

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет ¹

E-mail: *GGG@ysu.am*

Аннотация. В работе получены некоторые оценки функций общей системы Франклина, которые уточняют ранее известные оценки. С применением этих оценок исследуются взаимное расположение нулей некоторых функций общей системы Франклина. Такие оценки могут быть полезными при выявлении новых свойств общей системы Франклина.

MSC2000 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: Общая система Франклина; неравенства для общей функции Франклина.; нули общей функции Франклина.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1928 году Ф. Франклин [1] построил первый пример полного ортонормированного базиса в $C[0; 1]$. Эта система состоит из кусочно линейных непрерывных функций. Систематическое изучение системы Франклина началось с работ З. Чисельского [2], [3]. В этих работах, в частности, получены знаменитые экспоненциальные оценки функций системы Франклина. С применением этих оценок получены многие важные свойства системы Франклина. Эта система оказалась очень полезной при решении разных задач. В работе [4] сделан подробный обзор исследований рядов по системе Франклина на тот момент.

В 1997 году была введена [5] общая система Франклина. определение которой будет дано в следующем разделе. В работе [6] получены некоторые оценки для функций общей системы Франклина, с применением которых доказаны многие теоремы о рядах по общей системе Франклина. В работах [7] и [8] получены некоторые улучшения этих оценок. С применением этих оценок, в работах [8], [9] окончательно решены вопросы базисности и безусловной базисности общей системы Франклина в пространствах $H^1[0, 1]$ и $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке комитета по науке министерства ОНКС Республики Армения (грант No. 21T-1A055).

В настоящей работе получены некоторые уточнения оценок функций общей системы Франклина, а также исследовано взаимное расположение нулей функций общей системы Франклина. Изучение взаимного расположения нулей функций классической системы Франклина сыграла важную роль в вопросе единственности рядов по системе Франклина [10].

В работе α_γ , $C_{\gamma,k}$ -постоянные зависящие от своих индексов и могут принимать разные значения в разных формулах.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА И ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМ

Следуя работам [5] и [6] приведем некоторые определения.

Определение 2.1. Последовательность точек $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ назовем допустимой, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0, 1)$ для любого $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0, 1]$ и каждая точка $t \in (0, 1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем два раза.

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 1$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n+1\}$. Пусть π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через $\mathbf{S}_n$ обозначим пространство функций определенных на $[0, 1]$, непрерывных слева, линейных на (τ_i^n, τ_{i+1}^n) и непрерывных в τ_i^n , если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$ для любого $i = 0, 1, \dots, n$. Ясно, что $\dim \mathbf{S}_n = n+1$ и $\mathbf{S}_{n-1} \subset \mathbf{S}_n$. Следовательно существует (с точностью до знака) единственная функция $f_n \in \mathbf{S}_n$, которая ортогональна $\mathbf{S}_{n-1}$ и $\|f_n\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n -ной функцией Франклина, соответствующей разбиению (последовательности) $\mathcal{T}$. Назовем разбиение простым, если каждая точка $t \in (0, 1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем один раз. В дальнейшем мы будем исследовать только случай простых разбиений.

Определение 2.2. Общая система Франклина $\{f_n : n \geq 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = \sqrt{3}(2t-1),$$

и для $n \geq 2$, f_n есть n -ная функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$. Предполагается, что $f_n(t_n) > 0$.

Отметим, что когда $t_n = \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}$, где $n = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, 2, \dots$, $\nu = 1, 2, \dots, 2^\mu$, получается классическая система Франклина, эквивалентным образом определенная в [1].

Из оценок L^∞ -норм ортогональных проекций на пространство кусочно-линейных функций (см. [5]) следует, что для каждой последовательности узлов $\mathcal{T}$, соответствующая общая система Франклина является базисом в $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ и если все узлы из $\mathcal{T}$ простые, то соответствующая общая система Франклина является базисом в $C[0, 1]$. Г. Геворкян и А. Камонт [8] доказали, что общая система Франклина является безусловным базисом в пространствах $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

Следуя работе [6], введем следующие определения.

Определение 2.3. Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется квазидвоичным разбиением отрезка $[0, 1]$, если $\tau_{2\nu}^{2^{\mu+1}} = \tau_\nu^{2^\mu}$ для всех μ, ν , $0 \leq \nu \leq 2^\mu$, т. е. $\pi_{2^{\mu+1}}$ получается из π_{2^μ} прибавлением по одной точке в каждом интервале $(\tau_\nu^{2^\mu}, \tau_{\nu+1}^{2^\mu})$ для всех $1 \leq \nu \leq 2^\mu$.

