ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 59 № 4 2024

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն.Հ. Առաքելյան
Վ. Ս. Աթաբեկյան
Կ. Լ. Ավետիսյան
Գ.Գ. Գևորգյան
Մ. Ս. Գինովյան
Ա. Ս. Դալալյան
Ն. Բ. Ենգիբարյան
Վ. Կ. Օհանյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ)

Խ. Ա. Խաչատրյան
Գ. Ա. Կարագուլյան
Ռ. Վ. Համբարձումյան
Ա. Հ. Հովհաննիսյան
Յ. Շահգոլյան
Ա. Շիրիկյան
Բ. Ս. Նահապետյան
Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Ահարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

К.Л. Аветисян
Р. В. Амбарцумян
Н. У. Аракелян
В. С. Атабекян
Г. Г. Геворкян
М С. Гиновян
А.С. Далалян
В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян
Б. С. Нахапетян
Г. А. Карагулян
А. О. Оганнисян
Б. М. Погосян
Х. А. Хачатрян
Г. Шахголян
А. Ширикян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал ``Известия НАН Армении, Математика'' публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата A4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
   - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
   - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
   - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы , место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала ``Известия НАН Армении, Математика'', пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения, E-mail: sart@ysu.am, URL: http://www.maik.ru
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале ``Journal of Contemporary Mathematical Analysis''. URL: http://www.springer.com.

****

Заказ N1287. Тираж 150. Подписано к печати 22.01.24.
Печ. л. 6.25. Бумага офсетная. Цена договорная.
Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

Известия НАН Армении, Математика, том 59, н. 4, 2024, стр. 3 – 26.

БЕЗУСЛОВНАЯ БАЗИСНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СПЛАЙН-СИСТЕМ В $H^1(\mathbb{T})$: НЕОБХОДИМОСТЬ

Л. АКОПЯН

Ереванский государственный университет
Университет Южной Калифорнии, Лос-Анджелес, Калифорния
E-mail: *levonhakobyan.5@edu.ysu.am*

Аннотация. Дана геометрическая характеристика последовательностей узлов (s_n), которая является необходимым условием того, чтобы соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система произвольного порядка k, $k \in \mathbb{N}$ была безусловным базисом в атомном пространстве Харди $H^1(\mathbb{T})$.

MSC2020 number: 42C10; 46E30.

Ключевые слова: ортонормированная сплайн-система; периодическая сплайн-система; безусловный базис.

1. Введение

В данной статье мы исследуем периодические ортонормированные сплайн-системы произвольного порядка k с произвольными разбиениями. Рассматриваем такие плотные последовательности точек на торе $\mathbb{T}$, где каждая точка встречается не более k раз. Такие последовательности точек называются k *допустимыми на торе* $\mathbb{T}$.

Дана характеризация последовательностей узлов, которая является необходимым условием того, чтобы соответствующая периодическая ортонормированная сплайн-система порядка k была безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Главное внимание в настоящей статье уделяется периодической версии необходимости основного результата [1]. Объединив наш результат с основной теоремой, доказанной в [2], мы получаем необходимое и достаточное условие, при котором периодическая ортонормированная сплайн-система является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Приведем некоторые важные результаты, связанные с этими вопросами.

Знаменитый результат А. Шадрина [3] утверждает, что оператор ортогонального проектирования на пространства $\mathcal{S}_n$ ограничен на $L^\infty[0,1]$ постоянной, зависящей только от порядка сплайна k. Как следствие, непериодическая ортонормированная сплайн-система $(f_n)_n$ является базисом Шаудера в $L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$ и в пространстве непрерывных функции $C[0,1]$. Существуют различные результаты о безусловной базисности систем сплайнов, ограничивающих либо порядок сплайна k, либо разбиение $(t_n)_{n\ge 0}$.

Первый результат в этом направлении встречается в [4], где доказано, что классическая система Франклина—ортонормированная система сплайнов порядка 2, соответствующая последовательности диадических узлов является безусловным базисом в $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Этот результат был обобщен в [5] для ортонормированных сплайн-систем произвольного порядка, но соответствующие только диадическими узлами. Далее, значительные усилия были приложены, чтобы получить аналогичные результаты для последовательностей удовлетворяющим некоторым ограничениям. Эти ограничения были постепенно сняты и были получены результаты для общих систем Франклина в серии статей [6] – [8]. Для случая $k = 2$ был получен следующий окончательный результат - для каждой допустимой последовательности точек $(t_n)_{n\ge 0}$ соответствующая общая система Франклина образует безусловный базис в $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Сочетая методы используемые в [7, 8] с некоторыми новыми неравенствами из [9], в [10] было доказано, что непериодические ортонормированные сплайн-системы являются безусловными базисами в $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$, для сплайн-систем любого порядка k и для любой допустимой последовательности точек (t_n).

Периодический аналог теоремы Шадрина доказан в [11]. В случае диадических узлов в работе Дж. Домста [12] получены экспоненциальные оценки для обратной матрицы Грама периодических B-сплайнов, которые были использованы для доказательства безусловной базисности периодических ортонормированных сплайн-систем с диадическими узлами в L^p для $1 < p < \infty$. В работе [13] было доказано, что для любой допустимой последовательности точек, соответствующая периодическая система Франклина (т.е. случай $k = 2$) образует безусловный базис в $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$. К. Керян и М. Пассенбруннер [14] получили важную оценку для функций общих периодических ортонормированных сплайн-систем.

Объединив эту оценку с методами, разработанными в [8], авторы смогли доказать безусловную базисность периодических ортонормированных сплайн-систем в $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$.

Г. Г. Геворкян и А. Камонт в [15] получили простые геометрические характеристики всех последовательностей узлов, для которых соответствующая общая система Франклина является базисом или безусловным базисом в $H^1[0,1]$. После этого, используя следствия результата Шадрина, полученного З. Чисельским [16], Г. Г. Геворкян и А. Камонт [17] обобщили свой результата из [15] для ортонормированных сплайн-систем произвольного порядка и получили характеристику последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормированная сплайн-система порядка k является базисом в $H^1[0,1]$.

Другой важный вклад в изучение периодических ортонормированных систем сплайнов был сделан М. П. Погосяном и К. А. Керяном в [18]. Простая геометрическая характеристика последовательностей узлов была дана в упомянутой статье [18]. Для этих типов последовательностей узлов соответствующие общие периодические системы Франклина являются базисом или безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. В недавней статье [19] авторы настоящей статьи предоставили необходимое и достаточное условие, при котором периодическая ортонормированная сплайн-система является базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Структура данной работы следующая. В разделе 2 мы даем необходимые определения и формулировку основного результата статьи: Теорема 2.4. В разделах 3 и 4 мы напоминаем несколько важных фактов. В частности, в разделе 4 представляем понятие характеристических интервалов как для периодических, так и для непериодических ортонормированных сплайн-систем с произвольными узлами, а также важные оценки для ортонормированных сплайн-систем. Доказательство теоремы 2.4 приведено в разделе 5.

2. Определения и основные результаты

2.1. **Непериодический случай.** Предположим, что $k \geq 2$ — целое число. Пусть $\mathcal{T} = (t_n)_{n=2}^{\infty}$ — всюду плотная последовательность точек на единичном интервале такая, что каждая точка встречается не более k раз. Кроме того, определим $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$. Такие последовательности точек называются *k-допустимыми*. Для n из интервала $-k+2 \leq n \leq 1$ пусть $\mathcal{S}_n^{(k)}$ — пространство полиномов порядка $n+k-1$ (или степени $n+k-2$) на интервале $[0,1]$ и $(f_n^{(k)})_{n=-k+2}^{1}$ — набор ортонормированных многочленов из $L^2 \equiv L^2[0,1]$, для которых степень $f_n^{(k)}$ равна $n+k-2$. Для $n \geq 2$ пусть $\mathcal{T}_n$ — упорядоченная последовательность точек, состоящая из точек сетки $(t_j)_{j=0}^{n+1}$ с учетом кратностей, где узлы 0 и 1 имеют кратность k, т. е. $\mathcal{T}_n$ имеет вид

$$\mathcal{T}_n = (0 = \tau_{n,-k} = \cdots = \tau_{n,-1} < \tau_{n,0} \leq \\ \leq \cdots \leq \tau_{n,n-1} < \tau_{n,n} = \cdots = \tau_{n,n+k-1} = 1).$$

В этом случае мы определяем $\mathcal{S}_n^{(k)}$ как пространство полиномиальных сплайнов порядка k с точками сетки $\mathcal{T}_n$. Для каждого $n \geq 2$ пространство $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$ имеет коразмерность 1 в $\mathcal{S}_n^{(k)}$ и, следовательно, существует функция $f_n^{(k)} \in \mathcal{S}_n^{(k)}$, ортонормированная пространству $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$. Заметим, что эта функция $f_n^{(k)}$ единственная с точностью до знака.

Определение 2.1. *Система функций* $(f_n^{(k)})_{n=-k+2}^{\infty}$ *называется* ортонормальная сплайн-система порядка k, соответствующая последовательности $(t_n)_{n=0}^{\infty}$.

Часто мы будем пропускать параметр k и писать f_n и $\mathcal{S}_n$ вместо $f_n^{(k)}$ и $\mathcal{S}_n^{(k)}$, соответственно.

Под $H^1 = H^1[0,1]$ мы подразумеваем атомное пространство Харди на $[0,1]$ (см. [20]). Теперь введем определение регулярности последовательности $\mathcal{T}$.

Для $n \geq 2$, $\ell \leq k$ и i из интервала $-\ell \leq i \leq n-1$ определим $D_{n,i}^{(\ell)}$ как интервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+\ell}]$.

Определение 2.2. *Пусть* $\ell \leq k$ *и* $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ *— ℓ-допустимая последовательность точек. Тогда, эта последовательность называется* ℓ-регулярной с параметром $\gamma \geq 1$, *если*

$$\frac{|D_{n,i}^{(\ell)}|}{\gamma} \leq |D_{n,i+1}^{(\ell)}| \leq \gamma |D_{n,i}^{(\ell)}|, \qquad n \geq 2,\ -\ell \leq i \leq n-2.$$

Другими словами, (t_n) ℓ-регулярна, если существует постоянная $\gamma \geq 1$, такая, что для всех n соотношения длин соседних носителей B-сплайн-функций (см. раздел 3.1) порядка ℓ с узлами из $\mathcal{T}_n$ ограничены γ-ой.

В этом разделе мы представим две теоремы, которые являются источниками вопросов, рассматриваемых в этой статье.

Теорема 2.1 ([17]). *Пусть $k \geq 1$ и (t_n) k-допустимая последовательность узлов в $[0,1]$ с соответствующей ортонормированной сплайн-системой* $(f_n^{(k)})$

порядка k. В таком случае $(f_n^{(k)})$ является базисом в $H^1[0,1]$ тогда и только тогда, когда (t_n) k-регулярна с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.

Теорема 2.2 ([1])**.** *Пусть (t_n) — k-допустимая последовательность точек. Соответствующая ортонормированная сплайн система $(f_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1[0,1]$, тогда и только тогда, когда (t_n) удовлетворяет условию $(k-1)$-регулярности с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.*

2.2. **Периодический случай.** Пусть $k \geq 2$ — целое число и $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ — k допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$, т.е. всюду плотная последовательность точек на торе $\mathbb{T}$ такая, что каждая точка встречается не более k раз.

Для $n \geq k$ определим $\hat{\mathcal{S}}_n$ как пространство периодических полиномиальных сплайнов порядка k с точками сетки $(s_j)_{j=1}^{n} \in \mathbb{T}$. Для каждого $n \geq k+1$ пространство $\hat{\mathcal{S}}_{n-1}$ имеет коразмерность 1 в $\hat{\mathcal{S}}_n$ и, следовательно, существует функция $\hat{f}_n \in \hat{\mathcal{S}}_n$ такая, что $\|\hat{f}_n\|_2 = 1$ и ортогональна пространству $\hat{\mathcal{S}}_{n-1}$. Заметим, что эта функция $\hat{f}_n$ единственна с точностью до знака. Кроме того, пусть $(\hat{f}_n)_{n=1}^{k}$ — ортонормированный базис для $\hat{\mathcal{S}}_k$. Система функций $(\hat{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *периодической* ортонормированной сплайн-системой порядка k, соответствующая последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Теперь определим атомное пространство Харди на $\mathbb{T}$.

Определение 2.3. $a : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *называется* периодическим атомом*, если либо $a \equiv 1$, либо существует интервал $\Gamma \subset \mathbb{T}$ такой, что выполняются следующие условия:*

(1) $\operatorname{supp} a \subset \Gamma$,
(2) $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq |\Gamma|^{-1}$,
(3) $\int_{\mathbb{T}} a(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma} a(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Определение 2.4. *$H^1(\mathbb{T})$ является семейством всех функций f, которые имеют представление*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$$

для некоторых периодических атомов $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и действительных скаляров $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$.

Пространство $H^1(\mathbb{T})$ становится банаховым при норме

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{T})} := \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

где inf берется по всем (периодическим) атомным представлениям $\sum c_n a_n$ функции f. Теперь введем условия регулярности на торе $\mathbb{T}$ для последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Предположим, что $n \geq k+1$ и пусть $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ — упорядоченная последовательность узловых точек, состоящая из $(s_j)_{j=1}^{n}$ на $\mathbb{T}$, канонически отождествленных с $[0,1)$:

$$\hat{\mathcal{T}}_n = (0 \leq \sigma_{n,0} \leq \sigma_{n,1} \leq \cdots \leq \sigma_{n,n-2} \leq \sigma_{n,n-1} < 1).$$

Для целых $\ell \leq k$ и $i \in \mathbb{N}_0$ определим интервал $T_{n,i}^{(\ell)} := [\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+\ell}] \subset \mathbb{T}$. Здесь мы считаем индекс i периодическим, т.е. используем обозначение периодического расширения последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $\sigma_{rn+j} = r + \sigma_j$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и $r \in \mathbb{Z}$, а подиндексами B-сплайн функций возьмем индексы по модулю n.

Определение 2.5. *Пусть $\ell \leq k$ и $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ — ℓ-допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$. Тогда эта последовательность называется* ℓ-регулярной на торе $\mathbb{T}$ с параметром $\gamma \geq 1$, *если*

$$\frac{|T_{n,i}^{(\ell)}|}{\gamma} \leq |T_{n,i+1}^{(\ell)}| \leq \gamma |T_{n,i}^{(\ell)}|, \qquad n \geq \ell+1,\ i \in \mathbb{N}_0.$$

Другими словами, (s_n) является ℓ-регулярным на торе $\mathbb{T}$, если существует постоянная $\gamma \geq 1$, такая, что для всех $n \geq \ell$ соотношения длин соседних носителей периодических B-сплайнов (см. раздел 3.1) порядка ℓ с узлами $\hat{\mathcal{T}}_n$ ограничены γ-ой.

Следующая теорема является основным результатом данной работы и характеризует системы $(\hat{f}_n^{(k)})$, которые являются базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Теорема 2.3 ([19])**.** *Пусть $k \geq 1$ и (s_n) k-допустимая последовательность узлов в $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн системой $(\hat{f}_n^{(k)})$ порядка k. В таком случае $(\hat{f}_n^{(k)})$ является базисом в $H^1(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда (s_n) k-регулярна на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.*

В этой статье мы представляем необходимое условие, при котором $(\hat{f}_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 2.4. *Пусть (s_n) — k-допустимая последовательность точек тора $\mathbb{T}$. Если соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система $(\hat{f}_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$, то (s_n) удовлетворяет условию $(k-1)$-регулярности на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.*

С другой стороны, основной результат из [2] дает достаточное условие, при котором $(\hat{f}_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Теорема 2.5 ([2])**.** *Пусть (s_n) — k-допустимая последовательность точек тора $\mathbb{T}$. Если (s_n) удовлетворяет условию $(k-1)$-регулярности на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$, то соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система $(\hat{f}_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$.*

Таким образом, объединяя эти две теоремы, получаем следующее следствие.

Следствие 2.1. *Пусть (s_n) — k-допустимая последовательность точек тора $\mathbb{T}$. Тогда соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система $(\hat{f}_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$, тогда и только тогда, когда (s_n) удовлетворяет условию $(k-1)$-регулярности на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.*

3. Предварительные сведения

Параметр $k \geq 2$ всегда будет использоваться для определения порядка базовых полиномов или сплайнов. Обозначение $A(t) \sim B(t)$ будет использоваться при существовании двух констант $c_1, c_2 > 0$, таких что $c_1 B(t) \leq A(t) \leq c_2 B(t)$ для всех t, где t представляет собой все явные и неявные зависимости, которые могут иметь выражения A и B. Если константы c_1, c_2 зависят от дополнительного параметра p, мы будем писать $A(t) \sim_p B(t)$. Соответственно, будем использовать символы $\lesssim, \gtrsim, \lesssim_p, \gtrsim_p$. Кроме этого, будем использовать символы $\curvearrowleft$ и $\curvearrowright$ для обозначения направлений против и по часовой стрелке, соответственно. Направление против часовой стрелки будем считать положительным направлением. Для подмножества E вещественной прямой через $|E|$ обозначим меру Лебега E, а $\mathbb{1}_E$ - характеристическую функцию E. Если $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — вещественная функция, а λ — вещественный параметр, то множество всех точек, в которых f больше λ, обозначим $[f > \lambda] := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \lambda\}$.

3.1. **Свойства функций B-сплайн.** Определим функции $(N_{n,i}^{(k)})_{i=-k}^{n-1}$ — совокупность B-сплайнов порядка k, соответствующие разбиению $\mathcal{T}_n$. Эти функции нормированы таким образом, что они образуют разбиение единицы, т. е. $\sum_{i=-k}^{n-1} N_{n,i}^{(k)}(x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$. С этим базисом связан биортогональный базис $\mathcal{S}_n$, который мы обозначим через $(N_{n,i}^{(k)*})_{i=-k}^{n-1}$. Если значения параметров k и n ясны из контекста, то мы будем использовать также эти обозначения $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$ и $(N_i^*)_{i=-k}^{n-1}$ соответственно.

Теперь представим важный результат для B-сплайнов (N_i) и двойственных им функций (N_i^*).

Предложение 3.1. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и $g = \sum_{j=-k}^{n-1} a_j N_j$, где набор $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$ — B-сплайны порядка k, соответствующие разбиению $\mathcal{T}_n$. Тогда,*

$$|a_j| \lesssim_k |I_j|^{-1/p} \|g\|_{L^p(I_j)}, \qquad -k \le j \le n-1, \tag{3.1}$$

где I_j — подынтервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ интервала $[\tau_{n,j}, \tau_{n,j+k}]$ максимальной длины.

Кроме того,

$$\|g\|_p \sim_k \Big(\sum_{j=-k}^{n-1} |a_j|^p |D_{n,j}^{(k)}| \Big)^{1/p} = \|(a_j |D_{n,j}^{(k)}|^{1/p})_{j=-k}^{n-1}\|_{\ell^p}. \tag{3.2}$$

Более того, если $h = \sum_{j=-k}^{n-1} b_j N_j^*$, то

$$\|h\|_p \sim_k \Big(\sum_{j=-k}^{n-1} |b_j|^p |D_{n,j}^{(k)}|^{1-p} \Big)^{1/p} = \|(b_j |D_{n,j}^{(k)}|^{1/p-1})_{j=-k}^{n-1}\|_{\ell^p}. \tag{3.3}$$

Неравенства (3.1) и (3.2) являются соответственно леммой 4.1 и 4.2 в [21, Глава 5], а неравенство (3.3) является следствием теоремы Шадрина [3] о том, что оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{S}_n^{(k)}$ ограничен в L^∞ независимо от n и $\mathcal{T}_n$. Вывод нижней оценки для (3.3) можно найти в [16, Свойство P.7], а доказательство верхней оценки (3.3) приведено в [14, Предложение 2.4]

Следующее, что нужно рассмотреть, это оценки для матрицы $(a_{ij})_{i,j=-k}^{n-1}$, являющиеся обратной матрицей Грама $(\langle N_i, N_j \rangle)_{i,j=-k}^{n-1}$. Позже нам понадобится одно особое свойство этой матрицы, которое заключается в том, что

$$(-1)^{i+j} a_{ij} \ge 0 \quad \text{для всех } i,j. \tag{3.4}$$

Это простое следствие полной положительности матрицы Грама $(\langle N_i, N_j \rangle)_{i,j=-k}^{n-1}$, см. [22, 23]. Кроме того, нам понадобится следующая оценка для $a_{i,i}$:

$$|D_{n,i}^{(k)}|^{-1} \lesssim_k a_{i,i}. \tag{3.5}$$

Эта оценка является следствием полной положительности B-сплайновой матрицы Грама, L^2-устойчивости B-сплайнов и следующей леммы 3.1.

Лемма 3.1 ([10])**.** *Пусть* $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ *— симметричная и положительно определенная матрица. Тогда для* $(d_{ij})_{i,j=1}^n = C^{-1}$ *имеем*

$$c_{ii}^{-1} \le d_{ii}, \qquad 1 \le i \le n.$$

Из теоремы Шадрина ([3]) следует, что элементы обратной матрицы B-сплайна Грама удовлетворяют следующему неравенству.

Теорема 3.1 ([9])**.** *Пусть* $(a_{i,j})_{i,j=-k}^{n-1}$ *— обратная матрица Грама* $(\langle N_i, N_j\rangle)_{i,j=-k}^{n-1}$ *B-сплайн-функций, где* N_i *соответствует разбиению* $\mathcal{T}_n$ *. Тогда,*

$$|a_{i,j}| \lesssim_k \frac{q^{|i-j|}}{|\operatorname{conv}(\operatorname{supp} N_i \cup \operatorname{supp} N_j)|} =: \frac{q^{|i-j|}}{h_{i,j}}, \qquad -k \le i, j \le n-1,$$

где постоянная $q \in (0,1)$ *зависит только от порядка сплайна* k*, а для* $U \subset [0,1]$ *через* $\operatorname{conv}(U)$ *обозначен наименьший подынтервал* $[0,1]$ *содержащий* U*.*

Теперь мы рассмотрим периодические B-сплайны и их свойства.

