

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 59 № 3 2024

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Աթաբեկյան

Կ. Լ. Ավետիսյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Մ. Ս. Գինովյան

Ա. Ս. Դալայան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ)

Խ. Ա. Խաչատրյան

Գ. Ա. Կարազուլյան

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Յ. Շահգոլյան

Ա. Շիրիկյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Ահարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

К. Л. Аветисян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

А. С. Далалян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

Б. С. Нахапетян

Г. А. Карагулян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

Х. А. Хачатрян

Г. Шахголян

А. Ширикян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал "Известия НАН Армении, Математика" публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата A4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
 - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
 - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
 - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы, место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала "Известия НАН Армении, Математика", пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
E-mail: sart@ysu.am, URL: <http://www.maik.ru>
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале "Journal of Contemporary Mathematical Analysis". URL: <http://www.springer.com>.

Заказ N1287. Тираж 150. Подписано к печати 22.01.24.

Печ. л. 6.25. Бумага офсетная. Цена договорная.

Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

**БЕЗУСЛОВНАЯ БАЗИСНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СПЛАЙН-СИСТЕМ В $H^1(\mathbb{T})$:
ДОСТАТОЧНОСТЬ**

Л. АКОПЯН, К. КЕРЯН

*Институт математики НАН РА, Армения
Ереванский Государственный Университет¹
Университет Южной Калифорнии, Лос-Анджелес, Калифорния
E-mails: levonhakobyan7@gmail.com; karenkeryan@usu.am*

Аннотация. Дана геометрическая характеристика последовательностей узлов (s_n) , которая является достаточным условием для того, чтобы соответствующая периодическая ортонормированная сплайн-система произвольного порядка k , $k \in \mathbb{N}$ была безусловным базисом в атомном пространстве Харди на торе $H^1(\mathbb{T})$.

MSC2020 number: 42C10, 46E30.

Ключевые слова: ортонормированная сплайн-система; периодическая сплайн-система; безусловный базис; H^1 .

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы исследуем периодические ортонормированные сплайн-системы произвольного порядка k , с произвольными разбиениями. Рассматриваем такие плотные последовательности точек на торе $\mathbb{T}$, где каждая точка встречается не более k раз. Такие последовательности точек называются *k допустимо на торе $\mathbb{T}$* .

Основная цель данной работы — дать характеристику последовательностей узлов, для которых соответствующая периодическая ортонормированная система сплайнов порядка k является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Наш результат является периодической версией основного результата из [14]. Сделаем несколько комментариев по истории этого результата.

Знаменитый результат А. Шадрина [23] утверждает, что оператор ортогонального проектирования на эти пространства $\mathcal{S}_n$ ограничен на $L^\infty[0, 1]$ константой,

¹Второй автор был поддержан Комитетом науки Республики Армения в рамках исследовательского проекта №23RL-1A027.

зависящей только от порядка сплайна k . Как следствие, непериодическая ортонормированная сплайн-система $(f_n)_n$ является базисом Шаудера в $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ и в пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$. Существуют различные результаты о безусловности систем сплайнов, ограничивающих либо порядок сплайна k , либо разбиение $(t_n)_{n \geq 0}$. Первый результат в этом направлении встречается в [1], где доказано, что классическая система Франклина — ортонормированные системы сплайнов порядка 2, соответствующие последовательности диадических узлов $(1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, \dots)$ — является безусловным базисом в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Этот результат был обобщен в [4] для ортонормированных сплайн-систем произвольного порядка, но соответствующие только диадическими узлами. Далее, значительные усилия были предприняты, чтобы ослабить ограничение на последовательности диадических узлов. Это ограничение было постепенно снято для общих систем Франклина в серии статей [10, 15, 11]. Окончательный результат показал, что для каждой допустимой последовательности точек $(t_n)_{n \geq 0}$ с параметром $k = 2$, соответствующая общая система Франклина образует безусловный базис в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Сочетание методов, используемых в [15, 11] с некоторыми новыми неравенствами из [21], в [19] было доказано, что непериодические ортонормированные сплайн-системы являются безусловными базисами в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, для сплайн систем любого порядка k и для любой допустимой последовательности точек (t_n) .

Периодический аналог теоремы Шадрина представлен в [20]. В случае диадических узлов, в работе Дж. Домста [8] получены экспоненциальные оценки для обратной матрицы Грама периодических В-сплайнов, которые были использованы для доказательства безусловности периодических ортонормированных сплайн-систем с диадическими узлами в L^p для $1 < p < \infty$. В работе [17] было доказано, что для любой допустимой последовательности точек, соответствующая периодическая система Франклина (т.е. случай $k = 2$) образует безусловный базис в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. К. Керян и М. Пассенбруннер [18] получили важную оценку для функций общих периодических ортонормированных сплайн систем. Объединив эту оценку с методами, разработанными в [11], авторы смогли доказать безусловную базисность периодических ортонормированных сплайн-систем в $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$.

Простая геометрическая характеристика последовательностей узлов была дана Г.Г. Геворкяном и А. Камонтом в [12]. Они доказали, что соответствующая

общая система Франклина является базисом или безусловным базисом в $H^1[0, 1]$. После этого, используя следствия результата Шадрина, полученного З. Чисельским [5], Г.Г. Геворкян и А. Камонт [13] обобщили часть своего результата из [12] для ортонормированных сплайн-систем произвольного порядка и получили характеристику последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормированная сплайн-система порядка k является базисом в $H^1[0, 1]$. В дальнейшем были проведены исследования с целью найти характеристику последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормированная сплайн-система порядка k является безусловным базисом в $H^1[0, 1]$. Решение этой проблемы было представлено в [14]. Дано условие регулярности последовательностей узлов.

Другой важный вклад в изучение периодических ортонормированных систем сплайнов был сделан М.П. Погосяном и К.А. Керяном в [22]. Простая геометрическая характеристика последовательностей узлов была дана в упомянутой статье [22]. Для этих типов последовательностей узлов соответствующие общие периодические системы Франклина являются базисом или безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. В недавней статье [16] авторы настоящей статьи предоставили необходимое и достаточное условие, при котором периодическая ортонормированная сплайн-система является базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Схема доказательства результатов в основном соответствует [14]. Некоторые оценки и свойства периодических сплайнов взяты из [18].

Структура настоящей статьи следующая: В разделе 2 мы даем необходимые определения и даем формулировку основного результата статьи — теорему 2.4. В разделах 3 и 4 мы упоминаем или доказываем несколько фактов, необходимых для наших результатов. В частности, в разделе 4 мы представляем понятие связанных характеристических интервалов как для периодических, так и для непериодических ортонормированных систем сплайнов с произвольными узлами, а также упоминаем или получаем важные оценки для ортонормированных сплайн-систем. Некоторые комбинаторные факты для характеристических интервалов приведены в разделе 5. Затем, в разделе 6 представлены некоторые важные результаты, а в разделе 7 дано доказательство теоремы 2.4.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Непериодический случай. Предположим, что $k \geq 2$ — целое число. Пусть $\mathcal{T} = (t_n)_{n=2}^\infty$ — всюду плотная последовательность точек на единичном интервале такая, что каждая точка встречается не более k раз. Кроме того, определим $t_0 := 0$ и $t_1 := 1$. Такие последовательности точек называются *k-допустимыми*. Для n из интервала $-k+2 \leq n \leq 1$ пусть $\mathcal{S}_n^{(k)}$ — пространство полиномов порядка $n+k-1$ (или степени $n+k-2$) на интервале $[0, 1]$ и $(f_n^{(k)})_{n=-k+2}^1$ — набор ортонормированных многочленов из $L^2 \equiv L^2[0, 1]$, для которых степень $f_n^{(k)}$ равна $n+k-2$. Для $n \geq 2$ пусть $\mathcal{T}_n$ — упорядоченная последовательность точек, состоящая из точек сетки $(t_j)_{j=0}^{n+1}$ с учетом кратностей, где узлы 0 и 1 имеют кратность k , т. е. $\mathcal{T}_n$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n = (0 = \tau_{n,-k} = \dots = \tau_{n,-1} < \tau_{n,0} \leq \\ \leq \dots \leq \tau_{n,n-1} < \tau_{n,n} = \dots = \tau_{n,n+k-1} = 1). \end{aligned}$$

В этом случае мы определяем $\mathcal{S}_n^{(k)}$ как пространство полиномиальных сплайнов порядка k с точками сетки $\mathcal{T}_n$. Для каждого $n \geq 2$ пространство $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$ имеет коразмерность 1 в $\mathcal{S}_n^{(k)}$ и, следовательно, существует функция $f_n^{(k)} \in \mathcal{S}_n^{(k)}$, ортонормированная пространству $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$. Заметим, что эта функция $f_n^{(k)}$ единственная с точностью до знака.

Определение 2.1. Система функций $(f_n^{(k)})_{n=-k+2}^\infty$ называется *ортонормальная сплайн-система порядка k , соответствующая последовательности $(t_n)_{n=0}^\infty$* .

Часто мы будем пропускать параметр k и писать f_n и $\mathcal{S}_n$ вместо $f_n^{(k)}$ и $\mathcal{S}_n^{(k)}$, соответственно.

Под $H^1 = H^1[0, 1]$ мы подразумеваем атомное пространство Харди на $[0, 1]$ (см. [6]). Теперь введем условия регулярности последовательности $\mathcal{T}$.

Для $n \geq 2$, $\ell \leq k$ и i из интервала $-\ell \leq i \leq n-1$ определим $D_{n,i}^{(\ell)}$ как интервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+\ell}]$.

Определение 2.2. Пусть $\ell \leq k$ и $(t_n)_{n=0}^\infty$ — ℓ -допустимая последовательность точек. Тогда эта последовательность называется *ℓ -регулярной с параметром $\gamma \geq 1$* , если

$$\frac{|D_{n,i}^{(\ell)}|}{\gamma} \leq |D_{n,i+1}^{(\ell)}| \leq \gamma |D_{n,i}^{(\ell)}|, \quad n \geq 2, \quad -\ell \leq i \leq n-2.$$

Итак, другими словами, (t_n) ℓ -регулярна, если существует постоянная $\gamma \geq 1$, такая, что для всех n соотношения длин соседних носителей В-сплайн-функций (см. раздел 3.2) порядка ℓ с узлами из $\mathcal{T}_n$ ограничены γ -ой.

В этом разделе мы представим две теоремы, которые являются источниками вопросов, рассматриваемых в этой статье.

Теорема 2.1 ([13]). *Пусть $k \geq 1$ и (t_n) k -допустимая последовательность узлов в $[0, 1]$ с соответствующей ортонормированной сплайн-системой $(f_n^{(k)})$ порядка k . В таком случае $(f_n^{(k)})$ является базисом в $H^1[0, 1]$ тогда и только тогда, когда (t_n) k -регулярна с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.*

Теорема 2.2 ([14]). *Пусть (t_n) — k -допустимая последовательность точек. Соответствующая ортонормированная сплайн-система $(f_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1[0, 1]$, тогда и только тогда, когда (t_n) удовлетворяет условию $(k-1)$ -регулярности с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.*

2.2. Периодический случай. Пусть $k \geq 2$ — целое число и $(s_n)_{n=1}^\infty$ — k допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$, т.е. всюду плотная последовательность точек на торе $\mathbb{T}$ такая, что каждая точка встречается не более k раз.

Для $n \geq k$ определим $\hat{S}_n$ как пространство полиномиальных сплайнов порядка k с точками сетки $(s_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{T}$. Для каждого $n \geq k+1$ пространство $\hat{S}_{n-1}$ имеет коразмерность 1 в $\hat{S}_n$ и, следовательно, существует функция $\hat{f}_n \in \hat{S}_n$ такая, что $\|\hat{f}_n\|_2 = 1$ и ортогональная пространству $\hat{S}_{n-1}$. Заметим, что эта функция $\hat{f}_n$ единственна с точностью до знака. Кроме того, пусть $(\hat{f}_n)_{n=1}^k$ — ортонормированный базис для $\hat{S}_k$. Система функций $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$ называется *периодической* ортонормированной сплайн системой порядка k , соответствующая последовательности $(s_n)_{n=1}^\infty$.

Теперь определим атомное пространство Харди на $\mathbb{T}$.

Определение 2.3. $a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *периодическим атомом*, если либо $a \equiv 1$, либо существует интервал $\Gamma \subset \mathbb{T}$ такой, что выполняются следующие условия:

- (i) $\text{supp } a \subset \Gamma$,
- (ii) $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq |\Gamma|^{-1}$,
- (iii) $\int_{\mathbb{T}} a(x) dx = \int_{\Gamma} a(x) dx = 0$.

Определение 2.4. $H^1(\mathbb{T})$ является семейством всех тех функций f , которые имеют представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$$

для некоторых периодических атомов $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и действительных скаляров $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$.

Пространство $H^1(\mathbb{T})$ становится банаховым при норме

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{T})} := \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

где $\inf$ берется по всем (периодическим) атомным представлениям $\sum c_n a_n$ функции f . Теперь введем условия регулярности на торе $\mathbb{T}$ для последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Предположим, что $n \geq k+1$ и пусть $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ — упорядоченная последовательность узловых точек, состоящая из $(s_j)_{j=1}^n$ на $\mathbb{T}$, канонически отождествленных с $[0, 1)$:

$$\hat{\mathcal{T}}_n = (0 \leq \sigma_{n,0} \leq \sigma_{n,1} \leq \dots \leq \sigma_{n,n-2} \leq \sigma_{n,n-1} < 1).$$

Для целых $\ell \leq k$ и $i \in \mathbb{N}_0$ определим интервал $T_{n,i}^{(\ell)} := [\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+\ell}] \subset \mathbb{T}$. Здесь мы считаем индекс i периодическим, т.е. используем обозначение периодического расширения последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $\sigma_{rn+j} = r + \sigma_j$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и $r \in \mathbb{Z}$, а подиндексами В-сплайн функций возьмем индексы по модулю n .

Определение 2.5. Пусть $\ell \leq k$ и $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ — ℓ -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$. Тогда эта последовательность называется ℓ -регулярной на торе $\mathbb{T}$ с параметром $\gamma \geq 1$, если

$$\frac{|T_{n,i}^{(\ell)}|}{\gamma} \leq |T_{n,i+1}^{(\ell)}| \leq \gamma |T_{n,i}^{(\ell)}|, \quad n \geq \ell + 1, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Другими словами, (s_n) является ℓ -регулярным на торе $\mathbb{T}$, если существует постоянная $\gamma \geq 1$, такая, что для всех $n \geq \ell$ соотношения длин соседних носителей периодических В-сплайнов (см. раздел 3.2) порядка ℓ с узлами $\hat{\mathcal{T}}_n$ ограничены γ -ой.

Следующая теорема является основным результатом [16] и характеризует системы $(\hat{f}_n^{(k)})$, которые являются базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

Теорема 2.3 ([16]). Пусть $k \geq 1$ и (s_n) k -допустимая последовательность узлов в $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн системой $(\hat{f}_n^{(k)})$ порядка k . В таком случае $(\hat{f}_n^{(k)})$ является базисом в $H^1(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда (s_n) k -регулярна на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$.

В этой статье мы находим достаточное условие при котором $(\hat{f}_n^{(k)})_{n=1}^\infty$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 2.4. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность точек тора $\mathbb{T}$. Если (s_n) удовлетворяет условию $(k-1)$ -регулярности на торе с некоторым параметром $\gamma \geq 1$, то соответствующая периодическая ортонормированная сплайн система $(\hat{f}_n^{(k)})$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Параметр $k \geq 2$ всегда будет использоваться для определения порядка базовых полиномов или сплайнов. Обозначение $A(t) \sim B(t)$ будет использоваться при существовании двух констант $c_1, c_2 > 0$, таких что $c_1 B(t) \leq A(t) \leq c_2 B(t)$ для всех t , где t представляет собой все явные и неявные зависимости, которые могут иметь выражения A и B . Если константы c_1, c_2 зависят от дополнительного параметра p , мы напомним это $A(t) \sim_p B(t)$. Соответственно, будем использовать символы $\lesssim, \gtrsim, \lesssim_p, \gtrsim_p$. Кроме этого, будем использовать символы $\curvearrowright$ и $\curvearrowleft$ для обозначения направлений против и по часовой стрелке, соответственно. Направление против часовой стрелки будем считать положительным направлением. Для подмножества E вещественной прямой через $|E|$ обозначим меру Лебега E , а $\mathbb{1}_E$ — характеристическую функцию E . Если $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественная функция, а λ — вещественный параметр, то множество всех точек, в которых f больше, чем λ , обозначим $[f > \lambda] := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \lambda\}$.

Определение 3.1. Пусть $V \subset \mathbb{T}$ — интервал. Назовем один из двух концов V конечной точкой по часовой стрелке, если можно двигаться от этого конца по часовой стрелке вдоль тора через V и в конечном итоге встретить другой конец интервала V . Конец интервала, который не является таковым, называется конечная точка против часовой стрелки.

3.1. Свойства регулярной последовательности точек на $[0, 1]$ и $\mathbb{T}$. Сначала мы рассмотрим непериодический случай. Следующая лемма описывает геометрическое разложение интервалов в регулярные последовательности (напомним обозначение $D_{n,i}^{(\ell)} = [\tau_{n,i}, \tau_{n,i+\ell}] \subset [0, 1]$).

Лемма 3.1. *Пусть (t_n) k -допустимая последовательность точек, удовлетворяющая условию ℓ -регулярности для некоторого $1 \leq \ell \leq k$ с параметром γ , и пусть $D_{n_1,i_1}^{(\ell)} \supset \dots \supset D_{n_{2\ell},i_{2\ell}}^{(\ell)}$ — строго убывающая последовательность множеств, определенных выше. Тогда,*

$$|D_{n_{2\ell},i_{2\ell}}^{(\ell)}| \leq \frac{\gamma^\ell}{1 + \gamma^\ell} |D_{n_1,i_1}^{(\ell)}|.$$

Доказательство. Обозначим $V_j := D_{n_j,i_j}^{(\ell)}$ для $1 \leq j \leq 2\ell$. Тогда по определению, V_1 содержит $\ell + 1$ точек сетки из $\mathcal{T}_{n_1}$ и содержит не менее 3ℓ точек сетки $\mathcal{T}_{n_{2\ell}}$. Следовательно, существует интервал $D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)}$ для некоторого индекса m , удовлетворяющего условию

$$\text{int}(D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)} \cap V_{2\ell}) = \emptyset, \quad D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)} \subset V_1, \quad \text{dist}(D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)}, V_{2\ell}) = 0.$$

Теперь, из ℓ -регулярности (t_n) следует

$$|V_{2\ell}| \leq \gamma^\ell |D_{n_{2\ell},m}^{(\ell)}| \leq \gamma^\ell (|V_1| - |V_{2\ell}|),$$

т. е. $|V_{2\ell}| \leq \frac{\gamma^\ell}{1 + \gamma^\ell} |V_1|$, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Если последовательность узлов (s_n) удовлетворяет условию регулярности на торе $\mathbb{T}$, то мы имеем такое же геометрическое разложение интервалов на торе $\mathbb{T}$.