Определение 2.4. Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется сильно регулярной с параметром γ , если $\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n} \leq \gamma$ для всех $n \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Здесь и далее $\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i-1}^n$.

Договоримся, что если $n = 2^\mu + \nu$, $1 \leq \nu \leq 2^\mu$, то μ назовем рангом чисел n , t_n и функции f_n . Ранг чисел n и t_n обозначим, соответственно, через $[n]$ и $[t_n]$.

В настоящей работе рассматриваются только квазидвоичные разбиения. Для таких разбиений доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.1. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$, ξ_1^n -нуль функции f_n на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, ξ_2^n -нуль на отрезке $[\tau_{2\nu-1}^n, \tau_{2\nu}^n]$. Тогда выполняются

$$(2.1) \quad \frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_1^n}{\tau_{2\nu}^n - \tau_{2\nu-2}^n} > \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{\xi_2^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu}^n - \tau_{2\nu-2}^n} > \frac{1}{3}.$$

Теорема 2.2. Если $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$, ξ_1^n -нуль функции f_n на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, а η_1^n -нуль функции f_{n+1} на том же отрезке, то $\xi_1^n > \eta_1^n$. И если $\mathcal{T}$ -сильно регулярная, то существует такое $\alpha_\gamma > 0$, что

$$(2.2) \quad \frac{\xi_1^n - \eta_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} > \alpha_\gamma.$$

Теорема 2.3. Если $n = 2^\mu + \nu$, $1 \leq \nu < 2^\mu$, ξ_2^n -нуль функции f_n на отрезке $[\tau_{2\nu-1}^n, \tau_{2\nu}^n]$, а η_2^n -нуль функции f_{n+1} на том же отрезке, то $\xi_2^n > \eta_2^n$. И если $\mathcal{T}$ -сильно регулярная, то существует такое $\alpha_\gamma > 0$, что

$$(2.3) \quad \frac{\xi_2^n - \eta_2^n}{\lambda_{2\nu}^n} > \alpha_\gamma.$$

Теорема 2.4. Если $n = 2^\mu + \nu$, $1 \leq \nu < 2^\mu$, θ_1^n -(единственный) нуль функции f_{n-1} на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu}^n]$, а ξ_1^n, ξ_2^n -нули функции f_n на отрезках $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, $[\tau_{2\nu-1}^n, \tau_{2\nu}^n]$, соответственно, то $\xi_1^n < \theta_1^n < \xi_2^n$. И если $\mathcal{T}$ -сильно регулярная, то существует такое $\alpha_\gamma > 0$, что

$$(2.4) \quad \frac{\theta_1^n - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} > \alpha_\gamma, \quad \frac{\xi_2^n - \theta_1^n}{\lambda_{2\nu}^n} > \alpha_\gamma.$$

Теорема 2.5. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$, ξ_1^n -нуль функции f_n на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$. Тогда если $[m] = [n] + 1$, $t_m < \tau_{2\nu-2}^n$ и ζ_1 -нуль функции f_m на отрезке $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, то $\xi_1^n < \zeta_1$. И если $\mathcal{T}$ -сильно регулярная, то существует такое $\alpha_\gamma > 0$, что

$$(2.5) \quad \frac{\zeta_1 - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} > \alpha_\gamma.$$

Очевидно, что в теоремах 2.2-2.5 достаточно доказать неравенства (2.2)-(2.5).

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Следующие замечания легко проверяются.

Замечание 3.1. Пусть функции $y(x)$ и $z(x)$ линейны на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$(3.1) \quad \int_a^b y(x)z(x)dx = (b-a) \left[\frac{y(a)z(a) + y(b)z(b)}{3} + \frac{y(a)z(b) + y(b)z(a)}{6} \right].$$

Замечание 3.2. Пусть a, b, c, d -положительны. Тогда

$$(3.2) \quad \min \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right) \leq \frac{az + b}{cz + d} \leq \max \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right), \quad z \geq 0.$$

Пусть δ_{jk} -символ Кронекера, т.е. $\delta_{jk} = 1$, если $j = k$, и $\delta_{jk} = 0$, если $j \neq k$. Для $n \geq 2$ функции $\{N_{n,j}(t)\}_{j=0}^n$ определяются следующим образом:

$$(3.3) \quad N_j^n(x) = \begin{cases} \delta_{jk}, & \text{когда } x = \tau_k^n, \quad k = 0, \dots, n; \\ \text{линейная} & \text{на } [\tau_{k-1}^n; \tau_k^n], \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Функции $\{N_j^n(t)\}_{j=0}^n$ нормированы в пространстве $C[0, 1]$ и из $N_j^n(\tau_k^n) = \delta_{jk}$ следует, что система $\{N_j^n(t)\}_{j=0}^n$ образует базис в $\mathbf{S}_n$. Следовательно,

$$(3.4) \quad (N_j^{n-1}, f_n) := \int_0^1 N_j^{n-1}(x)f_n(x)dx = 0 \text{ когда } n \geq 2 \text{ и } 0 \leq j \leq n-1.$$

