}\, \xi_2^{t_0\,\lambda_1})^{l(P_0,\eta)}|^{(\delta - d_2)/(d_0 - d_2)}$$

$$+ |(\xi_1^{t_0\,\lambda_2} - a_{j_0}\, \xi_2^{t_0\,\lambda_1})^{l(P_1,\eta)}|^{(\delta - d_2)/(d_1 - d_2)}]\ \ \forall \xi \in O(\eta). \tag{3.10}$$

Очевидно, что оценка (3.10) выполняется тогда и только тогда, когда

$$l(R, \eta) \geq min\{l(P_0, \eta)\ \frac{\delta - d_2}{d_0 - d_2}, l(P_1, \eta)\ \frac{\delta - d_2}{d_1 - d_2}\}. \tag{3.11}$$

Так как $\Delta(R, \eta) = l(R, \eta)\, min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, то соотношение (3.10) можно переписать в виде

$$\Delta(R, \eta) \geq min\{\Delta(P_0, \eta)\ \frac{\delta - d_2}{d_0 - d_2}, \Delta(P_1, \eta)\ \frac{\delta - d_2}{d_1 - d_2}\}.$$

Это доказывает эквивалентность пунктов II.b.1) Теоремы 3.2 с соответствующим пунктом Теоремы 3.1. □

Следующие примеры иллюстрируют доказанную теорему.

Пример 3.2 (относится к случаю II.b.1)) Пусть $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6 + (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + (\xi_1^2 + \xi_2^2) =: P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi)$, $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 r(\xi)$, где $r(\xi)$ любой однородный многочлен второй степени.

Здесь P представлен в виде суммы однородных многочленов, т.е. можно считать, что $\lambda = (1,1)$, при этом $d_0 = 6$, $d_1 = 4$, $d_2 = 2$, $\delta = 4 \in (d_2, d_1]$, $\Sigma(P_{0,\lambda}) = \{\pm\eta = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$, $l_{P_0}(\pm\eta) = 6$, $l_{P_1}(\pm\eta) = 2$, $l_R(\eta) = 2$.

Так как $P \in \mathbb{G}_2$, $\Re(R) \subset \Re(P)$, $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda)$, $2 = l_R(\eta) \geq 2\,\frac{4-2}{6-2} = l_{(P_1}(\eta)\,\frac{\delta - d_2}{d_0 - d_2}$ $(\leq 6\,\frac{4-2}{6-2} = l_{P_0}(\eta)\,\frac{\delta-d_2}{d_0-d_2})$, $\eta \in \Sigma(P_{0,\lambda}) \cup \mathbb{R}^{n,0}$, то в силу Теоремы 3.2 $R < P$.

Пример 3.3 (относится к случаю II.b.1)) $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6\ (\xi_1^6 + \xi_2^6) + (\xi_1 - \xi_2)^3 (\xi_1^4 + \xi_2^4) + (\xi_1^4 + \xi_2^4) =: P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi)$, $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1^3 + \xi_2^3)$.

Здесь $d_0 = 12$, $d_1 = 7$ $d_2 = 4$, $\delta = 5 \in (d_2, d_1]$. $\Sigma(P_0, \lambda) = \{\pm\eta = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$, $l_{P_0}(\pm\eta) = 6$, $l_{P_1}(\pm\eta) = 3$, $l_R(\pm\eta) = 2$.

Так как $P \in \mathbb{G}_2$, $\Re(R) \subset \Re(P)$, $\pm\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$, и $2 = l_R(\pm\eta) \geq 6\,\frac{5-4}{12-4} = l_{P_0}(\pm\eta)\,\frac{\delta-d_2}{d_0-d_2}$, то в силу Теоремы 2.2 $R < P$.

Пример 3.4 (относится к случаю II.b.2)) пусть P многочлен из примера 3.2, а $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^4 (\xi_1 + \xi_2)$. Здесь $l_R(\pm\eta) = 4$, $\delta = 5 \in (d_1, d_0]$.