Лемма 3.2. *Пусть (s_n) k -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$, удовлетворяющая условию ℓ -регулярности для некоторого $1 \leq \ell \leq k$ с параметром γ и пусть $T_{n_1,i_1}^{(\ell)} \supset \dots \supset T_{n_{2\ell},i_{2\ell}}^{(\ell)}$ — строго убывающая последовательность интервалов на торе $\mathbb{T}$. Тогда,*

$$|T_{n_{2\ell},i_{2\ell}}^{(\ell)}| \leq \frac{\gamma^\ell}{1 + \gamma^\ell} |T_{n_1,i_1}^{(\ell)}|.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.1.

3.2. Свойства функций В-сплайн. Определим функции $(N_{n,i}^{(k)})_{i=-k}^{n-1}$ — совокупность В-сплайнов порядка k , соответствующие разбиению $\mathcal{T}_n$. Эти функции нормализованы таким образом, что они образуют разбиение единицы, т. е. $\sum_{i=-k}^{n-1} N_{n,i}^{(k)}(x) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$. С этим базисом связан биортогональный базис

$\mathcal{S}_n$, который мы обозначим через $(N_{n,i}^{(k)*})_{i=-k}^{n-1}$. Если значения параметров k и n ясны из контекста, то мы будем использовать также эти обозначения $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$ и $(N_i^*)_{i=-k}^{n-1}$ соответственно.

Напомним теперь элементарное свойство многочленов.

Предложение 3.1 (Ремез). *Пусть $0 < \rho < 1$ и I — интервал, а $A \subset I$ такое подмножество I , что $|A| \geq \rho|I|$. Тогда для любого многочлена Q порядка k на интервале I имеем*

$$\max_{t \in I} |Q(t)| \lesssim_{\rho,k} \sup_{t \in A} |Q(t)| \quad \text{и} \quad \int_I |Q(t)| dt \lesssim_{\rho,k} \int_A |Q(t)| dt.$$

Теперь представим важный результат для В-сплайнов (N_i) . Это лемма 4.1 в [7, Глава 5].

Предложение 3.2. *Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $g = \sum_{j=-k}^{n-1} a_j N_j$, где набор $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$ — В-сплайны порядка k , соответствующие разбиению $\mathcal{T}_n$. Тогда,*

$$(3.1) \quad |a_j| \lesssim_k |I_j|^{-1/p} \|g\|_{L^p(I_j)}, \quad -k \leq j \leq n-1,$$

где I_j — подинтервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ интервала $[\tau_{n,j}, \tau_{n,j+k}]$ максимальной длины.

Сейчас рассмотрим периодические В-сплайны и их свойства.

Пусть $n \geq k$ и $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$ — периодические В-сплайн-функции порядка k соответствующие произвольной k допустимой последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ на торе $\mathbb{T}$, канонически отождествляемой с $[0, 1)$:

$$\mathcal{T}_n = (0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{n-2} \leq \sigma_{n-1} < 1).$$

Пусть $(\hat{N}_{n,i}^{(k)*})_{i=0}^{n-1}$ — двойственный базис к $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$ и $\hat{\mathcal{S}}_{\mathcal{T}_n}$ — линейная оболочка $(\hat{N}_{n,i}^{(k)})_{i=0}^{n-1}$. Отметим, что вместо обозначений $\hat{N}_{n,i}^{(k)}$ и $\hat{N}_{n,i}^{(k)*}$ мы можем использовать $\hat{N}_i$ и $\hat{N}_i^*$ соответственно. Определим матрицу $(\hat{a}_{ij})_{i,j=0}^{n-1} = (\langle \hat{N}_i^*, \hat{N}_j \rangle)_{i,j=0}^{n-1}$.

Теперь нам понадобится следующая известная формула для производной линейной комбинации периодических В-сплайн-функций: если $g = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \hat{N}_{n,j}^{(k)}$, то

$$(3.2) \quad g' = (k-1) \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) \frac{\hat{N}_{n,j}^{(k-1)}}{|T_{n,j}^{(k-1)}|}.$$

Здесь мы использовали обозначение периодического расширения последовательности коэффициентов $(a_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $a_{rn+j} = a_j$ для $j = 0, \dots, n-1$ и $r \in \mathbb{Z}$

Не сложно убедиться, что свойство устойчивости В-сплайна имеет место и в периодическом случае.

Предложение 3.3. Пусть $n \geq 2k$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для $g = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \hat{N}_j$ имеем

$$(3.3) \quad \|g\|_p \sim_k \left(\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^p |\operatorname{supp} \hat{N}_j| \right)^{1/p} = \|(a_j \cdot |\operatorname{supp} \hat{N}_j|^{1/p})_{j=0}^{n-1}\|_{\ell^p}.$$

Более того, если $n \geq 3k - 1$, то для коэффициентов имеет место следующее неравенство

$$(3.4) \quad |a_j| \lesssim_k |\hat{I}_j|^{-1/p} \|g\|_{L^p(\hat{I}_j)}, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Здесь $\hat{I}_j$ — подинтервал $[\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+1}]$ интервала $T_{n,j}^{(k)}$, который имеет максимальную длину.

По поводу первого свойства мы отсылаем к [18], а доказательство второго свойства будет представлено ниже.

Доказательство. Пусть j — произвольное целое число с $0 \leq j \leq n-1$. Поскольку $n \geq 3k-1$, мы можем отождествить $\mathbb{T}$ с $[0, 1)$ так, чтобы между начальной точкой 0 и носителем $\hat{N}_j$ было не менее $k-1$ точек как по часовой стрелке, так и по направлению против часовой стрелки. Далее, используя (3.1) из утверждения 3.2, мы получим желаемый результат. $\square$

Ниже приводим периодическую версию теоремы Шадрина (см. теорему 1.4 в [20]).

Теорема 3.1 ([20]). Пусть $\hat{P}$ — оператор ортогонального проектирования на $\hat{\mathcal{S}}_{\hat{\mathcal{T}}}$ относительно канонического скалярного произведения в $L^2(\mathbb{T})$. Тогда существует постоянная C_k , зависящая только от порядка сплайна k , такая, что

$$\|\hat{P} : L^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{T})\| \leq C_k.$$

С помощью последнего результата доказана почти всюду сходимость рядов Фурье по периодическим ортонормированным сплайн системам (Теорема 1.3 в [20]).

Теорема 3.2 ([20]). Пусть $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$ — периодическая ортонормированная сплайн система порядка k , соответствующая произвольной k -допустимой последовательности точек $(s_n)_{n=1}^\infty$ на торе $\mathbb{T}$. Тогда, для произвольного $f \in L^1(\mathbb{T})$, ряд $\sum_{n=1}^\infty \langle f, \hat{f}_n \rangle \hat{f}_n$ сходится к f почти всюду на торе $\mathbb{T}$.

Следующий результат принадлежит Керяну и Пассенбруннеру. С доказательством можно ознакомиться в [18] (см. Теорему 3.13).

Теорема 3.3 ([18]). Пусть $\hat{P}$ — ортогональная проекция на $\hat{\mathcal{S}}_{\hat{T}}$. Тогда,

$$|\hat{P}h(t)| \lesssim \hat{M}h(t), \quad h \in L^1(\mathbb{T}),$$

где $\hat{M}h(t) = \sup_{I \ni t} |I|^{-1} \int_I |h(y)| dy$ — периодический оператор максимальной функции Харди-Литтлвуда и $\sup$ берется по всем интервалам $I \subset \mathbb{T}$ содержащим точку t .

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ИНТЕРВАЛЫ И СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

4.1. Непериодический случай. В этом разделе мы рассмотрим ортонормированные сплайн-функции $f_n = f_n^{(k)}$, где $k \in \mathbb{N}$ фиксировано. Рассмотрим сетку $\mathcal{T}_n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n = (0 = \tau_{n,-k} = \dots = \tau_{n,-1} < \tau_{n,0} \leq \dots \leq \tau_{n,i_0} \\ \leq \dots \leq \tau_{n,n-1} < \tau_{n,n} = \dots = \tau_{n,n+k-1} = 1). \end{aligned}$$

Для простоты мы будем часто опускать индекс n .

Пусть $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ получается из $\mathcal{T}_n$, удалением выделенного τ_{i_0} из сетки. Рассмотрим функции $(N_i)_{i=-k}^{n-1}$, т.е. совокупность В-сплайн-функций порядка k , соответствующих сетке $\mathcal{T}_n$ и через $(\tilde{N}_i : -k \leq i \leq n-2)$ обозначим совокупность В-сплайн-функций, соответствующих $\widetilde{\mathcal{T}}_n$. Формула Бома [2] дает нам следующую связь между N_i и $\tilde{N}_i$:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \tilde{N}_i(t) = N_i(t) & \text{если } -k \leq i \leq i_0 - k - 1, \\ \tilde{N}_i(t) = \frac{\tau_{i_0} - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} N_i(t) + \frac{\tau_{i+k+1} - \tau_{i_0}}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} N_{i+1}(t) & \text{если } i_0 - k \leq i \leq i_0 - 1, \\ \tilde{N}_i(t) = N_{i+1}(t) & \text{если } i_0 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

Чтобы вычислить ортонормированную сплайн-функцию, соответствующую разбиениям $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ и $\mathcal{T}_n$, сначала определим функцию $g_n \in \text{span}\{N_i : -k \leq i \leq n-1\}$ такую, что $g_n \perp \tilde{N}_j$ для всех $-k \leq j \leq n-2$. Функция g_n имеет вид (с точностью до постоянного множителя)

$$(4.2) \quad g_n = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j N_j^* = \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \sum_{l=-k}^{n-1} \alpha_j a_{jl} N_l = \sum_{l=-k}^{n-1} w_l N_l,$$

где $(a_{jl})_{j,l=-k}^{n-1}$ — обратная матрица Грама $(\langle N_j, N_l \rangle)_{j,l=-k}^{n-1}$ и

$$(4.3) \quad w_l := \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \alpha_j a_{jl}, \quad -k \leq l \leq n-1.$$

Коэффициенты α_j имеют вид

$$(4.4) \quad \alpha_j = (-1)^{j-i_0+k} \left(\prod_{\ell=i_0-k+1}^{j-1} \frac{\tau_{i_0} - \tau_\ell}{\tau_{\ell+k} - \tau_\ell} \right) \left(\prod_{\ell=j+1}^{i_0-1} \frac{\tau_{\ell+k} - \tau_{i_0}}{\tau_{\ell+k} - \tau_\ell} \right), \quad i_0 - k \leq j \leq i_0.$$

Кроме того, коэффициенты α_j можно описать соотношением

$$(4.5) \quad \alpha_{i+1} \frac{\tau_{i+k+1} - \tau_{i_0}}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} + \alpha_i \frac{\tau_{i_0} - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} = 0.$$

Чтобы дать оценки для g_n и нормированной функции $f_n = g_n / \|g_n\|_2$, сопоставим каждой функции g_n характеристический интервал, который представляет собой интервал $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ с концами из сетки и лежит вблизи вставленной точки τ_{n,i_0} .

Определение 4.1 (Характеристический интервал для непериодических последовательностей). Пусть $\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{T}}$ такие разбиения, как указано выше, а τ_{i_0} — новая точка в $\mathcal{T}$, которой нет в $\tilde{\mathcal{T}}$. Определим *характеристический интервал* J , соответствующий τ_{i_0} следующим образом.

(1) Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \{i_0 - k \leq j \leq i_0 : |[\tau_j, \tau_{j+k}]| \leq 2 \min_{i_0-k \leq \ell \leq i_0} |[\tau_\ell, \tau_{\ell+k}]|\}$$

— множество всех индексов j , для которых соответствующий носитель В-сплайн-функции N_j приближенно минимален. Заметим, что $\Lambda^{(0)}$ непусто.

(2) Определим

$$\Lambda^{(1)} := \{j \in \Lambda^{(0)} : |\alpha_j| = \max_{\ell \in \Lambda^{(0)}} |\alpha_\ell|\}.$$

Для произвольного, но фиксированного индекса $j^{(0)} \in \Lambda^{(1)}$ положим $J^{(0)} := [\tau_{j^{(0)}}, \tau_{j^{(0)}+k}]$.

(3) Теперь, интервал $J^{(0)}$ можно записать как объединение k интервалов сетки

$$J^{(0)} = \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [\tau_{j^{(0)}+\ell}, \tau_{j^{(0)}+\ell+1}] \quad \text{с } j^{(0)} \text{ как указано выше.}$$

Определим *характеристический интервал* $J_n = J = J(\tau_{i_0})$ как один из выше указанных k интервалов, имеющий максимальную длину.

4.2. Периодический случай. Здесь мы даем оценки для периодических ортонормированных сплайн-функций $(\hat{f}_n)$. Некоторые из них доказаны в [18]. Докажем другие оценки, отсутствующие в предыдущей статье. Эти оценки необходимы для доказательства основной теоремы этой статьи.

Имеем ту же ситуацию, что и в непериодическом случае: Пусть

$$\hat{\mathcal{T}}_n = \hat{\mathcal{T}} = (0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{i_0} \leq \dots \leq \sigma_{n-2} \leq \sigma_{n-1} < 1)$$

— разбиение $\mathbb{T}$, канонически отождествляемое с $[0, 1)$, а $\tilde{\mathcal{T}}$ — то же самое разбиение, но с удаленной σ_{i_0} . Напомним обозначения периодических В-сплайн-функций порядка k относительно $\hat{\mathcal{T}}$, т.е. $(\hat{N}_j)_{j=0}^{n-1}$ и через $(\tilde{N}_j)_{j=0}^{n-2}$ обозначим периодические В-сплайн-функции порядка k относительно $\tilde{\mathcal{T}}$. Здесь мы напомним обозначения периодического расширения последовательности $(\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$, т.е. $\sigma_{rn+j} = r + \sigma_j$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $r \in \mathbb{Z}$ и индексы В-сплайн-функций возьмем по модулю n .

Чтобы вычислить периодические ортонормированные сплайн-функции, соответствующие по приведенным выше сеткам определим функцию $\hat{g}_n := \hat{g} \in \text{span}\{\hat{N}_i : 0 \leq i \leq n-1\}$ такую, что $\hat{g} \perp \tilde{N}_j$ для всех $0 \leq j \leq n-2$. То есть предполагаем, что $\hat{g}$ имеет вид

$$\hat{g} = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_j \hat{N}_j^*,$$

где $\hat{\alpha}_j = \langle \hat{g}, \hat{N}_j \rangle$. Чтобы $\hat{g}$ была ортогональна $\tilde{N}_j$ для $0 \leq j \leq n-2$ она должна удовлетворять тождествам

$$0 = \langle \hat{g}, \tilde{N}_i \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_j \langle \hat{N}_j^*, \tilde{N}_i \rangle, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Здесь мы можем рассматривать индексы j как периодически, что означает $\hat{\alpha}_j \neq 0$ только для $j \in \{i_0 - k, \dots, i_0\}$. Важно отметить, что формула (4.1) распространяется на периодическую настройку, что влечет за собой следующее отношение для коэффициентов $(\hat{\alpha}_j)$:

$$(4.6) \quad \hat{\alpha}_{i+1} \frac{\sigma_{i+k+1} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{i+k+1} - \sigma_{i+1}} + \hat{\alpha}_i \frac{\sigma_{i_0} - \sigma_i}{\sigma_{i+k} - \sigma_i} = 0, \quad i_0 - k \leq i \leq i_0 - 1.$$

С начальным значением

$$\hat{\alpha}_{i_0-k} = \prod_{\ell=i_0-k+1}^{i_0-1} \frac{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{\ell}},$$

мы получаем явную формулу

(4.7)

$$\hat{\alpha}_j = (-1)^{j-i_0+k} \left(\prod_{\ell=i_0-k+1}^{j-1} \frac{\sigma_{i_0} - \sigma_\ell}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_\ell} \right) \cdot \left(\prod_{\ell=j+1}^{i_0-1} \frac{\sigma_{\ell+k} - \sigma_{i_0}}{\sigma_{\ell+k} - \sigma_\ell} \right), \quad i_0 - k \leq j \leq i_0.$$

Теперь, аналогично определению 4.1, представим характеристические интервалы для периодических сеток.

Определение 4.2 (Характеристический интервал для периодических последовательностей). Пусть $\hat{\mathcal{J}}, \tilde{\mathcal{J}}$ такие разбиения, как указано выше и σ_{i_0} — новая точка в $\hat{\mathcal{J}}$, которой нет в $\tilde{\mathcal{J}}$. При ограничении $n \geq 2k$ определим (*периодический*) *характеристический интервал* $\hat{J}$, соответствующий σ_{i_0} , следующим образом.

(1) Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \{i_0 - k \leq j \leq i_0 : |[\sigma_j, \sigma_{j+k}]| \leq 2 \min_{i_0-k \leq \ell \leq i_0} |[\sigma_\ell, \sigma_{\ell+k}]|\}$$

— множество всех индексов j в окрестности индекса i_0 для которого соответствующий носитель периодической В-сплайн-функции $\hat{N}_j$ приближенно минимален. Понятно, что $\Lambda^{(0)}$ непусто.

(2) Определим

$$\Lambda^{(1)} := \{j \in \Lambda^{(0)} : |\hat{\alpha}_j| = \max_{\ell \in \Lambda^{(0)}} |\hat{\alpha}_\ell|\}.$$

Для произвольного, но фиксированного индекса $j^{(0)} \in \Lambda^{(1)}$ положим $\hat{J}^{(0)} := [\sigma_{j^{(0)}}, \sigma_{j^{(0)}+k}]$.