Замечание 3.3. Если разбиение $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ , то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $c_{\gamma,k} > 0$, что если $0 < [t_m] - [t_n] \leq k$, то

$$(3.5) \quad |t_m - t_n| \geq c_{\gamma,k} |\Delta_n|.$$

Действительно, пусть $p := [t_m] - [t_n]$ и $t_{m'}$ среди чисел ранга $[n] + p$ ближайшая к t_n . Тогда либо $t_{m'} \in [\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu-1}^n]$, либо $t_{m'} \in [\tau_{2\nu-1}^n, \tau_{2\nu}^n]$. С учетом сильной регулярности, получим

$$|t_n - t_{m'}| > \frac{|\Delta_n|}{(\gamma + 1)^p},$$

из которого следует (3.5).

Обозначим

$$(3.6) \quad a_i^{(n)} := f_n(\tau_i^n), \quad n = 3, 4, \dots, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Очевидно, что функция f_n однозначно определяется значениями $a_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

С учетом замечания 3.1, из соотношений (3.4) для $n = 2^\mu + \nu$, $\mu = 1, 2, \dots$, $\nu = 2, 3, \dots, 2^\mu - 1$, получается система линейных уравнений

$$(3.7) \quad 2a_0^{(n)} + a_1^{(n)} = 0,$$

$$(3.8) \quad a_{i-1}^{(n)} \lambda_i^n + 2a_i^{(n)} (\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n) + a_{i+1}^{(n)} \lambda_{i+1}^n = 0, \quad \text{для } 0 < i < 2\nu - 2,$$

$$(3.9) \quad a_{2\nu-3}^{(n)} \lambda_{2\nu-2}^n + a_{2\nu-2}^{(n)} \left(2\lambda_{2\nu-2}^n + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) +$$

$$a_{2\nu-1}^{(n)} (\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + a_{2\nu}^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} = 0,$$

$$(3.10) \quad a_{2\nu-2}^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + a_{2\nu-1}^{(n)} (2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) +$$

$$a_{2\nu}^{(n)} \left(2\lambda_{2\nu}^n + 2\lambda_{2\nu+1}^n + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) + a_{2\nu+1}^{(n)} \lambda_{2\nu+1}^n = 0,$$

$$(3.11) \quad a_{i-1}^{(n)} \lambda_i^n + 2a_i^{(n)} (\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n) + a_{i+1}^{(n)} \lambda_{i+1}^n = 0, \quad \text{для } 2\nu < i < n,$$

$$(3.12) \quad a_{n-1}^{(n)} + 2a_n^{(n)} = 0$$

В случае $\nu = 1$ выполняются соотношения (3.10)-(3.12) и

$$(3.13) \quad a_0^{(n)} \lambda_1^n (2\lambda_1^n + 3\lambda_2^n) + a_1^{(n)} ((\lambda_1^n)^2 + 3\lambda_1^n \lambda_2^n + 2(\lambda_2^n)^2) + a_2^{(n)} (\lambda_2^n)^2 = 0.$$

Когда $\nu = 2^\mu$, т.е. $n = 2\nu$, выполняются соотношения (3.7)-(3.9) и

$$(3.14) \quad a_{n-2}^{(n)} (\lambda_{n-1}^n)^2 + a_{n-1}^{(n)} (2(\lambda_{n-1}^n)^2 + 3\lambda_{n-1}^n \lambda_n^n + (\lambda_n^n)^2) + a_n^{(n)} (3\lambda_{n-1}^n + 2\lambda_n^n) \lambda_n^n = 0.$$

Следующая лемма доказана в работе [6]. Однако, нам придется повторить ее, в связи с уточнением некоторых важных деталей. Верна следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $\mu = 1, 2, \dots$, $\nu = 2, 3, \dots, 2^\mu - 1$, и $a_i^{(n)} := f_n(\tau_{n,i})$. Тогда