Пусть $n \ge k$ и $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$ периодические B-сплайн функции порядка k соответствующие произвольной k-допустимой последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ на торе $\mathbb{T}$, канонически отождествляемой с $[0,1)$:

$$\hat{\mathcal{T}}_n = (0 \le \sigma_0 \le \sigma_1 \le \cdots \le \sigma_{n-2} \le \sigma_{n-1} < 1).$$

Пусть $(\hat{N}_{n,i}^{(k)*})_{i=0}^{n-1}$ — двойственный базис к $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$ и $\hat{\mathcal{S}}_{\hat{\mathcal{T}}_n}$ — линейная оболочка $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$. Отметим, что вместо обозначений $\hat{N}_{n,i}^{(k)}$ и $\hat{N}_{n,i}^{(k)*}$ мы можем использовать $\hat{N}_i$ и $\hat{N}_i^*$ соответственно. Определим матрицу $(\hat{a}_{ij})_{i,j=0}^{n-1} = (\langle \hat{N}_i^*, \hat{N}_j^*\rangle)_{i,j=0}^{n-1}$.

Нам понадобится следующая известная формула для производной линейной комбинации периодических B-сплайн функций: если $g = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \hat{N}_{n,j}^{(k)}$, то

$$g' = (k-1)\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) \frac{\hat{N}_{n,j}^{(k-1)}}{|T_{n,j}^{(k-1)}|}. \tag{3.6}$$

Здесь мы использовали обозначение периодического расширения последовательности коэффициентов $(a_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $a_{rn+j} = a_j$ для $j = 0, \dots, n-1$ и $r \in \mathbb{Z}$.

4. Свойства непериодических и периодических ортонормированных сплайн-функций и характеристических интервалов

4.1. **Непериодический случай.** В этом разделе мы рассмотрим ортонормированные сплайн-функции $f_n = f_n^{(k)}$, где $k \in \mathbb{N}$ фиксировано. Рассмотрим сетку $\mathcal{T}_n$:

$$\mathcal{T}_n = (0 = \tau_{n,-k} = \cdots = \tau_{n,-1} < \tau_{n,0} \leq \cdots \leq \tau_{n,i_0} \\ \leq \cdots \leq \tau_{n,n-1} < \tau_{n,n} = \cdots = \tau_{n,n+k-1} = 1).$$

Для простоты мы будем часто опускать индекс n. Пусть $\widetilde{\mathcal{T}_n}$ получается из $\mathcal{T}_n$, удалением выделенного τ_{i_0} из сетки. Рассмотрим функции $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$, т.е. совокупность B-сплайн-функций порядка k, соответствующих сетке $\mathcal{T}_n$ и через $(\widetilde{N}_i : -k \leq i \leq n-2)$ обозначим совокупность B-сплайн-функций, соответствующих $\widetilde{\mathcal{T}_n}$. Формула Бёма [24] дает нам следующую связь между N_i и $\widetilde{N}_i$:

(4.1)
$$\begin{cases} \widetilde{N}_i(t) = N_i(t) & \text{если } -k \leq i \leq i_0 - k - 1, \\ \widetilde{N}_i(t) = \dfrac{\tau_{i_0} - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} N_i(t) + \dfrac{\tau_{i+k+1} - \tau_{i_0}}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} N_{i+1}(t) & \text{если } -k \leq i \leq i_0 - 1, \\ \widetilde{N}_i(t) = N_{i+1}(t) & \text{если } i_0 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

Чтобы вычислить ортонормированную сплайн-функцию, соответствующую разбиениям $\widetilde{\mathcal{T}_n}$ и $\mathcal{T}_n$, сначала определим функцию $g_n \in \operatorname{span}\{N_i : -k \leq i \leq n-1\}$ такую, что $g_n \perp \widetilde{N}_j$ для всех $-k \leq j \leq n-2$. Функция g_n имеет вид (с точностью до постоянного множителя)

$$g_n = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j N_j^* = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \sum_{l=-k}^{n-1} \alpha_j a_{jl} N_l = \sum_{l=-k}^{n-1} w_l N_l, \tag{4.2}$$

где $(a_{jl})_{j,l=-k}^{n-1}$ — обратная матрица Грама $(\langle N_j, N_l \rangle)_{j,l=-k}^{n-1}$ и

$$w_l := \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j a_{jl}, \qquad -k \leq l \leq n-1. \tag{4.3}$$

Коэффициенты α_j имеют вид

$$\alpha_j = (-1)^{j-i_0+k} \Big(\prod_{\ell=i_0-k+1}^{j-1} \frac{\tau_{i_0} - \tau_\ell}{\tau_{\ell+k} - \tau_\ell} \Big) \Big(\prod_{\ell=j+1}^{i_0-1} \frac{\tau_{\ell+k} - \tau_{i_0}}{\tau_{\ell+k} - \tau_\ell} \Big), \quad i_0 - k \leq j \leq i_0. \tag{4.4}$$

Кроме того, коэффициенты α_j можно описать соотношением

$$\alpha_{i+1} \frac{\tau_{i+k+1} - \tau_{i_0}}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} + \alpha_i \frac{\tau_{i_0} - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} = 0. \tag{4.5}$$

Заметим также, что последовательность (α_j) знакопеременная, а поскольку знаки элементов матрицы $(a_{j\ell})_{j,\ell=-k}^{n-1}$ совпадает с $(-1)^{i+j}$, то коэффициенты B-сплайна g_n удовлетворяют соотношению

$$\Big|\sum_{j=i_0-k}^{i_0}\alpha_j a_{j\ell}\Big| = \sum_{j=i_0-k}^{i_0}|\alpha_j a_{j\ell}|, \qquad -k \le j \le n-1. \tag{4.6}$$

Чтобы дать оценки для g_n и нормированной функции $f_n = g_n/\|g_n\|_2$, сопоставим каждой функции g_n характеристический интервал, который представляет собой интервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ с концами из сетки и лежит вблизи вновь вставленной точки τ_{n,i_0}.

Отметим, что мы опускаем индекс n в следующем определении:

Определение 4.1 (Характеристический интервал для непериодических последовательностей)**.** *Пусть $\mathcal{T}, \widetilde{\mathcal{T}}$ такие разбиения, как указано выше, а τ_{i_0} — новая точка в $\mathcal{T}$, которой нет в $\widetilde{\mathcal{T}}$. Определим* характеристический интервал J, соответствующий τ_{i_0} *следующим образом:*

(1) Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \{i_0 - k \le j \le i_0 : |[\tau_j, \tau_{j+k}]| \le 2 \min_{i_0-k\le \ell\ \le i_0} |[\tau_\ell, \tau_{\ell+k}]|\}$$

— множество всех индексов j, для которых соответствующий носитель B-сплайн-функции N_j приближенно минимален. Заметим, что $\Lambda^{(0)}$ непусто.

(2) Определим

$$\Lambda^{(1)} := \{j \in \Lambda^{(0)} : |\alpha_j| = \max_{\ell\in\Lambda^{(0)}} |\alpha_\ell|\}.$$

Для произвольного, но фиксированного индекса $j^{(0)} \in \Lambda^{(1)}$ положим $J^{(0)} := [\tau_{j^{(0)}}, \tau_{j^{(0)}+k}]$.

(3) Теперь, интервал $J^{(0)}$ можно записать как объединение k интервалов сетки

$$J^{(0)} = \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [\tau_{j^{(0)}+\ell}, \tau_{j^{(0)}+\ell+1}] \qquad \text{с } j^{(0)} \text{ как указано выше.}$$

Определим характеристический интервал $J_n = J = J(\tau_{i_0})$ *как один из выше указанных k интервалов, имеющий максимальную длину.*

Используя это определение, напомним следующие оценки для $g = g_n$:

Лемма 4.1 ([10])**.** *Пусть $\mathcal{T}$, $\widetilde{\mathcal{T}}$ такие, как указано выше и пусть*

$$g = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j N_j^* = \sum_{j=-k}^{n-1} w_j N_j$$

функция из (4.2)*, где коэффициенты* (w_j) *определяются уравнением* (4.3)*. Кроме того, пусть* $f = g/\|g\|_2$ *—* L^2*-нормированная ортогональная сплайн функция, соответствующая точке сетки* τ_{i_0}*.*

Тогда,

$$\|g\|_{L^p(J)} \sim_k \|g\|_p \sim_k |J|^{1/p-1}, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

и, следовательно,

$$\|f\|_{L^p(J)} \sim_k \|f\|_p \sim_k |J|^{1/p-1/2}, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

где J *— характеристический интервал, связанный с точкой* τ_{i_0}*, заданной в определении 4.1.*

Кроме того, если $d_{\mathcal{T}}(x)$ *обозначает количество узлов из* $\mathcal{T}$*, лежащих между* J *и* x*, включая* x *и конечные точки* J*, то существует* $q \in (0,1)$*, зависящий только от* k*, такой, что*

$$|w_j| \lesssim_k \frac{q^{d_{\mathcal{T}}(\tau_j)}}{|J| + \operatorname{dist}(\operatorname{supp} N_j, J) + |D_{n,j}^{(k)}|} \quad \text{для всех } -k \le j \le n-1. \tag{4.7}$$

4.2. **Периодический случай.** Здесь мы даем оценки для периодических ортонормированных сплайн-функций $(\hat{f}_n)$, аналогичные тем, которые приведены в лемме 4.1. Некоторые из них доказаны в [14]. Докажем другие оценки, отсутствующие в предыдущей статье.

Имеем ту же ситуацию, что и в непериодическом случае: Пусть

$$\hat{\mathcal{T}}_n = \hat{\mathcal{T}} = (0 \le \sigma_0 \le \sigma_1 \le \cdots \le \sigma_{i_0} \le \cdots \le \sigma_{n-2} \le \sigma_{n-1} < 1)$$

— разбиение $\mathbb{T}$, канонически отождествляемое с $[0,1)$, а $\tilde{\hat{\mathcal{T}}}$ — то же самое разбиение, но с удаленной σ_{i_0}. Напомним обозначения периодических B-сплайн-функций порядка k относительно $\hat{\mathcal{T}}$, т.е. $(\hat{N}_j)_{j=0}^{n-1}$ и через $(\tilde{\hat{N}}_j)_{j=0}^{n-2}$ обозначим периодические B-сплайн функции порядка k относительно $\tilde{\hat{\mathcal{T}}}$. Здесь мы напомним обозначения периодического расширения последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $\sigma_{rn+j} = r + \sigma_j$ для $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $r \in \mathbb{Z}$ и индексы B-сплайн функций возьмем по модулю n.

Чтобы вычислить периодические ортонормированные сплайн-функции, соответствующие приведенным выше сеткам определим функцию $\hat{g}_n := \hat{g} \in \operatorname{span}\{\hat{N}_i :$

$0 \le i \le n-1\}$ такую, что $\hat{g} \perp \tilde{\hat{N}}_j$ для всех $0 \le j \le n-2$. То есть предполагаем, что $\hat{g}$ имеет вид

$$\hat{g} = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_j \hat{N}_j^*,$$

где $\hat{\alpha}_j = \langle g, \hat{N}_j \rangle$. Чтобы $\hat{g}$ была ортогональна $\tilde{\hat{N}}_j$ для $0 \le j \le n-2$ она должна удовлетворять тождествам

$$0 = \langle \hat{g}, \tilde{\hat{N}}_i \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_j \langle \hat{N}_j^*, \tilde{\hat{N}}_i \rangle, \qquad 0 \le i \le n-2.$$

Здесь мы можем рассматривать индексы j как периодические, что означает $\hat{\alpha}_j \ne 0$ только для $j \in \{i_0 - k, \dots, i_0\}$. Важно отметить, что формула (4.1) имеет место в периодическом случае, что влечет за собой следующее отношение для коэффициентов $(\hat{\alpha}_j)$:

$$\hat{\alpha}_{i+1} \frac{\sigma_{i+k+1} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{i+k+1} - \sigma_{i+1}} + \hat{\alpha}_i \frac{\sigma_{i_0} - \sigma_i}{\sigma_{i+k} - \sigma_i} = 0, \qquad i_0 - k \le i \le i_0 - 1. \tag{4.8}$$

С начальным значением

$$\hat{\alpha}_{i_0 - k} = \prod_{\ell = i_0 - k + 1}^{i_0 - 1} \frac{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_\ell},$$

мы получаем явную формулу

(4.9)
$$\hat{\alpha}_j = (-1)^{j - i_0 + k} \Big(\prod_{\ell = i_0 - k + 1}^{j-1} \frac{\sigma_{i_0} - \sigma_\ell}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_\ell} \Big) \cdot \Big(\prod_{\ell = j+1}^{i_0 - 1} \frac{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_\ell} \Big), \qquad i_0 - k \le j \le i_0.$$

Теперь, аналогично определению 4.1, представим характеристические интервалы для периодических сеток.

Определение 4.2 (Характеристический интервал для периодических последовательностей)**.** *Пусть $\hat{\mathcal{T}}, \tilde{\hat{\mathcal{T}}}$ такие разбиения, как указано выше и σ_{i_0} — новая точка в $\hat{\mathcal{T}}$, которой нет в $\tilde{\hat{\mathcal{T}}}$. При ограничении $n \ge 2k$ определим* (периодический) характеристический интервал $\hat{J}$, соответствующий σ_{i_0}, *следующим образом:*

(1) Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \{ i_0 - k \le j \le i_0 : |[\sigma_j, \sigma_{j+k}]| \le 2 \min_{i_0 - k \le \ell \le i_0} |[\sigma_\ell, \sigma_{\ell+k}]| \}$$

— множество всех индексов j в окрестности индекса i_0 для которого соответствующий носитель периодической B-сплайн-функции $\hat{N}_j$ приближенно минимален. Понятно, что $\Lambda^{(0)}$ непусто.

(2) *Определим*

$$\Lambda^{(1)} := \{j \in \Lambda^{(0)} : |\hat{\alpha}_j| = \max_{\ell \in \Lambda^{(0)}} |\hat{\alpha}_\ell|\}.$$

Для произвольного, но фиксированного индекса $j^{(0)} \in \Lambda^{(1)}$ *положим* $\hat{J}^{(0)} := [\sigma_{j^{(0)}}, \sigma_{j^{(0)}+k}]$.

(3) *Теперь, интервал* $\hat{J}^{(0)}$ *можно записать как объединение* k *интервалов сетки*

$$\hat{J}^{(0)} = \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [\sigma_{j^{(0)}+\ell}, \sigma_{j^{(0)}+\ell+1}] \qquad \text{с } j^{(0)} \text{ как указано выше.}$$

Определим (периодический) характеристический интервал $\hat{J} = \hat{J}(\sigma_{i_0})$ *как один из выше указанных* k *интервалов с максимальной длиной.*

Лемма 4.2 ([14])**.** *Пусть* $n \geq 2k+2$. *Если* $\hat{g} = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{w}_i \hat{N}_i$, *то для коэффициентов* $\hat{w}_i := \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \hat{\alpha}_j \hat{a}_{ij}$ *верна следующая оценка:*

$$|\hat{w}_i| \lesssim q^{\hat{d}(i,i_0)} \max_{i_0-k \leq j \leq i_0} \frac{1}{\max(|\operatorname{supp} \hat{N}_i|, |\operatorname{supp} \hat{N}_j|)}$$

где мы принимаем индекс j *- модуль* n, *а* $\hat{d}$ *- периодическая функция расстояния на* $\{0, \ldots, n-1\}$.

Имеем следующие оценки для L^p-нормы $\hat{g}$, которые являются предложениями 3.6 и 3.8 в [14].

Предложение 4.1 ([14])**.** *Если* $n \geq 2k+2$, *то*

$$\|\hat{g}\|_{L^p(\mathbb{T})} \sim_k |\hat{J}|^{1/p-1}, \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

Более того, существует число $N(k)$, *зависящее только от порядка* k *такое, что для всех разбиений* $\hat{\mathcal{T}}$, *когда* $n \geq N(k) \geq 3k-1$, *имеем*

$$\|\hat{g}\|_{L^p(\hat{J})} \gtrsim_k |\hat{J}|^{1/p-1}.$$

Метод максимального разбиения, представленный в [14], дал нам важную оценку для $\hat{g}$.

Предложение 4.2 ([14])**.** *Пусть* $x \in [\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}]$. *Тогда существует интервал* $C := C(x) = C([\sigma_l, \sigma_{l+1}]) \subset \mathbb{T}$, *который является минимальным по отношению следующего включения*

$$\hat{J} \cup [\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}] \subset C$$

такой, что если $K(C)$ — количество точек сетки $\hat{\mathcal{T}}$, содержащийся в C, то

$$|\hat{g}(x)| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C)}}{|C|},$$

где $\hat{q} \in (0,1)$ зависит только от k.

В [2] мы использовали предложение 4.2, чтобы получить периодическую версию неравенства (4.7).

Лемма 4.3 ([2]). *Пусть $n \geq 3k-1$. Если $\hat{g}_n = \hat{g} = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\omega}_j \hat{N}_j$, то имеем следующую оценку для коэффициента $\hat{\omega}_j$:*

$$|\hat{\omega}_j| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_j))}}{|C(\hat{I}_j)|}, \tag{4.10}$$

где $C(\cdot)$ и $K(C(\cdot))$ определены выше, а $\hat{I}_j := [\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+1}]$ — подынтервал $T_{n,j}^{(k)}$, который имеет максимальную длину.

5. Доказательство основной теоремы

Для доказательства теоремы 2.4 будем использовать следующие предложения.

Пусть $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ k-допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн-системой $(\hat{f}_n)_{n\geq 1}$. Для последовательности коэффициентов $(a_n)_{n\geq 1}$ пусть

$$S := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \hat{f}_n^2\Big)^{1/2}.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{T})$, то через Sf обозначим функцию S, соответствующую последовательности коэффициентов $a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle$. Следующее предложение является следствием неравенства Хинчина.

Предложение 5.1. *Пусть (s_n) — k-допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн-системой $(\hat{f}_n)$, а (a_n) — последовательность коэффициентов. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{f}_n$ безусловно сходится в $L^1(\mathbb{T})$, то $S \in L^1(\mathbb{T})$. Более того,*

$$\|S\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \Big\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Предложение 5.2. *Пусть (s_n) — k-допустимая последовательность узлов, удовлетворяющая условию k-регулярности на торе $\mathbb{T}$ с параметром γ, но не* *удовлетворяющая никакому условию $(k-1)$-регулярности. Тогда,*

$$\sup \| \sup_n |a_n(\phi)\hat{f}_n| \|_{L^1(\mathbb{T})} = \infty,$$

где $\sup$ *берется по всем периодическим атомам* ϕ, *а* $a_n(\phi) := \langle \phi, \hat{f}_n \rangle$.

Для доказательства предложения 5.2 нам понадобится следующая техническая лемма 5.1.

Лемма 5.1. *Пусть* (s_n) — k*-допустимая последовательность узлов, удовлетворяющая условию* k*-регулярности на торе* $\mathbb{T}$ *с параметром* $\gamma \geq 1$, *но не удовлетворяющая никакому условию* $(k-1)$*-регулярности, а* ℓ — *произвольное целое положительное число. Тогда для всех* $A \geq 2$ *существует конечная возрастающая последовательность* $(n_j)_{j=0}^{\ell-1}$ *длины* ℓ *такая, что если* σ_{n_j,i_j} *новая точка в* $\hat{\mathcal{T}}_{n_j}$, *которой нет в* $\hat{\mathcal{T}}_{n_j-1}$ *и*

$$\Lambda_j := [\sigma_{n_j,i_j-k}, \sigma_{n_j,i_j-1}), \qquad L_j := [\sigma_{n_j,i_j-1}, \sigma_{n_j,i_j}), \qquad R_j := [\sigma_{n_j,i_j}, \sigma_{n_j,i_j+1}),$$

то для всех индексов i, j *в интервале* $0 \leq i < j \leq \ell - 1$ *имеем*

(1) $R_i \cap R_j = \emptyset$,
(2) $\Lambda_i = \Lambda_j$,
(3) $(2\gamma - 1)|L_j| \geq |[\sigma_{n_j,i_j-k-1}, \sigma_{n_j,i_j-k}]| \geq \frac{|L_j|}{2\gamma}$,
(4) $|R_j| \leq (2\gamma - 1)|L_j|$,
(5) $|L_j| \leq 2(\gamma + 1)k \cdot |R_j|$,
(6) $\min(|L_j|, |R_j|) \geq A|\Lambda_j|$.

Доказательство этой леммы похоже на доказательство леммы 6.2 из [1], поэтому мы не будем приводить. Однако важно отметить, что мы отождествляем тор $\mathbb{T}$ с $[0, 1)$ таким образом, что начальная точка 0 не находится в $\Lambda_0 \cup L_0 \cup R_0 \cup [\sigma_{n_0,i_0-k-1}, \sigma_{n_0,i_0-k}]$. Используя эту индексацию и следуя той же методологии доказательства, что и в лемме 6.2 из [1], мы получаем желаемый результат.

Теперь, используя лемму 5.1, мы приступим к доказательству предложения 5.2.

Доказательство предложения 5.2. Пусть ℓ — произвольное целое положительное число и $\ell' := \ell + N(k, \gamma)$, где $N(k, \gamma)$ — натуральное число, которое будет уточняться впоследствии. Пусть $A \geq 2$ — число, которое также будет выбрано позже. Тогда лемма 5.1 дает нам последовательность $(n_j^*)_{j=0}^{\ell'-1}$ такую, что все условия леммы 5.1 удовлетворены. После этого из набора $(n_j^*)_{j=0}^{\ell'-1}$ возьмем $(n_j^*)_{j=N(k,\gamma)}^{\ell'-1}$ и определим $n_i := n^*_{i+N(k,\gamma)}$, для $i = 0, \dots, \ell - 1$. Предположим, что $|\Lambda_0| > 0$. Мы можем построить периодическую последовательность точек $(\sigma_i)_{i=0}^{n_0-1}$ так, чтобы индекс вновь вставленной точки i_0 был $[n_0/2]$. Пусть $\sigma := \sigma_{n_0,i_0-1}$, $x := \sigma - 2|\Lambda_0|$ и $y := \sigma + 2|\Lambda_0|$. Тогда мы определим периодический атом ϕ как

$$\phi \equiv \frac{1}{4|\Lambda_0|}(\mathbb{1}_{[x,\sigma]} - \mathbb{1}_{[\sigma,y]}).$$

Пусть j — произвольное целое число из промежутка $0 \leq j \leq \ell - 1$. Методом интегрирования по частям выражение $a_{n_j}(\phi) = \langle \phi, \hat{f}_{n_j} \rangle$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
4|\Lambda_0| a_{n_j}(\phi) &= \int_x^\sigma \hat{f}_{n_j}(t)\,\mathrm{d}t - \int_\sigma^y \hat{f}_{n_j}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^\sigma (\hat{f}_{n_j}(t) - \hat{f}_{n_j}(\sigma))\,\mathrm{d}t - \int_\sigma^y (\hat{f}_{n_j}(t) - \hat{f}_{n_j}(\sigma))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^\sigma (x-t)\hat{f}'_{n_j}(t)\,\mathrm{d}t - \int_\sigma^y (y-t)\hat{f}'_{n_j}(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Во-первых, пусть $I_1 := \int_x^\sigma (x-t)\hat{f}'_{n_j}(t)\,\mathrm{d}t$ и $I_2 := \int_\sigma^y (y-t)\hat{f}'_{n_j}(t)\,\mathrm{d}t$. Чтобы оценить $|a_{n_j}(\phi)|$ снизу, оценим абсолютное значение I_2 сверху.