(3) Теперь, интервал $\hat{J}^{(0)}$ можно записать как объединение k интервалов сетки

$$\hat{J}^{(0)} = \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [\sigma_{j^{(0)}+\ell}, \sigma_{j^{(0)}+\ell+1}] \quad \text{с } j^{(0)} \text{ как указано выше.}$$

Определим (*периодический*) *характеристический интервал* $\hat{J} = \hat{J}(\sigma_{i_0})$ как один из выше указанных k интервалов с максимальной длиной.

Имеем следующую оценку для L^p -нормы $\hat{g}$.

Предложение 4.1 ([18]). Если $n \geq 2k + 2$, то

$$\|\hat{g}\|_{L^p(\mathbb{T})} \sim_k |\hat{J}|^{1/p-1}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Более того, существует число $N(k)$, зависящее только от порядка k такое, что для всех разбиений $\hat{\mathcal{J}}$, когда $n \geq N(k) \geq 3k - 1$, имеем

$$\|\hat{g}\|_{L^p(\hat{J})} \gtrsim_k |\hat{J}|^{1/p-1}.$$

Первым шагом доказательства предложения 4.1 – отождествление $\mathbb{T}$ с $[0, 1)$ таким образом, чтобы индекс вновь вставленной точки σ_{i_0} был равен $[n/2]$. Затем для получения некоторых оценок использовалась разница между $\hat{f}_n$ и её непериодическим аналогом f_n , полученная упомянутым выше разделением. Полное доказательство приведено в предложениях 3.6 и 3.8 в статье [18].

Для получения дополнительных оценок $\hat{g}$ перспектива была изменена. В работе [18] было представлено максимальное разделение. Сначала делаем сдвиг последовательности $\hat{\mathcal{T}}_n = (\sigma_j)_{j=0}^{n-1}$ таким образом, чтобы разделить ее по середине наибольшего узла сетки интервала:

$$\sigma_0 = 1 - \sigma_{n-1} = \frac{1}{2} \max_{0 \leq j \leq n-1} (\sigma_j - \sigma_{j-1}),$$

а затем выбираем $\mathcal{T}_n = (\tau_j)_{j=-k}^{n+k-1}$ так, что $\tau_j = \sigma_j$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и имеем

$$\tau_0 - \tau_{-1} = \tau_n - \tau_{n-1} = \frac{1}{2} \max_{0 \leq j \leq n-1} (\sigma_j - \sigma_{j-1}).$$

Мы называем этот выбор $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n$ *максимальным разделением* $\hat{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{T}}_n$.

Этот способ разделения позволил получить важную оценку для $\hat{g}$.

Предложение 4.2 ([18]). *Пусть $x \in [\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}]$. Тогда существует интервал $C := C(x) = C([\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}]) \subset \mathbb{T}$, который является минимальным по отношению следующего включения*

$$\hat{J} \cup [\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}] \subset C$$

такой, что если $K(C)$ – количество точек сетки $\hat{\mathcal{T}}$, содержащийся в C , то

$$|\hat{g}(x)| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C)}}{|C|},$$

где $\hat{q} \in (0, 1)$ зависит только от k .

Приведенный выше результат – это предложение 3.11 в [18]. Теперь мы используем предложение 4.2, чтобы получить следующий результат.

Лемма 4.1. *Пусть $n \geq 3k - 1$. Если написать $\hat{g}_n = \hat{g} = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\omega}_j \hat{N}_j$, то имеем следующую оценку для коэффициента $\hat{w}_i := \sum_{j=i_0-k}^{i_0} \hat{\alpha}_j \hat{a}_{ij}$,*

$$(4.8) \quad |\hat{\omega}_j| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_j))}}{|C(\hat{I}_j)|},$$

где $\hat{I}_j := [\sigma_{n,i}, \sigma_{n,i+1}]$ – подинтервал $T_{n,j}^{(k)}$, который имеет максимальную длину, а $C(\hat{I}_j)$ – интервал, определенный в предложении 4.2.

Доказательство. Используя (3.4) из предложения 3.3 при $p = \infty$ и предложение 4.2, мы получаем

$$|\hat{\omega}_j| \lesssim_k \|\hat{g}_n\|_{L^\infty(\hat{I}_j)} \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_j))}}{|C(\hat{I}_j)|},$$

что завершает доказательство. $\square$

Прежде чем сформулировать следующую лемму, нам необходимо дать несколько определений.

Пусть $V \subset \mathbb{T}$ — такой интервал, что $V \cap \hat{J}_n = \emptyset$. Обозначим через $d_n^\frown(V)$ функцию, подсчитывающую количество узлов из $(s_j)_{j=1}^n$, находящихся в единственном интервале $V^\frown$, концами которого являются конечная точка V против часовой стрелки и конечная точка $\hat{J}_n$ по часовой стрелке, а внутренняя часть интервала $V^\frown$ не содержит V . Далее, $d_n^\frown(V)$ подсчитывает количество узлов, находящихся в интервале $V^\frown := \mathbb{T} \setminus (V \cup \hat{J}_n \cup V^\frown)$. Кроме того, пусть $C^\frown(V) := \mathbb{T} \setminus V^\frown$ и $C^\frown(V) := \mathbb{T} \setminus V^\frown$. Дополнительно, определим $\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, V)$ и $\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, V)$ как меру Лебега интервалов $V^\frown$ и $V^\frown$ соответственно. В случае $V \cap \hat{J}_n \neq \emptyset$ все функции $d_n^\frown(V)$, $d_n^\frown(V)$, $\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, V)$ и $\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, V)$ равны 0. $C^\frown(V)$ и $C^\frown(V)$ определяются как множество $\hat{J}_n \cup V$.

Лемма 4.2. Пусть $n \geq 3k - 1$ и $V \subset \mathbb{T}$ — такой интервал, что $V \cap \hat{J}_n = \emptyset$. Тогда

$$\|\hat{g}_n\|_{L^1(V)} \lesssim_k \hat{q}^{d_n^\frown(V)} + \hat{q}^{d_n^\frown(V)}.$$

Доказательство. Пусть $\hat{\mathcal{J}}_n$ — разбиение $\mathbb{T}$, канонически отождествляемое с $[0, 1)$. Напомним, что интервалы $\hat{I}_j$ и $C(\hat{I}_j)$ определены как в лемме 4.1. Определим множества $A^\frown := \{0 \leq i \leq n-1 : T_{n,i}^{(k)} \cap V \neq \emptyset \text{ и } C(\hat{I}_i) = C^\frown(\hat{I}_i)\}$ и $A^\frown := \{0 \leq i \leq n-1 : T_{n,i}^{(k)} \cap V \neq \emptyset \text{ и } C(\hat{I}_i) = C^\frown(\hat{I}_i)\}$. По (3.3) из предложения 3.3 и лемме 4.1 имеем следующее:

$$\|\hat{g}_n\|_{L^1(V)} \lesssim_k \|(\hat{\omega}_i |T_{n,i}^{(k)}|)_{i \in A^\frown \cup A^\frown}\|_{\ell^1} \lesssim_k \left\| \left(\frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_i))} |T_{n,i}^{(k)}|}{|C(\hat{I}_i)|} \right)_{i \in A^\frown \cup A^\frown} \right\|_{\ell^1}.$$

Очевидно, что $|\hat{I}_i| \sim_k |T_{n,i}^{(k)}|$ и $|\hat{I}_i| \leq |C(\hat{I}_i)|$, $i \in A^\frown \cup A^\frown$. Следовательно, получаем

$$\|\hat{g}_n\|_{L^1(V)} \lesssim_k \|(\hat{q}^{K(C(\hat{I}_i))})_{i \in A^\frown}\|_{\ell^1} + \|(\hat{q}^{K(C(\hat{I}_i))})_{i \in A^\frown}\|_{\ell^1}.$$

Далее, поскольку n фиксированно, заключаем, что $K(C(\hat{I}_i))$ может быть равно произвольному натуральному числу большему, чем $\min(d_n^\frown(V), d_n^\frown(V))$, не более

k раз. Следовательно,

$$\|\hat{g}_n\|_{L^1(V)} \lesssim_k \hat{q}_n^{d_n^\wedge(V)} + \hat{q}_n^{d_n^\vee(V)}.$$

□

5. КОМБИНАТОРИКА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ИНТЕРВАЛОВ

5.1. Непериодический случай. В этом разделе мы напомним комбинаторный результат о взаимном расположении различных характеристических интервалов:

Лемма 5.1 ([19]). *Пусть V — произвольный подинтервал $[0, 1]$ и $\beta > 0$. Тогда существует постоянная $F_{k,\beta}$, зависящая только от k и β такая, что*

$$\text{card}\{n : J_n \subseteq V, |J_n| \geq \beta|V|\} \leq F_{k,\beta},$$

где $\text{card } E$ обозначает мощность множества E .

Нам также понадобится лемма 4.7 из [14].

Лемма 5.2 ([14]). *Пусть $(t_n)_{n=0}^\infty$ — k -допустимая последовательность узлов, удовлетворяющая условию $(k-1)$ -регулярности и $\Delta = D_{m,i}^{(k-1)}$ для некоторых индексов m и i . Для $\ell \geq 0$ обозначим*

$$N(\Delta) := \{n : \text{card}(\Delta \cap \mathcal{J}_n) = k, J_n \subset \Delta\},$$

$$M(\Delta, \ell) := \{n : d_n(\Delta) = \ell, \text{card}(\Delta \cap \mathcal{J}_n) \geq k, |J_n \cap \Delta| = 0\},$$

где в обоих определениях мы подсчитываем точки в $\Delta \cap \mathcal{J}_n$, включая кратности.

Тогда,

$$(5.1) \quad \frac{1}{|\Delta|} \sum_{n \in N(\Delta)} |J_n| \lesssim_k 1 \quad \text{и} \quad \sum_{n \in M(\Delta, \ell)} \frac{|J_n|}{\text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \lesssim_{k,\gamma} (\ell + 1)^2.$$

Доказательство. Для любого $n \in N(\Delta)$ существуют только $k-1$ возможностей $D_{m,i}^{(1)}, \dots, D_{m,i+k-2}^{(1)}$ для J_n , а по лемме 5.1, каждый интервал $D_{m,j}^{(1)}$, $j = i, \dots, i+k-2$ встречается не более F_k раз как характеристический интервал. Отсюда следует первое неравенство в (5.1).

Теперь мы докажем второе неравенство в (5.1). Предположим, что каждый J_n , $n \in M(\Delta, \ell)$ лежит правее Δ , поскольку другой случай рассматривается аналогичными методами. Аргумент разделяется на две части в зависимости от значения параметра ℓ , начнем с случая $\ell \leq k$. В этом случае, для $n \in M(\Delta, \ell)$ предположим, что $J_n^{1/2}$ — единственный интервал, определяемый условиями

$$\sup J_n^{1/2} = \sup J_n, \quad |J_n^{1/2}| = |J_n|/2.$$

Поскольку $d_n(\Delta) = \ell$ константа, группируем встречающиеся интервалы J_n в пакеты, где все интервалы в одном пакете имеют один и тот же левый конец, а максимальные интервалы из разных пакетов не пересекаются (возможно, кроме одной точки). По лемме 5.1 каждая точка $t \in [0, 1]$ принадлежит не более чем F_k интервалам $J_n^{1/2}$. Теперь, в следствии $(k-1)$ -регулярности и $\ell \leq k$, имеем $|J_n| \lesssim_{k,\gamma} |\Delta|$ и $\text{dist}(\Delta, J_n) \lesssim_{k,\gamma} |\Delta|$ для $n \in M(\Delta, \ell)$ и, таким образом, каждый интервал J_n для $n \in M(\Delta, \ell)$ является подмножеством фиксированного интервала, длина которого сравнима с $|\Delta|$. Итак, сложив все это, получим

$$\sum_{n \in M(\Delta, \ell)} \frac{|J_n|}{\text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \leq \frac{1}{|\Delta|} \sum_{n \in M(\Delta, \ell)} |J_n| = \frac{2}{|\Delta|} \sum_{n \in M(\Delta, \ell)} \int_{J_n^{1/2}} dx \lesssim_{k,\gamma} 1,$$

что доказывает случай $\ell \leq k$.

Далее, предположим $\ell \geq k+1$ и определим $(L_j)_{j=1}^\infty$ как строго убывающую последовательность всех множеств L , удовлетворяющих условиям

$$L = D_{n,i}^{(k-1)} \quad \text{и} \quad \sup L = \sup \Delta$$

для некоторых индексов n и i . Более того, обозначим

$$M_j(\Delta, \ell) := \{n \in M(\Delta, \ell) : \text{card}(L_j \cap \mathcal{T}_n) = k\},$$

т. е. L_j является объединением $k-1$ интервалов узлов сетки $\mathcal{T}_n$. Тогда, поскольку $|\Delta| + \text{dist}(J_n, \Delta) \gtrsim_\gamma |\Delta| + \text{dist}(t, \Delta)$ для $t \in J_n^{1/2}$ по $(k-1)$ -регулярности, то

$$\sum_{n \in M_j(\Delta, \ell)} \frac{|J_n|}{\text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \lesssim_{k,\gamma} \sum_{n \in M_j(\Delta, \ell)} \int_{J_n^{1/2}} \frac{1}{\text{dist}(t, \Delta) + |\Delta|} dt.$$

Если $n \in M_j(\Delta, \ell)$, то опять же в силу $(k-1)$ -регулярности, имеем

$$\inf J_n^{1/2} \geq \inf J_n \geq \gamma^{-k} |L_j| + \sup \Delta,$$

и

$$\sup J_n^{1/2} \leq \inf J_n + |J_n| \leq C_k \gamma^\ell |L_j| + \sup \Delta$$

для некоторой константы C_k , зависящей только от k . Объединив это с леммой 5.1, из которой следует, что каждая точка t принадлежит не более чем F_k интервалам $J_n^{1/2}$, получим

$$(5.2) \quad \sum_{n \in M_j(\Delta, \ell)} \int_{J_n^{1/2}} \frac{1}{\text{dist}(t, \Delta) + |\Delta|} dt \lesssim \int_{\gamma^{-k} |L_j| + |\Delta|}^{C_k \gamma^\ell |L_j| + |\Delta|} \frac{1}{s} ds.$$

Далее, покажем, что указанные выше интервалы интегрирования могут пересекаться не более чем для примерно ℓ индексов j . Пусть $j_2 \geq j_1$, так что $L_{j_1} \supset L_{j_2}$

и допустим $j_2 = j_1 + 2kr + t$ с $t \leq 2k - 1$. Тогда по лемме 3.1

$$C_k \gamma^\ell |L_{j_2}| \leq C_k \gamma^\ell |L_{j_1+2kr}| \leq C_k \gamma^\ell \eta^r |L_{j_1}|,$$

где $\eta = \gamma^{k-1}/(1 + \gamma^{k-1}) < 1$. Если, теперь $r \geq C_{k,\gamma} \ell$ для некоторой подходящей константы $C_{k,\gamma}$, зависящей только от k и γ , то имеем

$$C_k \gamma^\ell |L_{j_2}| \leq \gamma^{-k} |L_{j_1}|.$$

Таким образом, каждая точка s в интеграле из (5.2), для некоторого j принадлежит не более чем $C_{k,\gamma} \ell$ интервалам $[\gamma^{-k} |L_j| + |\Delta|, C_k \gamma^\ell |L_j| + |\Delta|]$, где j меняется. Итак, суммированием по j , приходим к

$$\sum_{n \in M(\Delta, \ell)} \frac{|J_n|}{\text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \leq C_{k,\gamma} \ell \int_{|\Delta|}^{(1+C_k \gamma^\ell)|\Delta|} \frac{1}{s} ds \leq C_{k,\gamma} \ell^2.$$

На этом случай $\ell \geq k + 1$ завершен, а значит лемма доказана. $\square$

5.2. Периодический случай. Аналогично непериодическому случаю, мы можем проанализировать комбинаторику характеристических интервалов на торе $\mathbb{T}$. Непосредственное следствие из определения последовательности характеристических интервалов $(\hat{J}_n)$ является то, что они образуют вложенную коллекцию множеств, то есть два множества в ней либо не пересекаются, либо одно содержится в другом.

Поскольку определение характеристического интервала $\hat{J}_n$ включает в себя только локальные свойства последовательности точек $(s_n)_{n=1}^\infty$ и оно совпадает с определением J_n для любого отождествления $\mathbb{T}$ с $[0, 1)$ со свойством, что между вновь введенной точкой σ_{i_0} и 0 или 1 существует более k точек сетки $\mathcal{T}_n$, то получаем периодическую версию леммы 5.1.

Лемма 5.3. Пусть V - произвольный подинтервал $\mathbb{T}$ и пусть $\beta > 0$. Тогда существует постоянная $F_{k,\beta}$, зависящая только от k и β , такая, что

$$\text{card}\{n \geq 2k : \hat{J}_n \subseteq V, |\hat{J}_n| \geq \beta |V|\} \leq F_{k,\beta}.$$

Прямым следствием этой леммы является следующее:

Следствие 5.1. Пусть $(s_n)_{n=1}^\infty$ - k -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормальной системой сплайнов $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$. Пусть $(n_s)_{s \geq 1}$ - последовательность неотрицательных целых чисел

такая, что $\hat{J}_{n_{s+1}} \subset \hat{J}_{n_s}$. Тогда,

$$\sum_{s \geq 1} |\hat{J}_{n_s}| \sim_k |\hat{J}_{n_1}|.$$

Следствие 5.2. Пусть $(s_n)_{n=1}^\infty$ - k -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$ и пусть $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ - соответствующая периодическая ортонормальная сплайн-система порядка k . Тогда для любого замкнутого интервала $V \subset \mathbb{T}$,

$$\sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n|^{1/2} \int_{V^c} |\hat{f}_n(t)| dt \lesssim_k |V|.$$

Доказательство. Используя предложение 4.1 и лемму 4.2, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n|^{1/2} \int_{V^c} |\hat{f}_n(t)| dt &\lesssim_k \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n| (\hat{q}^{d_n^\wedge(V^c)} + \hat{q}^{d_n^\wedge(V^c)}) \\ &= \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n| \hat{q}^{d_n^\wedge(V^c)} + \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V} |\hat{J}_n| \hat{q}^{d_n^\wedge(V^c)} =: \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

Мы приводим только оценку суммы Σ_1 , так как Σ_2 может быть оценена аналогичным образом. Для начала зафиксируем $\ell \geq 0$ и рассмотрим индексы n такие, что $d_n^\wedge(V^c) = \ell$. Соответствующие интервалы $\hat{J}_n$ можно разложить по пакетам так, чтобы интервалы из одного пакета имели общую конечную точку по часовой стрелке и образовали вложенный набор интервалов, а максимальные интервалы из разных пакетов имели непересекающиеся внутренности. Так как все эти интервалы входят в V , то по следствию 5.1 получаем:

$$\Sigma_1 = \sum_{\ell \geq 0} \hat{q}^\ell \sum_{n \geq 3k-1: \hat{J}_n \subset V, d_n^\wedge(V^c) = \ell} |\hat{J}_n| \lesssim_k \sum_{\ell \geq 0} |V| \hat{q}^\ell \lesssim_k |V|.$$

Отсюда следует, что $\Sigma_1, \Sigma_2 \lesssim_k |V|$, что завершает доказательство. $\square$

Следствием леммы 5.2 является ее периодическая версия.