Так как $P \in \mathbb{G}_2$, $\Re(R) \subset \Re(P)$, $\pm\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$ и $4 = l_R(\pm\eta) \geq 6\,\frac{5-4}{6-4} + 2\,\frac{6-5}{6-4} = l_{P_0}(\pm\eta)\,\frac{\delta-d_2}{d_0-d_1}$, $+ l_{P_1}(\pm\eta)\,\frac{d_0-\delta}{d_0-d_1}$, $(\leq 6\,\frac{5-2}{6-2} = l_{P_0}(\pm\eta)\,\frac{\delta-d_2}{d_0-d_2})$, то в силу Теоремы 2.2 $R < P$.

Пример 3.5 (относится к случаю II.b.2)) пусть P многочлен из примера 3.3, а $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^3 r(\xi)$, где $r(\xi)$ любой однородный многочлен степени 5, т.е. $\delta = 8 \in (7, 12) = (d_1, d_0)$, $l_R(\pm\eta) \geq 3$.

Так как $P \in \mathbb{G}_2$, $\Re(R) \subset \Re(P)$, $\pm\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda)$ и $l_R(\pm\eta) \geq 3 \geq 6\,\frac{8-4}{12-4} = l_{P_0}(\pm\eta)\ \frac{\delta-d_2}{d_0-d_2}$, то в силу Теоремы 2.2 $R < P$.

Лемма 3.3 *Пусть многочлен* $P \in \mathbb{G}_n$ *представлен в виде (3.1) по вектору* $\lambda = \lambda(P)$. *Тогда I) существует постоянная* $c_1 > 0$ *такая, что для всех* $\nu \in \Re(P) \cap \{\alpha \in \mathbb{R}^{n,+}, (\lambda, \alpha) \leq d_2\} =: \Re^*$

$$|\xi^\alpha| \leq c_1\,[1 + |P(\xi)|]\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.12}$$

II) существует постоянная $c_2 > 0$ *такая, что для всех* $t \geq 1$

$$c_2^{-1}\,t^{-d_0}[1 + |P(t^\lambda\,\xi)|] \leq 1 + |P(\xi)| \leq c_2\,[1 + |P(t^\lambda\,\xi)|]\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.13}$$

Доказательство. Докажем оценку (3.12). Предположим обратное, что существуют точка $\nu^0 \in \Re^*$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что при $s \to \infty$

$$|(\xi^s)^{\nu^0}|/[1 + |P(\xi^s)] \to \infty. \tag{3.14}$$

Из (3.14) следует, что $|\xi^s, \lambda| \to \infty$ при $s \to \infty$. обозначим $\eta^s := \xi^s / |\xi^s, \lambda|^\lambda$ $s = 1, 2, ...$. Так как $|\eta^s, \lambda| = 1\,(s = 1, 2, ...)$ и $\lambda_j > 0\,(j = 1, ..., n),$ то на основании теоремы Больцано - Веерштрасса существует подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) и точка $\eta : |\eta, \lambda| = 1$ такие, что $|\eta^s - \eta, \lambda| \to 0$ при $s \to \infty$.

Рассмотрим следующие возможные случаи: $1) P_0(\eta) \neq 0$ и $2) P_0(\eta) = 0$. В случае 1) из условия $P \in \mathbb{G}_n,$ при $s \to \infty$ имеем с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$1 + |P(\xi^s)| \geq c_3\,|P_0(\xi^s)| = c_3\,|\xi^s, \lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| = c_3\,|\xi^s, \lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta)|[1 + o(1)]. \tag{3.15}$$

Для $|(\xi^s)^{\nu^0}|$ в силу условия $\nu^0 \in \Re^*$ при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

$$|(\xi^s)^{\nu^0}| \leq |\xi^s, \lambda|^{d_q}. \tag{3.16}$$

Соотношения (3.15), (3.16) вместе противоречат нашему предположению (3.14).