- А) $a_i^{(n)} \cdot a_{i+1}^{(n)} < 0$ когда $i = 0, 1, \dots, n-1$,
 В) $a_1^{(n)} = -2a_0^{(n)}$,
 С) $a_i^{(n)} = -a_{i-1}^{(n)} \left(2 + \frac{\lambda_{i-1}^{n,*}}{\lambda_i^n} \right)$, когда $i \leq 2\nu - 2$, где $\frac{3\lambda_{i-1}^n}{2} \leq \lambda_{i-1}^{n,*} \leq 2\lambda_{i-1}^n$ и $\lambda_{i-1}^{n,*}$ зависит только от λ_j^n , $j < i$,
 D) $a_{n-1}^{(n)} = -2a_n^{(n)}$,
 E) $a_i^{(n)} = -a_{i+1}^{(n)} \left(2 + \frac{\lambda_{i+2}^{n,*}}{\lambda_{i+1}^n} \right)$, когда $i \geq 2\nu$, где $\frac{3\lambda_{i+2}^n}{2} \leq \lambda_{i+2}^{n,*} \leq 2\lambda_{i+2}^n$ и $\lambda_{i+2}^{n,*}$ зависит только от λ_j^n , $j > i+2$.

Доказательство. Пункт А) доказан в [6]. В) следует из (3.7). Из (3.7) и (3.8) для $i = 1$, получим

$$(3.15) \quad a_2^{(n)} = -\frac{1}{\lambda_2^n} (a_0^{(n)} \lambda_1^n + 2a_1^{(n)} (\lambda_1^n + \lambda_2^n)) = -a_1^{(n)} \left(2 + \frac{3\lambda_1^n}{2\lambda_2^n} \right).$$

Следовательно $\lambda_1^{n,*} = \frac{3\lambda_1^n}{2}$, т.е. С) верно для $i = 1$. Если С) имеет место для i , то из (3.8) получим

$$(3.16) \quad a_{i+1}^{(n)} = -\frac{1}{\lambda_{i+1}^n} (a_{i-1}^{(n)} \lambda_i^n + 2a_i^{(n)} (\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n)) = -a_i^{(n)} \left(2 + \frac{\lambda_i^{n,*}}{\lambda_{i+1}^n} \right),$$

где

$$(3.17) \quad \lambda_i^{n,*} = \lambda_i^n \left(2 - \frac{1}{2 + \frac{\lambda_{i-1}^{n,*}}{\lambda_i^n}} \right) = \lambda_i^n \frac{3\lambda_i^n + 2\lambda_{i-1}^{n,*}}{2\lambda_i^n + \lambda_{i-1}^{n,*}}.$$

Из (3.16) и замечания 3.2 следует С). Аналогично доказываются D) и E). Лемма доказана.

Применив (3.17) и С) леммы 3.1, получим

$$(3.18) \quad (a_{2\nu-3}^{(n)} + 2a_{2\nu-2}^{(n)}) \lambda_{2\nu-2}^n = a_{2\nu-2}^{(n)} \lambda_{2\nu-2}^n \left(2 - \frac{1}{2 + \frac{\lambda_{2\nu-3}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-2}^n}} \right) =$$

$$a_{2\nu-2}^{(n)} \lambda_{2\nu-2}^n \frac{3\lambda_{2\nu-2}^n + 2\lambda_{2\nu-3}^{n,*}}{2\lambda_{2\nu-2}^n + \lambda_{2\nu-3}^{n,*}} = a_{2\nu-2}^{(n)} \lambda_{2\nu-2}^{n,*}.$$

Следовательно, вместо (3.9) можем писать

$$(3.19) \quad a_{2\nu-2}^{(n)} \left(\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) +$$

$$a_{2\nu-1}^{(n)} (\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + a_{2\nu}^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} = 0,$$

Аналогично, из (3.10) получим

$$(3.20) \quad \begin{aligned} & a_{2\nu-2}^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + a_{2\nu-1}^{(n)} (2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) + \\ & a_{2\nu}^{(n)} \left(2\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) = 0, \end{aligned}$$

Складывая (3.19), (3.20) получим

$$(3.21) \quad a_{2\nu-2}^{(n)} (\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 3\lambda_{2\nu-1}^n) + a_{2\nu-1}^{(n)} (3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n) + a_{2\nu}^{(n)} (3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}) = 0.$$

Учитывая А) леммы 3.1 и $f_n(t_n) > 0$, получим следующее

Свойство 3.1.

$$(3.22) \quad f_n(t_n) = a_{2\nu-1}^{(n)} \geq \min(|a_{2\nu-2}^{(n)}|, |a_{2\nu}^{(n)}|).$$

Продолжим исследование соотношений (3.7)-(3.12). Обозначив

$$(3.23) \quad x^{(n)} := -\frac{a_{2\nu-2}^{(n)}}{a_{2\nu-1}^{(n)}} \quad \text{и} \quad y^{(n)} := -\frac{a_{2\nu}^{(n)}}{a_{2\nu-1}^{(n)}}$$

из (3.19), (3.20) получим систему линейных уравнений

$$(3.24) \quad \begin{cases} x^{(n)} \left(\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) + y^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} = \lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n \\ x^{(n)} \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n)^2}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + y^{(n)} \left(2\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) = 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n \end{cases}$$

Решив систему (3.24) методом Крамера, получим следующую лемму.