Лемма 5.4. Пусть $(s_n)_{n=1}^\infty$ - k -допустимая последовательность узлов, удовлетворяющая условию $(k-1)$ -регулярности на торе $\mathbb{T}$, и пусть m и i - некоторые индексы. Допустим, что $\hat{\mathcal{T}}_m = (\sigma_{m,j})_{j=0}^{m-1}$ - разбиение $\mathbb{T}$, канонически отождествляемое с $[0, 1)$. Определим $\Delta := T_{m,i}^{(k-1)}$ и для $\ell \geq 0$

$$N(\Delta) := \{n : \text{card}(\Delta \cap (s_j)_{j=1}^n) = k, \hat{J}_n \subset \Delta\},$$

$$M^\frown(\Delta, \ell) := \{n : d_n^\frown(\Delta) = \ell, \text{ card}(\Delta \cap (s_j)_{j=1}^n) \geq k, |\hat{J}_n \cap \Delta| = 0\},$$

$$M^\frown(\Delta, \ell) := \{n : d_n^\frown(\Delta) = \ell, \text{ card}(\Delta \cap (s_j)_{j=1}^n) \geq k, |\hat{J}_n \cap \Delta| = 0\},$$

где в обоих определениях считаем точки в $\Delta \cap (s_j)_{j=1}^n$, включая кратности.

Тогда,

$$(5.3) \quad \frac{1}{|\Delta|} \sum_{n \in N(\Delta)} |\hat{J}_n| \lesssim_k 1,$$

более того,

$$(5.4) \quad \sum_{n \in M^\frown(\Delta, \ell)} \frac{|\hat{J}_n|}{\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, \Delta) + |\Delta|}, \quad \sum_{n \in M^\frown(\Delta, \ell)} \frac{|\hat{J}_n|}{\text{dist}^\frown(\hat{J}_n, \Delta) + |\Delta|} \lesssim_{k, \gamma} (\ell + 1)^2.$$

6. ТРИ УСЛОВИЯ ДЛЯ СПЛАЙН-РЯДОВ И ИХ ОТНОШЕНИЯ

Пусть $(s_n)_{n=1}^\infty$ k -допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$ с соответствующей периодической ортонормированной сплайн-системой $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$. Пусть $N(k)$ — натуральное число, указанное в предложении 4.1, и пусть $(a_n)_{n \geq N(k)}$ — последовательность коэффициентов. Определим

$$S := \left(\sum_{n=N(k)}^\infty a_n^2 \hat{f}_n^2 \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad M := \sup_m \left| \sum_{n=N(k)}^m a_n \hat{f}_n \right|.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{T})$, то через Sf и Mf обозначим функции S и M , соответствующие последовательности коэффициентов $a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle$ соответственно. Рассмотрим следующие условия:

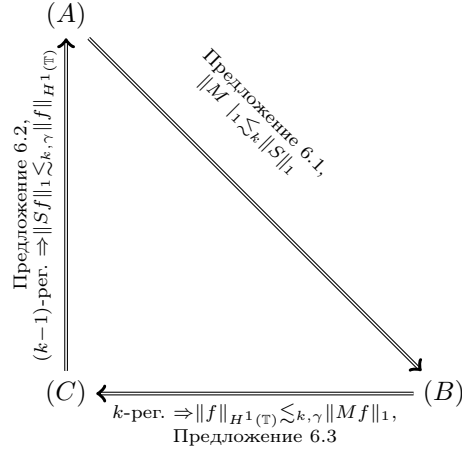
$$(A) \quad S \in L^1(\mathbb{T}),$$

$$(B) \quad M \in L^1(\mathbb{T}),$$

$$(C) \quad \text{Существует функция } f \in H^1(\mathbb{T}) \text{ такая, что } a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle.$$

Мы докажем, что при определенных условиях регулярности последовательности узлов $(s_n)_{n=1}^\infty$ условия (A)-(C) эквивалентны.

В этом разделе мы обсудим связи между этими тремя новыми условиями и докажем следствия, указанные на следующей схеме, где, как упоминалось ранее, некоторые результаты требуют определенных условий регулярности, налагаемых на последовательность узлов $(s_n)_{n=1}^\infty$, которые также указаны на изображении.



Напомним, что в случае непериодических ортонормированных сплайн-систем с диадическими узлами связи, отношения (и эквивалентности) этих условий изучали разные авторы, также в случае $p < 1$, см., например, [24, 3, 9]. Для общих систем Франклина, соответствующих произвольным последовательностям узлов, связь этих условий обсуждалась в [12] (и ранее в [10], также для $p < 1$, но для ограниченного класса точек последовательности). Мы следуем подходу [14] и адаптируем его к случаю периодических сплайн-ортонормированных систем порядка k .

Сначала мы исследуем импликацию $(A) \Rightarrow (B)$.

Используя оценки и комбинаторные результаты подраздела 3.2 и разделов 4 и 5, в частности следствие 5.2, эту импликацию можно доказать аналогично доказательству предложения 4.3 в [12], поэтому мы просто сформулируем результат.

Предложение 6.1 $((A) \Rightarrow (B))$. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$ и (a_n) — последовательность коэффициентов такая, что $S \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда $M \in L^1(\mathbb{T})$ и

$$\|M\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_k \|S\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Далее, обсудим $(C) \Rightarrow (A)$.

Предложение 6.2 $((C) \Rightarrow (A))$. Пусть (s_n) — k -допустимая последовательность точек на торе $\mathbb{T}$, удовлетворяющая условию $(k-1)$ -регулярности на торе

с параметром $\gamma \geq 1$. Тогда существует постоянная $C_{k,\gamma}$, зависящая только от k и γ , такая, что для каждого атома ϕ

$$\|S\phi\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq C_{k,\gamma}.$$

Следовательно, если $f \in H^1(\mathbb{T})$, то

$$\|Sf\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq C_{k,\gamma} \|f\|_{H^1(\mathbb{T})}.$$

Доказательство предложения 6.2. Пусть ϕ — периодический атом с $\int_{\mathbb{T}} \phi(u) du = 0$ и $\Gamma \subset \mathbb{T}$ — такой интервал, что $\text{supp } \phi \subset \Gamma$ и $\sup |\phi| \leq |\Gamma|^{-1}$. Определим $n_{\Gamma} := \max\{n : \text{card}(\hat{\mathcal{T}}_n \cap \Gamma) \leq k-1\}$.

Докажем, что

$$\|S_1\phi\|_{L^1(\mathbb{T})}, \|S_2\phi\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{\gamma,k} 1,$$

где

$$S_1\phi = \left(\sum_{N(k) \leq n \leq n_{\Gamma}} a_n^2 \hat{f}_n^2 \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad S_2\phi = \left(\sum_{n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}} a_n^2 \hat{f}_n^2 \right)^{1/2}.$$

Сначала рассмотрим S_1 и докажем более сильное неравенство

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_{\Gamma}} |a_n| \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1,$$

где $a_n = \langle \phi, \hat{f}_n \rangle$. Для каждого параметра $N(k) \leq n \leq n_{\Gamma}$ определим замкнутый интервал Γ_n как единственный интервал $T_{n,j}^{(k-1)}$ такой, что конечная точка этого интервала против часовой стрелки — это первый узел, с которым мы встречаемся при движении от конечной точки Γ против часовой стрелки вдоль тора $\mathbb{T}$ по часовой стрелке.

Заметим, что Γ_n удовлетворяет соотношению

$$\Gamma_{n_1} \supseteq \Gamma_{n_2} \quad \text{для } n_1 \leq n_2,$$

и в силу $(k-1)$ -регулярности на торе $\mathbb{T}$

$$|\Gamma_n| \gtrsim_{\gamma,k} |\Gamma|.$$

Пусть $\hat{g}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{w}_j N_{n,j}^{(k)}$ — ненормированная периодическая ортогональная сплайн-функция. Для $\xi \in \Gamma$ имеем (ср. (3.2))

$$(6.1) \quad |\hat{g}'_n(\xi)| \lesssim_k \sum_j \frac{|\hat{w}_j| + |\hat{w}_{j-1}|}{|T_{n,j}^{(k-1)}|},$$

где суммирование берется только по тем индексам j , для которых $\Gamma \cap \text{supp } \hat{N}_{n,j}^{(k-1)} = \Gamma \cap T_{n,j}^{(k-1)} \neq \emptyset$. В силу $(k-1)$ -регулярности на торе $\mathbb{T}$ все длины $|T_{n,j}^{(k-1)}|$ в этой области суммирования сравнимы с $|\Gamma_n|$. Более того, согласно (4.8),

$$(6.2) \quad |\hat{\omega}_j| \lesssim_k \frac{\hat{q}^{K(C(\hat{I}_j))}}{|C(\hat{I}_j)|} \lesssim \frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\hat{I}_j)}}{|C^\frown(\hat{I}_j)|} + \frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\hat{I}_j)}}{|C^\frown(\hat{I}_j)|}.$$

Опять же, по $(k-1)$ -регулярности, для j в области суммирования суммы (6.1), имеем

$$|T_{n,j}^{(k-1)}| \gtrsim_{k,\gamma} |\Gamma_n|,$$

Более того, по определению $C^\frown(\Gamma_n)$ и $C^\frown(\Gamma_n)$ из леммы 4.2 получаем:

$$\begin{aligned} |C^\frown(\hat{I}_j)| &\gtrsim_{k,\gamma} |C^\frown(\Gamma_n)|, \\ |C^\frown(\hat{I}_j)| &\gtrsim_{k,\gamma} |C^\frown(\Gamma_n)|. \end{aligned}$$

Поэтому, комбинируя приведенные выше неравенства, мы оцениваем правую часть в (6.1) и получаем:

$$(6.3) \quad |g'_n(\xi)| \lesssim_{k,\gamma} \frac{1}{|\Gamma_n|} \left(\frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|C^\frown(\Gamma_n)|} + \frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|C^\frown(\Gamma_n)|} \right).$$

Как следствие, для произвольной точки $\tau \in \Gamma$ по предложению 4.1

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int_{\Gamma} \phi(t) [\hat{f}_n(t) - \hat{f}_n(\tau)] dt \right| \leq \int_{\Gamma} \frac{1}{|\Gamma|} \sup_{\xi \in \Gamma} |\hat{f}'_n(\xi)| |t - \tau| dt \\ &\lesssim_k |\Gamma| |\hat{J}_n|^{1/2} \sup_{\xi \in \Gamma} |\hat{g}'_n(\xi)| \lesssim_{k,\gamma} \frac{|\Gamma| |\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma_n|} \left(\frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|C^\frown(\Gamma_n)|} + \frac{\hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|C^\frown(\Gamma_n)|} \right). \end{aligned}$$

Далее, пусть

$$\begin{aligned} a_n^\frown &:= \frac{|\Gamma| |\hat{J}_n|^{1/2} \hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|\Gamma_n| |C^\frown(\Gamma_n)|}, \\ a_n^\frown &:= \frac{|\Gamma| |\hat{J}_n|^{1/2} \hat{q}^{d_n^\frown(\Gamma_n)}}{|\Gamma_n| |C^\frown(\Gamma_n)|}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathbb{T} \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_s$ — совокупность всех различных интервалов, представленных как Γ_n для $N(k) \leq n \leq n_\Gamma$. По лемме 3.2 имеем, что длины Δ_i убывают как геометрическая прогрессия. Теперь зафиксируем Δ_i и $\ell \geq 0$ и рассмотрим индексы $N(k) \leq n \leq n_\Gamma$ такие, что $\Gamma_n = \Delta_i$ и $d_n^\frown(\Gamma_n) = \ell$. Согласно последнему выводу и предложению 4.1,

$$a_n^\frown \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} \frac{|\Gamma| |\hat{J}_n| \hat{q}^\ell}{|\Delta_i| |C^\frown(\Delta_i)|},$$

и, следовательно, используя лемму 5.4 в направлении против часовой стрелки, мы получаем

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_\Gamma: \Gamma_n = \Delta_i, d_n^\wedge(\Gamma_n) = \ell} a_n^\wedge \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} (\ell + 1)^2 \hat{q}^\ell \frac{|\Gamma|}{|\Delta_i|}.$$

Теперь, суммируя по ℓ , а затем по i (напомним, что $|\Delta_i|$ убывают как геометрическая прогрессия по лемме 3.2 и $|\Delta_i| \gtrsim_{k,\gamma} |\Gamma|$, так как $n \leq n_\Gamma$) получаем

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_\Gamma} a_n^\wedge \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1.$$

Точно также, получаем

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_\Gamma} a_n^\wedge \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1.$$

Таким образом,

$$\sum_{N(k) \leq n \leq n_\Gamma} |a_n| \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1.$$

Отсюда следует необходимое неравенство $\|S_1 \phi\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} 1$ для первой части $S\phi$.

Далее, рассмотрим $S_2 \phi$ и определим множество V как наименьший интервал на торе $\mathbb{T}$, точки сетки которого лежат в $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma+1}$ в качестве конечных точек и содержит Γ .

Кроме того, пусть $\tilde{V}$ определяется как наименьший интервал на торе $\mathbb{T}$ с точками сетки в $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma+1}$ в качестве конечных точек, содержащим интервал Γ и такой, что $\tilde{V}$ содержит k точек сетки в $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma+1}$ как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки от Γ . Если рассмотрим множество $\tilde{V} \setminus V$ на торе $\mathbb{T}$, то можно увидеть, что $\tilde{V} \setminus V = U_1 \cup U_2$, где U_1 и $U_2 \subset \mathbb{T}$ — непересекающиеся интервалы. Причем, ввиду $(k-1)$ -регулярности и того, что Γ содержит не менее k точек сетки из $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma+1}$, имеем

$$(6.4) \quad \begin{aligned} |V| &\sim_{k,\gamma} |\tilde{V}| \sim_{k,\gamma} |\Gamma|, \\ |U_1| &\sim_{k,\gamma} |U_2| \sim_{k,\gamma} |\tilde{V}|. \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим интеграл от $S_2 \phi$ по множеству $\tilde{V}$ и согласно неравенству Коши-Шварца, получим

$$\int_{\tilde{V}} S_2 \phi(t) dt \leq \|\mathbb{1}_{\tilde{V}}\|_{L^2(\mathbb{T})} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \frac{|\tilde{V}|^{1/2}}{|\Gamma|^{1/2}} \lesssim_{k,\gamma} 1.$$

Осталось оценить $\int_{\tilde{V}^c} S_2 \phi(t) dt$. Поскольку для $n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}$ концы $\tilde{V}$ являются точками сетки в $\hat{\mathcal{T}}_n$, то либо $\hat{J}_n \subset \tilde{V}$, либо $\hat{J}_n$ находится вне $\tilde{V}$. Начнем

с рассмотрения $\hat{J}_n \subset \tilde{V}$. В этом случае

$$|a_n| = \left| \int_{\Gamma} \phi(t) \hat{f}_n(t) dt \right| \leq \frac{\|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})}}{|\Gamma|} \lesssim_k \frac{|\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma|},$$

и, следовательно, по следствию 5.2 и (6.4), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n: \hat{J}_n \subset \tilde{V}, n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}} |a_n| \int_{\tilde{V}^c} |\hat{f}_n(t)| dt &\lesssim_k \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{n: \hat{J}_n \subset \tilde{V}, n \geq N(k)} |\hat{J}_n|^{1/2} \int_{\tilde{V}^c} |\hat{f}_n(t)| dt \\ &\lesssim_k \frac{|\tilde{V}|}{|\Gamma|} \lesssim_{k, \gamma} 1. \end{aligned}$$

Теперь, пусть $\hat{J}_n$ находится вне $\tilde{V}$. Тогда с помощью (6.2) и (6.4) получаем

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} |\hat{f}_n(t)| dt \leq \frac{1}{|\Gamma|} \int_V |\hat{f}_n(t)| dt \lesssim_k \frac{|\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma|} \int_V \left| \sum_{j: T_{n,j}^{(k)} \cap V \neq \emptyset} \hat{\omega}_j \hat{N}_{n,j}^{(k)}(t) \right| dt \\ &\leq \frac{|\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma|} \int_V \sum_{j: T_{n,j}^{(k)} \cap V \neq \emptyset} |\hat{\omega}_j| \hat{N}_{n,j}^{(k)}(t) dt \lesssim_k \\ &\lesssim_k \frac{|V| |\hat{J}_n|^{1/2}}{|\Gamma|} \left(\sum_{j \in A^{\curvearrowright}} \frac{\hat{q}_n^{d_n^{\curvearrowright}(\hat{I}_j)}}{|C^{\curvearrowright}(\hat{I}_j)|} + \sum_{j \in A^{\curvearrowleft}} \frac{\hat{q}_n^{d_n^{\curvearrowleft}(\hat{I}_j)}}{|C^{\curvearrowleft}(\hat{I}_j)|} \right), \end{aligned}$$

где $A^{\curvearrowright} := \{0 \leq j \leq n-1 : T_{n,j}^{(k)} \cap V \neq \emptyset \text{ и } C(\hat{I}_j) = C^{\curvearrowright}(\hat{I}_j)\}$, а $A^{\curvearrowleft} := \{0 \leq j \leq n-1 : T_{n,j}^{(k)} \cap V \neq \emptyset \text{ и } C(\hat{I}_j) = C^{\curvearrowleft}(\hat{I}_j)\}$. Более того, в силу $(k-1)$ -регулярности, получаем (см. (6.4)):

$$\begin{aligned} |C^{\curvearrowright}(\hat{I}_j)| &\gtrsim_{k, \gamma} |C^{\curvearrowright}(V)|, \\ |C^{\curvearrowleft}(\hat{I}_j)| &\gtrsim_{k, \gamma} |C^{\curvearrowleft}(V)|. \end{aligned}$$

Вышеизложенные неравенства, оценка коэффициентов a_n и предложение 4.1 позволяют нам вывести

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} |a_n| \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &\lesssim_{k, \gamma} \sum_{\substack{n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{\hat{q}_n^{d_n^{\curvearrowright}(V)} |\hat{J}_n|}{\text{dist}^{\curvearrowright}(V, \hat{J}_n) + |V|} \\ &+ \sum_{\substack{n \geq \max\{n_{\Gamma}+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{\hat{q}_n^{d_n^{\curvearrowleft}(V)} |\hat{J}_n|}{\text{dist}^{\curvearrowleft}(V, \hat{J}_n) + |V|} \end{aligned}$$

Отметим, что V может быть объединением $k-1$, k или $k+1$ интервалов из $\hat{\mathcal{T}}_{n_{\Gamma}+1}$. Поэтому пусть V^+ — объединение $k-1$ интервалов сетки из $\hat{\mathcal{T}}_{n_{\Gamma}+1}$, причем конечная точка V^+ против часовой стрелки совпадает с конечной точкой V против часовой стрелки.