Рассмотрим функцию $\hat{g}_{n_j}$, связанную с $\hat{f}_{n_j}$ через $\hat{f}_{n_j} = \hat{g}_{n_j}/\|\hat{g}_{n_j}\|_{L^2(\mathbb{T})}$ и $\|g_{n_j}\|_{L^2(\mathbb{T})} \sim_k |\hat{J}_{n_j}|^{-1/2}$ (см. Предложение 4.1). В обозначениях леммы 5.1, $\hat{g}_{n_j}$ получается при вставке точки $\sigma_{n_j,i_j} = s_{n_j}$ в $\hat{\mathcal{T}}_{n_j-1}$, а это общий конец интервалов L_j и R_j. Согласно построению характеристического интервала $\hat{J}_{n_j}$, свойств 4 – 6 леммы 5.1 и k-регулярности последовательности точек (s_n) на торе $\mathbb{T}$, мы имеем

$$|\hat{J}_{n_j}| \sim_{k,\gamma} |L_j| \sim_{k,\gamma} |R_j|. \tag{5.1}$$

По свойству 6 леммы 5.1 имеем $[\sigma, y] \subset L_j$, и, следовательно, производная функции $\hat{g}_{n_j}$ на $[\sigma, y]$ имеет представление (см. (3.6))

$$\hat{g}'_{n_j}(u) = (k-1)\sum_{i=i_j-k+1}^{i_j-1} \xi_i \hat{N}^{(k-1)}_{n_j,i}(u), \qquad u \in [\sigma, y],$$

где $\xi_i = (\hat{w}_i - \hat{w}_{i-1})/|T^{(k-1)}_{n_j,i}|$, а коэффициенты $\hat{w}_i$ удовлетворяют (4.10), соответствующие разбиению $\hat{\mathcal{T}}_{n_j}$. Для $i = i_j - k + 1, \dots, i_j - 1$ имеем $L_j \subset T^{(k-1)}_{n_j,i}$, что в сочетании с k-регулярностью последовательности точек (s_n) на торе $\mathbb{T}$ и свойством 6 из леммы 5.1 означает, что

$$|\hat{J}_{n_j}| \sim_{k,\gamma} |L_j| \sim_{k,\gamma} |T^{(k-1)}_{n_j,i}|, \qquad i = i_j - k + 1, \dots, i_j - 1. \tag{5.2}$$

Более того, по лемме 4.3 получаем:

$$|\hat{w}_i| \lesssim_k \frac{1}{|\hat{J}_{n_j}|}, \qquad 0 \le i \le n_j - 1.$$

Следовательно,

$$|\hat{f}'_{n_j}(t)| \sim_k |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} |\hat{g}'_{n_j}(t)| \lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{-3/2} \qquad t \in [\sigma, y].$$

В результате, суммируя вышеперечисленные факты, получим

$$|I_2| \lesssim_{k,\gamma} |\Lambda_0|^2 \cdot |L_j|^{-3/2}. \tag{5.3}$$

Теперь оценим I_1. Предположим, что индекс вновь вставленной точки $i_j = [n_j/2]$ и рассмотрим разницу между периодической функции $\hat{f}_{n_j}$ и непериодической функции f_{n_j}, соответствующей разбиению $\mathcal{T}_{n_j} = (\tau_{n_j,i})_{i=-k}^{n_j+k-1}$ с $\tau_i = \sigma_i$ для $i \in \{0, \dots, n_j - 1\}$, $\tau_{n_j,-k} = \dots = \tau_{n_j,-1} = 0$ и $\tau_{n_j,n_j} = \dots = \tau_{n_j,n_j+k-1} = 1$.

Таким образом, получаем:

$$I_1 = \int_x^\sigma (x-t) f'_{n_j}(t) \,\mathrm{d}t + \int_x^\sigma (x-t)(\hat{f}_{n_j}(t) - f_{n_j}(t))' \,\mathrm{d}t =: S_1 + S_2.$$

Рассмотрим S_1. Согласно свойствам 3 и 6 из леммы 5.1 (с $A \ge 2\gamma$), получим $[x, \sigma] \subset [\tau_{n_j, i_j-k-1}, \tau_{n_j, i_j-1}]$ и, следовательно, в промежутке $[x, \sigma]$ g'_{n_j} имеет представление (см. (3.6))

$$g'_{n_j}(u) = (k-1) \sum_{i=i_j-2k+1}^{i_j-2} \xi_i N_{n_j,i}^{(k-1)}(u), \qquad u \in [x, \sigma].$$

Разобьем интеграл S_1 на 2 части, т.е. $S_1 = S_{1,1} + S_{1,2}$, соответствующие индексам $i \ne i_j - k$ и $i = i_j - k$ в приведенном выше представлении g'_{n_j} на $[x, \sigma]$. Заметим, что $[\tau_{n_j,i_j-k-1}, \tau_{n_j,i_j-k}] \subset D_{n_j,i}^{(k-1)}$ для $i_j - 2k + 1 \le i < i_j - k$ и $L_j \subset D_{n_j,i}^{(k-1)}$ для $i_j - k < i \le i_j - 2$. Следовательно, согласно свойствам 3 из 6 из леммы 5.1 и k-регулярности последовательности узлов на торе $\mathbb{T}$, имеем

$$|D_{n_j,i}^{(k-1)}| \sim_{k,\gamma} |L_j| \qquad i_j - 2k + 1 \le i \le i_j - 2, \quad i \ne i_j - k.$$

Ввиду k-регулярности (s_n) на торе $\mathbb{T}$ и определения характеристических интервалов $\hat{f}_{n_j}$ и f_{n_j} имеем:

$$|J_{n_j}| \sim_{k,\gamma} |\hat{J}_{n_j}|. \tag{5.4}$$

Таким образом, используя (5.4), лемму 4.1 и рассуждения, аналогичные доказательству (5.3), получаем

$$|S_{1,1}| \sim_{k,\gamma} |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} \Big| \int_x^\sigma (t-x) \sum_{\substack{i=i_j-2k+1 \\ i \ne i_j-k}}^{i_j-2} \xi_i N_{n_j,i}^{(k-1)}(t) \,\mathrm{d}t \Big| \lesssim_{k,\gamma} |\Lambda_0|^2 \cdot |L_j|^{-3/2}. \tag{5.5}$$

Более того, для имеем $i = i_j - k$ $D^{(k-1)}_{n_j,i_j-k} = \Lambda_0$, поэтому получаем

$$
\begin{aligned}
|S_{1,2}| &\sim_k |J_{n_j}|^{1/2}\Big|\int_x^\sigma (t-x)\xi_{i_j-k}N^{(k-1)}_{n_j,i_j-k}(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\geq |\xi_{i_j-k}||J_{n_j}|^{1/2}|\Lambda_0|\int_x^\sigma N^{(k-1)}_{n_j,i_j-k}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (5.6)\\
&= |\xi_{i_j-k}||\Lambda_0||J_{n_j}|^{1/2}\frac{|D^{(k-1)}_{n_j,i_j-k}|}{k-1} = |\xi_{i_j-k}||J_{n_j}|^{1/2}\frac{|\Lambda_0|^2}{k-1},
\end{aligned}
$$

благодаря тому, что $t - x \geq |\Lambda_0|$ для $t \in \operatorname{supp} N^{(k-1)}_{n_j,i_j-k}$. Поскольку последовательность w_j является знакопеременной, см. (4.6), то

$$
|\xi_{i_j-k}| = \frac{|w_{i_j-k}| + |w_{i_j-k-1}|}{|D^{(k-1)}_{n_j,i_j-k}|} \geq \frac{|w_{i_j-k}|}{|D^{(k-1)}_{n_j,i_j-k}|}.
$$

Согласно определению w_{i_j-k},

$$
|w_{i_j-k}| \geq |\alpha_{i_j-k}||a_{i_j-k,i_j-k}|,
$$

где α_{i_j-k} — множитель из формулы (4.4), а a_{i_j-k,i_j-k} — запись обратной матрицы Грама B-сплайна, оба соответствующие разбиению $\mathcal{T}_{n_j}$. Из формул (4.4) и (5.1) следует, что α_{i_j-k} ограничена снизу положительной постоянной, зависящей только от k и γ.[1] Более того, $|a_{i_j-k,i_j-k}| \geq \|N^{(k)}_{n_j,i_j-k}\|_2^{-2} \gtrsim_k |D^{(k)}_{n_j,i_j-k}|^{-1}$, см. (3.5).

Заметим, что $D^{(k)}_{n_j,i_j-k} = \Lambda_0 \cup L_j$, так что $|D^{(k)}_{n_j,i_j-k}| \sim_{k,\gamma} |L_j|$. Итак, $|\xi_{i_j-k}| \gtrsim_{k,\gamma} |\Lambda_0|^{-1}|L_j|^{-1}$. Вставляя приведенные выше вычисления в (5.6), из (5.4) находим

$$
|S_{1,2}| \gtrsim_{k,\gamma} |J_{n_j}|^{1/2}\frac{|\Lambda_0|}{|L_j|} \sim_{k,\gamma} |\Lambda_0||L_j|^{-1/2}. \tag{5.7}
$$

Далее оцениваем абсолютное значение S_2 сверху. Поскольку и g_{n_j}, и $\hat{g}_{n_j}$ содержатся в линейной оболочке функций $(N^{(k)*}_{n_j,v})_{v=-k}^{n_j-1} = (N^*_v)_{v=-k}^{n_j-1}$, имеем следующее представление:

$$
u := g_{n_j} - \hat{g}_{n_j} = \sum_{v=-k}^{n_j-1}\beta_v N^*_v,
$$

где коэффициенты β_v выбраны так, чтобы это равенство выполнялось. Определив множество граничных индексов B в $\mathcal{T}_{n_j}$ формулой

$$
B = \{-k,\dots,-1\} \cup \{n_j-k,\dots,n_j-1\} \subset \{-k,\dots,n_j-1\},
$$

[1]Формула (4.4) применяется для $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n_j}$ и соответствует $\tau_{i_0} = \tau_{n_j,i_j}$. Тогда $[\tau_{i_0-1},\tau_{i_0}] = L_j$ и $[\tau_{i_0},\tau_{i_0+1}] = R_j$. Ввиду k-регулярности и $|\Lambda_0 \cup L_j| \sim_{k,\gamma} |L_j|$, каждый знаменатель в (4.4) равен $\sim_{k,\gamma} |L_j|$. Каждый числитель в (4.4) больше, чем L_j или R_j, поэтому в силу (5.1) и k-регулярности он также $\sim_{k,\gamma} |L_j|$.

замечаем, что для $v \in B^c$,

$$\beta_v = \langle u, N_v\rangle = \langle g_{n_j} - \hat{g}_{n_j}, N_v\rangle = \langle g_{n_j}, N_v\rangle - \langle \hat{g}_{n_j}, \hat{N}_v\rangle = \alpha_v - \hat{\alpha}_v = 0,$$

где последнее равенство следует из того, что $\alpha_v = \hat{\alpha}_v$ для всех индексов v в данном определении $\mathcal{T}_{n_j}$ (см. (4.4) и (4.9)).

Таким образом, функция $u = g_{n_j} - \hat{g}_{n_j}$ может быть представлена как

$$u = \sum_{v\in B} \beta_v N_v^*. \tag{5.8}$$

Теперь оценим коэффициенты β_v для $v \in B$ по лемме 4.2:

$$\begin{aligned}
|\beta_v| &= |\langle g_{n_j} - \hat{g}_{n_j}, N_v\rangle| = |\langle \hat{g}_{n_j}, N_v\rangle| \\
&= \Big|\sum_{i=0}^{n_j-1} \hat{w}_i\langle \hat{N}_i, N_v\rangle\Big| \lesssim_k \sum_{i=0}^{n_j-1} |\hat{w}_i| \cdot |\operatorname{supp} \hat{N}_i \cap \operatorname{supp} N_v| \\
&\lesssim \sum_{i=0}^{n_j-1} q^{\hat{d}(i,i_j)} \max_{m=i_j-k}^{i_j} \frac{1}{\max(|\operatorname{supp} \hat{N}_i|, |\operatorname{supp} \hat{N}_m|)} \cdot |\operatorname{supp} \hat{N}_i \cap \operatorname{supp} N_v| \\
&\le \sum_{i:|\operatorname{supp} \hat{N}_i \cap \operatorname{supp} N_v|>0} q^{\hat{d}(i,i_j)}
\end{aligned}$$

и, так как $v \in B = \{-k, \ldots, -1\} \cup \{n_j - k, \ldots, n_j - 1\}$, то

$$|\beta_v| \lesssim_k q^{\hat{d}(0,i_j)} \lesssim_k q^{n_j/2}, \qquad v \in B. \tag{5.9}$$

Теперь, в силу (5.4), получаем:

$$\begin{aligned}
S_2 &\sim_{k,\gamma} |\hat{J}_{n_j}|^{1/2}\Big|\int_x^\sigma (x-t)(\hat{g}_{n_j}(t) - g_{n_j}(t))'\,\mathrm{d}t\Big| \\
&= |\hat{J}_{n_j}|^{1/2}\Big|\int_x^\sigma (x-t)\Big(\sum_{v\in B}\beta_v \sum_{\ell=-k}^{n_j-1} a_{v,\ell} N_{n_j,\ell}^{(k)}(t)\Big)'\,\mathrm{d}t\Big| \\
&= (k-1)|\hat{J}_{n_j}|^{1/2}\Big|\int_x^\sigma (x-t)\sum_{v\in B}\beta_v \sum_{\ell=i_j-2k+1}^{i_j-2} (a_{v,\ell} - a_{v,\ell-1})\frac{N_{n_j,\ell}^{(k-1)}(t)}{|D_{n_j,\ell}^{(k-1)}|}\,\mathrm{d}t\Big|.
\end{aligned}$$

Далее, из выше указанного выражения разделив последнее представление $(\hat{g}_{n_j}(t) - g_{n_j}(t))'$ на две части и, используя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned}
S_2 \lesssim_{k,\gamma} &|\hat{J}_{n_j}|^{1/2}\Big|\int_x^\sigma (x-t)\frac{N_{n_j,i_j-k}^{(k-1)}(t)}{|\Lambda_0|}\sum_{v\in B}\beta_v(a_{v,i_j-k} - a_{v,i_j-k-1})\,\mathrm{d}t\Big| \\
&+ |\hat{J}_{n_j}|^{1/2}\Big|\int_x^\sigma (x-t)\sum_{v\in B}\beta_v \sum_{\substack{\ell=i_j-2k+1,\\ \ell\neq i_j-k}}^{i_j-2} (a_{v,\ell} - a_{v,\ell-1})\frac{N_{n_j,\ell}^{(k-1)}(t)}{|D_{n_j,\ell}^{(k-1)}|}\,\mathrm{d}t\Big| \\
&=: V_1 + V_2.
\end{aligned}$$

Начнем с оценки первого слагаемого. В силу (5.9) и Теореме 3.1 получаем

$$\begin{aligned} V_1 &\lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{1/2} \int_x^\sigma |\Lambda_0| q^{n_j/2} \Big(\max_{v \in B} \frac{q^{|i_j-k-v|}}{h_{i_j-k,v}} \Big) N_{n_j,i_j-k}^{(k-1)}(t) \frac{\mathrm{d}t}{|\Lambda_0|} \\ &\lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{1/2} q^{n_j} |\Lambda_0| \max_{v \in B} \frac{1}{h_{i_j-k,v}}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $h_{i_j-k,v} = |\operatorname{conv}(\operatorname{supp} N_{n_j,i_j-k}^{(k)} \cup \operatorname{supp} N_{n_j,v}^{(k)})|$, имеем $h_{i_j-k,v} \gtrsim_{k,\gamma} |L_j|$ для любого $v \in B$. Поэтому,

$$V_1 \lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{-1/2} |\Lambda_0| q^{n_j}. \tag{5.10}$$

Теперь оценим второе слагаемое сверху. Заметим, что либо $L_j \subset D_{n_j,\ell}^{(k-1)}$, либо $[\sigma_{n_j,i_j-k-1}, \sigma_{n_j,i_j-k}] \subset D_{n_j,\ell}^{(k-1)}$ для всех индексов ℓ, удовлетворяющих $\ell \neq i_j - k$ и $i_j - 2k + 1 \le \ell \le i_j - 2$. Следовательно, по свойству 3 из леммы 5.1, для этих индексов ℓ получаем

$$|D_{n_j,\ell}^{(k-1)}| \gtrsim_\gamma |L_j|. \tag{5.11}$$

Таким образом, согласно (5.11), (5.9) и теореме 3.1 имеем

$$\begin{aligned} V_2 &\lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{1/2} \int_x^\sigma |\Lambda_0| q^{n_j/2} \Big(\max_{v \in B} \max_{\substack{\ell = i_j-2k, \\ \ell \neq i_j-k}}^{i_j-2} \frac{q^{|\ell - v|}}{h_{\ell,v}} \Big) \frac{1}{|L_j|} \sum_{\substack{\ell = i_j-2k+1, \\ \ell \neq i_j-k}}^{i_j-2} N_{n_j,\ell}^{(k-1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\lesssim_{k,\gamma} |L_j|^{-3/2} |\Lambda_0|^2 q^{n_j}. \end{aligned}$$

Теперь мы зададим условия на постоянную $A \ge 2\gamma$ из начала доказательства и свойство 6 в лемме 5.1. Из (5.7), (5.5), (5.3), (5.10) и оценки для V_2 следует, что существуют $C_{k,\gamma}^{I_2}, C_{k,\gamma}^{S_{1,1}}, C_{k,\gamma}^{S_{1,2}}, C_{k,\gamma}^{V_1} > 0$ и $C_{k,\gamma}^{V_2} > 0$, зависящие только от k и γ такие, что

$$\begin{aligned} 4|\Lambda_0||a_{n_j}(\phi)| &\ge |I_1| - |I_2| = |S_1 + S_2| - |I_2| = |(S_{1,1} + S_{1,2}) + S_2| - |I_2| \\ &\ge |S_{1,2}| - |S_{1,1}| - |S_2| - |I_2| \ge C_{k,\gamma}^{S_{1,2}} |\Lambda_0||L_j|^{-1/2} - C_{k,\gamma}^{S_{1,1}} |\Lambda_0|^2 |L_j|^{-3/2} \\ &- C_{k,\gamma}^{V_1} |\Lambda_0||L_j|^{-1/2} q^{n_j} - C_{k,\gamma}^{V_2} |\Lambda_0|^2 |L_j|^{-3/2} q^{n_j} - C_{k,\gamma}^{I_2} |\Lambda_0|^2 |L_j|^{-3/2} \end{aligned}$$

а значит,

$$4|\Lambda_0||a_{n_j}(\phi)| \ge |\Lambda_0||L_j|^{-1/2} ((C_{k,\gamma}^{S_{1,2}} - C_{k,\gamma}^{V_1} q^{n_j}) - (C_{k,\gamma}^{V_2} q^{n_j} + C_{k,\gamma}^{S_{1,1}} + C_{k,\gamma}^{I_2}) |\Lambda_0||L_j|^{-1}).$$

Существует индекс $N_1(k,\gamma)$ такой, что для всех $n_j \ge n_0 \ge N_1(k,\gamma)$

$$C_{k,\gamma}^{S_{1,2}} - C_{k,\gamma}^{V_1} q^{n_j} \ge \frac{C_{k,\gamma}^{S_{1,2}}}{2}.$$

По свойству 6 из леммы 5.1 имеем $|\Lambda_0||L_j|^{-1} \leq 1/A$. Выбирая A достаточно большим, чтобы обеспечить

$$\frac{C_{k,\gamma}^{S_{1,2}}}{2} - \frac{C_{k,\gamma}^{V_2} q^{n_j} + C_{k,\gamma}^{S_{1,1}} + C_{k,\gamma}^{I_2}}{A} \geq \frac{C_{k,\gamma}^{S_{1,2}}}{4},$$

мы получаем постоянную $m_{k,\gamma}$, зависящую только от k и γ, такую, что

$$m_{k,\gamma}|L_j|^{-1/2} \leq |a_{n_j}(\phi)|, \qquad j = 0, \ldots, \ell - 1. \tag{5.12}$$

Далее, оценим $\int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t$ снизу. По неравенству треугольника имеем:

$$\int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \geq \int_{R_j} |g_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t - \int_{R_j} |g_{n_j}(t) - \hat{g}_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t =: Q_1 - Q_2.$$

Теперь воспользуемся предложением 3.1, свойством 6 из леммы 5.1 и k-регулярностью последовательности точек (s_n) на торе $\mathbb{T}$, чтобы получить

$$Q_1 = \int_{R_j} |g_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \gtrsim_{k,\gamma} |R_j||w_{i_j}|,$$

где w_{i_j} соответствует разбиению $\mathcal{T}_{n_j}$. По определению w_{i_j},

$$\int_{R_j} |g_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \gtrsim_{k,\gamma} |R_j||\alpha_{i_j}||a_{i_j,i_j}|.$$

По аргументам, аналогичным вышеприведенным, $|\alpha_{i_j}|$ ограничена снизу постоянной, зависящей только от k и γ, а $|a_{i_j,i_j}| \gtrsim_k |D_{n_j,i_j}^{(k)}|^{-1}$. В силу k-регулярности на торе получим $|R_j| \sim_{k,\gamma} |D_{n_j,i_j}^{(k)}|$, следовательно

$$\int_{R_j} |g_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \gtrsim_{k,\gamma} 1, \tag{5.13}$$

Далее оценим Q_2 сверху, использую те же аргументы, что и выше, а также тот факт, что $h_{i,v} \geq |R_j|$ для $v \in B$ и $i \in \{i : R_j \subset \operatorname{supp} N_{n_j,i}^{(k)}\}$

$$\int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t) - g_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{R_j} \Big|\sum_{v\in B} \beta_v \sum_{i: R_j \subset \operatorname{supp} N_{n_j,i}^{(k)}} a_{v,i} N_{n_j,i}^{(k)}(t)\Big|\,\mathrm{d}t$$

$$\lesssim_k \int_{R_j} q^{n_j/2} \max_{i: R_j \subset \operatorname{supp} N_{n_j,i}^{(k)}} \max_{v\in B} \frac{q^{|i-v|}}{h_{i,v}}\,\mathrm{d}t \lesssim_k q^{n_j}. \tag{5.14}$$

Объединив (5.13) и (5.14), получим

$$\int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \geq C_{k,\gamma} - C_k q^{n_j}. \tag{5.15}$$

Итак, существует индекс $N_2(k,\gamma)$ такой, что для всех $n_j \geq n_0 \geq N_2(k,\gamma)$

$$\int_{R_j} |\hat{g}_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \gtrsim_{k,\gamma} 1,$$

что для $\hat{f}_{n_j}$ означает

$$\int_{R_j} |\hat{f}_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \gtrsim_{k,\gamma} |\hat{J}_{n_j}|^{1/2} \gtrsim_{k,\gamma} |L_j|^{1/2}. \tag{5.16}$$

Теперь выберем $N(k,\gamma) = \max\{N_1(k,\gamma), N_2(k,\gamma), N(k)\}$. Это гарантирует, что с самого начала все оценки будут верными. Объединив (5.16) с (5.12) и свойством 1 из леммы 5.1,

$$\int_0^1 \sup_n |a_n(\phi)\hat{f}_n(t)|\,\mathrm{d}t \geq \sum_{j=0}^{\ell-1} \int_{R_j} |a_{n_j}(\phi)\hat{f}_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \gtrsim_{k,\gamma} \ell.$$

Эта схема применима к каждому натуральному числу ℓ, доказывая утверждение предложения для $|\Lambda_0| > 0$.