В случае 2) рассмотрим следующие возможные подслучаи: 2.1) $\eta \notin \mathbb{R}^{n,0}$ т.е. $\eta_1 ... \eta_n = 0,$ 2.2) $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ т.е. $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$. В подслучае 2.1) в силу Предложения 2.1 работы [6] для $\nu^0 \in \Re(P)$ с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем $|(\xi^s)^{\nu^0}| \leq c_4\,[1 + |P(\xi^s)|]$ $s = 1, 2, ...,$ что противоречит (3.14). Подслучай 2.2) делим на следующие возможные подслучаи: 2.2.1) $\eta \notin \Sigma(P_1, \lambda),$ т.е. $P_1(\eta) \neq 0,$ 2.2.2) $\eta \in \Sigma(P_1, \lambda),$ тогда, в силу условия $P \in \mathbb{G}_n,$ $P_2(\eta) \neq 0$. В подслучае 2.2.1), из условия $P \in \mathbb{G}_n,$ при $s \to \infty$, имеем с некоторой постоянной $c_5 > 0$

$$1 + |P(\xi^s)| \geq c_5\,|P_1(\xi^s)| = c_5\,|\xi^s, \lambda|^{d_1}\,|P_1(\eta^s)|$$

$$= c_5\,|\xi^s, \lambda|^{d_1}\,|P_1(\eta)|\,[1 + o(1)]. \tag{3.17}$$

Для $|(\xi^s)^{\nu^0}|$ в силу условия $\nu^0 \in \Re^*$ при достаточно больших s имеем

$$|(\xi^s)^{\nu^0}| \leq |\xi^s, \lambda|^{d_2} \leq |\xi^s, \lambda|^{d_1}. \tag{3.18}$$

Соотношения (3.17), (3,18) вместе противоречат предположению (3.14).

В подслучае 2.2.2), из условия $P \in \mathbb{G}_n,$ при $s \to \infty$, имеем с некоторой постоянной $c_6 > 0$

$$1 + |P(\xi^s)| \geq c_6\,|P_2(\xi^s)| = c_6\,|\xi^s, \lambda|^{d_2}\,|P_2(\eta)|\,[1 + o(1)]. \tag{3.19}$$

В этом случае при достаточно больших s имеем $|(\xi^s)^{\nu^0}| \leq |\xi^s, \lambda|^{d_2},$ что вместе с (3.19) противоречит (3.14) и доказывает первую часть леммы. Докажем вторую часть леммы. Сначала докажем левую часть неравенства (3.13). В силу представления (3.1), условия $P \in \mathbb{G}_n,$ и доказанной первой части настоящей леммы, для любых $t \geq 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$1 + |P(t^\lambda \xi^s)| \leq 1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(t^\lambda \xi^s)| \leq 1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(\xi)| \leq t^{d_0} [1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(\xi)|]$$

$$\leq \frac{1}{c} t^{d_0} [1 + |P(\xi)|],$$

что доказывает левую часть неравенства (3.13). Докажем правую часть. Из условия $P \in \mathbb{G}_n$, и первого пункта настоящей леммы с некоторой постоянной $c_6 > 0$ имеем при всех $t \geq 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$1 + |P(t^\lambda \xi)| \geq c_6 [1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(t^\lambda \xi)|] = c_6 [1 + \sum_{j=0}^{M_P} t^{d_j} |P_j(\xi)|]$$

$$\geq c_6 [1 + \sum_{j=0}^{M_P} |P_j(\xi)|] \geq c_6 [1 + |P(\xi)|],$$

откуда непосредственно следует правая часть (3.13). □

Лемма 3.4 *Пусть* $P \in \mathbb{G}_n$, $\lambda = \lambda(P)$ *и*

$$Q(\xi) = \sum_{j=0}^{M_Q} Q_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M_Q} [\sum_{(\lambda,\alpha)=\delta_j} q_\alpha \xi^\alpha]. \tag{3.20}$$

$Q < P$ *тогда и только тогда, когда* $Q_j < P$ $j = 0, 1, ..., M_Q$.