Тогда $d_n^\wedge(V) = d_n^\wedge(V^+)$, $\text{dist}^\wedge(V, \hat{J}_n) = \text{dist}^\wedge(V^+, \hat{J}_n)$ и из-за $(k-1)$ -регулярности последовательности точек, $|V| \sim_{k,\gamma} |V^+|$, откуда следует, что

$$\sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{\hat{q}^{d_n^\wedge(V)} |\hat{J}_n|}{\text{dist}^\wedge(V, \hat{J}_n) + |V|} \lesssim_{k,\gamma} \sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{\hat{q}^{d_n^\wedge(V^+)} |\hat{J}_n|}{\text{dist}^\wedge(V^+, \hat{J}_n) + |V^+|}.$$

Теперь аналогично определим V^- как объединение $k-1$ интервалов сетки из $\hat{\mathcal{J}}_{n_\Gamma+1}$, причем конечная точка V^- по часовой стрелке совпадает с конечной точкой V по часовой стрелке. Далее, даем те же оценки для второй суммы и, наконец, используя лемму 5.4 для обоих направлений, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} |a_n| \|\hat{f}_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &\lesssim_{k,\gamma} \sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{q}^\ell \sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ d_n^\wedge(V^+) = \ell, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{|\hat{J}_n|}{\text{dist}^\wedge(V^+, \hat{J}_n) + |V^+|} \\ &+ \sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{q}^\ell \sum_{\substack{n \geq \max\{n_\Gamma+1, N(k)\}, \\ d_n^\wedge(V^-) = \ell, \\ \hat{J}_n \subset \tilde{V}^c}} \frac{|\hat{J}_n|}{\text{dist}^\wedge(V^-, \hat{J}_n) + |V^-|} \lesssim_{k,\gamma} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1)^2 \hat{q}^\ell \lesssim_k 1. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства, заметим, что если $f \in H^1(\mathbb{T})$ и $f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m$ — атомное разложение f , то $\langle f, \hat{f}_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \langle \phi_m, \hat{f}_n \rangle$, и $Sf(t) \leq \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| S\phi_m(t)$. $\square$

Наконец, обсудим $(B) \Rightarrow (C)$.

Предложение 6.3 $((B) \Rightarrow (C))$. Пусть (s_n) k -допустимая последовательность узлов на торе $\mathbb{T}$, удовлетворяющая условию k -регулярности с параметром γ , и пусть $(a_n)_{n \geq N(k)}$ — последовательность коэффициентов такая, что $M \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда существует функция $f \in H^1(\mathbb{T})$ такая, что $a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle$ для каждого $n \geq N(k)$. Более того, имеем неравенство

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} \|Mf\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Доказательство. Во-первых, пусть $a_n := 0$ для всех $n < N(k)$. Тогда,

$$M = \sup_m \left| \sum_{n=N(k)}^m a_n \hat{f}_n \right| = \sup_m \left| \sum_{n=1}^m a_n \hat{f}_n \right|.$$

Очевидно, что $M \in L^1(\mathbb{T})$. Следовательно, существует функция $f \in L^1(\mathbb{T})$ такая, что $f = \sum_{n \geq 1} a_n \hat{f}_n$ со сходимостью в $L^1(\mathbb{T})$. Действительно, это является следствием относительной слабой компактности равномерно интегрируемых подмножеств в $L^1(\mathbb{T})$ и свойства базисности $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$ в $L^1(\mathbb{T})$ (см. [18]). Таким образом, нам нужно только доказать, что $f \in H^1(\mathbb{T})$, которое делается путем нахождения подходящего атомного разложения f .

Определим $E_0 = B_0 = \mathbb{T}$ и для $r \geq 1$

$$(6.5) \quad E_r = [M > 2^r], \quad B_r = [\hat{M} \mathbb{1}_{E_r} > c_{k,\gamma}],$$

где $\hat{M}$ обозначает периодическую максимальную функцию Харди-Литтлвуда, а $0 < c_{k,\gamma} \leq 1/2$ — малая постоянная, зависящая только от k и γ , которая выбирается с учетом некоторых ограничений, о чем будем говорить в ходе доказательства. Заметим, что

$$\hat{M} \mathbb{1}_{E_r}(t) = \sup_{I \ni t} \frac{|I \cap E_r|}{|I|}, \quad t \in \mathbb{T},$$

где верхняя грань берется по всем интервалам, содержащим точку t .

Поскольку периодический максимальный оператор Харди-Литтлвуда $\hat{M}$ имеет слабый тип $(1, 1)$, имеем неравенство $|B_r| \lesssim_{k,\gamma} |E_r|$. Ввиду того, что $M \in L^1(\mathbb{T})$, $|E_r| \rightarrow 0$ имеем $|B_r| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Теперь, разложим открытое множество B_r на счетное объединение непересекающихся открытых интервалов.

$$B_r = \bigcup_{\kappa} \Gamma_{r,\kappa},$$

где при фиксированном r никакие два интервала $\Gamma_{r,\kappa}$ не имеют общей конечной точки и приведенное выше равенство справедливо с точностью до множества меры нуль (каждое открытое множество действительных чисел можно разложить в счетное объединение открытых интервалов, но может случиться так, что два интервала имеют одну и ту же конечную точку. В этом случае мы объединяем эти два интервала в один $\Gamma_{r,\kappa}$).

Более того, заметим, что если $\Gamma_{r+1,\xi}$ — один из интервалов разложения B_{r+1} , то существует интервал $\Gamma_{r,\kappa}$ в разложении B_r такой, что $\Gamma_{r+1,\xi} \subset \Gamma_{r,\kappa}$.

На основе этого разложения, для $r \geq 0$ определим следующую функцию:

$$g_r(t) := \begin{cases} f(t), & t \in B_r^c, \\ \frac{1}{|\Gamma_{r,\kappa}|} \int_{\Gamma_{r,\kappa}} f(x) dx, & t \in \Gamma_{r,\kappa}. \end{cases}$$

Заметим, что $f = g_0 + \sum_{r=0}^\infty (g_{r+1} - g_r)$ в $L^1(\mathbb{T})$ и $g_{r+1} - g_r = 0$ на B_r^c . Отсюда

$$(6.6) \quad \int_{\Gamma_{r,\kappa}} g_{r+1}(t) dt = \int_{\Gamma_{r,\kappa} \cap B_{r+1}^c} g_{r+1}(t) dt + \int_{\Gamma_{r,\kappa} \cap B_{r+1}} g_{r+1}(t) dt$$

$$(6.7) \quad = \int_{\Gamma_{r,\kappa} \cap B_{r+1}^c} f(t) dt + \sum_{\xi: \Gamma_{r+1}, \xi \subset \Gamma_{r,\kappa}} \int_{\Gamma_{r+1}, \xi} f(t) dt$$

$$(6.8) \quad = \int_{\Gamma_{r,\kappa}} f(t) dt = \int_{\Gamma_{r,\kappa}} g_r(t) dt.$$

Основной шаг доказательства – показать, что

$$(6.9) \quad |g_r(t)| \leq C_{k,\gamma} 2^r, \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{T}$$

для некоторой константы $C_{k,\gamma}$, зависящей только от k и γ . Как только это неравенство будет доказано, возьмем $\phi_0 \equiv 1$, $\eta_0 = \int_{\mathbb{T}} f(u) du$ и

$$\phi_{r,\kappa} := \frac{(g_{r+1} - g_r) \mathbb{1}_{\Gamma_{r,\kappa}}}{3C_{k,\gamma} 2^r |\Gamma_{r,\kappa}|}, \quad \eta_{r,\kappa} = 3C_{k,\gamma} 2^r |\Gamma_{r,\kappa}|$$

и заметим, что $f = \eta_0 \phi_0 + \sum_{r,\kappa} \eta_{r,\kappa} \phi_{r,\kappa}$ – это искомое атомное разложение f , поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{r,\kappa} \eta_{r,\kappa} &\leq C_{k,\gamma} \sum_{r,\kappa} 2^r |\Gamma_{r,\kappa}| = C_{k,\gamma} \sum_r 2^r |B_r| \\ &\lesssim_{k,\gamma} \sum_r 2^r |E_r| \lesssim \|M\|_{L^1(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Таким образом, осталось доказать неравенство (6.9).

Для этого сначала предположим, что $t \in B_r^c$. Кроме того, предположим, что t – такая точка, что ряд $\sum_n a_n \hat{f}_n(t)$ сходится к $f(t)$ и что t не встречается в последовательности точек сетки (s_n) . По теореме 3.2 это справедливо для п.в. точек из $\mathbb{T}$. Зафиксируем индекс m и обозначим V_m максимальный интервал, на котором функция $M_m := \sum_{n \leq m} a_n \hat{f}_n$ является полиномом порядка k , содержащим точку t . Тогда $V_m \not\subset B_r$ и поскольку V_m – интервал, содержащий точку t , то

$$|V_m \cap E_r^c| \geq (1 - c_{k,\gamma}) |V_m| \geq |V_m|/2.$$

Поскольку $|M_m| \leq 2^r$ на E_r^c , то из вышеуказанного неравенства и предложения 3.1 следует, что $|M_m| \lesssim_k 2^r$ на V_m и, в частности, $|M_m(t)| \lesssim_k 2^r$. Теперь $M_m(t) \rightarrow f(t)$ при $m \rightarrow \infty$ согласно предположениям относительно t и, таким образом,

$$|g_r(t)| = |f(t)| \lesssim_k 2^r.$$

На этом доказательство (6.9) в случае $t \in B_r^c$ завершается.

Пусть теперь $\mathbb{T}$ канонически отождествляется с $[0, 1)$. Далее фиксируем индекс κ и рассмотрим g_r на $\Gamma := \Gamma_{r,\kappa}$. Пусть n_Γ – первый индекс для которой существуют $k+1$ точек из $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma}$, содержащихся в Γ , т.е. существует носитель $T_{n_\Gamma, i}^{(k)}$

периодической В-сплайн-функции порядка k в сетке $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma}$, содержащейся в Γ . Дополнительно определим интервалы

$$U_0 := T_{n_\Gamma, i-k}^{(k)}, \quad W_0 := T_{n_\Gamma, i+k}^{(k)}.$$

Ввиду k -регулярности последовательности (s_n) на торе $\mathbb{T}$, имеем $\max(|U_0|, |W_0|) \lesssim_{k,\gamma} |\Gamma|$. Сначала оценим часть $M_\Gamma := \sum_{n \leq n_\Gamma} a_n \hat{f}_n$ и докажем неравенство $|M_\Gamma| \lesssim_{k,\gamma} 2^r$ на Γ . Заметим, что M_Γ можно представить на множестве $\Delta := U_0 \cup \Gamma \cup W_0$ в следующем виде

$$M_\Gamma(t) = h(t) := \sum_{j=i-2k+1}^{i+2k-1} b_j \hat{N}_j(t),$$

для некоторых коэффициентов (b_j) , то есть как линейную комбинацию периодических В-сплайнов $(\hat{N}_j)$ на сетке $\hat{\mathcal{T}}_{n_\Gamma}$.

Пусть $\hat{I}_j$ — максимальный интервал $\text{supp } \hat{N}_j$, для $j = i - 2k + 1, \dots, i + 2k - 1$ и из-за k -регулярности на торе $\mathbb{T}$, заметим, что $|\hat{I}_j| \sim_{k,\gamma} |\Gamma| \sim_{k,\gamma} |\text{supp } h|$.

Если предположить, что $\max_{\hat{I}_j} |M_\Gamma| > C_k 2^r$, где C_k — постоянная из предложения 3.1 с $\rho = 1/2$, то из предложения 3.1 следует, что $|M_\Gamma| > 2^r$ на подмножестве Q_j множества $\hat{I}_j$ с мерой $\geq |\hat{I}_j|/2$. Как следствие, имеем

$$|\text{supp } h \cap E_r| \geq |\hat{I}_j \cap E_r| \geq |\hat{I}_j|/2 \gtrsim_{k,\gamma} |\text{supp } h|.$$

В определении B_r выбираем константу $c_{k,\gamma}$ достаточно малой, чтобы из последнего неравенства следовало $\text{supp } h \subset B_r$. Это противоречит выбору Γ , из которого следует, что наше предположение $\max_{\hat{I}_j} |M_\Gamma| > C_k 2^r$ неверно и, следовательно,

$$\max_{\hat{I}_j} |M_\Gamma| \leq C_k 2^r, \quad j = i - 2k + 1, \dots, i + 2k - 1.$$

В силу локальной устойчивости периодических В-сплайнов, т.е. неравенства (3.4) из предложения 3.3, следует

$$|b_j| \lesssim_k 2^r, \quad j = i - 2k + 1, \dots, i + 2k - 1,$$

и поэтому $|M_\Gamma| \lesssim_k 2^r$ на Δ . Это означает

$$(6.10) \quad \int_\Gamma |M_\Gamma| \lesssim_k 2^r |\Gamma|,$$

что является неравенством (6.9) для части M_Γ .

Чтобы оценить оставшуюся часть, мы индуктивно определим две последовательности $(u_s, U_s)_{s \geq 0}$ и $(w_s, W_s)_{s \geq 0}$, состоящие из целых чисел и интервалов. Положим $u_0 = w_0 = n_\Gamma$ и индуктивно определим u_{s+1} как первый индекс $n > u_s$

такой, что $s_n \in U_s$. Более того, определим U_{s+1} как периодический носитель В-сплайна $T_{u_{s+1},i}^{(k)}$ в сетке $\hat{\mathcal{T}}_{u_{s+1}}$, где индекс i такой, что $\Gamma \cap U_{s+1}$ содержит только один узел из $(s_j)_{j=1}^n$ (без учёта кратностей) и это конечная точка U_{s+1} по часовой стрелке.

Аналогично определим w_{s+1} как первый индекс $n > w_s$ такой, что $s_n \in W_s$ и W_{s+1} - как периодический В-сплайн носитель $T_{w_{s+1},i}^{(k)}$ в сетке $\hat{\mathcal{T}}_{w_{s+1}}$, где индекс i такой, что $\Gamma \cap W_{s+1}$ содержит только один узел из $(s_j)_{j=1}^n$ (без учета кратностей) и является конечной точкой W_{s+1} против часовой стрелки.