Случай $|\Lambda_0| = 0$ рассматривается аналогично, с той лишь разницей, что периодический атом ϕ определяется как центрированный в точке σ_{n_0,i_0-1}, а длина носителя достаточно мала, в зависимости от ℓ и $|L_0|$. □

Используя предложения 5.1 и 5.2, приведем доказательство теоремы 2.4.

Доказательство теоремы 2.4. Пусть $(\hat{f}_n)$, соответствующая последовательности узлов (s_n), является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Докажем от противного. Во-первых, если (s_n) не удовлетворяет условию k-регулярности на торе $\mathbb{T}$, то $(\hat{f}_n)$ не является базисом в $H^1(\mathbb{T})$ по теореме 2.3. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда (s_n) удовлетворяет условию k-регулярности на торе $\mathbb{T}$, но не удовлетворяет условию $(k-1)$-регулярности. Тогда, вновь по теореме 2.3 $(\hat{f}_n)$ является базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Значит для $f = \sum a_n \hat{f}_n$ и $\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ функция $f_\varepsilon := \sum \varepsilon_n a_n \hat{f}_n$ также принадлежит $H^1(\mathbb{T})$. Поскольку $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{T})}$, ряд $\sum a_n \hat{f}_n$ также сходится безусловно в $L^1(\mathbb{T})$, и, следовательно, из предложения 5.1 (т.е. неравенства Хинчина) имеем

$$\|Sf\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim \sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\ |_{H^1(\mathbb{T})} \lesssim \|f\|_{H^1(\mathbb{T})},$$

что невозможно в силу предложения 5.2 даже для атомов. □

Abstract. A geometric characterization of sequences of knots (s_n) is given, which is a necessary condition for the corresponding periodic orthonormal spline system of arbitrary order k, $k \in \mathbb{N}$ to be an unconditional basis in the atomic Hardy space $H^1(\mathbb{T})$

Список литературы

[1] G. Gevorkyan, A. Kamont, K. Keryan and M. Passenbrunner, “Unconditionality of orthogonal spline systems in $H^1[0,1]$”, Studia Mathematica, **226**, no. 2, 123 – 154 (2015).

[2] L. Hakobyan and K. Keryan, “Unconditionality of periodic orthonormal spline systems in $H^1(\mathbb{T})$: Sufficiency”, J. Contemp. Math. Anal., **59**, no. 3, 3 – 32 (2024).

[3] A. Shadrin, “The L_∞-norm of the L_2-spline projector is bounded independently of the knot sequence: a proof of de Boor’s conjecture”, Acta Math., **187**, no. 1, 59 -– 137 (2001).

[4] S. V. Bočkarev, “Some inequalities for Franklin series”, Anal. Math., **1**, no. 4, 249 – 257 (1975).

[5] Z. Ciesielski, Equivalence, unconditionality and convergence a.e. of the spline bases in L_p spaces, In Approximation theory (Papers, VIth Semester, Stefan Banach Internat. Math. Center, Warsaw, 1975), volume 4 of Banach Center Plub., 55 – 68, PWN, Warsaw (1979).

[6] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “On general Franklin systems”, Dissertationes Math. **374**, 59 pp. (1998).

[7] G. G. Gevorkyan and A. A. Sahakyan, Unconditional basis property of general Franklin systems, Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat., **35**, no. 4, 7 – 25 (2000).

[8] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0,1], 1 < p < \infty$”, Studia Math., **374**, 1 – 59 (1998).

[9] M. Passenbrunner and A. Shadrin, “On almost everywhere convergence of orthogonal spline projections with arbitrary knots”, J. Approximation Theory, **180**, 77 – 89 (2014).

[10] M. Passenbruner, “Unconditionality of orthogonal spline systems in L^p”, Studia Math., **222**, no. 1, 51 – 86 (2014).

[11] M. Passenbrunner, “Orthogonal projectors onto spaces of periodic splines”, Journal of Complexity, **42**, 85 – 93 (2017).

[12] J. Domsta, “A theorem on B-splines. II. The periodic case”, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., **24**, 1077 – 1084 (1976).

[13] K. Keryan, “Unconditionality of general periodic spline systems in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$”, J. Contemp. Math. Anal., **40**, (1), 13 – 55 (2005).

[14] K. Keryan and M. Passenbrunner, “Unconditionality of periodic orthonormal spline systems in L^p”, Studia Mathematica, **248**, no. 1, 57 – 91 (2019).

[15] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “General Franklin systems as bases in $H^1[0,1]$”, Studia Math. **167**, 259 – 292 (2005).

[16] Z. Ciesielski, “Orthogonal projections onto spline spaces with arbitrary knots”, Function spaces (Poznań, 1998), **213**, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Dekker, New York, 133 -– 140 (2000).

[17] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “Orthonormal spline systems with arbitrary knots as bases in $H^1[0,1]$”, East J. Approx. **14**, 161 – 182 (2008).

[18] M. P. Poghosyan and K. A. Keryan, “General periodic Franklin system as a basis in $H^1[0,1]$”, Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **40**, no. 1, 56 – 79 (2005).

[19] L. Hakobyan and K. Keryan, “Periodic orthonormal spline systems with arbitrary knots as basis in $H^1(\mathbb{T})$”, J. Contemp. Math. Anal., **58**, no. 1, 33 – 42 (2023).

[20] R. R. Coifman and G. Weiss, “Extension of Hardy spaces and their use in analysis”, Bull. Amer. Math. Soc. **83**, 569 – 645 (1977).

[21] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Grundlehren Math. Wiss. **303**, Springer, Berlin (1993).

[22] C. de Boor, “On the convergence of odd-degree spline interpolation”, J.Approx. Theory **1**, 452 – 463 (1968).

[23] S. Karlin, Total Positivity, **I**, Stanдляd Univ. Press, Stanford, CA (1968).

[24] W. Böhm, “Inserting new knots into B-spline curves”, Computer-Aided Design, **12**, no. 4, 199 – 201 (1980).

Поступила 02 февраля 2024

После доработки 28 марта 2024

Принята к публикации 10 апреля 2024

Известия НАН Армении, Математика, том 59, н. 4, 2024, стр. 27 – 40.

О МНОЖИТЕЛЯХ ВЕЙЛА ДЛЯ ОБЩИХ СИСТЕМ ХААРА И ФРАНКЛИНА

Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *ggg@ysu.am*

Аннотация. В работе сравниваются сходимость (абсолютная сходимость) почти всюду (п.в.) рядов по общим системам Хаара и Франклина, соответствующим слабо регулярному разбиению отрезка $[0,1]$. Доказано, что если ряд по общей системе Хаара расходится (абсолютно расходится) на множестве E, ряд по общей системе Франклина с теми же коэффициентами п.в. расходится (абсолютно расходится) на E. Как следствие получено, что если последовательность ω_n не является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Хаара, то она не является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Франклина.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: общая система Хаара; общая система Франклина; множитель Вейля; безусловная сходимость; сходимость почти всюду.

1. Введение

В настоящей статье ω_n-неубывающая последовательность положительных чисел. Последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множителем Вейля для сходимости почти всюду (п. в.) рядов по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, если условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty \tag{1.1}$$

гарантирует сходимость п. в. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$. Последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, если выполнение (1.1) гарантирует безусловную сходимость п. в. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$.

П.Л. Ульянов доказал (см. [1], [2]), что последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по системе Хаара,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке комитета по науке министерсрва ОНКС Республики Армения (грант № 21T-1A055).

тогда и только тогда, когда выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n} < \infty. \tag{1.2}$$

В работе [3] автором доказано, что последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по системе Франклина тогда и только тогда, когда выполняется (1.2).

Теорему Орлича о множителях Вейля для безусловной сходимости почти всюду(см. напр. [4]) П.Л. Ульянов в эквивалентной, но в более простой форме, сформулировал и доказал в работе [2]: если последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n n \ln n} < \infty,$$

то последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по любой ортонормированной системе.

В настоящей работе исследуются множители Вейля для общих систем Хаара и Франклина (определения этих систем даны в следующем разделе). В частности, доказано, что для любой неограниченной последовательности ω_n существуют общие системы Хаара и Франклина для которых ω_n является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по этим системам.

В связи с этим отметим один результат П. Л. Ульянова [5] и А. М. Олевского [6]. Они независимо доказали, что для любой полной и ортонормированной в $L^2[0,1]$ системы существует функция из $L^2[0,1]$, ряд Фурье которой по этой системе п. в. расходится после некоторой перестановки. Следовательно, ограниченная последовательность ω_n не может быть множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по полной ортонормированной системе.

Договоримся о некоторых обозначениях.

- $\mathrm{mes}(A)$-мера Лебега множества A,
- $|\Delta|$-длина (мера) интервала Δ,
- $\chi_A(x)$-характеристическая функция множества A,
- $c_1, c_2, ..., c_\gamma, c_p, ...$-положительные постоянные зависящие только от своих индексов,
- $a \sim_\gamma b$ - существуют такие положительные постоянные $c_{\gamma,1}$ и $c_{\gamma,2}$, что $c_{\gamma,1} b \le a \le c_{\gamma,2} b$,
- $\|f\|_p$-норма функции f в $L^p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$,

- $\|f\|_{p,A}$-норма функции f в $L^p(A)$, $1 \le p \le \infty$,

2. Определение общих систем Хаара и Франклина и формулировка теорем

Следуя работе [7] определим общую систему Франклина.

Определение 2.1. *Последовательность точек $\mathcal{T} = \{t_n : n \ge 0\}$ назовем допустимой, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0,1)$ для любого $n \ge 2$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0,1]$ и каждая точка $t \in (0,1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем два раза.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \ge 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \ge 1$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \le i \le n\}$. Пусть π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_{n,i} : \tau_{n,i} \le \tau_{n,i+1}, 0 \le i \le n\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через $\mathbf{S}_n$ обозначим пространство функций, определенных на $[0,1]$, непрерывных слева, линейных на $(\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1})$ и непрерывных в $\tau_{n,i}$, если $\tau_{n,i-1} < \tau_{n,i} < \tau_{n,i+1}$, для любого $i = 0, 1, \ldots, n$. Ясно, что $\dim \mathbf{S}_n = n+1$ и $\mathbf{S}_{n-1} \subset \mathbf{S}_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f_n \in \mathbf{S}_n$, которая ортогональна $\mathbf{S}_{n-1}$ и $\|f_n\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n-ной функцией Франклина, соответствующей разбиению (последовательности) $\mathcal{T}$.

Определение 2.2. *Общая система Франклина $\{f_n : n \ge 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу*

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = \sqrt{3}\,(2t-1),$$

и для $n \ge 2$, f_n есть n-ная функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.

Назовем разбиение простым, если каждая точка $t \in (0,1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем один раз. В дальнейшем мы будем исследовать только случай простых разбиений.

Отметим, что когда $t_n = \dfrac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, ...$, $m = 1, 2, ..., 2^k$, получается классическая система Франклина, эквивалентным образом определенной в [8].

Известно, что эта система безусловный базис в $L^p([0,1])$, $1 < p < \infty$, при любом разбиении (см.[9]), базис в $L([0,1])$ и базис в $C[0,1]$, если разбиение простое (см.[10]).

В разных работах об общей системе Франклина рассмотрены последовательности $\mathcal{T}$, удовлетворяющие разным условиям регулярности. Здесь мы рассматриваем простые разбиения, удовлетворяющие условию слабой регулярности.

Обозначим $\Delta_0 = \Delta_1 = [0,1]$, а для $n \geq 2$ обозначим

$$t_n^- := \max\{t_i : t_i < t_n, i < n\}, \quad t_n^+ := \min\{t_i : t_i > t_n,\ i < n\},$$

$$\Delta_n := [t_n^-, t_n^+], \quad \Delta_n^+ := [t_n^-, t_n], \quad \Delta_n^- := [t_n, t_n^+], \tag{2.1}$$

$$\Delta_i^n := [\tau_{n,i-1}, \tau_{n,i}], \quad n = 1,2,..., \quad i = 1,2,...,n.$$

Определение 2.3. *Последовательность (разбиение) $\mathcal{T}$ назовем слабо регулярной с параметром $\gamma > 1$, если*

$$\gamma^{-1} \leq \frac{|\Delta_n^-|}{|\Delta_n^+|} \leq \gamma \quad \text{для всех} \quad n.$$

Определение 2.4. *Последовательность (разбиение) $\mathcal{T}$ назовем сильно регулярной с параметром $\gamma > 1$, если*

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\tau_{n,i} - \tau_{n,i-1}}{\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i}} \leq \gamma \quad \text{для всех} \quad n, i.$$

Для слабо регулярной последовательности $\mathcal{T}$ с параметром γ в работе [7] доказаны, что

$$\|f_n\|_p \sim_{\gamma,p} \|f_n\|_{\Delta_n} \sim_{\gamma,p} |\Delta_n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p \leq \infty \tag{2.2}$$

и

$$\|f_n\|_\infty \sim_\gamma |f_n(t_n)|. \tag{2.3}$$

Система Хаара $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, соответствующая простому разбиению $\mathcal{T}$, определяется следующим образом: $h_1(x) = 1$, когда $x \in [0,1]$, а для $n \geq 2$ определяется формулой

$$h_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{|\Delta_n^-|}{|\Delta_n^+|}} \frac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}}, & \text{когда} \quad x \in \Delta_n^+, \\ -\sqrt{\frac{|\Delta_n^+|}{|\Delta_n^-|}} \frac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}}, & \text{когда} \quad x \in \Delta_n^-, \\ 0, & \text{когда} \quad x \notin \Delta_n. \end{cases}$$

Для функций Хаара, соответствующим слабо регулярному разбиению $\mathcal{T}$ с параметром γ выполняются следующие соотношения

$$\|h_n\|_p = \|h_n\|_{\Delta_n} \sim_{\gamma,p} |\Delta_n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{2.4}$$

Кроме того, из слабой регулярности $\mathcal{T}$ следует, что

$$\|h_n\|_\infty \sim_\gamma \|h_n\|_{\infty,\Delta_n^+} \sim_\gamma \|h_n\|_{\infty,\Delta_n^-}. \tag{2.5}$$

Когда $t_n = \dfrac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, ...,$ $m = 1, 2, ..., 2^k$, то общая система Хаара совпадает с классической системой Хаара, определенной в [11].

Верны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{T}$ слабо регулярное разбиение отрезка $[0,1]$ и $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются общими системами Хаара и Франклина, соответствующие разбиению $\mathcal{T}$. Тогда, если*

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n h_n(x)| = +\infty, \quad \text{когда} \quad x \in E,$$

то

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n f_n(x)| = +\infty, \quad \text{п.в. на } E. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{T}$ слабо регулярное разбиение отрезка $[0,1]$ и $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются общими системами Хаара и Франклина, соответствующие разбиению $\mathcal{T}$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n h_n(x)$ при некоторой перестановке расходится на множестве E, то существует перестановка ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n(x)$, которая почти всюду расходится на E.*

Теорема 2.3. *Пусть $\mathcal{T}$ слабо регулярное разбиение отрезка $[0,1]$ и $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются общими системами Хаара и Франклина соответствующие разбиению $\mathcal{T}$. Если последовательность ω_n не является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Хаара, то она не является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Франклина.*

Теорема 2.4. *Для любой неубывающей и неограниченной последовательности ω_n существует такое сильно регулярное разбиение $\mathcal{T}$, что для соответствующей общей системы Франклина (Хаара) ω_n является множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по общей системе Франклина (Хаара).*

Теорема 2.5. *Если ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n h_n(x)$ по классической системе Хаара расходится на множестве E, то ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n(x)$ по классической системе Франклина расходится п.в. на E.*

3. Вспомогательные леммы

Пусть $\mathcal{T}$ слабо регулярное разбиение отрезка $[0,1]$ с параметром γ и $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ являются общими системами Хаара и Франклина соответствующие разбиению $\mathcal{T}$. Верна следующая лемма.

Лемма 3.1. *Существуют такие постоянные $c_{\gamma,1}$ $c_{\gamma,2}$, что если для некоторого полинома по система Хаара $\sum_{k:\Delta_k\subset\Delta_n} a_k h_k(x)$ выполняется*

$$\sum_{k:\Delta_k\subset\Delta_n} |a_k h_k(x)| \geq 1, \quad \text{когда} \quad x \in \Delta_n, \tag{3.1}$$

то

$$mes\left\{x \in \Delta_n : \sum_{k:\Delta_k\subset\Delta_n} |a_k f_k(x)| > c_{\gamma,1}\right\} \geq c_{\gamma,2}|\Delta_n|. \tag{3.2}$$

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta_k|}\int_{\Delta_k} |f_k(t)|dt, & \text{когда} \quad x \in \Delta_k, \\ \\ 0, & \text{когда} \quad x \notin \Delta_k. \end{cases} \tag{3.3}$$

Из (3.3), (2.2), (2.4) и (2.5) следует, что если $x \in \Delta_k$, то

$$\tilde{f}_k(x) = \frac{\|f_k\|_{1,\Delta_k}}{|\Delta_k|} \sim_\gamma |\Delta_n|^{-\frac{1}{2}} \sim_\gamma |h_k(x)|. \tag{3.4}$$

Из (3.4) и (3.1) имеем

$$\sum_{k:\Delta_k\subset\Delta_n} |a_k|\tilde{f}_k(x) \geq c_{\gamma,3}, \quad \text{когда} \quad x \in \Delta_n.$$

Из (2.3) и линейности функции $f_k(x)$ на интервалах Δ_k^+, Δ_k^- следует, что

$$|f_k(x)| \leq c_\gamma \tilde{f}_k(x), \quad \text{если} \quad x \in \Delta_k. \tag{3.5}$$

Пусть

$$I := \{k : \Delta_k \subset \Delta_n, \ \|a_k h_k\|_\infty \geq 1\}, \qquad P_I(x) = \sum_{k\in I} |a_k|\tilde{f}_k(x),$$

$$J := \{k : \Delta_k \subset \Delta_n : \ \|a_k h_k\|_\infty < 1\}, \qquad P_J(x) = \sum_{k\in J} |a_k|\tilde{f}_k(x),$$

и

$$A := \bigcup_{k\in I} \Delta_k, \quad B := \Delta_n \setminus A.$$

Учитывая (2.3) и линейность функции f_n на отрезках Δ_n^+ и Δ_n^-, из (3) получим

$$\text{mes}\{x \in \Delta_k : |a_k f_k(x)| > c_{\gamma,1}\} > c_{\gamma,2}|\Delta_k|, \quad \text{когда} \quad k \in I.$$

Следовательно

$$\text{(3.6)}\qquad \mathrm{mes}\left\{x \in A : \sum_{k\in I} |a_k f_k(x)| > c_{\gamma,1}\right\} > c_{\gamma,4}\mathrm{mes}(A).$$

Если $\mathrm{mes}(A) \geq \frac{1}{2}|\Delta_n|$, то из (3.6) следует (3.2). А если $\mathrm{mes}(A) < \frac{1}{2}|\Delta_n|$, то $textrmmes(B) \geq \frac{1}{2}|\Delta_n|$ и

$$\sum_{k\in J} |a_k h_k(x)| \geq 1, \quad \text{когда} \quad x \in B.$$

Пусть

$$\tau(x) := \min\{m : \sum_{k\leq m : k\in J} |a_k h_k(x)| > 1\}.$$

Тогда

$$P_1(x) := \sum_{k\leq \tau(x) : k\in J} a_k h_k(x) =: \sum_{k\in Q} a_k h_k(x)$$

является “подполином”-ом полинома $P_J(x)$ и выполняется (см. (2.5))

$$\text{(3.7)}\qquad 1 \leq \sum_{k\in Q} |a_k h_k(x)| \leq c_{\gamma,5} \quad \text{когда} \quad x \in B.$$

Обозначим

$$\text{(3.8)}\qquad \overline{f}_n(x) := f_n(x)\chi_{\Delta_n}(x).$$

Тогда из первого неравенства (3.7) следует (см. (3.4))

(3.9)

$$\mathrm{mes}(B) \leq \int_B \sum_{k\in Q} |a_k h_k(x)| dx \leq c_{\gamma,6} \int_B \sum_{k\in Q} |a_k| \tilde{f}_k(x) dx \leq c_{\gamma,6} \int_{\Delta_n} \sum_{k\in Q} |a_k \overline{f}_k(x)| dx.$$

А из второго неравенства (3.7) следует (см. (3.4) и (3.5))

$$\text{(3.10)}\qquad \sum_{k\in Q} |a_k \overline{f}_k(x)| \leq c_\gamma \sum_{k\in Q} |a_k \tilde{f}_k(x)| < c_{\gamma,7}.$$

Из (3.9), (3.10) следует существование такого $c_{\gamma,8}$, что

$$\text{(3.11)}\qquad \mathrm{mes}\{x \in B : \sum_{k\in Q} |a_k \overline{f}_k(x)| > c_{\gamma,8}\} > c_{\gamma,9}\mathrm{mes}(B) \geq \frac{c_{\gamma,9}}{2}|\Delta_n|.$$

Из (3.8) и (3.11) имеем

$$\mathrm{mes}\{x \in \Delta_n : \sum_{k\in Q} |a_k f_k(x)| > c_{\gamma,8}\} \geq \mathrm{mes}\{x \in B : \sum_{k\in Q} |a_k \overline{f}_k(x)| > c_{\gamma,8}\} \geq \frac{c_{\gamma,9}}{2}|\Delta_n|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Существуют такие постоянные $c_{\gamma,9}$, $c_{\gamma,10}$, что если для некоторого полинома по система Хаара $\sum_{k:\Delta_k\subset\Delta_n} a_k h_k(x)$ выполняется*

$$\sum_{k:\Delta_k\subset\Delta_n} a_k^2 h_k^2(x) \geq 1, \quad \textit{когда} \ \ x\in\Delta_n,$$

то

$$mes\left\{x\in\Delta_n : \sum_{k:\Delta_k\subset\Delta_n} a_k^2 f_k^2(x) > c_{\gamma,1}\right\} \geq c_{\gamma,2}|\Delta_n|.$$

Для доказательства этой леммы нужно вместо функций (3.3) рассмотреть функции

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta_k|}\int_{\Delta_k} f_k^2(t)dt, & \text{когда} \ \ x\in\Delta_k, \\ \\ 0, & \text{когда} \ \ x\notin\Delta_k, \end{cases}$$

и почти дословно повторить рассуждения предыдущей леммы.

4. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\varepsilon_m \downarrow 0$ и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < \infty. \tag{4.1}$$

Найдем числа $p_m \uparrow \infty$ $(p_0 = 1)$ и множества E_m, удовлетворяющие следующим условиям: (см. (2.1))

$$E_m = \bigcup_{j\in I_m} \Delta_j^{n_j^m}, \quad \text{где} \ \ n_j^m > p_m, \tag{4.2}$$

$$E_m \subset E \quad \ \mathrm{mes}(E_m) > (1-\varepsilon_m)\mathrm{mes}(E), \tag{4.3}$$

и

$$\sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}} |a_n h_n(x)| > 1, \quad \text{когда} \ \ x\in E_m. \tag{4.4}$$

Допустим найдены числа $p_1, ..., p_m$ и множества $E_1, ..., E_{m-1}$. Тогда

$$\sum_{n=p_m+1}^{\infty} |a_n h_n(x)| = \infty \ \ \text{когда} \ \ x\in E.$$

Заметим, что если

$$\sum_{n=p_m+1}^{q} |a_n h_n(x)| > 1 \ \ \text{и} \ \ x\in(\tau_{q,i-1},\tau_{q,i}) \ \ \text{для некоторого} \ \ i,$$

то

$$\sum_{n=n_{m-1}+1}^{q} |a_n h_n(t)| > 1, \quad \text{для любого} \quad t \in (\tau_{q,i-1}, \tau_{q,i}).$$

Следовательно E с точностью до множества меры нуль является обьединением некоторых интервалов вида $(\tau_{n,i-1}, \tau_{n,i})$. Понятно, что при достаточно большом p_{m+1} множество

$$E_m := \left\{ x \in E : \sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}} |a_n h_n(x)| > 1 \right\}$$

удовлетворяет (4.2), (4.3) и выполняется (4.4).

В силу леммы 3.1 имеем

$$\text{mes} \left\{ x \in \Delta_j^{n_j^m} : \sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}} |a_n f_n(x)| > c_{\gamma,1} \right\} \geq c_{\gamma,2} |\Delta_j^{n_j}| \quad \text{когда} \quad j \in I_m. \tag{4.5}$$

Обозначим

$$E_0 := \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{m=q}^{\infty} E_m.$$

Из (4.1) и (4.3) следует, что $\text{mes}(E \backslash E_0) = 0$. Мы должны доказать выполнение (2.6). Допустим обратное

$$\text{mes} \left\{ x \in E_0 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| < \infty \right\} > 0.$$

Тогда для некоторого m_0 выполняется

$$\text{mes}(D) > 0, \quad \text{где} \quad D := \left\{ x \in E_0 : \sum_{n=p_{m_0}}^{\infty} |a_n f_n(x)| < c_{\gamma,1} \right\}. \tag{4.6}$$

Из $\text{mes}(D) > 0$ следует, что почти все точки множества D являются точками плотности множества D. Пусть x_0-точка плотности множества D. Тогда существует такое n_0, что если $n \geq n_0$, то выполняется

$$\text{mes}(D \cap \Delta_i^n) > (1 - c_{\gamma,2}/2) |\Delta_i^n|, \quad \text{если} \quad x_0 \in \Delta_i^n. \tag{4.7}$$

С другой стороны, если m больше некоторого m_0, то $x_0 \in \Delta_j^{n_j^m}$ для некоторого j и выполняется (4.5). Но это противоречит (4.6), (4.7). Теорема доказана.

Напомним, что для классической системы Хаара безусловная сходимость п.в. ряда $\sum a_n h_n(x)$ на множестве E эквивалентна п.в. абсолютной сходимости этого ряда на E (см. [12]). Дословным повторением доказательства этого утверждения, можно доказать аналогичное утверждение для общей системы Хаара $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогичное утверждение верно также для любой общей системы Франклина (см. [13]).

Доказательство теоремы 2.2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$ при некоторой перестановке расходится на множестве положительной меры E, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n h_n(x)| = \infty \ \text{ п.в. на } \ E.$$

Тогда в силу теоремы 2.1 выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| = \infty \ \text{ п.в. на } \ E.$$

Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ можно переставить так, чтобы п.в. на E расходился. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Допустим последовательность ω_n не является множителем Вейля для общей системы Хаара $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, соответствующей слабо регулярному разбиению $\mathcal{T}$. Тогда существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$, который после некоторой перестановки расходится на некотором множестве E положительной меры и выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty.$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n h_n(x)| = \infty$ п.в. на E. В силу теоремы 2.1 выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| = \infty \ \text{ п.в. на } \ E,$$

из которого следует п.в. расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ на E после некоторой перестановки. Теорема доказана.

Замечание 4.1. *В теоремах 2.2, 2.3 не утверждается расходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ при одной и той же перестановке.*

Доказательство теоремы 2.4. Допустим ω_n неубывающая и неограниченная последовательность. Тогда существует такая последовательность натуральных чисел n_k, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{n_k}} < \infty \ \text{ и } \ n_{k+1} > 2n_k. \tag{4.8}$$

Построим такую слабо регулярную последовательность $\mathcal{T}$, чтобы для соответветствующей общей системы Франклина (Хаара) ω_n являлась множителем Вейля для безусловной сходимости п.в..

Последовательность $\mathcal{T}$ построим по индукции. Пусть $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, для $n = 2, 3, ...n_1$ положим

$$t_n = \frac{t_{n-1}}{2}.$$

Если уже имеем точки t_n, $n = 1, 2, ...n_k$, то точки t_n, $n = n_k+1, n_k+2, ..., n_{k+1}$ построим следующим образом. Точки t_n, $n = n_k+1, n_k+2, ..., n_{k+1}$ расположены в убывающем порядке и между двумя соседними точками t_n, $n = 0, 2, ...n_k$ находится одна точка t_n, $n = n_k+1, n_k+2, ..., 2n_k$, которая равна полусумме соседних точек. Далее

$$t_n := \frac{t_{n-1}}{2}, \quad n = 2n_k + 1, ..., n_{k+1}.$$

Нетрудно убедиться, что таким образом построенная последовательность $\mathcal{T}$ является слабо регулярной с параметром $\gamma = 1$. Очевидно, что

$$[0,1] = \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \Delta_n, \quad \text{и} \quad \Delta_n \bigcap \Delta_m = \emptyset, \quad \text{если } n_k < m < n \le n_{k+1}. \tag{4.9}$$

Пусть последовательность a_n удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty. \tag{4.10}$$

Тогда

(4.11)

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \|a_n f_n\|_1 \sim \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} |a_n| \sqrt{\omega_n} \frac{|\Delta_n|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\omega_n}} \le \left\{ \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 \omega_n \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{|\Delta_n|}{\omega_n} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из (4.9) и (4.11) следует, что

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \|a_n f_n\|_1 \le c_{\gamma,11} \left\{ \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 \omega_n \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\omega_{n_k}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из (4.8), (4.10) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n f_n\|_1 \le c_{\gamma,11} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 \omega_n \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\omega_{n_k}} \right\}^{\frac{1}{2}} \le \tag{4.12}$$

$$\le c_{\gamma,11} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 \omega_n \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{n_k}} \right\}^{\frac{1}{2}} \le \infty.$$

Из (4.12) следует абсолютная, а следовательно и безусловная сходимость п.в. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$. Поэтому ω_n является множителем Вейля для системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу теоремы 2.2 ω_n является множителем Вейля для общей системы Хаара соответствующей последовательности ω_n. Теорема доказана.

Замечание 4.2. *Отметим, что обратные к теоремам 2.1-2.3 не верны. Действительно, ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2^k} h_{2^k}(x)$$

сходится в каждой точке, кроме, быть может, в точке $x = 1$ *при любых коэффициентах. Но если* $a_{2^k} = 1/f_{2^k}(1)$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2^k} f_{2^k}(x)$ *расходится п.в..*

Теорема 4.1. *Пусть* ω_n *неубывающая и неограниченная последовательность и ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *такова, что* $\inf_n \|\varphi_n\|_1 = 0$. *Тогда систему* $\{\varphi_n(x)\}$ *можно переставить так, что* ω_n *будет множителем Вейля для безусловной сходимости п. в. рядов по системе* $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть ω_n неубывающая и неограниченная последовательность. Тогда существуют натуральные числа $n_k \uparrow \infty$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_{n_k}}} < \infty.$$

С другой стороны существуют такие натуралные числа $m_k \uparrow \infty$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{m_k}\|_1 < \infty.$$

Систему $\{\varphi_n(x)\}$ переставим следующим образом. Функции $\varphi_n, n \in \mathbb{N} \backslash \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположим под номерамы n_k, а функции φ_n, $n \in \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположим под номерамы $n \in \mathbb{N} \backslash \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Полученную систему обозначим через $\{\psi_n\}$. Тогда, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty$, то для некоторого c имеет место

$$\sup_n |a_n| < c, \quad \text{и} \quad |a_{n_k}| < \frac{c}{\sqrt{\omega_{n_k}}}.$$

Следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n \psi_n\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{n_k} \psi_{n_k}\|_1 + \sum_{n \neq n_k} \|a_{n_k} \psi_{n_k}\|_1$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| + c \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{m_k}\|_1 \leq c \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| + \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{m_k}\|_1 \right) < \infty.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \psi_n(x)|$ п.в. сходится. Теорема доказана.

Теоремы 2.4 и 4.1 указывают на то, что в классе ортогональных систем множитель Вейля для безусловной сходимости п.в. может стремиться к бесконечности сколь угодно медленно.

В работе [14] Ф. Г. Арутюняном доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$ на множестве положительной меры п.в. сходится, тогда и только тогда, когда на этом множестве п.в. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 h_n^2(x)$. Аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана автором [15].

Доказательство теоремы 2.5. Допустим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$ на множестве положительной меры E расходится. Тогда в силу теоремы Ф.Г. Арутюняна [14]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 h_n^2(x) = \infty \quad \text{п.в. на} \quad E. \tag{4.13}$$

Вместо леммы 3.1 применяя лемму 3.2, аналогично доказательству теоремы 2.1 можно доказать, что из (4.13) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) = \infty \quad \text{п.в. на} \quad E. \tag{4.14}$$

В работе [15] доказано, что (4.14) выполняется тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ сходится на E п.в.. Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ на множестве E п.в. расходится. Теорема доказана.

Abstract. In article it is compared the almost everywhere convergence (absolute convergence) of series in the general Haar and Franklin systems corresponding to a weak regular partition of the segment [0, 1]. It is proven that if a series in the general Haar system diverges (absolutely diverges) on the set E, a series in the general Franklin system with the same coefficients a.e. diverges (absolutely diverges) on E. As a consequence, it is obtained that if the sequence ω_n is not a Weyl multiplier for unconditional convergence a.e. of series in the general Haar system, then it is not a Weyl multiplier for the unconditional convergence a.e. of series according to Franklin's general system.

Список литературы

[1] П. Л. Ульянов, “О множителях Вейля для безусловной сходимости”, Мат. сборник, **60**, no. 1, 39 – 62 (1963).
[2] П. Л. Ульянов, “Расходящиеся ряды Фурье”, Успехи Мат. наук, **16**, no. 3, 61 – 142 (1961).
[3] Г. Г. Геворкян, “О множителях Вейля для безусловной сходимости рядов по системе Франклина”, Мат. заметки, **41**, no. 6, 789 – 797 (1987).
[4] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория Ортогональных Рядов, Физматгиз, М. (1958).
[5] П. Л. Ульянов, “Расходящиеся ряды по системе Хаара и по базисам”, ДАН СССР, **138**, no. 3, 545 – 548 (1961).
[6] А. М. Олевский, “Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам”, ДАН СССР, **138**, no. 3, 556 – 559 (1961).
[7] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “On general Franklin systems”, Dissertationes Math. (Rosprawy Mat.), **374**, 59 pp. (1998).

[8] Ph. Franklin, “A set of continuous orthonormal functions”, Math. Annalen, **100**, 522 – 529 (1928).
[9] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$”, Studia Math. **164**, no. 2, 161 – 204 (2004).
[10] Z. Ciesielski, A. Kamont, “Projections onto piecewise linear functions”, Funct. Approx. Comment. Math., **25**, 129 – 143 (1997).
[11] A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme”, Math. Ann., **69**, 331 – 371 (1910).
[12] Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, “Об абсолютной и безусловной сходимости”, УМНб **22**, no. 3, 240 - 242 (1967).
[13] Г. Г. Геворкян, К. А. Керян, “Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по общей системе Франклина”, Изв. РАН. Сер. матем., **73**, no. 2, 69 – 90 (2009).
[14] Ф. Г. Арутюнян, “О рядах по системе Хаара”, Доклады АН Арм. ССР, **42**, no. 3, 134 – 140 (1966).
[15] Г. Г. Геворкян, “О рядах по системе Франклина”, Analysis Math., **16**, no. 2, 87 – 114 (1990).

Поступила 29 ноября 2023

После доработки 29 ноября 2023

Принята к публикации 13 января 2024

Известия НАН Армении, Математика, том 59, н. 4, 2024, стр. 41 – 57.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДУАЛЬНЫХ ДИСТРИБУТИВНЫХ СВЕРХТОЖДЕСТВ В ДЕЛИМЫХ АЛГЕБРАХ

Ю. М. МОВСИСЯН, С. С. ДАВИДОВ

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *movsisyan@ysu.am; davidov@ysu.am*

Аннотация. В работе дана классификация нетривиальных дуальных сверхтождеств левой и правой дистрибутивности выполняющихся в функционально-нетривиальных делимых алгебрах. Если в функционально-нетривиальной делимой алгебре выполняются нетривиальные дуальные сверхтождества левой и правой дистрибутивности, тогда сврхтождество левой дистрибутивности будет ранга два и (эквивалентно сверхтождеству) вида

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)),$$

а сверхтождество правой дистрибутивности – сверхтождество ранга два и (эквивалентно сверхтождеству) вида

$$X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z)).$$

О классификации нетривиальных сверхтождеств левой и правой дистрибутивности выполняющихся в функционально-нетривиальных q-алгебрах см. [1]-[4]

MSC2020 number: 20N05.

Ключевые слова: квазигруппа; обратимая алгебра; делимая алгебра; d-алгебра; формула второго порядка (ступени); сверхтождество.

1. Введение

Сверхтождеством [1]-[4] называется формула 2-ой ступени [5] со специализированными кванторами:

$$\forall X_1 ... \forall X_k \forall x_1 ... \forall x_n (w_1 = w_2),$$

где $X_1, ..., X_k$ – все функциональные переменные, а $x_1, ..., x_n$ – все предметные переменные в словах w_1, w_2. Число k называется рангом сверхтождества. Однако, сверхтождество (как и обычное тождество) для простоты записывается без кванторной приставки, понимая его выполнимость в алгебре $(Q; \Sigma)$, как выполнимость соответствующей формулы 2-ой ступени со специализированными

[1]Исследование первого автора частично финансировано коммитетом по науке Республики Армения, гранты: 10-3/1-41, 21T-1A213.

кванторами $\forall X_1, ..., \forall X_k$. Специализация здесь заключается в том, что каждая функциональная переменная X_i принимает любое значение из Σ соответствующей арности.

Сверхтождество $w_1 = w_2$ называется нетривиальным, если в нем участвуют хотя бы две различные функциональные переменные, т.е. когда ранг сверхтождества больше 1. Тривиальными называются сверхтождества ранга 1.

Множество всех предметных (функциональных) переменных слова w обозначим через $[w]$ (соответственно, через $]w[$). Функциональная переменная X называется сингулярной в сверхтовдестве, если в нем встречается всего один раз и справедливо хотя бы одно из следующих условий [1]:

1) в подслове $w = X(w_1, w_2)$ существуют предметные переменные $x \in [w_1]$ и $y \in [w_2]$ такие, что каждая из них в подслове w встречается лишь один раз;

2) подслово $w = X(w_1, w_2)$ имеет вид $X(w_1, x)$ или $X(x, w_2)$ и существует предметная переменная $y \in [w]$, отличная от x и встречающаяся в подслове w всего один раз.

Алгебра с бинарными операциями называется бинарной алгеброй. Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется функционально-нетривиальной, если $|\Sigma| > 1$.

Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется:

1) дистрибутивной, если она удовлетворяет следующим сверхтождествам дистрибутивности:

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)), \qquad X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z));$$

2) идемпотентной, если она удовлетворяет сверхтождеству идемпотентности:

$$X(x, x) = x;$$

3) коммутативной, если она удовлетворяет сверхтождеству коммутативности:

$$X(x, y) = X(y, x);$$

4) сверхассоциативной, если она удовлетворяет следующему сверхтождеству ассоциативности:

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), z)).$$

Пусть$a \in Q$, $X \in \Sigma$, определим следующие отображения: $L_{a,X}(x) = X(a, x)$, $R_{a,X}(x) = X(x, a)$ для всех $x \in Q$. Скажем, что $(Q; \Sigma)$ лево (право)- сократимая (делимая, обратимая) алгебра, если отображения $L_{a,X}$ $(R_{a,X})$ - инъекции (сюръекции, биекции) для всех $X \in \Sigma$ и $a \in Q$. Алгебра называется сократимой (делимой, обратимой), если она лево - и право-сократимая (делимая, обратимая) алгебра.

Алгебра $(Q;\Sigma)$ называется лево-регулярной, если из равенства $X(c,a) = X(c,b)$, где $a,b,c \in Q$, $X \in \Sigma$, следует равенство $X(x,a) = X(x,b)$ для любого $x \in Q$. Двойственным образом определяется право регулярная алгебра: из равенства $X(a,c) = X(b,c)$, где $a,b,c \in Q$, $X \in \Sigma$, следует равенство $X(a,x) = X(b,x)$ для любого $x \in Q$. Алгебра называется регулярной, если она одновременно лево - и право-регулярна.

Алгебра $(Q;\Sigma)$ называется лево-точной (или точной слева), если из равенства $R_{a,X} = R_{b,X}$, где $a,b \in Q$, $X \in \Sigma$, следует, что $a = b$, т.е. из равенств $X(x,a) = X(x,b)$ для всех $x \in Q$ следует, что $a = b$. Двойственным образом определяется право-точная алгебра: из равенства $L_{a,X} = L_{b,X}$, где $a,b \in Q$, $X \in \Sigma$, следует, что $a = b$. Алгебра называется точной, если она одновременно лево - и право-точная.

Очевидно, что алгебра лево (право) - сократима тогда и только тогда, когда она лево (право) - точна и лево (право) - регулярна. Легко видеть, сто справедлива

Лемма 1.1. (i) *Класс лево (право) - точных алгебр замкнут относительно декартовых произведений;*

(ii) *Класс лево (право) - регулярных алгебр замкнут относительно декартовых произведений.*

Пусть $(Q;\Sigma)$ – бинарная алгебра. Непустое подмножество $I \subseteq Q$ называется правым (левым) идеалом алгебры $(Q;\Sigma)$, если для любой операции $A \in \Sigma$ и для любых $x \in Q$, $a \in I$ справедливы включения: $A(a,x) \in I$ $(A(x,a) \in I)$. Двусторонним идеалом или просто идеалом называется подмножество $I \subseteq Q$, являющееся и левым, и правым идеалом.

Пусть $(Q;\Sigma)$ бинарная алгебра. Введем следующиеие обозначения:

$Id(Q) = \{x \in Q | \forall X \in \Sigma, X(x,x) = x\},)$ $\qquad Id^{\exists}(Q) = \{x \in Q | \exists X \in \Sigma, X(x,x) = x\}.$

Предложение 1.1. *Пусть $(Q;\Sigma)$ – дистрибутивная алгебра. Тогда:*

(1) Если $Id(Q)$ не пусто, то $Id(Q)$ является идеалом алгебры $(Q;\Sigma)$;

(2) $Id^{\exists}(Q) \neq \emptyset$ и является идеалом алгебры $(Q;\Sigma)$;

(3) $X(x, Y(y,z)), X(Y(x,y),z) \in Id^{\exists}(Q)$ *для всех* $X, Y \in \Sigma$*,* $x, y, z \in Q$*.*

Доказательство. (1) Пусть $x \in Id(Q)$ и $a \in Q$, тогда для любых операций $X, Y \in \Sigma$ имеем:

$$X(a,x) = X(a, Y(x,x)) = Y(X(a,x), X(a,x)),$$

т.е. $X(a,x) \in Id(Q)$.