Лемма 3.2. *Решение системы (3.24) будет*

$$(3.25) \quad x^{(n)} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{и} \quad y^{(n)} = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где

$$(3.26) \quad \Delta_x = \lambda_{2\nu+1}^{n,*} (\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + 3\lambda_{2\nu}^n (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n),$$

$$(3.27) \quad \Delta_y = \lambda_{2\nu-2}^{n,*} (2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) + 3\lambda_{2\nu-1}^n (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n),$$

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \Delta &= \lambda_{2\nu+1}^{n,*} \left(\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n (2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \right) + \\ & \lambda_{2\nu-2}^{n,*} \frac{\lambda_{2\nu}^n (3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 6\lambda_{2\nu-1}^n \lambda_{2\nu}^n. \end{aligned}$$

Лемма 3.3. *Для $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$ верны следующие неравенства.*

$$(3.29) \quad \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n (2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\Delta}{\Delta_x} \leq \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} \frac{(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 6\lambda_{2\nu-1}^n}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)},$$

$$(3.30) \quad \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\Delta}{\Delta_x} \leq \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n},$$

$$(3.31) \quad \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\Delta}{\Delta_y} \leq \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} \frac{(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 6\lambda_{2\nu}^n}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)},$$

$$(3.32) \quad \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\Delta}{\Delta_y} \leq \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Доказательство. Легко убедиться (простыми умножениями), что

$$(3.33) \quad \frac{1}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\frac{(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}$$

и

$$(3.34) \quad \frac{\frac{\lambda_{2\nu-1}^n(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{6\lambda_{2\nu-1}^n}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}.$$

Из (3.33) и (3.34) получим

$$(3.35) \quad \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} \frac{(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 6\lambda_{2\nu-1}^n}{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}.$$

Применяя замечание 3.2, из (3.35) получим (3.29) (в качестве z выступает $\lambda_{2\nu+1}^{n,*}$).

В силу очевидных неравенств

$$2 < \frac{3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} \quad \text{и} \quad \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} < 3,$$

из (3.29) получим (3.30). Аналогично доказываются (3.31) и (3.32). Лемма доказана.

Лемма 3.4. Если $\mathcal{T}$ -квазидиадическая и сильно регулярная с параметром γ , то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $C_{\gamma,k} > 0$, что для любого j выполняется

$$(3.36) \quad \min_{|i| \leq k} |f_n(\tau_{j+i}^n)| > C_{\gamma,k} \max_{|i| \leq k} |f_n(\tau_{j+i}^n)|.$$

Доказательство. В силу сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$, из (3.23), (3.24), (3.30), (3.32) получим

$$(3.37) \quad \min_{|i| \leq 1} |f_n(\tau_{2\nu-1+i}^n)| > C_{\gamma,1} \max_{|i| \leq 1} |f_n(\tau_{2\nu-1+i}^n)|.$$

С учетом сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ и свойств $C)$, $E)$ леммы 3.1, из (3.37) получим (3.36). Лемма доказана.

Лемма 3.5. Для $n = 2^\mu + \nu$, $1 < \nu < 2^\mu$ имеет место следующее неравенство.

$$(3.38) \quad (f_n, N_{2\nu-1}^n) > \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{6} (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n).$$

Доказательство. Применяя замечание 3.1, получим

$$(3.39) \quad \begin{aligned} (f_n, N_{2\nu-1}^n) &= \lambda_{2\nu-1}^n \left(\frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{3} + \frac{a_{2\nu-2}^{(n)}}{6} \right) + \lambda_{2\nu}^n \left(\frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{3} + \frac{a_{2\nu}^{(n)}}{6} \right) = \\ &= \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{6} (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) + \frac{a_{2\nu-2}^{(n)}}{6} \lambda_{2\nu-1}^n + \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{6} (\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) + \frac{a_{2\nu}^{(n)}}{6} \lambda_{2\nu}^n. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a_{2\nu-2}^{(n)} < 0$ и $a_{2\nu}^{(n)} < 0$, с учетом (3.21) из (3.39) получим (3.38).

Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 2.1. Докажем только первое неравенство. Второе доказывается аналогично. Допустим обратное-выполняется

$$(4.1) \quad \frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_1^n}{\tau_{2\nu}^n - \tau_{2\nu-2}^n} \leq \frac{1}{3},$$

из которого следует, что

$$\frac{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n}{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n} \leq \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует

$$(4.2) \quad \left| \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{a_{2\nu-2}^{(n)}} \right| = \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n}{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n} \leq \frac{1}{2}.$$

С другой стороны из (3.30) имеем

$$(4.3) \quad \left| \frac{a_{2\nu-1}^{(n)}}{a_{2\nu-2}^{(n)}} \right| = \frac{\Delta}{\Delta_x} \geq \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n}.$$

Из (4.2), (4.3) получается

$$\frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} \leq \frac{1}{2}$$

или $\lambda_{2\nu-1}^n / \lambda_{2\nu}^n \leq 2/3$. Но из (4.1) имеем $2\lambda_{2\nu}^n < \lambda_{2\nu-1}^n$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 2.2. Ясно, что

$$(4.4) \quad \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \eta_1^n}{\eta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n} = \left| \frac{f_{n+1}(\tau_{2\nu-1}^n)}{f_{n+1}(\tau_{2\nu-2}^n)} \right| = \left| \frac{a_{2\nu-1}^{(n+1)}}{a_{2\nu-2}^{(n+1)}} \right| = 2 + \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n+1,*}}{\lambda_{2\nu-1}^{n+1}}.$$

Поскольку $\mathcal{T}$ -квазидиадическая и $\lambda_i^{n,*}$ зависит только от λ_j^n , $j < i < 2\nu - 1$, то $\lambda_{2\nu-1}^{n+1} = \lambda_{2\nu-1}^n$ и $\lambda_{2\nu-2}^{n+1,*} = \lambda_{2\nu-2}^{n,*}$. Следовательно, из (4.4) имеем

$$\frac{\tau_{2\nu-1}^n - \eta_1^n}{\eta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n} = \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu-2}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n}.$$

Отсюда получим

$$(4.5) \quad \frac{\eta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \eta_1^n}{\eta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}} = \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu-2}^{n,*}}.$$

Нетрудно заметить, что (см. (3.23))

$$\frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n} = \left| \frac{f_n(\tau_{2\nu-2}^n)}{f_n(\tau_{2\nu-1}^n)} \right| = \left| \frac{a_{2\nu-2}^{(n)}}{a_{2\nu-1}^{(n)}} \right| = x^{(n)} = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Следовательно

$$(4.6) \quad \frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta_x}{\Delta}}.$$

Из (4.6) и (3.29) получаем

$$(4.7) \quad \frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} \geq \frac{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-2}^{n,*}(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + 3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)(3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}.$$

Из (4.7) и (4.5) имеем

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \frac{\xi_1^n - \eta_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} &\geq \frac{3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu-2}^{n,*}(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + 3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)(3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)} - \\ &\quad \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu-2}^{n,*}} = \\ &\quad \frac{\lambda_{2\nu-2}^{n,*}\lambda_{2\nu}^n(4\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n) + 6\lambda_{2\nu-1}^n\lambda_{2\nu}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}{(\lambda_{2\nu-2}^{n,*}(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n) + 3(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)(3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n))(\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 3\lambda_{2\nu-1}^n)} \end{aligned}$$

Последнее равенство получается простыми преобразованиями. Учитывая сильную регулярность последовательности $\mathcal{T}$, из (4.8) получим (2.2). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Из (3.32) имеем

$$(4.9) \quad \frac{\Delta}{\Delta_y} \geq \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Ясно, что

$$\frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_2^n}{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n} = \left| \frac{f_n(\tau_{2\nu}^n)}{f_n(\tau_{2\nu-1}^n)} \right| = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Отсюда следует

$$(4.10) \quad \frac{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_2^n}{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta_y}{\Delta}}$$

С другой стороны из C) леммы 3.1 имеем

$$\frac{\tau_{2\nu}^n - \eta_2^n}{\eta_2^n - \tau_{2\nu-1}^n} = \left| \frac{f_{n+1}(\tau_{2\nu}^n)}{f_{n+1}(\tau_{2\nu-1}^n)} \right| = 2 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^{n,*}}{\lambda_{2\nu}^n}.$$

Следовательно

$$(4.11) \quad \frac{\eta_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{2\nu}^n - \eta_2^n}{\eta_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}} = \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}}.$$