После такого построения интервалов возьмем пару индексов ℓ, m и положим

$$x_\ell := \sum_{\nu=0}^{k-1} \hat{N}_{u_\ell, i+\nu} \mathbb{1}_{U_\ell}, \quad y_m := \sum_{\nu=0}^{k-1} \hat{N}_{w_m, j-\nu} \mathbb{1}_{W_m},$$

где $\hat{N}_{u_\ell, i}$ — периодическая В-сплайн-функция на сетке $\hat{\mathcal{T}}_{u_\ell}$ с носителем U_ℓ и $\hat{N}_{w_m, j}$ — периодическая В-сплайн-функция на сетке $\hat{\mathcal{T}}_{w_m}$ с носителем W_m . Функция

$$\phi_{\ell, m} := x_\ell + \mathbb{1}_{\Gamma \setminus (U_\ell \cup W_m)} + y_m$$

равна нулю на $(U_\ell \cup \Gamma \cup W_m)^c$, единице на $\Gamma \setminus (U_\ell \cup W_m)$ и кусочно-полиномиальная функция порядка k между ними. Для $\ell, m \geq 0$ рассмотрим следующие подмножества из $\{n : n > n_\Gamma\}$:

$$L(\ell) := \{n : u_\ell < n \leq u_{\ell+1}\}, \quad R(m) := \{n : w_m < n \leq w_{m+1}\}.$$

Если $n \in L(\ell) \cap R(m)$, мы, очевидно, имеем $\langle \hat{f}_n, \phi_{\ell, m} \rangle = 0$ и, следовательно,

$$(6.11) \quad \int_\Gamma \hat{f}_n(t) dt = \int_\Gamma \hat{f}_n(t) dt - \int_\Gamma \hat{f}_n(t) \phi_{\ell, m}(t) dt = A_\ell(\hat{f}_n) + B_m(\hat{f}_n),$$

где

$$(6.12) \quad A_\ell(\hat{f}_n) := \int_{\Gamma \cap U_\ell} \hat{f}_n(t) dt - \int_{U_\ell} \hat{f}_n(t) x_\ell(t) dt,$$

$$(6.13) \quad B_m(\hat{f}_n) := \int_{\Gamma \cap W_m} \hat{f}_n(t) dt - \int_{W_m} \hat{f}_n(t) y_m(t) dt.$$

Из этого следует

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \left| \int_\Gamma \sum_{n=n_\Gamma+1}^\infty a_n \hat{f}_n(t) dt \right| &= \left| \sum_{\ell, m=0}^\infty \sum_{n \in L(\ell) \cap R(m)} a_n (A_\ell(\hat{f}_n) + B_m(\hat{f}_n)) \right| \\ &\leq 2 \sum_{\ell=0}^\infty \int_{U_\ell} \left| \sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n(t) \right| dt + 2 \sum_{m=0}^\infty \int_{W_m} \left| \sum_{n \in R(m)} a_n \hat{f}_n(t) \right| dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим первую сумму в правой части. На $U_\ell = T_{u_\ell, i}^{(k)}$ функция $\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n$ может быть представлена в виде линейной комбинации периодических В-сплайнов

$(\hat{N}_j)$ на сетке $\hat{\mathcal{T}}_{u_\ell}$ следующим образом

$$\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n = h_\ell := \sum_{j=i-k+1}^{i+k-1} b_j \hat{N}_j,$$

для некоторых коэффициентов (b_j) . Пусть $\hat{I}_j$ — максимальный интервал сетки $\text{supp } \hat{N}_j$ для $j = i - k + 1, \dots, i + k - 1$. Заметим, что из-за k -регулярности на торе $\mathbb{T}$, $|\hat{I}_j| \sim_{k,\gamma} |U_\ell| \sim_{k,\gamma} |\text{supp } h_\ell|$. На $\hat{I}_j$ функция $\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n$ является полиномом порядка k . Если мы предположим, что $\max_{\hat{I}_j} |\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n| > C_k 2^{r+1}$, где C_k — постоянная из предложения 3.1 с $\rho = 1/2$, то тогда из предложения 3.1 следует, что $|\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n| > 2^{r+1}$ на множестве $\hat{I}_j^* \subset \hat{I}_j$ с $|\hat{I}_j^*| = |\hat{I}_j|/2$, но это означает, что $\max(|\sum_{n \leq u_\ell} a_n \hat{f}_n|, |\sum_{n \leq u_{\ell+1}} a_n \hat{f}_n|) > 2^r$ на множестве $\hat{I}_j^*$. Как следствие,

$$|E_r \cap \text{supp } h_\ell| \geq |E_r \cap \hat{I}_j| \geq |\hat{I}_j^*| \geq |\hat{I}_j|/2 \gtrsim_k |\text{supp } h_\ell|.$$

В определении B_r выбираем константу $c_{k,\gamma}$ достаточно малой, чтобы из последнего неравенства следовало $\text{supp } h_\ell \subset B_r$. Это противоречит выбору Γ , из которого следует, что наше предположение $\max_{\hat{I}_j} |\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n| > C_k 2^r$ неверно и, следовательно,

$$\max_{\hat{I}_j} \left| \sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n \right| \leq C_k 2^r, \quad j = i - k + 1, \dots, i + k - 1.$$

В силу локальной устойчивости периодических В-сплайнов, т.е. неравенства (3.4) из предложения 3.3, следует

$$|b_j| \lesssim_k 2^r, \quad j = i - k + 1, \dots, i + k - 1,$$

и поэтому $|\sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n| \lesssim_k 2^r$ на U_ℓ , что дает

$$\int_{U_\ell} \left| \sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n \right| \lesssim_k 2^r |U_\ell|.$$

Объединив лемму 3.2, включения $U_{\ell+1} \subset U_\ell$ и неравенство $|U_0| \lesssim_{k,\gamma} |\Gamma|$, получаем, что $\sum_{\ell=0}^\infty |U_\ell| \lesssim_{k,\gamma} |\Gamma|$. Таким образом, имеем

$$\sum_{\ell=0}^\infty \int_{U_\ell} \left| \sum_{n \in L(\ell)} a_n \hat{f}_n \right| \lesssim_{k,\gamma} 2^r |\Gamma|.$$

Вторая сумма в правой части (6.14) оценивается аналогично, что дает

$$\sum_{m=0}^\infty \int_{W_m} \left| \sum_{n \in R(m)} a_n \hat{f}_n \right| \lesssim_{k,\gamma} 2^r |\Gamma|.$$

Объединив эти оценки с (6.14) и (6.10), мы приходим к

$$\left| \int_{\Gamma} f(t) dt \right| = \left| \int_{\Gamma} \sum_n a_n \hat{f}_n(t) dt \right| \lesssim_{k,\gamma} 2^r |\Gamma|,$$

откуда следует (6.9) на Γ и, следовательно, доказательство предложения завершено. $\square$

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Доказательство теоремы 2.4 теперь можно получить по той же цепочке рассуждений, что и доказательство достаточности теоремы 2.4 в [14], но мы приводим его здесь для полноты доказательства.

Доказательство теоремы 2.4. Если (s_n) $(k-1)$ -регулярна на торе $\mathbb{T}$, то нетрудно проверить, что она k -регулярна и на торе $\mathbb{T}$. Как следствие, из теоремы 2.3 имеем, что $(\hat{f}_n)$ является базисом в $H^1(\mathbb{T})$. Пусть $f \in H^1(\mathbb{T})$ с разложением $f = \sum a_n \hat{f}_n$ и $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Нам нужно доказать сходимость ряда $\sum \varepsilon_n a_n \hat{f}_n$ в $H^1(\mathbb{T})$. Пусть $N(k) \leq m_1 \leq m_2$, тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=m_1}^{m_2} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} &\lesssim_{k,\gamma} \left\| M \left(\sum_{n=m_1}^{m_2} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_k \left\| S \left(\sum_{n=m_1}^{m_2} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &= \left\| S \left(\sum_{n=m_1}^{m_2} a_n \hat{f}_n \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} \left\| \sum_{n=m_1}^{m_2} a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

Здесь мы использовали Предложения 6.3, 6.1 и 6.2 соответственно (см. также изображение на странице 24). Итак, поскольку $\sum a_n \hat{f}_n$ сходится в $H^1(\mathbb{T})$, то сходится также $f_\varepsilon := \sum \varepsilon_n a_n \hat{f}_n$. Кроме того, имеем следующую оценку

$$\|f_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{T})} \lesssim_{k,\gamma} \|f\|_{H^1(\mathbb{T})}.$$

Чтобы получить это, сначала заметим, что

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{T})} &= \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n + \sum_{n=N(k)}^{\infty} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} + \left\| \sum_{n=N(k)}^{\infty} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} \\ &\lesssim_{k,\gamma} \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} + \left\| \sum_{n=N(k)}^{\infty} a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} + \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} a_n \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} + \|f\|_{H^1(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство треугольника и аналогичный приведенному выше аргумент, для перехода от второй строки к третьей. Напомним, что $a_n = \langle f, \hat{f}_n \rangle$, тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{N(k)-1} \varepsilon_n \langle f, \hat{f}_n \rangle \hat{f}_n \right\|_{H^1(\mathbb{T})} &\leq \sum_{n=1}^{N(k)-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|\hat{f}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|\hat{f}_n\|_{H^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \|f\|_{H^1(\mathbb{T})} \sum_{n=1}^{N(k)-1} \|\hat{f}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|\hat{f}_n\|_{H^1(\mathbb{T})} \lesssim_k \|f\|_{H^1(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $(\hat{f}_n)$ является безусловным базисом в $H^1(\mathbb{T})$. $\square$

Abstract. We give a geometric characterization of knot sequences (s_n) , for which the corresponding periodic orthonormal spline system of arbitrary order k , $k \in \mathbb{N}$, is an unconditional basis in the atomic Hardy space on the torus $H^1(\mathbb{T})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. V. Bočkarëv, “Some inequalities for Franklin series”, *Anal. Math.*, **1** no. 4, 249 – 257 (1975).
- [2] W. Böhm, “Inserting new knots into B-spline curves”, *Computer-Aided Design*, **12**, no. 4, 199 – 201 (1980).
- [3] S. - Y. A. Chang and Z. Ciesielski, “Spline characterization of H^1 ”, *Studia Math.* **75**, 183 – 192 (1983).
- [4] Z. Ciesielski, “Equivalence, unconditionality and convergence a.e. of the spline bases in L_p spaces”, In *Approximation theory (Papers, VIth Semester, Stefan Banach Internat. Math. Center, Warsaw, 1975)*, Banach Center Publ., **4**, 55 – 68, PWN, Warsaw (1979).
- [5] Z. Ciesielski, “Orthogonal projections onto spline spaces with arbitrary knots”, *Function spaces (Poznań, 1998)*, Pure and Appl. Math., Lecture Notes, **213**, 133 – 140, Dekker, New York (2000).
- [6] R. R. Coifman and G. Weiss, “Extension of Hardy spaces and their use in analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83**, 569 – 645 (1977).
- [7] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Grundlehren Math. Wiss. **303**, Springer, Berlin (1993).
- [8] J. Domsta, “A theorem on B-splines. II. The periodic case”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **24**, 1077 – 1084 (1976).
- [9] Г. Г. Геворкян, “Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов Франклина и их применение к пространствам $\text{Re}H^p$ ”, *Труды Математического института имени ВА Стеклова*, **190**, 49 – 74 (1989).
- [10] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, *On General Franklin Systems*, *Dissertationes Math.* **374**, 59 pages (1998).
- [11] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *Studia Math.*, **374**, 1 – 59 (1998).
- [12] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “General Franklin systems as bases in $H^1[0, 1]$ ”, *Studia Math.* **167**, 259 – 292 (2005).
- [13] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “Orthonormal spline systems with arbitrary knots as bases in $H^1[0, 1]$ ”, *East J. Approx.* **14**, 161 – 182 (2008).
- [14] G. Gevorkyan, A. Kamont, K. Keryan and M. Passenbrunner, “Unconditionality of orthogonal spline systems in $H^1[0, 1]$ ”, *Studia Mathematica*, **226**, no. 2, 123 – 154 (2015).

- [15] G. G. Gevorkyan and A. A. Sahakyan, “Unconditional basis property of general Franklin systems”, *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, **35**, no. 4, 7 – 25 (2000).
- [16] L. Hakobyan and K. Keryan, “Periodic orthonormal spline systems with arbitrary knots as basis in $H^1(\mathbb{T})$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **58**, no. 1, 33 – 42 (2023).
- [17] K. Keryan, “Unconditionality of general periodic spline systems in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **40**, no. 1, 13 – 55 (2005).
- [18] K. Keryan and M. Passenbrunner, “Unconditionality of periodic orthonormal spline systems in L^p ”, *Studia Mathematica*, **248**, no. 1, 57 – 91 (2019).
- [19] M. Passenbrunner, “Unconditionality of orthogonal spline systems in L^p ”, *Studia Math.*, **222**, no. 1, 51 – 86 (2014).
- [20] M. Passenbrunner, “Orthogonal projectors onto spaces of periodic splines”, *Journal of Complexity*, **42**, 85 – 93 (2017).
- [21] M. Passenbrunner and A. Shadrin, “On almost everywhere convergence of orthogonal spline projections with arbitrary knots”, *J. Approximation Theory*, **180**, 77 – 89 (2014).
- [22] M. P. Poghosyan and K. A. Keryan, “General periodic Franklin system as a basis in $H^1[0, 1]$ ”, *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, **40**, 56 – 79 (2005).
- [23] A. Shadrin, “The L_∞ -norm of the L_2 -spline projector is bounded independently of the knot sequence: a proof of de Boor’s conjecture”, *Acta Math.*, **187**, no. 1, 59 – 137 (2001).
- [24] P. Sjölin and J. O. Strömberg, “Basis properties of Hardy spaces”, *Ark. Mat.* **21**, 111 – 125 (1983).

Поступила 02 февраля 2024

После доработки 02 февраля 2024

Принята к публикации 12 февраля 2024

ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИНЫ С ЗАДЕРЖКОЙ ПЕРЕМЕННЫХ НА $\mathbb{R}^n$

С. ВАНГ, К. МА

Университет Лундонг, Цинъян, Китай*

Северо-Западный педагогический университет, Ланьчжоу, Китай

E-mails: *shwangsp@163.com; maqzh@nwnu.edu.cn*

Аннотация. Динамика решений уравнения пластины без эффектов задержки исследовалась многими авторами. Но работ по уравнению пластины с запаздывающими переменными в неограниченной области мало. Поэтому мы рассматриваем существование аттрактора обратного хода для уравнения пластины с переменной задержкой на $\mathbb{R}^n$ с использованием теории многозначных динамических систем.

MSC2020 numbers: 35B40; 35B41; 37B55.

Ключевые слова: уравнение пластины; обратный аттрактор; неограниченная область; многозначная динамическая система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения в частных производных с запаздыванием всегда играют важную роль в моделировании самых разнообразных явлений, таких как вязкоупругость, взаимодействие биологических видов, нейронные сети и многие другие области. С точки зрения математики мы в основном фокусируемся на корректности и динамическом поведении решений функционально-дифференциальных уравнений в частных производных, см., например, [1-5] и ссылки там. Авторы в [3,4] исследовали модели, в которых форсирующий член содержит некоторые наследственные особенности. Такие ситуации могут возникнуть, например, когда мы хотим управлять системой посредством применения силы, которая учитывает не только нынешнее состояние, но и историческое состояние системы. В последние годы теория многозначных динамических систем исследовалась в [6-12]. Марьин-Рубио и Реаль [7] использовали теорию многозначных динамических систем для получения существования аттракторов для двумерных уравнений Навье-Стокса с задержками, когда вынуждающий член, содержащий задержку, является только непрерывным и сублинейным.

*Работа частично поддержана NSFC (11961059,12161071), Фондом естественных наук провинции Ганьсу (22JR11RM165), Инновационным фондом высшего образования провинции Ганьсу (2021B-270).). Финансирование докторских исследований Университета Лундонг (XYVYZK2112,XYVYZK2113).

Уравнение пластины происходит из теории уравнения упругих колебаний, установленной Войновским Кригером и Бергером [13,14] и т. д., а динамику уравнения пластины без задержек можно найти в [15-19]. Например в [15], Ян и Чжун получили существование глобального аттрактора для уравнения автономной пластины с нелинейным затуханием. Они также исследовали существование однородного аттрактора для уравнения неавтономной пластины с локализованным затуханием в [16]. В случае неограниченной области асимптотическое поведение уравнения пластины без задержек изучалось Ханмамедовым [17,18] и Сяо [19]. Недавно Монсеф Ауади в [20] рассмотрел глобальные и экспоненциальные аттракторы для растяжимой термоупругой пластины с зависящей от времени задержкой внутренней обратной связи, используя оценки неравенства устойчивости. Однако имеется мало работ об уравнении пластины с запаздыванием в неограниченной области и без единственности решения. Поэтому мы стремимся обратиться к следующему неавтономному уравнению пластины с запаздывающими переменными на $\mathbb{R}^n$, которое до сих пор еще не рассматривалось.

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_{tt}u + \alpha\partial_tu + \Delta^2u + \lambda u = f(x, u(t - \rho(t))) + g(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (\tau, +\infty), \\ u(x, t) = \varphi(x, t - \tau), & x \in \mathbb{R}^n, t \in [\tau - h, \tau], \\ \partial_tu(x, t) = \partial_t\varphi(x, t - \tau), & x \in \mathbb{R}^n, t \in [\tau - h, \tau], \end{cases}$$

где $\alpha > 0, \lambda > 0, h > 0, \tau$ — начальное время, φ — начальная база данных на интервале $[\tau - h, \tau]$. Исходный член f , содержащий некоторую наследственную характеристику и удовлетворяющий следующим условиям:

(I) существует функция $k_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $k_2 > 0$ такая, что $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\rho \in C^1(\mathbb{R}; [0, h])$ и

$$|f(x, \nu)|^2 \leq |k_1(x)|^2 + k_2^2|\nu|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

$$|\rho'(t)| \leq \rho^* < 1, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(II) $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ и

$$\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{\delta s} \|g(x, s)\|^2 dx ds < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0,$$

что подразумевает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t \int_{|x| \geq k} e^{\delta s} \|g(x, s)\|^2 dx ds = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0.$$

Обозначим C_X банахово пространство $C^0([-h, 0]; X)$, снабженное суп-нормой. Для элемента $\varphi \in C_X$, его норма запишется как $\|\varphi\|_{C_X} = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|_X$.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ — два банаховых пространства с непрерывным компактным вложением. $X \hookrightarrow Y$, $C_{X,Y}$ обозначает банахово пространство $C_X \cap$

$C^1([-h, 0]; Y)$. Для элемента $\varphi \in C_{X,Y}$ его норма запишется как

$$\|\varphi\|_{C_{X,Y}}^2 = \|\varphi\|_{C_X}^2 + \|\varphi'\|_{C_Y}^2, \quad \forall \varphi \in C_{X,Y}.$$

Не ограничивая общности, обозначим $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, наделённую скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$ соответственно. Для $0 \leq s \leq 2$ мы определяем иерархию вложенных гильбертовых пространств.

$$H^s = H^s(\mathbb{R}^n) = D(A^{\frac{s}{4}}), \quad (u, v)_s = (A^{\frac{s}{4}}u, A^{\frac{s}{4}}v), \quad \|u\|_s^2 = (A^{\frac{s}{4}}u, A^{\frac{s}{4}}u).$$

где $A = \Delta^2$. Также мы будем использовать пробелы $C_{\mathcal{H}}$ и $C_{\mathcal{W}}$ в нашем анализе, где $\mathcal{H} = H \times H^2$, $\mathcal{W} = H^1 \times H^3$. Дано $T \geq \tau$ и $u : [\tau - h, T) \rightarrow H$, для каждого $t \in [\tau, T]$, обозначим через u_t функция, определенная на $[-h, 0]$ формулой отношение $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

По сравнению с динамикой уравнения пластины без эффектов задержки, новая проблема, возникающая в этой статье, заключается в том, что мы выбираем фазовые пространства $C_{\mathcal{H}}$ и $C_{\mathcal{W}}$, которые не являются ни гильбертовыми пространствами, ни равномерными выпуклыми банаховыми пространствами. Таким образом, метод доказательства динамики уравнения пластины с запаздыванием неприменим. В то же время, если пространственная область неограничена, вложения $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{H}$ больше нет. Сначала мы используем технику декомпозиции и даем равномерные оценки как для хвостов, так и для ограниченных усечений решений, затем показываем, что процесс $\{U(t, \tau)\}$ является $\mathcal{D}$ -поглощающим асимптотически сверху. -полукомпактный, наконец, установлено существование обратного аттрактора для уравнения пластины с запаздыванием в $\mathbb{R}^n$ с помощью теории многозначной динамической системы.