(2) Для любого $X \in \Sigma$ и для любого $x \in Q$ имеем $X(x, X(x,x)), X(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$, поскольку

$$X(x, X(x,x)) = X(X(x,x), X(x,x)) = X(X(x, X(x,x)), X(x, X(x,x)).$$

следовательно, $Id^{\exists}Q$ не пусто. Аналогично устанавливается, что $X(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$.

Для произвольных элементов $x \in Id^{\exists}Q$ и $a \in Q$ покажем, что $X(a,x), X(x,a) \in Id^{\exists}Q$ для всех операций $X \in \Sigma$. Поскольку $x \in Id^{\exists}Q$ то существует операция $Y \in \Sigma$ такая, что $Y(x,x) = x$ и, следовательно,

$$Y(X(a,x), X(a,x)) = X(a, Y(x,x)) = X(a,x).$$

Точно также показывается, что $X(x,a) \in Id^{\exists}Q$. Таким образом, $Id^{\exists}Q$ – идеал алгебры $(Q; \Sigma)$.

(3) В начале покажем, что $Y(x, X(x,x)), Y(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$ для всех $X, Y \in \Sigma$ и любого $x \in Q$.

$$\begin{aligned} Y(x, X(x,x)) &= X(Y(x,x), X(x,x)) = Y(X(x, Y(x,x)), X(x, Y(x,x))) \\ &= X(Y(X(x, Y(x,x)), x), Y(X(x, Y(x,x)), Y(x,x))) = \\ &= X(X(Y(x,x), Y(Y(x,x),x)), Y(X(x, Y(x,x)), Y(x,x))), \end{aligned}$$

учитывая, что $Y(Y(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$ и $Id^{\exists}Q$ идеал, получим включение $Y(x, X(x,x)) \in Id^{\exists}Q$. Аналогично доказывается, что $Y(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$.

Теперь покажем, что $X(x, Y(y,z)) \in Id^{\exists}(Q)$ для всех $X, Y \in \Sigma$, $x, y, z \in Q$. Действительно,

$$\begin{aligned} Y(x, X(y,z)) &= X(Y(x,y), Y(x,z)) = Y(X(Y(x,y),x), X(Y(x,y),z)) = \\ &= Y(Y(X(x,x), X(y,x)), X(Y(x,y),z)) = \\ &= Y(X(Y(X(x,x),y), Y(X(x,x),x)), X(Y(x,y),z)), \end{aligned}$$

и учитывая, что $Y(X(x,x),x) \in Id^{\exists}Q$, получим включение $Y(x, X(y,z)) \in Id^{\exists}Q$. Аналогично доказывается, что $Y(X(x,y),z) \in Id^{\exists}Q$ для любых $X, Y \in \Sigma$ и $x, y, z \in Q$. □

Поскольку делимый группоид не имеет собственных идеалов, то получаем следующее следствие.

Следствие 1.1. *Дистрибутивный делимый группоид – идемпотентен.*

Бинарная алгебра $(Q;\Sigma)$ называется d-алгеброй, если в Σ существует делимая операция, т. е. $Q(A)$ делимый группоид для некоторого $A \in \Sigma$.

Лемма 1.2. *Пусть $(Q;\Sigma)$ – d-алгебра, тогда $(Q;\Sigma)$ не имеет собственных левых и правых идеалов.*

Доказательство. Пусть $A \in \Sigma$ – делимая операция и I – идеал алгебры $(Q;\Sigma)$. Пусть $a \in Q$ и $x \in I$, так как A – делимая операция, то существует $y \in Q$ такой, что $a = A(x,y)$. Так как I – идеал, то $a \in I$, т.е. $I = Q$. □

2. Вспомогательные результаты

Определим некоторые вспомогательные множества и отношения. Пусть $x \in Q$, $X \in \Sigma$, тогда

$$(u,v) \in \sigma_x^X \iff L_{x,X}(u) = L_{x,X}(v) \iff X(x,u) = X(x,v),$$

где $u, v \in Q$. Аналогично,

$$(u,v) \in \tau_x^X \iff R_{x,X}(u) = R_{x,X}(v) \iff X(u,x) = X(v,x),$$

где $u, v \in Q$.

Очевидно, что $\sigma_x^X \neq 1$ ($\tau_x^X \neq 1$) тогда и только тогда, когда $L_{x,X}$ ($R_{x,X}$) не является инъекцией. Введем следующие обозначения:

$$I^X(u,v) = \{x | (u,v) \in \tau_x^X\} = \{x | R_{x,X}(u) = R_{x,X}(v)\} = \{x | X(u,x) = X(v,x)\},$$

$$K^X(u,v) = \{x | (u,v) \in \sigma_x^X\} = \{x | L_{x,X}(u) = L_{x,X}(v)\} = \{x | X(x,u) = X(x,v)\}.$$

Пусть $\eta^X = \bigcap_{x\in Q} \tau_x^X$ и $\rho^X = \bigcap_{x\in Q} \sigma_x^X$. Далее,

$$(u,v) \in \alpha^X \longleftrightarrow u = X(v,u), \quad \mu^X = s(\alpha^X), \quad \lambda^X = t(\mu^X),$$

где $s(\alpha^X)$ симметричное замыкание отношения α^X, а $t(\mu^X)$ – дистрибутивное замыкание отношения μ^X. Аналогично,

$$(u,v) \in \beta^X \longleftrightarrow u = X(u,v), \quad \nu^X = s(\beta^X), \quad \chi^X = t(\nu^X).$$

Лемма 1.3. *Пусть $(Q;\Sigma)$ дистрибутивная алгебра, $a,b,y \in Q$, $X \in \Sigma$ и $x \in I^X(a,b) \cap K^X(a,b)$. Тогда $X(x,y) \in I^X(a,b)$ и $X(y,x) \in K^X(a,b)$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&X(a,X(x,y)) = X(X(a,x),X(a,y)) = X(X(b,x),X(a,y))\\
&= X(X(b,X(a,y)),X(x,X(a,y))) = X(X(b,X(a,y)),X(X(x,a),X(x,y)))\\
&= X(X(b,X(a,y)),X(X(x,b),X(x,y))) = X(X(X(b,a),X(b,y)),X(x,X(b,y)))\\
&= X(X(X(b,a),x),X(b,y)) = X(X(X(b,x),X(a,x)),X(b,y))\\
&= X(X(X(b,x),X(b,x)),X(b,y)) = X(X(X(b,x),X(b,y)),X(X(b,x),X(b,y)))\\
&= X(X(b,X(x,y)),X(b,X(x,y))) = X(b,X(x,y)).
\end{aligned}$$

Последнее равенство получено согласно предложению 1.1. Таким образом, $X(x,y) \in I^X(a,b)$. Второе включение доказывается аналогично. □

В леммах 1.4-1.11 будем предполагать, что $(Q;\Sigma)$ подпрямо-неразложимая дистрибутивная идемпотентная алгебра. Пусть π – ее наименьшая нетривиальная конгруэнзия и $(a,b) \in \pi$, где $a \neq b$.

Лемма 1.4. *Если $L_{a,X}$ – инъекция, то $\nu^X = \chi^X = 1$.*

Доказательство. Допустим $\chi^X \neq 1$, тогда $\pi \subseteq \chi^X$ и следовательно $(a,b) \in \chi^X$. Таким образом существует последовательность элементов $a_1, a_2, ..., a_n \in Q$ таких, что

$$(a,a_1) \in \nu^X, (a_1,a_2) \in \nu^X, \cdots, (a_n,b) \in \nu^X.$$

Поэтому $a = X(a,a_1) = X(a,a)$, и так как $L_{a,X}$ инъекция, то $a = a_1$. Продолжая таким образом получим $a = b$, противоречие. Таким образом $\nu^X = 1$ и следовательно $\chi^X = 1$. □

Лемма 1.5. *Если $R_{b,X}$ – инъекция, то $\mu^X = \lambda^X = 1$.*

Доказательство. Двойственно лемме 1.4. □

Лемма 1.6. *Для любых $x, y \in Q$ и любого $X \in \Sigma$ множество $I^X(x, y)$ пусто или явлветея левым идеалом группоида $(Q; X)$.*

Доказательство. Пусть $z \in I^X(x, y)$, где $x, y \in Q$. Поэтому имеем $X(x, z) = X(y, z)$. Тогда

$$\begin{aligned} X(x, X(x, z)) &= X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), X(x, z)) = X(X(x, y), X(y, z)) \\ &= X(X(x, X(y, z)), X(y, X(y, z))) = X(X(x, X(x, z)), X(y, X(y, z))), \end{aligned}$$

таким образом:

$$(X(x, X(x, z)), X(y, X(y, z)) \in \rho^X.$$

Аналогично получим, что

$$(X(y, X(y, z)), X(x, X(x, z)) \in \rho^X.$$

Следовательно, $(X(y, X(y, z)), X(x, X(x, z))) \in \nu^X$. Согласно лемме 1.4 имеем $\nu^X = 1$, поэтому

$$X(x, X(x, z)) = X(y, X(y, z)),$$

следовательно, $X(x, z) \in I^X(x, y)$ (так как $X(x, z) = X(y, z)$). Возьмем произвольный элемент $u \in Q$, тогда с учетом последнего включения имеем:

$$\begin{aligned} X(x, X(u, z)) &= X(X(x, u), X(x, z)) = X(X(x, X(x, z)), X(u, X(x, z))) \\ &= X(X(y, X(y, z)), X(u, X(x, z))) = X(X(y, u), X(y, z)) = X(y, X(u, z)). \end{aligned}$$

Таким образом, $X(u, z) \in I^X(x, y)$. Поэтому $I^X(x, y)$ будет левым идеалом группоида $(Q; X)$. □

Лемма 1.7. *Для любых $x, y \in Q$ и любого $X \in \Sigma$ множество $K^X(x, y)$ пусто или явлветея правым идеалом группоида $(Q; X)$.*

Доказательство. Двойственно лемме 1.6. □

Лемма 1.8. *Для любой операции $X \in \Sigma$ либо $L_{a,X}$, либо $R_{b,X}$ являются инъекциями.*

Доказательство. Допустим $L_{a,X}$ и $R_{b,X}$ не являются инъекциями, тогда, согласно леммам 1.4 и 1.5, будем иметь $\sigma_a^X \neq 1$ и $\tau_b^X \neq 1$. Таким образом, $X(a, a) = X(a, b)$ и $X(a, b) = X(b, b)$, или $X(a, a) = X(b, b)$, т. е. $a = b$, противоречие. □

Лемма 1.9. *Если в алгебре* $(Q;\Sigma)$ *для любой операции* $X \in \Sigma$ *группоид* $(Q;X)$ *не имеет собственных левых идеалов и отображение* $L_{a,X}$ *инъекция, то алгебра* $(Q;\Sigma)$ *будет право-регулярной. Более того, для любой операции* $X \in \Sigma$ *группоид* $(Q;X)$ *будет либо лево-, либо право-сократимым.*

Доказательство. Пусть $x \in Q$ и $(c,d) \in \tau_x^X$ для некоторых $c,d \in Q$ и $X \in \Sigma$, т. е. $X(c,x) = X(d,x)$ или $x \in I^X(c,d)$, поэтому согласно лемме 1.8 $I^X(c,d)$ будет левым идеалом группоида $(Q;X)$, следовательно, согласно условию имеем: $I^X(c,d) = Q$. Таким образом $X(c,z) = X(d,z)$ для любого элемента $z \in Q$, а это означает, что группоид $(Q;X)$ будет право регулярным. Поскольку операция X была произвольной, то алгебра $(Q;\Sigma)$ – право регулярна.

Далее, если группоид $(Q;X)$ не является право сократимым, то он не будет также право точным и, следовательно, $(a,b) \in \eta^X$ (так как $\eta^X \neq 1$), т. е. $I^X(a,b) = Q$, поэтому для любого элемента $x \in Q$ имеем

$$X(a,x) = X(b,x). \tag{1.1}$$

Теперь, если группоид $(Q;X)$не является лево сократимым, то существует элемент $y \in Q$ такой, что отображение $L_{y,X}$ не является инъекцией. Другими словами, сущетвуют $c,d \in Q$ $(c \neq d)$ такие, что $L_{y,X}(c) = L_{y,X}(d)$ или $X(y,c) = X(y,d)$. Следовательно, $\sigma_y^X \neq 1$, поэтому $\pi \subseteq \sigma_y^X$ и $(a,b) \in \sigma_y^X$ или $X(y,a) = X(y,b)$, т. е. $y \in K^X(a,b)$. С учетом (1.1) имеем $y \in K^X(a,b) \cap I^X(a,b)$. Из леммы 1.3 следует, что $K^X(a,b)$ левый идеал группоида $(Q;X)$, поэтому $K^X(a,b) = Q$, т.е. $(a,b) \in \rho^X$, противоречие с леммой 1.4. □

Лемма 1.10. *Если в алгебре* $(Q;\Sigma)$ *для любой операции* $X \in \Sigma$ *группоид* $(Q;X)$ *не имеет собственных правых идеалов и отображение* $R_{b,X}$ *инъекция, то алгебра* $(Q;\Sigma)$ *будет лево регулярной. Более того, для любой операции* $X \in \Sigma$ *группоид* $(Q;X)$ *будет либо лево, либо право сократимым.*

Доказательство. Двойственно лемме 1.9. □

Лемма 1.11. *Если алгебра* $(Q;\Sigma)$ *не имеет собственных левых и правых идеалов, то* $(Q;\Sigma)$ *будет регулярной алгеброй.*

Доказательство. Пусть $X \in \Sigma$. Согласно лемме 1.8 либо $L_{a,X}$, либо $R_{b,X}$ являются инъекциями. Предположим $L_{a,X}$ – инъекция (другой случай рассматривается аналогично). Согласно лемме 1.9 алгебра $(Q;\Sigma)$ – право-регулярна. Далее, если для операции $X \in \Sigma$ группоид $(Q;X)$ – лево-сократим, то очевидно он будет лево-регулярным. Если $(Q;X)$ – право-сократим, то $R_{b,X}$ будет инъекцией и, согласно лемме 1.10, алгебра $(Q;\Sigma)$ будет лево-регулярной. □

Предложение 1.2. *Каждая дистрибутивная делимая алгебра – регулярна.*

Доказательство. Следует из лемм 1.2, 1.4 и 1.11. □

Следствие 1.2. [6] *Дистрибутивный делимый группоид – регулярен.*

Предложение 1.3. *Дистрибутивная d-алгебра – идемпотентна.*

Доказательство. Пусть $A \in \Sigma$ делимая операция, тогда она будет идемпотентной (следствие 1.1) и регулярной (следствие 1.2). Пусть X произвольная операция из Σ и $x \in Q$, тогда

$$\begin{aligned} A(x, X(x,x)) &= A(A(x,x), X(x,x)) = X(A(A(x,x),x), A(A(x,x),x)) \\ &= X(A(A(x,x), A(x,x)), A(A(x,x), A(x,x))) \\ &= A(X(A(A(x,x), A(x,x)), A(x,x)), X(A(A(x,x), A(x,x)), A(x,x))) \\ &= A(X(x,x), X(x,x)). \end{aligned}$$

По регулярности операции A для любого $y \in Q$ будем иметь

$$A(x,y) = A(x(x,x), y) = X(A(x,y), A(x,y)),$$

т. е. элемент $A(x,y)$ идемпотентен, поэтому $Id(Q) \neq \emptyset$ и, согласно лемме 1.2, $Id(Q) = Q$. □

3. Основные результаты

Сверхтождество левой дистрибутивности

$$X(x, Y(y,z)) = Z(U(x,y), V(x,z)),$$

и следующее сверхтождество правой дистрибутивности

$$X(Y(z,y), x) = Z(V(z,x), U(y,x))$$

будем называть дуальными.

Определение 1.1. *Бинарная операция A определенная на множестве Q называется гомотопной бинарной операции B определенной на множестве Q', или гомотопом B, если существуют отображения α, β, γ множества Q в Q' такие, что*

$$\gamma A(x, y) = B(\alpha x, \beta y)$$

для любых $x, y \in Q$ [7]-[8].

Упорядоченная тройка $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ называется гомотопией, а отображение γ – главной компонентой гомотопии T. Если главная компонента $\gamma = 1$, то гомотопия называется главной. Если все отображения α, β, γ являются биекциями (сюръекциями) множества Q в Q',то гомотопия называется изотопией (эпитопией).

Лемма 1.12. *(*[9]*, Lemma.1.1) Каждый делимый и регулярный группоид $Q(\cdot)$ главно-эпитопен некоторой лупе $Q(\circ)$.*

Согласно определению d-алгебры существует такая операция $A \in \Sigma$, что $Q(A)$ – делимый группоид, который будет дистрибутивным, т. е. в нем выполняются тождества:

$$A(x, A(y, z)) = A(A(x, y), A(x, z)), \qquad A(A(x, y), z) = A(A(x, z), A(y, z)).$$

Согласно предложению 1.2 группоид $Q(A)$ будет регулярным, а согласно предложению 1.3 – идемпотентным.

Согласно лемме 1.12, операция A эпитопна лупе $Q(\circ)$ и эта эпитопия имеет вид

$$x \circ y = A(h(x), k(y)),$$

где h, k отображения множества Q в себя такие, что $R_j h = id_Q$, $L_j k = id_Q$, а $R_j(x) = A(x, j)$, $L_j(x) = A(j, x)$ и j – некоторый фиксированный элемент множества Q. Единичным элементом лупы $Q(\circ)$ будет $j = A(j, j)$. Имеем

$$A(x, y) = R_j(x) \circ L_j(y), \tag{1.2}$$

где R_j и L_j эпиморфизмы лупы $Q(\circ)$. Действительно:

$$R_j(x \circ y) = R_j A(h(x), k(y)) = A(A(h(x), k(y)), j) = A(A(hx, j), A(ky, j))$$
$$= A(R_j h(x), R_j k(y)) = R_j R_j h(x) \circ L_j R_j k(y) = R_j(x) \circ R_j L_j k(y) = R_j(x) \circ R_j(y),$$

так как $R_jL_j = L_jR_j$, поскольку:

$$R_jL_j(x) = R_j(A(j,x)) = A(A(j,x),j) = A(A(j,j),A(x,j))$$
$$= A(j,A(x,j)) = L_jA(x,j) = L_jR_j(x).$$

Аналогично доказывается, что L_j – эпиморфизм лупы $Q(\circ)$.

Обозначая $R_j = \varphi$, $L_j = \psi$, приходим к равенству:

$$A(x,y) = \varphi(x) \circ \psi(y), \quad \varphi,\psi \in EndQ(\circ), \tag{1.3}$$

где $A \in \Sigma$ и $Q(A)$ – делимый и регулярный группоид.

Лемма 1.13. *В функционально-нетривиальной d-алгебре с дуальными сверхтождествами левой и правой дистрибутивности, сверхтождество левой или правой дистрибутивности не имеет сингулярной функциональной переменной.*

Доказательство. Обозначим через A делимую операцию алгебры $(Q;\Sigma)$ и представим ее в виде (1.3). Рассмотрим все возможные случаи.

1) В сверхтождестве левой дистрибутивности сингулярная операция X находится на первом месте. В сверхтождестве левой дистрибутивности придавая всем остальным операциям значение A, получим равенство:

$$X(x,A(y,z)) = A(A(x,y),A(x,z)).$$

Взяв в последнем равенстве $y = z$ и учитывая идемпотентность операции A, получим $X(x,y) = A(x,y)$, т.е. алгебра $(Q;\Sigma)$ будет функционально-тривиальной. Противоречие!

2) Сингулярная операция X находится на втором месте. В сверхтождестве левой дистрибутивности придавая всем остальным операциям значение A, получим равенство:

$$A(x,X(y,z)) = A(A(x,y),A(x,z)).$$

Придавая операции X два различных значения получим равенство:

$$A(x,X(y,z)) = A(x,Y(y,z)),$$

где X,Y произвольные операции из Σ, поэтому

$$\varphi x \circ \psi X(y,z) = \varphi y \circ \psi Y(y,z),$$

или $\psi X(y,z) = \psi Y(y,z)$. Аналогично, поступая в дуальном правом сверхтождестве дистрибутивности, для всех $X,Y \in \Sigma$, получим равенство $A(X(x,y),z) =$

$A(Y(x,y),z)$, или $\varphi X(x,y) = \varphi Y(x,y)$. Поэтому, используя идемпотентность операции A, получим:

$$X(x,y) = A(X(x,y), X(x,y)) = \varphi X(x,y) \circ \psi X(x,y) =$$

$$= \varphi Y(x,y) \circ \psi Y(x,y) = Y(x,y).$$

Противоречие!

3) Сингулярная операция X находится на третьем месте. В сверхтождестве левой дистрибутивности придавая всем остальным операциям значение A, получим равенство:

$$A(x, A(y,z)) = X(A(x,y), A(x,z)).$$

Так как операция X произвольна, то

$$X(A(x,y), A(x,z)) = Y(A(x,y), A(x,z)),$$

для всех $X, Y \in \Sigma$. Далее,

$$X(\varphi x \circ \psi y, \varphi x \circ \psi z) = Y(\varphi x \circ \psi y, \varphi x \circ \psi z),$$

или, с учетом сюръективности отображений φ, ψ,

$$X(x \circ y, x \circ z) = Y(x \circ y, x \circ z).$$

Возьмем в последнем равенстве $x = j$ получим: $X(y,z) = Y(y,z)$.

4) Сингулярная операция X находится на четвертом месте. В сверхтождестве левой дистрибутивности придавая всем остальным операциям значение A, получим равенство:

$$A(x, A(y,z)) = A(X(x,y), A(x,z)),$$

или

$$A(X(x,y), A(x,z)) = A(Y(x,y), A(x,z)),$$

где операции $X, Y \in \Sigma$ произвольны. Следовательно,

$$\varphi X(x,y) \circ \psi(\varphi x \circ \psi z) = \varphi Y(x,y) \circ \psi(\varphi x \circ \psi z),$$

поэтому

$$\varphi X(x,y) = \varphi Y(x,y) \tag{1.4}$$

для любых операций $X, Y \in \Sigma$.