Из (4.9) – (4.11) имеем (см. также C) леммы 3.1)

$$\begin{aligned} \frac{\xi_{2\nu}^n - \eta_2^n}{\lambda_{2\nu}^n} &= \frac{1}{1 + \frac{\Delta_y}{\Delta}} - \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}} \geq \frac{1}{1 + \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}} - \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}} = \\ &= \frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}} - \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из очевидного неравенства

$$\frac{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}} > \frac{2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n}$$

следует

$$\frac{\xi_{2\nu}^n - \eta_2^n}{\lambda_{2\nu}^n} > \frac{2\lambda_{2\nu}^n}{2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n} - \frac{\lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu-1}^{n,*}} = \frac{3(\lambda_{2\nu}^n)^2}{(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)(\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)} > \alpha_\gamma.$$

Последнее неравенство выполняется в силу сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Функция f_{n-1} -линейная на $[\tau_{2\nu-2}^n, \tau_{2\nu}^n]$ и (см. E) леммы 3.1)

$$\frac{\theta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu}^n - \theta_1^n} = \left| \frac{f_{n-1}(\tau_{2\nu-2}^n)}{f_{n-1}(\tau_{2\nu}^n)} \right| = 2 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Следовательно,

$$(4.12) \quad \frac{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\tau_{2\nu}^n - \theta_1^n} = 1 + \frac{\theta_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu}^n - \theta_1^n} = 3 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

С учетом сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$, из (4.12) имеем

$$(4.13) \quad \frac{\tau_{2\nu}^n - \theta_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} = \frac{1}{3 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}} = \frac{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}} < \frac{1}{3} - \alpha_\gamma.$$

Из (4.13) и первого неравенства (2.1) из теоремы 2.1 следует первое неравенство (2.4).

Из (4.13) также имеем

$$(4.14) \quad \tau_{2\nu}^n - \theta_1^n = \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*}}.$$

Нетрудно заметить, что (см. лемму 3.2)

$$\frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_2^n}{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n} = \left| \frac{f_n(\tau_{2\nu}^n)}{f_n(\tau_{2\nu-1}^n)} \right| = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Поэтому

$$(4.15) \quad \frac{\xi_2^n - \tau_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n - \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{2\nu}^n - \xi_2^n}{\xi_2^n - \tau_{2\nu-1}^n}} - 1 = \frac{\Delta}{\Delta + \Delta_y} - 1.$$

Из (4.14) и (4.15) следует, что

$$(4.16) \quad \frac{\xi_2^n - \theta_1^n}{\lambda_{2\nu}^n} = \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*})} - \frac{\Delta_y}{\Delta + \Delta_y}.$$

Обозначим $D := \Delta_y/(\Delta + \Delta_y)$ и оценим D сверху. Из (3.27) и (3.28) подставляя выражения для Δ и Δ_y , получим

$$D = \frac{a\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + b}{c\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + d}$$

где

$$\begin{aligned} a &= 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n, \quad c = \lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n, \\ b &= 3\lambda_{2\nu-1}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n), \quad d = \lambda_{2\nu+1}^{n,*} \frac{\lambda_{2\nu-1}^n(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 3\lambda_{2\nu-1}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n). \end{aligned}$$

Обозначим $D_1 = a/c$ и $D_2 = b/d$. В силу замечания 3.1 имеем, что $D \leq \max(D_1, D_2)$. Сначала оценим D_1/D_2 .

$$(4.17) \quad \frac{D_1}{D_2} = \frac{ad}{bc} = \frac{(2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) \left(\lambda_{2\nu+1}^{n,*} \frac{\lambda_{2\nu-1}^n(2\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 3\lambda_{2\nu-1}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n) \right)}{3\lambda_{2\nu-1}^n(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n) \left(\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n \right)}$$

Простыми вычислениями убеждаемся, что в (4.17) числитель больше знаменателя. Следовательно $D_1 > D_2$. Поэтому $D \leq D_1$, т.е.

$$(4.18) \quad \frac{\Delta_y}{\Delta + \Delta_y} \leq \frac{a}{c} = \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Из (4.16), (4.18) следует, что

$$(4.19) \quad \frac{\xi_2^n - \theta_1^n}{\lambda_{2\nu}^n} \geq \frac{(\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)^2}{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n + \lambda_{2\nu+1}^{n,*})} - \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + \frac{\lambda_{2\nu}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)}{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}.$$

Последнее выражение приводя к общему знаменателю и группируя подобные слагаемые в числителе, в числителе получим

$$D_3 = (\lambda_{2\nu-1}^n)^2 (\lambda_{2\nu+1}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n).$$