Структура этой статьи следующая. В разделе 2 мы повторяем некоторые абстрактные результаты о многозначных процессах. В разделе 3 установлено существование решения системы (1.1). Наконец, мы доказываем обратные аттракторы в $C_{\mathcal{H}}$, используя теорию многозначных динамических систем для уравнения пластины с переменным запаздыванием на $\mathbb{R}^n$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе мы повторим некоторые полезные леммы и абстрактные результаты (см. [6-8,10-12]).

Пусть X — полное метрическое пространство с метрикой $d_X(\cdot, \cdot)$, обозначим через $H_X^*(\cdot, \cdot)$ хаусдорфовое расстояние на полурасстоянии между двумя непустыми подмножествами X , определяемыми формулой

$$H_X^*(A, B) = \sup_{a \in A} \text{dist}_X(a, B)$$

где $dist_X(a, B) = \inf_{b \in B} d_X(a, b)$, и обозначим $\mathcal{N}(A, r)$ открытую окрестность $\{y \in X | dist_X(y, A) < r\}$ радиуса $r > 0$ подмножества A множества X .

Пусть $\mathcal{D}$ — непустой класс параметризованных множеств $\hat{D} = \{D(t); t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X)$, и $\mathcal{P}(X)$ — класс непустых замкнутых подмножеств X .

Определение 2.1. Семейство отображений $U(t, \tau) : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, называется многозначным процессом, если он удовлетворяет:

- (1) $U(\tau, \tau)x = \{x\}$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $x \in X$;
- (2) $U(t, s)U(s, \tau)x = U(t, \tau)x$, $\forall t \geq s \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

Определение 2.2. Совокупность $\mathcal{D}$ некоторых семейств непустых замкнутых подмножеств X называется окрестностно замкнутой, если для каждого $\hat{D} = \{D(t); t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ существует $\varepsilon > 0$, зависящий от $\hat{D}$, такой, что семейство $\{B(t) : B(t) \text{ — непустое замкнутое подмножество } \mathcal{N}(D(t), \varepsilon), \forall t \in \mathbb{R}\}$ также принадлежат $\mathcal{D}$.

Обратите внимание, что из замкнутого подмножества окрестности $\mathcal{D}$ следует для каждого $\hat{D} \in \mathcal{D}$, $\{\bar{D}(t) : \bar{D}(t) \text{ — непустое замкнутое подмножество } D(t), \forall t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$, а также набор $\mathcal{D}$ называется замкнутым по включению.

Определение 2.3. Пусть $\{U(t, \tau)\}$ — многозначный процесс на X .

(1) $\mathcal{Q} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ называется $\mathcal{D}$ –множеством обратного поглощения для $\{U(t, \tau)\}$, если для любого $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ и для каждого $t \in \mathbb{R}$, существует $t_0 = t_0(\mathcal{B}, t) \in \mathbb{R}^+$ такой, что

$$U(t, t-s)B(t-s) \subset Q(t), \quad \forall s \geq t_0.$$

(2) $\{U(t, \tau)\}$ называется $\mathcal{D}$ –образом, асимптотически полукompактным сверху в X относительно $\mathcal{B}$, если для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$, любая последовательность $y_n \in S(t, t-s_n)x_n$ имеет сходящуюся подпоследовательность в X всякий раз, когда $s_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), $x_n \in B(t-s_n)$ с $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$.

Определение 2.4. Семейство непустого компактного подмножества $\mathcal{A} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ называется $\mathcal{D}$ –обратным аттрактором для многозначного процесса $\{U(t, \tau)\}$, если он удовлетворяет следующим условиям

- (1) $\mathcal{A} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ инвариант, т. е.

$$U(t, \tau)A(\tau) = A(t), \quad \forall t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R};$$

(2) $\mathcal{A}$ притягивает каждый член $\mathcal{D}$, то есть для каждого $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ и любые фиксированные $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} H_X^*(U(t, t-s)B(t-s), A(t)) = 0$$

Теорема 2.1. Пусть $\{U(t, \tau)\}$ — многозначный процесс в банаховом пространстве X , и пусть $\mathcal{Q} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — $\mathcal{D}$ —поглощающее множество для $\{U(t, \tau)\}$ в $\mathcal{D}$. Предположим что U можно записать как

$$U(t, \tau) = U_1(t, \tau) + U_2(t, \tau), \quad \forall t \geq \tau,$$

и для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$, (1) $\lim_{s \rightarrow \infty} \|U_2(t, t-s)Q(t-s)\|_X = 0$;

(2) для любого фиксированного $s > 0$ каждая последовательность $y_n \in U_1(t, t-s)Q(t-s)$ является последовательностью Коши в X .

Тогда $\{U(t, \tau)\}$ является $\mathcal{D}$ —поглощающим асимптотически полукompактным сверху в X .

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{D}$ — замкнутая по включению совокупность некоторых семейств непустых замкнутых подмножеств X и $\{U(t, \tau)\}$ — многозначный процесс на X . Также U имеет замкнутые значения и пусть $U(t, \tau)x$ полунепрерывен сверху по x при фиксированном $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\{U(t, \tau)\}$ равно $\mathcal{D}$ —поглощающим асимптотически полукompактным сверху в X , $\{U(t, \tau)\}$ имеет $\mathcal{D}$ —поглощающее множество $\mathcal{Q} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ в $\mathcal{D}$ и $Q(t)$ замкнуто для любого $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{D}$ —обратный аттрактор $\mathcal{A} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ равен уникален и задается

$$A(t) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq T} U(t, t-s)Q(t-s)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. КОРРЕКТНОСТЬ

Теорема 3.1. Предположим, что (I)-(II) верны. Тогда для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ и любого $\varphi \in C_{\mathcal{H}}$ существует решение $u(t)$ задачи (1.1) и $u(t)$ удовлетворяет

$$u \in C([\tau - h, T]; H^2) \cap C^1([\tau - h, T]; H), \quad \forall T > \tau.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим следующую задачу в ограниченной области

$$\begin{cases} \partial_{tt}u + \alpha \partial_t u + Au + \lambda u = f(x, u(t - \rho(t))) + g(x, t), & x \in \Omega_{2k}, \quad t > \tau, \\ u(x, t)|_{\partial\Omega_{2k}} = 0, & t > \tau, \\ u(x, t) = \varphi_{2k}(x, t - \tau), \partial_t u(x, t) = \partial_t \varphi(x, t - \tau), & x \in \Omega_{2k}, \quad t \in [\tau - h, \tau], \end{cases}$$

где $k > 0$, $\Omega_{2k} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2k\}$, $\varphi_{2k}(x, t) = \varphi(x, t)\eta(\frac{|x|^2}{k^2})$, для каждого $t \in [-h, 0]$ и η — обрезающая функция в теореме 4.1, $H_{2k} = L^2(\Omega_{2k})$ и $V_{2k} = H^2(\Omega_{2k})$.

Мы предполагаем, что существует семейство собственных функций χ_i оператора A , которое является ортогональным базисом H_{2k} . Мы рассматриваем подпространство V_{2km} V_{2k} и $V_m = \text{span}\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m\}$. Для каждого m согласно основам теории обыкновенных дифференциальных уравнений существует

приближенное решение u_m вида

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m u_{mi} \chi_i$$

и это удовлетворяет

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u_m}{dt^2} + \alpha \frac{du_m}{dt} + P_m A u_m + \lambda u_m = P_m f(x, u_m(t - \rho(t))) + P_m g(t), \\ u_m(t) = P_m \varphi_{2k}(t - \tau), \quad t \in [\tau - h, \tau], \\ \frac{du_m(t)}{dt} = \frac{dP_m \varphi_{2k}(t - \tau)}{dt}, \quad t \in [\tau - h, \tau], \end{cases}$$

где $P_m : H_{2k} \rightarrow V_{2km}$ — ортогональный проектор в V_{2km} .

Скалярное произведение (3.1) в H с $v_m = \partial_t u_m + \beta u_m$, где $0 < \beta < 1, \alpha - \beta > 0$ и $2\beta(\alpha - \beta) < \lambda$, имеем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|v_m\|^2 + (1 - \beta) \|\Delta u_m\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m\|^2) \\ & + (\alpha - \beta) \|v_m\|^2 + \beta(1 - \beta) \|\Delta u_m\|^2 + \beta(\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m\|^2 + \|\Delta v_m\|^2 \\ & = (f(x, u_m(t - \rho(t))), v_m) + (g(t), v_m). \end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга и (I), мы получаем

$$(3.3) \quad |(f(x, u_m(t - \rho(t))), v_m)| \leq \frac{\alpha - \beta}{4} \|v_m\|^2 + \frac{k_2^2}{\alpha - \beta} \|u_m(t - \rho(t))\|^2 + \frac{|k_1|^2}{\alpha - \beta};$$

$$(3.4) \quad |g(t), v)| \leq \frac{\alpha - \beta}{4} \|v_m\|^2 + \frac{1}{\alpha - \beta} \|g(t)\|^2.$$

Подставляя (3.3) – (3.4) в (3.2), имеем

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|v_m\|^2 + (1 - \beta) \|\Delta u_m\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m\|^2) \\ & + (\alpha - \beta) \|v_m\|^2 + 2\beta(1 - \beta) \|\Delta u_m\|^2 + 2\beta(\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m\|^2 + 2\|\Delta v_m\|^2 \\ & \leq \frac{2k_2^2}{\alpha - \beta} \|u_m(t - \rho(t))\|^2 + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \beta} + \frac{2}{\alpha - \beta} \|g(t)\|^2. \end{aligned}$$

Интегрируя (3.5) от τ до t , получаем

$$\begin{aligned} & (\|v_m(t)\|^2 + (1 - \beta) \|\Delta u_m(t)\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m(t)\|^2) + (\alpha - \beta) \int_{\tau}^t \|v_m(r)\|^2 dr \\ & + 2\beta(1 - \beta) \int_{\tau}^t \|\Delta u_m(r)\|^2 dr + 2\beta(\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \int_{\tau}^t \|u_m(r)\|^2 dr + 2 \int_{\tau}^t \|\Delta v_m(r)\|^2 dr \\ & \leq (\|v_m(\tau)\|^2 + (1 - \beta) \|\Delta u_m(\tau)\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta)) \|u_m(\tau)\|^2) \\ & + \frac{2k_2^2}{\alpha - \beta} \int_{\tau}^t \|u_m(s - \rho(s))\|^2 ds + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \beta} (t - \tau) + \frac{2}{\alpha - \beta} \int_{\tau}^t \|g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Берем $s' = s - \rho(s)$. Замечая, что $\rho(s) \in [0, h]$ и $\frac{1}{1-\rho(s)} \leq \frac{1}{1-\rho^*}, \forall s \in \mathbb{R}$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t \|u_m(s - \rho(s))\|^2 ds &\leq \int_{\tau-h}^t \|u_m(s')\|^{2'} \\ &= \frac{1}{1-\rho^*} \left(\int_{\tau-h}^{\tau} \|u_m(s')\|^2 ds' + \int_{\tau}^t \|u_m(s')\|^2 ds' \right). \end{aligned}$$

Пусть $E_m(t) = \|v_m\|^2 + (1-\beta)\|\Delta u_m\|^2 + (\lambda - \beta(\alpha - \beta))\|u_m\|^2$. Итак, у нас есть

$$\begin{aligned} E_m(t) &\leq E_m(\tau) + \frac{2k_2^2}{(\alpha - \beta)(1 - \rho^*)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \beta} (t - \tau) \\ &\quad + \frac{2k_2^2}{(\alpha - \beta)(1 - \rho^*)} \int_{\tau}^t \|E_m(r)\|^2 dr + \frac{2}{\alpha - \beta} \int_{\tau}^t \|g(r)\|^2 dr. \end{aligned}$$

По лемме Гронуолла мы можем сделать вывод, что

$$(3.6) \quad \|v_m\|^2 + \|\Delta u_m\|^2 + \|u_m\|^2 \leq (\|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + (t - \tau) + \int_{\tau}^t \|g(r)\|^2 dr) e^{C(t-\tau)},$$

из (3.6) следует, что $\{u_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\frac{du_m(t)}{dt}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничены в пространствах $L^{\infty}(\tau - h, T; V_{2k})$ и $L^{\infty}(\tau - h, T; H_{2k}) \cap L^2(\tau, T; V_{2k})$, соответственно, при $n \rightarrow \infty$. Аналогично доказательству теоремы 4.1 в [21, раздел IV.4.4] стандартным рассуждением получаем существование слабых решений в $u \in C([\tau - h, T]; V_{2k}) \cap C^1([\tau - h, T]; H_{2k})$.

Поскольку $\{\Omega_{2k}\}$ — последовательность ограниченных подобластей $\mathbb{R}^n$ и $\Omega_{2k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $k \rightarrow \infty$. Существование слабых решений $u \in C([\tau - h, T]; H^2) \cap C^1([\tau - h, T]; H)$, ассоциированных с системой (1.1) получается. Мы также можем обратиться к [9,10].

Благодаря теореме 3.1 мы можем определить семейство многозначных процессов

$$U(t, \tau) : C_{\mathcal{H}} \rightarrow C_{\mathcal{H}}$$

и $U(t, \tau)\varphi = \{u_t(\cdot; \tau, \varphi) | u(\cdot)\}$ является решением (1.1) и $\varphi \in C_{\mathcal{H}}$, где u_t определяется для $\theta \in [-h, 0]$ как $u_t(\theta) = u(t + \theta)$.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБРАТНОГО АТТРАКТОРА

4.1 Априорная оценка. Через $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ будем обозначать все семейства непустых подмножеств $\mathcal{D} = \{D(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(C_{\mathcal{H}})$ таких, что

$$(4.1) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^{\delta t} \sup_{u \in D(t)} \|u\|_{C_{\mathcal{H}}}^2) = 0,$$

где $\delta > 0$ будет определено позже.

Лемма 4.1. *Предположим, что (I)-(II) выполнены. Тогда многозначный процесс $\{U(t, \tau)\}$, соответствующий (1.1), обладает $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ — множеством, поглощающее обратный возврат, в $C_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (1.1) в H с

$v = \partial_t u + \delta u$, где $0 < \delta < 1$, $\alpha - \delta > 0$ и $2\delta(\alpha - \delta) < \lambda$, имеем

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) + (\alpha - \delta) \|v\|^2 + \delta(1 - \delta) \|\Delta u\|^2 + \delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|u\|^2 + \|\Delta v\|^2 \\ & = (f(x, u(t - \rho(t))), v) + (g(t), v), \end{aligned}$$

где $E(t) = \|v\|^2 + (1 - \delta) \|\Delta u\|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|u\|^2$. Применив неравенство (I), получим

$$(4.3) \quad |(f(x, u(t - \rho(t))), v)| \leq \frac{\alpha - \delta}{4} \|v\|^2 + \frac{k_2^2}{\alpha - \delta} \|u(t - \rho(t))\|^2 + \frac{|k_1|^2}{\alpha - \delta};$$

$$(4.4) \quad |g(t), v| \leq \frac{\alpha - \delta}{4} \|v\|^2 + \frac{1}{\alpha - \delta} \|g(t)\|^2.$$

Подставив (4.3), (4.4) в (4.2), получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E(t) + (\alpha - \delta) \|v\|^2 + 2\delta(1 - \delta) \|\Delta u\|^2 + 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|u\|^2 + 2\|\Delta v\|^2 \\ & \leq \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \|u(t - \rho(t))\|^2 + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \delta} + \frac{2}{\alpha - \delta} \|g(t)\|^2. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma = \min\{\alpha - \delta, 2\delta(1 - \delta), 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta))\}$, тогда

$$(4.5) \quad \frac{d}{dt} E(t) + \sigma E(t) \leq \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \|u(t - \rho(t))\|^2 + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \delta} + \frac{2}{\alpha - \delta} \|g(t)\|^2.$$

Умножив (4.5) на $e^{\sigma t}$, и проинтегрировав от τ до t , находим

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} E(t) & \leq e^{\sigma \tau} E(\tau) + \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|u(s - \rho(s))\|^2 ds + \\ & + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|g(s)\|^2 ds + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} ds. \end{aligned}$$

Возьмем $r = s - \rho(s)$. Заметив, что $\rho(s) \in [0, h]$ и

$$\frac{1}{1 - \rho(s)} \leq \frac{1}{1 - \rho^*}, \forall s \in \mathbb{R},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|u(s - \rho(s))\|^2 ds & \leq \int_{\tau-h}^t \frac{e^{\sigma r} e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} \|u(r)\|^2 dr \\ & = \frac{e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} \left(\int_{\tau-h}^{\tau} e^{\sigma r} \|u(r)\|^2 dr + \int_{\tau}^t e^{\sigma r} \|u(r)\|^2 dr \right) \\ & \leq \frac{h e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} e^{\sigma \tau} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} \int_{\tau}^t e^{\sigma r} \|u(r)\|^2 dr. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} E(t) & \leq e^{\sigma \tau} E(\tau) + \frac{2k_2^2 e^{\sigma h}}{1 - \rho^*} \int_{\tau}^t e^{\sigma r} \|E(r)\| dr + \frac{2h k_2^2 e^{\sigma h}}{(\alpha - \delta)(1 - \rho^*)} e^{\sigma \tau} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 \\ & + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|g(s)\|^2 ds + \frac{2|k_1|^2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} ds. \end{aligned}$$

Для $C_1 = \frac{2k_2^2 e^{\sigma h}}{1-\rho^*}$, $C_2 = \frac{2hk_2^2 e^{\sigma h}}{(\alpha-\delta)(1-\rho^*)}$, $C_3 = \frac{2}{\alpha-\delta}$, $C_4 = \frac{2|k_1|^2}{\alpha-\delta}$, по лемме Гронвалля имеем, что

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} E(t) &\leq e^{\sigma \tau} e^{C_1(t-\tau)} E(\tau) + C_2 e^{\sigma \tau} e^{C_1(t-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\quad + C_3 e^{C_1(t-\tau)} \int_{\tau}^t \|g(s)\|^2 ds + C_4 e^{C_1(t-\tau)} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} ds, \quad \forall t \geq \tau. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma' = \sigma - C_1 > 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 &\leq (\|\partial_t u(\tau)\|^2 + \|\Delta u(\tau)\|^2 + \|u(\tau)\|) e^{-\sigma'(t-\tau)} \\ &\quad + C_2 e^{-\sigma'(t-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{C_4}{\sigma'} + C_3 e^{-\sigma' t} \int_{\tau}^t e^{\sigma' s} \|g(s)\|^2 ds, \quad \forall t \geq \tau. \end{aligned}$$

Подставив $t + \theta$ вместо t (где $\theta \in [-h, 0]$), получим

$$\begin{aligned} (4.6) \quad \|\partial_t u(t + \theta)\|^2 + \|\Delta u(t + \theta)\|^2 + \|u(t + \theta)\|^2 &\leq (\|\partial_t u(\tau)\|^2 + \|\Delta u(\tau)\|^2 \\ &\quad + \|u(\tau)\|) e^{-\sigma'(t+\theta-\tau)} + C_2 e^{-\sigma'(t+\theta-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{C_4}{\sigma'} + C_3 e^{-\sigma'(t+\theta)} \int_{\tau}^{t+\theta} e^{\sigma' s} \|g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Согласно (II) и (4.6),

$$\begin{aligned} (4.7) \quad \|u_t\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 &= \|\Delta u_t\|_{C_{H^2}}^2 + \|u'_t\|_{C_H}^2 = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\Delta u(t + \theta)\|^2 + \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|u'(t + \theta)\|^2 \\ &\leq C e^{-\sigma'(t-h-\tau)} (\|v(\tau)\|^2 + \|\Delta u(\tau)\|^2 + \|u(\tau)\|^2) + C e^{-\sigma'(t-h-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\quad + C + C e^{-\sigma'(t-h)} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' s} \|g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Для $t \in \mathbb{R}$ обозначим

$$R_1^2(t) = 2C e^{-\sigma'(t-h-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + C + C e^{-\sigma'(t-h)} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' s} \|g(s)\|^2 ds,$$

и рассмотрим семейство замкнутых ограниченных шаров $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ в $C_{\mathcal{H}}$, где

$$Q(t) = \{\psi \in Q(t) : \|\psi\|_{C_{\mathcal{H}}} \leq R_1(t)\}$$

и $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}} \in \mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$. Теперь, согласно (4.1) и (4.7), семейство $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}}$ является $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ -абсорбирующим для многозначного процесса $\{U(t, \tau)\}$ в $C_{\mathcal{H}}$.