Аналогично поступим в дуальном сверхтождестве правой дистрибутивности, получим следующее равенство:

$$A(A(x,y),z) = A(A(x,z),X(y,z)),$$

откуда следует, что

$$\psi X(x,y) = \psi Y(x,y). \tag{1.5}$$

для любых операций $X, Y \in \Sigma$.

Далее, используя идемпотентность операции A и равенства (1.4), (1.5) получим:

$$X(x,y) = A(X(x,y),X(x,y)) = \varphi X(x,y) \circ \psi X(x,y) =$$

$$= \varphi Y(x,y) \circ \psi Y(x,y) = A(Y(x,y),Y(x,y)) = Y(x,y).$$

5) Случай, когда сингулярная операция находится на пятом месте рассматривается аналогично случаю 4).

Аналогично рассматривается правое сверхтождествое дистрибутивности. □

Теорема 1.1. *Если в функционально-нетривиальной делимой алгебре выполняются дуальные нетривиальные сверхтождества левой и правой дистрибутивности, тогда сверхтождество левой дистрибутивности будет ранга два и (эквивалентно сверхтождеству) вида*

$$X(x,Y(y,z)) = Y(X(x,y),X(x,z)), \tag{1.6}$$

а сверхтождество правой дистрибутивности – сверхтождество ранга два и (эквивалентно сверхтождеству) вида

$$X(Y(x,y),z) = Y(X(x,z),X(y,z)). \tag{1.7}$$

Доказательство. Так как в алгебре $(Q;\Sigma)$ выполняются тривиальные сверхтождества левой и правой дистрибутивности, то алгебра $(Q;\Sigma)$ будет идемпотентной.

Согласно лемме 1.13 достаточно рассмотреть случаи, когда в сверхтождествах дистрибутивности нет сингулярных операций. Поскольку в сверхтождестве левой (правой) дистрибутивности всего пять мест для функциональных переменных, то функциональный ранг сверхтождества дистрибутивности без сингулярных операций должен быть равен двум. В этом случае одна из функциональных переменных должна повторяться два раза, а другая – три раза. Помимо сверхтождества (1.6) имеется еще девять таких сверхтождеств левой дистрибутивности:

$$X(x, X(y,z)) = Y(Y(x,y), Y(x,z)), \tag{1.8}$$

$$X(x, X(y,z)) = Y(X(x,y), Y(x,z)), \tag{1.9}$$

$$X(x, X(y,z)) = Y(Y(x,y), X(x,z)), \tag{1.10}$$

$$X(x, X(y,z)) = X(Y(x,y), Y(x,z)), \tag{1.11}$$

$$X(x, Y(y,z)) = X(Y(x,y), Y(x,z)), \tag{1.12}$$

$$X(x, Y(y,z)) = X(Y(x,y), X(x,z)), \tag{1.13}$$

$$X(x, Y(y,z)) = X(X(x,y), Y(x,z)), \tag{1.14}$$

$$X(x, Y(y,z)) = Y(Y(x,y), X(x,z)), \tag{1.15}$$

$$X(x, Y(y,z)) = Y(X(x,y), Y(x,z)). \tag{1.16}$$

Требуется доказать, что ни одно из них не может выполняться в какой-либо функционально нетривиальной делимой алгебре с дуальным сверхтождеством правой дистрибутивности.

1) Пусть в функционально нетривиальной делимой алгебре $(Q;\Sigma)$ со сверхтождеством правой дистрибутивности выполняется сверхтождество (1.8).

В сверхтождестве (1.8), полагая $X = A_1$, $Y = A_2$, $y = z$, где $A_1 \neq A_2$ приходим к противоречию:

$$A_1(x, A_1(y,y)) = A_2(A_2(x,y), A_2(x,y)), \qquad A_1(x,y) = A_2(x,y), \qquad A_1 = A_2.$$

2) Пусть в нетривиальной делимой алгебре со сверхтождеством правой дистрибутивности выполняется сверхтождество (1.9).

В сверхтождестве (1.9) возьмем $z = x$, получим

$$X(x, X(y,x)) = Y(X(x,y), Y(x,x)), \qquad X(x, X(y,x)) = Y(X(x,y), x),$$

т. е. в алгебре $(Q;\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$Y(X(x,y), x) = Z(X(x,y), x).$$

В последнем сверхтождестве возьмем $X = A$, получим для любых операций $Y, Z \in \Sigma$ равенство:

$$Y(A(x, y), x) = Z(A(x, y), x).$$

Согласно делимости операции A, для любых $x, z \in Q$ существует $y \in Q$ такой, что $A(x, y) = z$. Поэтому,

$$Y(z, x) = Y(A(x, y), x) = Z(A(x, y), x) = Z(z, y),$$

т. е. $Y = Z$ и алгебра $(Q; \Sigma)$ будет функционально-тривиальной.

3) Пусть в нетривиальной делимой алгебре со сверхтождеством правой дистрибутивности выполняется сверхтождество (1.10).

В сверхтождестве (1.10) возьмем $x = y$ получим:

$$X(x, X(x, z)) = Y(x, X(x, z)), \qquad Y(x, X(x, z)) = Z(x, X(x, z)).$$

Далее поступаем аналогично предыдущему случаю.

4) В сверхтождестве (1.11) возьмем $X = A$, $Y = A_i$, получим:

$$A(x, A(y, z)) = A(A_i(x, y), A_i(x, z)),$$

далее, пусть $y = z$, тогда

$$A(x, A(y, y)) = A(A_i(x, y), A_i(x, y)), \quad A(x, y) = A_i(x, y).$$

5) В сверхтождестве (1.12) возьмем $y = z$, получим

$$X(x, Y(y, y)) = X(Y(x, y), Y(x, y)),$$

$$X(x, y) = Y(x, y).$$

6) В сверхтождестве (1.13) возьмем $z = y$ и учитывая идемпотентность алгебры $(Q; \Sigma)$, получим:

$$X(x, Y(y, y)) = X(Y(x, y), X(x, y)),$$

$$X(x, y) = X(Y(x, y), X(x, y)) = X(X(x, y), X(x, y)),$$

в последнем равенстве возьмем $X = A$:

$$A(Y(x, y), X(x, y)) = A(A(x, y), A(x, y)).$$

Согласно регулярности операции A получим:

$$A(Y(x, y), z) = A(A(x, y), z).$$

Таким образом, для любых операций $Y, Z \in \Sigma$, имеем:

$$A(Y(x,y),z) = A(Z(x,y),z) \text{ или } \varphi Y(x,y) \circ \psi z = \varphi Z(x,y) \circ \psi z.$$

Следовательно, $\varphi Y(x,y) = \varphi Z(x,y)$ для всех операций $Y, Z \in \Sigma$. Теперь возьмем в сверхтождестве (1.13) $y = x$, тогда, повторяя предыдущие рассуждения, последовательно получим:

$$X(x, Y(Y(x,z)) = X(x, X(x,z)), \qquad X(x, Z(x,z)) = X(x, X(x,z)),$$

$$A(x, Z(x,z)) = A(x, Y(x,z)), \qquad \varphi x \circ \psi Z(x,z) = \varphi x \circ \psi Y(x,z), \qquad \psi Z(x,z) = \psi Y(x,z),$$

для всех операций $Y, Z \in \Sigma$. Далее,

$$\begin{aligned} X(x,y) &= A(X(x,y), X(x,y)) = \varphi X(x,y) \circ \psi X(x,y) \\ &= \varphi Y(x,y) \circ \psi Y(x,y) = A(Y(x,y), Y(x,y)) = Y(x,y). \end{aligned}$$

7) Для сверхтождества (1.14) доказательство проводится аналогично сверхтождеству (1.13).

8) В сверхтождестве (1.15) возьмем $z = x$ и воспользуемся тривиальным сверхтождеством правой дистрибутивности, получим:

$$X(x, Y(y,x)) = Y(Y(x,y),x) = Y(Y(x,x), Y(y,x)) = Y(x, Y(y,x)).$$

Таким образом,

$$X(x, Y(y,x)) = Y(x, Y(y,x)),$$

или при $Y = A$:

$$X(x, A(y,x)) = A(x, A(y,x)).$$

Согласно делимости операции A, для любых $x, z \in Q$ существует $y \in Q$ такой, что $A(y,x) = z$. Поэтому,

$$X(x,z) = X(x, A(y,x)) = A(x, A(y,x)) = A(x,z),$$

т. е. $X = A$ и алгебра $(Q; \Sigma)$ будет функционально-тривиальной.

9) Для сверхтождества (1.16) доказательство проводится аналогично сверхтождеству (1.15).

Аналогично доказывается случай сверхтождества правой дистрибутивности. □

Abstract. The paper gives a classification of nontrivial dual superidentities of left and right distributivity that hold in functionally nontrivial divisible algebras. If in

a functionally nontrivial divisible algebra nontrivial dual superidentities of left and right distributivity hold, then the superidentity of left distributivity will be of rank two and (equivalent to a superidentity) of the form

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)),$$

and a hyperidentity of right distributivity is a hyperidentity of rank two and (equivalent to a hyperidentity) of the form

$$X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z)).$$

On the classification of nontrivial hyperidentities of left and right distributivity that hold in functionally nontrivial q-algebras, see [1]-[4]

Список литературы

[1] Yu. Movsisyan, Introduction to the Theory of Algebras With Hyperidentities [in Russian], Yerevan State University Press (1986).

[2] Yu. Movsisyan, Hyperidentities and Hypervarieties in Algebras [in Russian], Yerevan State University Press (1990).

[3] Yu. Movsisyan, Hyperidentities: Boolean and De Morgan Structures, World Scientific (2023).

[4] Yu. Movsisyan, "Hyperidentities in algebras and varieties", Uspekhi Mat. nauk **53**, no. 1, 61 – 114 (1998). (in Russian). [English transl. in Russ. Math. Surv. **53**, no. 1, 57 – 108 (1998)].

[5] A. I. Mal'tsev, "Some questions of the theory of classes of models" [in Russian], Proceedings of the IV-th All-Union Mathematical Congress, **1**, 169 – 198 1963.

[6] T. Kepka, "Distributive division groupoids", Math. Nachr. **87**, 103 – 107 (1979).

[7] A. A. Albert, "Quasigroups I", Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 507 – 519 (1943).

[8] A. A. Albert, "Quasigroups II", Trans. Amer. Math. Soc. **55**, 401 – 419 (1944).

[9] S. S. Davidov, A. Krapež, Yu. M. Movsisyan, "Functional equations with division and regular operations", Asian-Eur. J. Math., **11**, no. 1 (2018), 1850033 (14 pages).

Поступила 04 октября 2023

После доработки 26 ноября 2023

Принята к публикации 24 декабря 2023

Известия НАН Армении, Математика, том 59, н. 4, 2024, стр. 58 – 72.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Х. А. ХАЧАТРЯН, А. С. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет[1]
Национальный Аграрный Университет Армении
E-mails: *khachatur.khachatryan@ysu.am*; *Haykuhi25@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается бесконечная система интегральных уравнений со степенной нелинейностью на положительной полупрямой. Ряд частных случаев указанной системы возникают во многих направлениях математической физики. В частности системы указанного характера встречаются в теории переноса излучения в спектральных линиях, в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, в математической теории распространения эпидемических заболеваний, в эконометрике. Доказывается существование неотрицательного (по координатно) нетривиального и ограниченного решения. При дополнительном ограничении на матричное ядро исследуется также асимптотическое поведение на бесконечности. В случае сильной симметричности (симметричность и по координатам и по индексам) матричного ядра доказывается также теорема единственности решения в определенном классе бесконечных и ограниченных вектор-функций. В конце приводятся конкретные примеры бесконечного матричного ядра имеющие прикладной интерес в указанных выше приложениях.

MSC2020 number: 45G15.

Ключевые слова: бесконечная система; итерации; монотонность; ограниченное решение; бесконечная вектор-функция.

1. Введение

1.1. **Постановка задачи.** Настоящая работа посвящена исследованию вопросов существования, единственности, а также асимптотического поведения решения на $+\infty$ следующей бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений на положительной полупрямой:

$$(1.1)\quad f_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) f_j^{\alpha}(t)dt, \quad i \in \mathbb{Z}^+ := \{0, 1, \dots\},\ x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$$

---

[1]Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027. Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

относительно искомой бесконечной вектор-функции $f(x) := (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$ (T знак транспонирования) из следующего класса:

$$\begin{gathered}\mathbb{B} := \{\varphi(x) := (\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots)^T : \\ \varphi_j(x) \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^+, \quad \sup_{j\in\mathbb{Z}^+} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \varphi_j(x) < +\infty\}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

В системе (1.1) показатель α принимает значения из интервала $(0,1)$, а последовательность функций $\{K_m(x,t)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет следующим основным ограничениям:

a) существует натуральное число N и функции $\{\overset{\circ}{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ со свойствами:

a_1) $\overset{\circ}{K}_m(-x) = \overset{\circ}{K}_m(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad m \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$
$\overset{\circ}{K}_{-m}(t) = \overset{\circ}{K}_m(t), \quad t \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \quad m \in \mathbb{Z}^+,$

a_2) $\overset{\circ}{K}_m(x) \downarrow$ по x на множестве $\mathbb{R}^+$, $m = -N, \ldots, 0, \ldots N$,

a_3) $\overset{\circ}{K}_m \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{Z}$, причем $\sum\limits_{m=-N}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{K}_m(x)dx = 1$,

a_4) $\int\limits_0^{\infty} x\overset{\circ}{K}_m(x)dx < +\infty$, $m \in \mathbb{Z}$, причем такие, что

$$K_m(x,t) \geq \overset{\circ}{K}_m(x-t) - \overset{\circ}{K}_m(x+t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

b) существуют

$$a_i := \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \int_0^{\infty} K_i(x,t)dt, \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{1.4}$$

при этом

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 2, \; a_{-i} = a_i > 0, \; i \in \mathbb{Z}^+, \; \int_0^{\infty} K_i(x,t)dt \not\equiv a_i, \; i \in \mathbb{Z}, \; \sum_{i=1}^{\infty} ia_i < +\infty. \tag{1.5}$$

1.2. **Возможные приложения и история вопроса.** Система нелинейных интегральных уравнений (1.1) в ряде частных случаев матричного ядра $(K_{i-j}(x,t))_{i,j=0}^{\infty}$ возникает во многих разделах математического естествознания. В частности, в случае когда $K_m(x,t) \equiv 0$, при $|m| > N$, $m \in \mathbb{Z}$ системы вида (1.1) встречаются в различных направлениях математической физики, эконометрики и математической биологии. Так например, когда $K_m(x,t) \equiv 0$, при $|m| \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}$ и $K_0(x,t) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}}(e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2})$, $c_0 > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, такие задачи возникают в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов (см. [1]-[4]). В случае когда $K_m(x,t) \equiv 0$, при $|m| >$

N, $m \in \mathbb{Z}$ и $K_m(x,t) = \int\limits_a^b e^{-|x-t|s} d\sigma_m(s)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $m = -N, \ldots, 0, \ldots, N$, $\sigma_m(s) \uparrow$ на $[a,b)$, $0 < a < b \leq +\infty$, $\int\limits_a^b \frac{1}{s} d\sigma_m(s) < +\infty$, $m = -N, \ldots, 0, \ldots, N$, системы такого характера встречаются в теории переноса излучения в спектральных линиях, в кинетической теории газов и в математической теории распределения дохода в рамках нелинейной модифицированной модели Саргана (см. [5]-[8]). Наконец, в том случае когда ядра $K_m(x,t) \equiv a_m K_m^*(t)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Z}$, при этом $K_m^* \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_M(\mathbb{R}^+)$, а последовательность чисел a_m, $m \in \mathbb{Z}$ обладает свойством $b)$ и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, такие системы возникают в математической теории распространения эпидемических заболеваний (см. [9]).

Система интегральных уравнений (1.1) исследовалось в случае когда $K_m(x,t) \equiv 0$, при $|m| > N$, $m \in \mathbb{Z}$ и для ядер $\{K_m(x,t)\}_{m=-N}^{N}$ минорантами (или мажорантами) в смысле М.А. Красносельского служат разностные или суммарно-разностные консервативные ядра (см. [4], [10]-[13]). Соответствующие дискретные аналоги системы (1.1) при различных нелинейностях (не только степенных) достаточно подробно изучались в работах [14]-[17].

1.3. **Сводка основных результатов.** В настоящей работе сперва при условиях $a), b)$ мы докажем существование покомпонентно положительного решения системы (1.1) в классе бесконечных вектор-функций $\mathbb{B}$. Затем, при одном дополнительном ограничении на матричное ядро $(K_{i-j}(x,t))_{i,j=0}^{\infty}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ мы будем доказывать интегральную асимптотику построенного решения. Наконец, используя этот результат при дополнительном условии симметричности ядер $K_m(x,t)$, $m \in \mathbb{Z}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (и по индексу и по аргументам) докажем единственность решения в определенном подклассе класса $\mathbb{B}$. В конце работы приведем конкретные прикладные примеры матричных ядер $(K_{i-j}(x,t))_{i,j=0}^{\infty}$ удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем.

2. Существование ограниченного решения

Теорема 2.1. *При условиях* $a)$ *и* $b)$ *бесконечная система нелинейных интегральных уравнений* (1.1) *в классе* $\mathbb{B}$ *имеет покомпонентно неотрицательное нетривиальное решение:* $f(x) = (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$. *Более того существует* $r > 0$ *такое, что* $\inf\limits_{x \geq r} f_j(x) > 0$, $j \in \mathbb{Z}^+$.

Доказательство. **(I-шаг).** Сперва рассмотрим следующую бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$z_i=\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}z_j^{\alpha},\quad i=\mathbb{Z}^+ \tag{2.1}$$

относительно бесконечного вектора $z=(z_0,z_1,\ldots,z_n,\ldots)^T$ из пространства ограниченных последовательностей m с положительными координатами $z_i, i=0,1,\ldots$. Введем следующее обозначение:

$$\tau_i=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}z_i,\quad i=0,1,2,\ldots. \tag{2.2}$$

Тогда относительно бесконечного вектора $\tau=(\tau_0,\ldots,\tau_n,\ldots)^T$ система (2.1) примет следующий вид:

$$\tau_i=\sum_{j=0}^{\infty}b_{i-j}\tau_j^{\alpha},\quad i\in\mathbb{Z}^+, \tag{2.3}$$

где

$$b_i:=\frac{1}{2}a_i,\quad i\in\mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Из результатов работы [14] следует, что система (2.3) имеет покомпонентно положительное решение в пространстве m. Более того справедливи следующие соотношения:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\le\tau_i\le 1,\quad i\in\mathbb{Z}^+,\quad \sum_{i=0}^{\infty}(1-\tau_i)<+\infty, \tag{2.5}$$

$$\tau_{i+1}\ge\tau_i,\quad i\in\mathbb{Z}^+. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6), в силу (2.2) получаем, что

$$1\le z_i\le 2^{\frac{1}{1-\alpha}},\quad i\in\mathbb{Z}^+,\quad \sum_{i=0}^{\infty}(2^{\frac{1}{1-\alpha}}-z_i)<+\infty, \tag{2.7}$$

$$z_{i+1}\ge z_i,\quad i\in\mathbb{Z}^+. \tag{2.8}$$

Рассмотрим теперь следующие итерации для основной бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений (1.1):

$$\begin{gathered} f_i^{(p+1)}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}K_{i-j}(x,t)(f_j^{(p)}(t))^{\alpha}dt,\quad x\in\mathbb{R}^+,\\ f_i^{(0)}(x)\equiv z_i,\quad i\in\mathbb{Z}^+,\quad p\in\mathbb{Z}^+. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Индукцией по p несложно проверить, что

$$f_i^{(p)}(x) \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad p \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.10}$$

Докажем, что

$$f_i^{(p)}(x) \downarrow \text{ по } p, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.11}$$

Во-первых в силу (2.1), (2.10), a) и b) из (2.9) имеем

$$f_i^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \int\limits_0^{\infty} K_{i-j}(x,t)dt \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} z_j^{\alpha} = z_i = f_i^{(0)}(x), \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Предполагая, что $f_i^{(p)}(x) \leq f_i^{(p-1)}(x), i \in \mathbb{Z}^+,\ x \in \mathbb{R}^+$ при некотором натуральном p из (2.9) в силу $a), b)$ и (2.10) получаем, что $f_i^{(p+1)}(x) \leq f_i^{(p)}(x), i \in \mathbb{Z}^+,\ x \in \mathbb{R}^+$.

(II-шаг). Наряду с системой (1.1) рассмотрим теперь следующую вспомогательную систему нелинейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром на положительной полупрямой:

$$\psi_i^{\gamma}(x) = \sum_{j=0}^{N} \int\limits_0^{\infty} (\mathring{K}_{i-j}(x-t) - \mathring{K}_{i-j}(x+t))\psi_j(t)dt, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.12}$$

относительно искомой измеримой и ограниченной на множестве $\mathbb{R}^+$ вектор-функции $\psi(x) := (\psi_0(x), \ldots, \psi_N(x))^T$ с неотрицательными координатами $\psi_j(x), j = 0, 1, \ldots, N$, $x \in \mathbb{R}^+$, где

$$\gamma := \frac{1}{\alpha} > 1. \tag{2.13}$$

Из результатов работы [10] следует, что система нелинейных интегральных уравнений (2.12) имеет по координатно неотрицательное нетривиальное непрерывное монотонно неубывающее и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение $\psi(x) = (\psi_0(x), \ldots, \psi_N(x))^T$, причем

$$0 = \psi_i(0) \leq \psi_j(x) \leq 1, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.14}$$

для каждого $j \in \{0, 1, \ldots, N\}$ существует число $r_j > 0$ такое, что

$$d_j := \inf_{x \geq r_j} \psi_j(x) > 0, \tag{2.15}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \psi_j(x) = 1, \quad 1 - \psi_j \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad j = 0, 1, \ldots, N. \tag{2.16}$$

Обозначим через $r := \max(r_0, r_1, \ldots, r_N)$. Тогда из (2.15) немедленно следует, что

$$d := \min(\inf_{x \geq r} \psi_0(x), \inf_{x \geq r} \psi_1(x), \ldots, \inf_{x \geq r} \psi_N(x)) > 0. \tag{2.17}$$

Ниже докажем, что имеет место следующая оценка снизу для последовательных приближений (2.9):

(2.18)
$$f_i^{(p)}(x) \geq \begin{cases} \psi_i^{\gamma}(x), & \text{если } x \in \mathbb{R}^+, i = 0, 1, \ldots, N, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^+, i = N+1, N+2, \ldots \end{cases} := \Phi_i(x), i \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^+.$$

Действительно, в случае $p = 0$ неравенство (2.18) сразу следует из (2.14) и (2.7) с учетом определения нулевого приближения в итерациях (2.9). Предположим, что $f_i^{(p)}(x) \geq \Phi_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^+$ при некотором натуральном p. Тогда, принимая во внимание неравенство (1.3), (2.12), (2.13) для всех $i = 0, 1, \ldots, N$ и $x \in \mathbb{R}^+$ из (2.9) будем иметь

$$f_i^{(p+1)}(x) \geq \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) \Phi_j^{\alpha}(t) dt \geq \sum_{j=0}^{N} \int\limits_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) \psi_j(t) dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^{N} \int\limits_0^{\infty} (\overset{\circ}{K}_{i-j}(x-t) - \overset{\circ}{K}_{i-j}(x+t)) \psi_j(t) dt = \psi_i^{\gamma}(x),$$

а для $i = N+1, N+2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}^+$ неравенство $f_i^{(p+1)}(x) \geq \Phi_i(x)$ сразу получается из (2.10). Таким образом мы доказали, что $f_i^{(p+1)}(x) \geq \Phi_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^+$.