В силу сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ имеем, что D_3 и общий знаменатель в (4.19) имеют порядок $(\lambda_{2\nu}^n)^3$. Поэтому из (4.19) следует второе неравенство из (2.4). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.5. Из пункта E) леммы 3.1 имеем

$$(4.20) \quad \frac{\zeta_1 - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \zeta_1} = 2 + \frac{\lambda_{2\nu}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n}.$$

Следовательно,

$$(4.21) \quad \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \zeta_1}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\zeta_1 - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \zeta_1}} = \frac{1}{3 + \frac{\lambda_{2\nu}^{n,*}}{\lambda_{2\nu-1}^n}} = \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^{n,*}}.$$

С другой стороны (см. (3.23) и (3.25)) имеем

$$(4.22) \quad \frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n} = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Поэтому

$$(4.23) \quad \frac{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{1}{1 + \frac{\xi_1^n - \tau_{2\nu-2}^n}{\tau_{2\nu-1}^n - \xi_1^n}} = \frac{\Delta}{\Delta + \Delta_x}.$$

Из (4.21) и (4.23) следует

$$(4.24) \quad \frac{\zeta_1 - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} = \frac{\Delta}{\Delta + \Delta_x} - \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^{n,*}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta_x}{\Delta}} - \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^{n,*}}.$$

Применяя (3.30) и пункт E) леммы 3.1, из (4.24) получим

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \frac{\zeta_1 - \xi_1^n}{\lambda_{2\nu-1}^n} &\geq \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n}{\lambda_{2\nu-2}^{n,*} + 2\lambda_{2\nu-1}^n}} - \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{6\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n} \geq \\ &\frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n} - \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n}{6\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n} = \frac{2\lambda_{2\nu-1}^n(3\lambda_{2\nu-1}^n + \lambda_{2\nu}^n)}{(3\lambda_{2\nu-1}^n + 2\lambda_{2\nu}^n)(6\lambda_{2\nu-1}^n + 3\lambda_{2\nu}^n)}. \end{aligned}$$

Учитывая сильную регулярность разбиения $\mathcal{T}$, из (4.25) получим неравенство (2.5). Теорема доказана.

Замечание 4.1. Если ζ_2 -нуль функции f_m из теоремы 2.5 на отрезке $[\tau_{2\nu-1}, \tau_{2\nu}]$, а ξ_2 -нуль функции f_n на том же отрезке, то возможны все три случая: $\zeta_2 < \xi_2$, $\zeta_2 = \xi_2$ и $\zeta_2 > \xi_2$.

Abstract. The paper obtains some estimates of the functions of a general Franklin system, which clarify the previously obtained estimates. Using these estimates, the relative position of the zeros of some functions of a general Franklin system is studied. Such estimates can be used to identify new properties of a general Franklin system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ph. Franklin, “A set of continuous orthonormal functions”, M -a th., (1928) Annalen, **100**, 522 – 529 (1928).
- [2] Z. Ciesielski, “Properties of the orthonormal Franklin system”, Studia Math., **23**, 141 – 157 (1963).
- [3] Z. Ciesielski, “Properties of the orthonormal Franklin system II”, Studia Math., **27**, 289 – 323 (1966).
- [4] Z. Ciesielski, A. Kamont, Survey on the orthogonal Franklin system, Approximation Theory, Darba, Sofia (2002).
- [5] Z. Ciesielski, A. Kamont, “Projections onto piecewise linear functions”, Funct. Approx. Comment. Math., **25**, 129 – 143 (1997).
- [6] G.G. Gevorkyan, A. Kamont, “On general Franklin systems”, Dissert. Math. (Rosprawy Mat.), **374**, 59pp. (1998).
- [7] G. G. Gevorkyan, A. A. Sahakian, “On unconditional basisness of general Franklin systems”, J. Contemp. Math. Anal., **35**:4, 2 – 22 (2000).
- [8] G.G. Gevorkyan, A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$ ”, Studia Math. **164**:2, 161 – 204 (2004).
- [9] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “General Franklin systems as bases in $H^1[0, 1]$ ”, Studia Math. **167**: 3, 259 – 292 (2005).
- [10] G. G. Gevorkyan, “Uniqueness theorems for Franklin series converging to integrable functions”, Sbornik Math., **209**: 6, 802 – 822 (2018).
- [11] Г. Г. Геворкян, “Теоремы единственности для рядов по системе Франклина”, Мат. Заметки, **98**: 5, 786 – 789 (2015).

Поступила 10 января 2024

После доработки 10 января 2024

Принята к публикации 24 апреля 2024