Доказательство. Часть, относящейся к достаточности очевидна. Докажем необходимость. Из условия $Q < P$ следует, что с некоторой постоянной $c_1 > 0$ справедливо неравенство

$$|Q(t^\lambda \xi)| \leq c_1 [\, 1 + |P(t^\lambda \xi)|\,] \;\; \forall\, t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В силу Леммы 3.3 отсюда получаем, что для любого $t > 0$ с некоторой постоянной $c_2 = c_2(t) > 0$

$$|Q(t^\lambda \xi)| \leq c_2 [\, 1 + |P(\xi)|\,] \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.21}$$

Пусть $t_j > 1$ $(j = 0, 1, ..., M_Q)$ попарно различные числа. Рассмотрим следующую систему уравнений относительно Q_j $(j = 0, 1, ..., M_Q)$ $\sum\limits_{j=0}^{M_Q} t_l^{\delta_j} Q_j(\xi) = Q(t_l^\lambda \xi)$ $l = 0, 1, ..., M_Q$. Так как матрица

$$\begin{pmatrix} t_0^{\delta_0} & \dots & t_0^{\delta_{M_Q}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{M_Q}^{\delta_0} & \dots & t_{M_Q}^{\delta_{M_Q}} \end{pmatrix}$$

невырождена, то для любого $j = 0, 1, ..., M_Q$ существуют числа κ_l^j $(l = 0, 1, ..., M_Q)$ такие, что

$$Q_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M_Q} \kappa_l^j\, Q(t_l^\lambda\, \xi) \ \ j = 0, 1, ..., M_Q.$$

Применяя неравенство (3.21) для конечного числа значений $t_0, t_1, ..., t_{M_Q}$, получаем, что $Q < P$. □

Теорема 3.3 *Пусть многочлен $P \in \mathbb{G}_n$, по вектору $\lambda = \lambda(P)$ представлен в виде (3.1), а многочлен Q по тому же вектору в виде (3.20). $Q < P$ тогда и только тогда, когда a) $\Re(Q) \subset \Re(P)$, b) для любого $j: 0 \leq j \leq M_Q$, такого, что $\delta_j > d_2$, пара $\{Q_j, P\}$ $\lambda-$однородного многочлена Q_j и общего многочлена P удовлетворяет условию II.b) Теоремы 3.1.*

Доказательство непосредственно следует из Теоремы 3.1 и Леммы 3.4. □

Abstract. The work describes a set of polynomials that have less power than a given polynomial from a certain class.

Список литературы

[1] A.G. Khovanskii, "Newton Polyhedra" (algebra and geometry), Amer. Math. Soc. Transl. **153**, no. 2, 1 – 15 (1992).

[2] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН., **19**, 59 – 81 (1967).

[3] S. G. Gindikin, L. R. Volevich, "The method of Newton's polyhedron in the theory of PDF. Mathematics and applications", Soviet Series, Kluwer Academic Publishers (1992).

[4] Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность", Труды МИАН, **150**, 143 – 159 (1979).

[5] Г. Г. Казарян, "О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности", Известия НАН Армении, Математика, **46**, но. 6, 11 – 30 (2011).

[6] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "On the comparison of powers of differential operators (polynomials)", Boll Unione Mat Ital (2023) //doi.org/10.1007/s 40574 - 023 - 00363 x.

[7] Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, **2**, Москва, Мир (1986).

[8] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе вырождающихся гипоэллиптических многочленов", Труды Московского Математического общества, **83**, no. 1, 181 – 217 (2022).

[9] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы операторов", Труды МИАН. **150**, 128 – 142 (1979).

[10] Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы", Труды МИАН . **140**, 130 – 161 (1976).

[11] В. Н. Маргарян, "Об одном представлении обобщённо - однородных многочленов от двух переменных", Сб. 10 -ой годичной научной конф. РАУ, 19 – 23 (2015).

Поступила 20 сентября 2023

После доработки 15 февраля 2024

Принята к публикации 21 февраля 2024