Из (2.11), (2.18) и (2.7) следует, что последовательность бесконечных вектор-функций $f^{(p)}(x) := (f_0^{(p)}(x), \ldots, f_n^{(p)}(x), \ldots)^T$, $p \in \mathbb{Z}^+$ имеет поточечный предел когда $p \to +\infty$: $\lim\limits_{p\to+\infty} f_i^{(p)}(x) = f_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+$, причем координаты предельной бесконечной вектор-функции: $f(x) := (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$ удовлетворяют двойному неравенству:

$$\Phi_i(x) \leq f_i(x) \leq z_i \leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.19}$$

Заметим, что правая часть (2.9) из себя представляет сумму равномерно сходящегося ряда. Действительно, из (2.7), (2.10), (2.11), (1.4) и (1.5) имеем

$$0 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) (f_j^{(p)}(t))^{\alpha} dt \leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) dt \leq$$

$$\leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m = 2^{\frac{1}{1-\alpha}}, \ i \in \mathbb{Z}^+, \ p \in \mathbb{Z}^+, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$ из (2.9) получаем, что

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{p\to+\infty} \int\limits_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) (f_j^{(p)}(t))^{\alpha} dt, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.20}$$

Снова используя (2.11), (2.18), a) и b) согласно теореме Б. Леви (см. [18]) сможем утверждать, что почти при всех $x \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^\infty K_{i-j}(x,t)(f_j^{(p)}(t))^\alpha dt = \int_0^\infty K_{i-j}(x,t)f_j^\alpha(t)dt, \quad i,j\in\mathbb{Z}^+. \tag{2.21}$$

Из (2.20) и (2.21) получаем, что бесконечная вектор-функция $f(x) = (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$ удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений (1.1).

(III-шаг). Для завершения доказательства сформулированной теоремы остается убедиться, что $\inf\limits_{x\geq r} f_i(x) > 0$, $i \in \mathbb{Z}^+$. Учитывая (2.18), (2.19), (2.17), a), b) и (1.3) из (1.1) для всех $x \geq r$ и $i \in \mathbb{Z}^+$ будем иметь

$$f_i(x) \geq \sum_{j=0}^N \int_0^\infty (\overset{\circ}{K}_{i-j}(x-t) - \overset{\circ}{K}_{i-j}(x+t))\psi_j(t)dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^N \int_r^\infty (\overset{\circ}{K}_{i-j}(x-t) - \overset{\circ}{K}_{i-j}(x+t))\psi_j(t)dt \geq$$

$$\geq d\sum_{j=0}^N \int_r^\infty (\overset{\circ}{K}_{i-j}(x-t) - \overset{\circ}{K}_{i-j}(x+t))dt = d\sum_{j=0}^N \left(\int_{-\infty}^{x-r} \overset{\circ}{K}_{i-j}(y)dy - \int_{x+r}^\infty \overset{\circ}{K}_{i-j}(y)dy\right) \geq$$

$$\geq d\sum_{j=0}^N \left(\int_{-\infty}^{0} \overset{\circ}{K}_{i-j}(y)dy - \int_{2r}^\infty \overset{\circ}{K}_{i-j}(y)dy\right) =$$

$$= d\sum_{j=0}^N \int_0^{2r} \overset{\circ}{K}_{i-j}(y)dy \geq 2dr\sum_{j=0}^N \overset{\circ}{K}_{i-j}(2r) = 2dr\sum_{m=i-N}^{i} \overset{\circ}{K}_m(2r) > 0, \quad i\in\mathbb{Z}^+.$$

Следовательно, $\inf\limits_{x\geq r} f_i(x) \geq 2dr\sum\limits_{m=i-N}^{i} \overset{\circ}{K}_m(2r) > 0, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$

Таким образом теорема полностью доказана. □

3. Интегральная асимптотика решения системы (1.1)

В этом параграфе накладывая более сильное (по сравнению с условием a)) условие на ядра $\{K_m(x,t)\}_{m=-\infty}^\infty$, при условии b) мы получим интегральную асимптотику решения системы (1.1) в случае когда показатель $\alpha \in (0, \log_3 \frac{3}{2})$.

Предположим, что

c) существует последовательность функций $\{\tilde{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^\infty$, со свойствами:

c_1) $\tilde{K}_i(-x) = \tilde{K}_i(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i \in \mathbb{Z},$

c_2) $\tilde{K}_i \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_i(x)dx = a_i, \quad i \in \mathbb{Z},$

c_3) $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} x\tilde{K}_i(x)dx < +\infty,$

такое, что

$$K_i(x,t) \geq \tilde{K}_i(x-t), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *При условиях* c) *и* b) *система интегральных уравнений* (1.1) *в классе* $\mathbb{B}$ *имеет покомпонентно положительное решение* $f(x) = (f_0(x),\ldots, f_n(x), \ldots)^T$, *причем, если* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, *то*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^+} \int\limits_0^{\infty} (z_i - f_i(x))dx < +\infty, \tag{3.2}$$

где $\{z_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ *решение бесконечной системы алгебраических уравнений* (2.1) *и обладает свойствами* (2.7), (2.8).

Доказательство. Снова рассмотрим итерации (2.9) для системы (1.1). Используя условия c) и b) аналогично можно доказать, что имеют места утверждения (2.10), (2.11). Докажем теперь, что при выполнении условия c) имеет место следующая равномерная оценка снизу для всех членов последовательности $f_i^{(p)}(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f_i^{(p)}(x) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad p \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.3}$$

В случае когда $p = 0$ оценка (3.3) сразу следует из (2.9) и (2.7). Предположим, что (3.3) имеет место при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда учитывая условия $c), b)$ из (2.9) будем иметь

$$f_i^{(p+1)}(x) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} K_{i-j}(x,t)dt \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} \tilde{K}_{i-j}(y)dy \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{K}_{i-j}(y)dy = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{i} a_m \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{0} a_m \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

ибо $a_{-i} = a_i > 0$, $i \in \mathbb{Z}^+$ и $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 2$.

Следовательно существует поточечный предел последовательности бесконечных вектор-функций: $f^{(p)}(x) := (f_0^{(p)}(x), \ldots, f_n^{(p)}(x), \ldots)^T$, $p \in \mathbb{Z}^+$:

$$f_i(x) = \lim_{p \to +\infty} f_i^{(p)}(x), \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

причем

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \le f_i(x) \le z_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.4}$$

Повторяя аналогичные рассуждения как в доказательстве теоремы 1, можно убедиться, что $f(x) = (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$ является решением бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений (1.1) почти всюду на $\mathbb{R}^+$. Докажем теперь формулу (3.2). Принимая во внимание $c_1) - c_3)$, (3.1) и (3.4), а также равномерное сходимость и ограниченность функциональных рядов:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) f_j^{\alpha}(t)dt, \quad \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x \pm t)dt, \tag{3.5}$$

из (2.9) для произвольного положительного R в силу теоремы Фубини (см. [18]) будем иметь

$$\int_0^R (z_i - f_i(x))dx = \int_0^R \left(\sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \left(\int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)dt + \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x+t)dt\right)\right) dx -$$

$$- \int_0^R \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) f_j^{\alpha}(t)dt\right) dx \le \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)(z_j^{\alpha} - f_j^{\alpha}(t))dtdx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \int_0^R \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x+t)dtdx \le 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_x^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(y)dydx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)(z_j^{\alpha} - f_j^{\alpha}(t))dtdx \le 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(y)dydx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \int_0^R \int_R^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)dtdx + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_0^R \tilde{K}_{i-j}(x-t)(z_j^{\alpha} - f_j^{\alpha}(t))dtdx \le$$

$$\le 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} y\tilde{K}_{i-j}(y)dy + 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_R^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(t-x)dtdx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \int_0^R (z_j^{\alpha} - f_j^{\alpha}(t))dt \le 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} y\tilde{K}_i(y)dy +$$

$$+2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{R-x}^{\infty}\tilde{K}_{i-j}(y)dydx+\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_{0}^{R}(z_j^{\alpha}-f_j^{\alpha}(t))dt=$$

$$=2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{t}^{\infty}\tilde{K}_{i-j}(y)dydt+\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_{0}^{R}(z_j^{\alpha}-f_j^{\alpha}(t))dt\leq$$

$$\leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_{i-j}(y)dy+\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_{0}^{R}(z_j^{\alpha}-f_j^{\alpha}(t))dt\leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_{0}^{R}(z_j^{\alpha}-f_j^{\alpha}(t))dt\leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+\alpha\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_{0}^{R}\theta_j^{\alpha-1}(t)(z_j-f_j(t))dt=:I_i,\quad i\in\mathbb{Z}^+,$$

где $f_j(t)\leq\theta_j(t)\leq z_j$, $t\in[0,R]$, $j\in\mathbb{Z}^+$ (по теореме Лагранжа). Учитывая оценку (3.4) получим, что

$$I_i\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+2\alpha\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_{0}^{R}(z_j-f_j(t))dt\leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+2\alpha\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\int\limits_{0}^{R}(z_j-f_j(t))dt\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+4\alpha\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\int\limits_{0}^{R}(z_j-f_j(t))dt,$$

ибо $z_j\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $j\in\mathbb{Z}^+$ и $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}a_i=2$.

Таким образом мы приходим к следующей оценке

$$\int\limits_{0}^{R}(z_i-f_i(x))dx\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+4\alpha\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\int\limits_{0}^{R}(z_j-f_j(t))dt,\quad i\in\mathbb{Z}^+,\tag{3.6}$$

из которого в частности следует, что

$$0\leq\int\limits_{0}^{R}(z_i-f_i(x))dx\leq\sup_{i\in\mathbb{Z}^+}\int\limits_{0}^{R}(z_i-f_i(x))dx=\frac{2^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-4\alpha}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy,\ i\in\mathbb{Z}^+.\tag{3.7}$$

В (3.7) при каждом фиксированном $i \in \mathbb{Z}^+$ устремляя число $R \to \infty$ получаем

$$0 \le \int_0^\infty (z_i - f_i(x))dx \le \frac{2^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-4\alpha} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty y\tilde{K}_j(y)dy, \ i \in \mathbb{Z}^+.$$

Из последних оценок следует

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^+} \int_0^\infty (z_i - f_i(x))dx \le \frac{2^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-4\alpha} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty y\tilde{K}_j(y)dy.$$

Таким образом теорема полностью доказана. □

Заметим теперь, что при условии $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \tilde{K}_i(x) < +\infty$ имеет место

$$\lim_{x \to +\infty} f_i(x) = z_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Действительно, из (1.1) в силу условий $c), b)$ имеем

$$\tag{3.8} \begin{gathered} 0 \le z_i - f_i(x) \le 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_x^\infty \tilde{K}_{i-j}(y)dy + \\ +2\alpha \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t) \right) \sup_{j \in \mathbb{Z}^+} (z_j - f_j(t))dt, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \end{gathered}$$

ибо ряды (3.5) равномерно сходятся и $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \tilde{K}_i(x) < +\infty$.

Так как $\chi_i(x) := \sum\limits_{j=0}^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, $i \in \mathbb{Z}^+$, $\rho(t) := \sup\limits_{j \in \mathbb{Z}^+} (z_j - f_j(t)) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, то используя лемму 5 из работы [19] получим, что для всех $i \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t) \right) \sup_{j \in \mathbb{Z}^+} (z_j - f_j(t))dt = 0.$$

Поскольку функциональный ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_x^\infty \tilde{K}_{i-j}(y)dy$ равномерно сходиться, то из последнего предельного соотношения и (3.8) получаем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f_i(x) = z_i$, $i \in \mathbb{Z}^+$.

В следующем параграфе для всевозможных значений показателя $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ мы докажем также единственность решения бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений вида (1.1) в следующем классе бесконечных вектор-функций:

$$\tag{3.9} \mathfrak{M} := \{\varphi(x) = (\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x), \dots)^T : \varphi \in \mathbb{B}, \inf_{j \in \mathbb{Z}^+} \inf_{x \in \mathbb{R}^+} \varphi_j(x) > 0\}.$$

4. Единственность решения. Примеры

Теорема 4.1. *При условиях теоремы 2 бесконечная система нелинейных интегральных уравнений* (1.1) *в классе* $\mathfrak{M}$ *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть $f(x) = (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$ произвольное решение системы (1.1) из класса $\mathfrak{M}$. Тогда учитывая условие $c)$ из (1.1) будем иметь

$$f_i(x) \geq \sum_{j=0}^{\infty} \rho_0^{\alpha} \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)dt \geq \tag{4.1}$$

$$\geq \rho_0^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \tilde{K}_{i-j}(y)dy \geq \frac{\rho_0^{\alpha}}{2} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \geq \frac{\rho_0^{\alpha}}{2} \sum_{m=-\infty}^{0} a_m \geq \frac{\rho_0^{\alpha}}{2}, \quad i \in \mathbb{Z}^+,$$

где $\rho_0 := \inf\limits_{i\in\mathbb{Z}^+} \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^+} f_i(x)$. Из (4.1) следует, что

$$\rho_0 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{4.2}$$

Предположим теперь, что система (1.1) имеет две различные решения $f, \tilde{f}$ из класса $\mathfrak{M}$. Тогда в силу доказанного выше

$$\inf_{i\in\mathbb{Z}^+} \inf_{x\in\mathbb{R}^+} f_i(x) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \inf_{i\in\mathbb{Z}^+} \inf_{x\in\mathbb{R}^+} \tilde{f}_i(x) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{4.3}$$

Учитывая (3.9), (4.3) и условия $b), c)$ из (1.1) в силу теоремы Лагранжа имеем

$$|f_i(x) - \tilde{f}_i(x)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,t)|f_j^{\alpha}(t) - \tilde{f}_j^{\alpha}(t)|dt \leq$$

$$\leq 2\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,t)|f_j(t) - \tilde{f}_j(t)|dt \leq$$

$$\leq 2\alpha \sup_{j\in\mathbb{Z}^+} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f_j(t) - \tilde{f}_j(t)| \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,\tau)d\tau \leq$$

$$\leq 2\alpha \sup_{j\in\mathbb{Z}^+} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f_j(t) - \tilde{f}_j(t)| \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m = 4\alpha \sup_{j\in\mathbb{Z}^+} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f_j(t) - \tilde{f}_j(t)|,$$

откуда получаем, что

$$(1-4\alpha) \sup_{j\in\mathbb{Z}^+} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_j(x) - \tilde{f}_j(x)| \leq 0. \tag{4.4}$$

Так как $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ то из (4.4) следует, что $f_i(x) = \tilde{f}_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 4.1. *К сожалению интегральную асимптотику* (3.2) *и теорему единственности решения пока нам удается доказать только для малых значений показателя* α. *Отметим, что аналогичные результаты для соответствующих конечных систем нелинейных интегральных уравнений нам удалось доказать при всевозможных значений параметра* $\alpha \in (0,1)$ *(см.* [3], [10] *и* [11]*).*

В конце приведем несколько примеров ядер $\{K_m(x,t)\}_{m=-\infty}^{\infty}$, $\{\overset{\circ}{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ и $\{\tilde{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$. Сперва приведем примеры ядерных функций: $\{\overset{\circ}{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$, $\{\tilde{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$:

1) $\overset{\circ}{K}_m(x) = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, где $\varepsilon_m \in (0,1)$, $m \in \mathbb{Z}$ и $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\sum\limits_{m=-N}^{N} \varepsilon_m = 1$, $\varepsilon_{-j} = \varepsilon_j$, $j \in \mathbb{Z}^+$,
2) $\overset{\circ}{K}_m(x) = \varepsilon_m \int\limits_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma \uparrow$ на $[a,b)$, $2\int\limits_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) = 1$, $0 < a < b \le +\infty$,
3) $\tilde{K}_m(x) = \frac{\delta_m}{\sqrt{\pi p_m}} e^{-\frac{x^2}{p_m}}$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $p_m > 0$, а $\delta_m \in (0,1)$, $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m = 2$,
4) $\tilde{K}_m(x) = \delta_m \int\limits_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Теперь приведем примеры ядер $\{K_m(x,t)\}_{m=-\infty}^{\infty}$:

A) $K_m(x,t) = \tilde{K}_m(x-t) + \varepsilon^* \tilde{K}_m(x+t)$, $m \in \mathbb{Z}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $0 < \varepsilon^* < 1$,
B) $K_m(x,t) = \tilde{K}_m(x-t)\lambda_m(x)$, $m \in \mathbb{Z}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\lambda_i(x) = \lambda_{-i}(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_m \in C(\mathbb{R}^+)$, $1 \le \lambda_m(x) \le \frac{a_m}{\int\limits_{-\infty}^{x} \tilde{K}_m(\tau)d\tau}$, $x \in \mathbb{R}^+$ и $\lambda_m(x) \not\equiv \frac{a_m}{\int\limits_{-\infty}^{x} \tilde{K}_m(\tau)d\tau}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Прямой проверкой можно убедиться, что перечисленные примеры удовлетворяют всем условиям доказанных теорем. Приведенные примеры $1) - 4), A), B)$ возникают в конкретных задачах из теории переноса излучения и кинетической теории газов (см. [5]-[7]).

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Abstract: An infinite system of integral equations with power nonlinearity on the positive half-line is considered. A number of particular cases of this system arise in many branches of mathematical physics. In particular, systems of this nature are encountered in the theory of radiative transfer in spectral lines, in the dynamic theory of p-adic open-closed strings, in the mathematical theory of the spread of epidemic diseases, and in econometrics. The existence of a non-negative (in coordinates) non-trivial and bounded solution is proved. Under an additional constraint on the matrix kernel, we also study the asymptotic behavior at infinity. In the case of strong symmetry (symmetry both in coordinates and in indices) of the matrix kernel, we also prove a uniqueness theorem for a solution in a certain class of infinite and bounded vector functions. At the end, concrete examples of an infinite matrix kernel are given that are of practical interest in the above applications.

Список литературы

[1] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, "О нелинейном уравнении динамики в теории р-адической струны". ТМФ, **138**, no. 3, 355 – 368 (2004).

[2] В. С. Владимиров, "О нелинейных уравнениях р-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн", ТМФ, **149**, no. 3, 354 – 367 (2006).

[3] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны", Изв. РАН. Сер. матем., **82**, no. 2, 172 – 193 (2018).

[4] Х. А. Хачатрян, "Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью", Изв. РАН. Сер. матем., **84**, no. 4, 198 – 207 (2020).

[5] Н. Б. Енгибарян, "Об одной задаче нелинейного переноса излучения", Астрофизика, **2**, no. 1, 31 – 36 (1966).

[6] М. Н. Коган, Динамика Разреженного газа, Наука, М., 440стр. (1967).

[7] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях", ТМФ, **172**, no. 3, 497 – 504 (2012).

[8] J. D. Sargan, "The distribution of wealth. Econometrica", **25**, no. 4, 568 – 590 (1957).

[9] A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, "On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics", Eurasian Math. J., **11**, no. 2, 52 – 64 (2020).

[10] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой", Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, **19**, no. 2, 164 – 181 (2019).

[11] А. С. Петросян, Ц. Э. Терджян, Х. А. Хачатрян, "Единственность решения одной системы интегральных уравнений на полуоси с выпуклой нелинейностью", Матем. тр., **23**, no. 2, 187 – 203 (2020).

[12] Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan, "Solvability of a certain system of singular integral equations with convex nonlinearity on the positive half-line", Russian Math. (Iz. VUZ), **65**, no. 1, 27 – 46 (2021).

[13] Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, М. О. Аветисян, "Теоремы существования и единственности для одной системы интегральных уравнений с двумя нелинейностями", Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **29**, no. 1, 202 – 218 (2023).

[14] Х. А. Хачатрян, "Вопросы разрешимости некоторых нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами в критическом случае", Докторская диссертация, ЕрГУ, 231 страниц (2011).

[15] Kh. A. Khachatryan, M. F. Broyan, "One-parameter family of positive solutions for a class of non-linear infinite algebraic systems with Toeplitz-Hankel type matrices", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **48**, no. 5, 209 – 220 (2013).

[16] Kh. A. Khachatryan, M. H. Avetisyan, "On solvability of an infinite nonlinear system of algebraic equations with Teoplitz–Hankel matrices", Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical Sciences, **51**, no. 2, 158 – 167 (2017).

[17] Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, "Теоремы существования и единственности для одной бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений", Известия Иркутского государственного университета, Серия Математика, **44**, 44 – 54 (2023).

[18] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, М., Наука (1976).

[19] Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян, "Об одном классе интегральных уравнений типа свертки", Матем. сб., **198**, no. 7, 45 – 62 (2007).

Поступила 25 сентября 2023

После доработки 20 ноября 2023

Принята к публикации 25 ноября 2023

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 59, номер 4, 2024

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 59, No. 4, 2024

Contents