Замечание 4.1. Обратите внимание, что положительные константы h и k_2 достаточно малы, поскольку небольшие эффекты задержки могут обеспечить существование аттрактора.

Кроме того, что касается члена задержки, чтобы получить результат в неограниченной области, нам нужно предположить, что

(III) $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ и существует $L > 0$ такой, что

$$|f'_v(t, v)| \leq L, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Лемма 4.2. При условиях (I)-(III) и $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n))$, имеет место

$$\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{\delta s} \|g(x, s)\|_1^2 dx ds < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0,$$

что подразумевает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t \int_{|x| \geq k} e^{\delta s} \|g(x, s)\|_1^2 dx ds = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0.$$

Тогда имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned} (4.8) \quad & \|u_t\|_{C_W}^2 = \|A^{\frac{3}{4}} u_t\|_{C_{H^3}}^2 + \|A^{\frac{1}{4}} u'_t\|_{C_{H^1}}^2 = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|A^{\frac{3}{4}} u(t + \theta)\|^2 \\ & + \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|A^{\frac{1}{4}} u'(t + \theta)\|^2 \\ & \leq C e^{-\sigma' t} e^{\sigma' \tau} (\|v(\tau)\|^2 + \|\Delta u(\tau)\|^2 + \|u(\tau)\|^2) \\ & + C e^{-\sigma' t} e^{\sigma' \tau} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + C e^{-\sigma' t} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' s} \|g(s)\|^2 ds + C e^{-\sigma' t} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' s} \|A^{\frac{1}{4}} g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Доказательство. Для скалярного произведения в H для (1.1) с $A^{\frac{1}{2}} v = A^{\frac{1}{2}} \partial_t u + \delta A^{\frac{1}{2}} u$, где $0 < \delta < 1$, $\alpha - \delta > 0$ and $2\delta(\alpha - \delta) < \lambda$, имеем

$$\begin{aligned} (4.9) \quad & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} V(t) + (\alpha - \delta) \|A^{\frac{1}{4}} v\|^2 + \delta(1 - \delta) \|A^{\frac{3}{4}} u\|^2 + \delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2 + \|A^{\frac{3}{4}} v\|^2 \\ & = (f(x, u(t - \rho(t))), A^{\frac{1}{2}} v) + (g(t), A^{\frac{1}{2}} v), \end{aligned}$$

где $V(t) = \|A^{\frac{1}{4}} v\|^2 + (1 - \delta) \|A^{\frac{3}{4}} u\|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2$. Применив неравенство Гельдера и $|f'_v(t, v)| \leq L$, получим

$$\begin{aligned} (4.10) \quad & |(f(x, u(t - \rho(t))), A^{\frac{1}{2}} v)| \leq L \|u(t - \rho(t))\| \|A^{\frac{1}{4}} v\| \\ & \leq \frac{\alpha - \delta}{4} \|A^{\frac{1}{4}} v\|^2 + \frac{L^2}{\alpha - \delta} \|A^{\frac{1}{4}} u(t - \rho(t))\|^2; \end{aligned}$$

$$(4.11) \quad |g(t), A^{\frac{1}{2}} v| \leq \frac{\alpha - \delta}{4} \|A^{\frac{1}{4}} v\|^2 + \frac{1}{\alpha - \delta} \|A^{\frac{1}{4}} g(t)\|^2.$$

Подставив (4.10), (4.11) в (4.9), для $\sigma = \min\{\alpha - \delta, 2\delta(1 - \delta), 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta))\}$, будем иметь

$$\frac{d}{dt} V(t) + \sigma V(t) \leq \frac{2L^2}{\alpha - \delta} \|A^{\frac{1}{4}} u(t - \rho(t))\|^2 + \frac{2}{\alpha - \delta} \|A^{\frac{1}{4}} g(t)\|^2.$$

Умножив на $e^{\sigma t}$ и проинтегрировав от τ до t , получим

$$e^{\sigma t} V(t) \leq e^{\sigma \tau} V(\tau) + \frac{2L^2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|A^{\frac{1}{4}} u(s - \rho(s))\|^2 ds + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\tau}^t e^{\sigma s} \|A^{\frac{1}{4}} g(s)\|^2 ds.$$

В силу (4.7),

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} V(t) & \leq e^{\sigma \tau} V(\tau) + C e^{-\sigma'(t-h-\tau)} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + C \\ & + C e^{-\sigma'(t-h)} \int_{-\infty}^t e^{\sigma' s} \|g(s)\|^2 ds + C \int_{-\infty}^t e^{\sigma s} \|A^{\frac{1}{4}} g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Положив $t + \theta$ вместо t (где $\theta \in [-h, 0]$), будем иметь

$$\begin{aligned} & \|A^{\frac{1}{4}}v(t + \theta)\|^2 + \|A^{\frac{3}{4}}u(t + \theta)\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}u(t + \theta)\|^2 \\ & \leq (\|A^{\frac{1}{4}}v(\tau)\|^2 + \|A^{\frac{3}{4}}u(\tau)\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}u(\tau)\|^2)e^{-\sigma't}e^{\sigma'(h+\tau)} + Ce^{-\sigma't}e^{\sigma'(h+\tau)}\|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 \\ & \quad + Ce^{-\sigma't}e^{\sigma'h} \int_{-\infty}^t e^{\sigma's}\|g(s)\|^2 ds + Ce^{-\sigma't}e^{\sigma'h} \int_{-\infty}^t e^{\sigma's}\|A^{\frac{1}{4}}g(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Следовательно (4.8) имеет место. Обозначим через $R_2(t)$ неотрицательное число, определенное для любого $t \in \mathbb{R}$ из

$$R_2^2(t) = 2Ce^{-\sigma't}e^{\sigma'\tau}\|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + Ce^{-\sigma't} \int_{-\infty}^t e^{\sigma's}\|g(s)\|^2 ds + Ce^{-\sigma't} \int_{-\infty}^t e^{\sigma's}\|A^{\frac{1}{4}}g(s)\|^2 ds,$$

и рассмотрим семейство замкнутых шаров $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{W}}} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ в $C_{\mathcal{W}}$, где

$$Q(t) = \{\vartheta \in Q(t) : \|\vartheta\|_{C_{\mathcal{W}}} \leq R_2(t)\}$$

и $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{W}}} \in \mathcal{D}_{C_{\mathcal{W}}}$.

Теорема 4.1. *Допустим имеют место (I)-(II), тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$, существуют $T = T(\varepsilon, t, B) > 0$ и $k = k(\varepsilon, t, B) > 0$ такие, что любое решение $u_t \in U(t, t-s)B(t-s)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{\theta \in [-h, 0]} \int_{\Omega_k^c} (|\Delta u(t + \theta)|^2 + |v(t + \theta)|^2 + |u(t + \theta)|^2) dx < C\varepsilon, \quad \forall s \geq T,$$

где $\Omega_k^c = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq k\}$, $C > 0$ – константа.

Доказательство. Выберем гладкую функцию η такую, что $0 \leq \eta(s) \leq 1$ для любого $s \in \mathbb{R}$, и

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |s| \leq 1, \\ 1, & |s| \leq 2. \end{cases}$$

Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что

$$(4.12) \quad \max\{|\eta'(s)|, |\eta''(s)|, |\eta'''(s)|, |\eta''''(s)|\} \leq C_0,$$

для любого $s \in \mathbb{R}$.

Умножив (1.1) на $\eta(\frac{|x|^2}{k^2})v = \eta(\frac{|x|^2}{k^2})(\partial_t u + \delta u)$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}^n$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(|v|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u|^2) dx + (\alpha - \delta) \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v|^2 dx \\ (4.13) \quad & + \delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\Delta^2 u \cdot v dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u(t - \rho(t)))\eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(t)\eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v dx. \end{aligned}$$

Оценим каждый член этого уравнения.

$$\begin{aligned}
 (4.14) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \Delta^2 u \cdot v dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u [\eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \Delta v + 2 \nabla \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \nabla v + \Delta \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) v] dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \eta'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \frac{2|x|}{k^2} \Delta u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} [\eta''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \frac{4|x|^2}{k^2} + \eta'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \frac{2}{k^2}] \Delta u \cdot v dx \\
 &\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 &\quad - \frac{4\sqrt{2}C_0}{k} \int_{k < |x| < \sqrt{2}k} |\Delta u| \cdot |\nabla v| dx - \frac{(8k^2 + 2)C_0}{k^2} \int_{k < |x| < \sqrt{2}k} |\Delta u| \cdot |v| dx \\
 &\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 &\quad - \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx \right] - \frac{(4k^2 + 1)C_0}{k^2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 dx \right] \\
 &\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 &\quad - \frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u\|^2 + \|v\|^2) - \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v\|^2.
 \end{aligned}$$

Для нелинейного члена, в силу условия (I) и неравенства Юнга, имеем:

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad & \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u(t - \rho(t))) \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) v dx \right| \leq \frac{1}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx + \\
 & + \frac{\alpha - \delta}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |v|^2 dx + \frac{k_2^2}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |u(t - \rho(t))|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Далее,

$$(4.16) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(t) \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) v dx \right| \leq \frac{\alpha - \delta}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |v|^2 dx + \frac{1}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(t)|^2 dx.$$

Потставив (4.14) – (4.16) в (4.13), получим

$$\begin{aligned}
 (4.17) \quad & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u|^2 + |\Delta u|^2) dx + (\alpha - \delta) \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |v|^2 dx \\
 & + 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |u|^2 dx + 2\delta \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |\Delta u|^2 dx \\
 & \leq \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx + \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |u(t - \rho(t))|^2 dx \\
 & + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(t)|^2 dx + \frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u\|^2 + \|v\|^2) \\
 & + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v\|^2.
 \end{aligned}$$

Умножив (4.17) на $e^{\sigma' t}$, вместе с (4.17) получим

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} [e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) (|v|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u|^2 + |\Delta u|^2) dx] \\
& \leq -(\alpha - \delta) e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |v|^2 dx - 2\delta e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |\Delta u|^2 dx \\
& \quad - 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u|^2 dx + \frac{2}{\alpha - \delta} e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |g(t)|^2 dx \\
& \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |k_1|^2 dx + \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(t - \rho(t))|^2 dx \\
& \quad + e^{\sigma' t} [\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u\|^2 + \|v\|^2) + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v\|^2].
\end{aligned}$$

Проинтегрировав (4.18) по $[t - s, t']$, находим, что

$$\begin{aligned}
(4.19) \quad & e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) (|v(t')|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t')|^2 + |\Delta u(t')|^2) dx \\
& \leq e^{\sigma'(t-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) (|v(t-s)|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t-s)|^2 + |\Delta u(t-s)|^2) dx \\
& \quad - (\alpha - \delta) \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |v(r)|^2 dx dr - 2\delta \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |\Delta u(r)|^2 dx dr \\
& \quad - 2\delta(\lambda - \delta(\alpha - \delta)) \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r)|^2 dx dr \\
& \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |k_1|^2 dx dr + \frac{2k_2^2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r - \rho(r))|^2 dx dr \\
& \quad + \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} [\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2] dr \\
& \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |g(r)|^2 dx dr.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
(4.20) \quad & \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r - \rho(r))|^2 dx dr \\
& \leq \frac{e^{\sigma' h}}{1 - \rho^*} \int_{t-s-h}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r)|^2 dx dr \\
& \leq \frac{he^{\sigma' h} e^{\sigma'(t-s)}}{1 - \rho^*} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 + \frac{e^{\sigma' h}}{1 - \rho^*} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\frac{|x|^2}{k^2}) |u(r)|^2 dx dr.
\end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{2k_2^2 h e^{\sigma' r}}{(\alpha - \delta)(1 - \rho^*)} < \frac{1}{2} \delta(\alpha - \delta),$$

имеем

(4.21)

$$\begin{aligned}
 & e^{\sigma' t} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v(t')|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t')|^2 + |\Delta u(t')|^2) dx \\
 & \leq e^{\sigma'(t-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v(t-s)|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t-s)|^2 + |\Delta u(t-s)|^2) dx \\
 & \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx dr + \frac{2k_2^2 h e^{\sigma' r} e^{\sigma'(t-s)}}{(\alpha - \delta)(1 - \rho^*)} \|\varphi\|_{C_H}^2 \\
 & \quad + \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2 \right] dr \\
 & \quad + \frac{2}{\alpha - \delta} \int_{t-s}^{t'} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(r)|^2 dx dr.
 \end{aligned}$$

Теперь, подставив $t' + \theta$ вместо t' (где $\theta \in [-h, 0]$), и умножив (4.21) на $e^{-\sigma'(t' + \theta)}$, получим, что

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v(t' + \theta)|^2 + (\lambda - \delta(\alpha - \delta))|u(t' + \theta)|^2 + |\Delta u(t' + \theta)|^2) dx \\
 & \leq C e^{-\sigma'(t' + \theta)} e^{\sigma'(t-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|v(t-s)|^2 + |u(t-s)|^2 + |\Delta u(t-s)|^2) dx \\
 & \quad + C e^{-\sigma'(t' + \theta)} \int_{t-s}^{t' + \theta} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx dr + C e^{-\sigma'(t' + \theta)} e^{\sigma'(t-s)} \|\varphi\|_{C_H}^2 \\
 & \quad + C e^{-\sigma'(t' + \theta)} \int_{t-s}^{t' + \theta} e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(r)|^2 dx dr \\
 & \quad + e^{-\sigma'(t' + \theta)} \int_{t-s}^{t' + \theta} e^{\sigma' r} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2 \right] dr.
 \end{aligned}$$

Пусть $t' = t$, тогда

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\theta \in [-h, 0]} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|\Delta u(t + \theta)|^2 + |u'(t + \theta)|^2) dx \\
 & \leq C e^{-\sigma' s} (\|u'(t-s)\|^2 + \|\Delta u(t-s)\|^2) + C e^{-\sigma' s} \|\varphi\|_{C_H}^2 \\
 & \quad + C e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx dr \\
 & \quad + C e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(r)|^2 dx dr \\
 & \quad + e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2 \right] dr.
 \end{aligned}$$

Так как $\varphi \in B(t-s)$ и $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, получим, что

$$(4.22) \quad \begin{aligned} & \limsup_{s \rightarrow +\infty} C e^{-\sigma' s} (\|u'(t-s)\|^2 + \|\Delta u(t-s)\|^2 + \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2) \\ & \leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} C e^{-\sigma' s} \|B(t-s)\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 = 0. \end{aligned}$$

В силу (I) и $k_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, можем выбрать k достаточно большим, чтобы

$$(4.23) \quad C e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |k_1|^2 dx dr < C\varepsilon$$

и

$$(4.24) \quad C e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) |g(r)|^2 dx dr < C\varepsilon.$$

Вместе с (4.7) и (4.8), выберем k достаточно большим, чтобы

$$(4.25) \quad \begin{aligned} & e^{-\sigma' t} \int_{t-s}^t e^{\sigma' r} \left[\frac{(8k^2 + 2\sqrt{2}k + 2)C_0}{k^2} (\|\Delta u(r)\|^2 + \|v(r)\|^2) + \right. \\ & \left. + \frac{2\sqrt{2}C_0}{k} \|\nabla v(r)\|^2 \right] dr < C\varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда из (4.22) – (4.25), имеем, что

$$\begin{aligned} & \sup_{\theta \in [-h, 0]} \int_{|x| \geq \sqrt{2}k} (|\Delta u(t+\theta)|^2 + |v(t+\theta)|^2 + |u(t+\theta)|^2) dx \\ & \leq \sup_{\theta \in [-h, 0]} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) (|\Delta u(t+\theta)|^2 + |v(t+\theta)|^2 + |u(t+\theta)|^2) dx < C\varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 4.2. При условиях леммы 4.1 многозначный процесс $\{U(t, \tau)\}$ в $C_{\mathcal{H}}$ обладает единственным аттрактором $\{A_{C_{\mathcal{H}}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Доказательство. Сначала покажем, что многозначный процесс $\{U(t, \tau)\}$ in $C_{\mathcal{H}}$ является $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ -ассимптотически полукомпактом. По лемме 4.1 для любого $T \geq t-s$, $U(T, t-s)\varphi = \{u_T(\cdot; t-s, \varphi)|u(\cdot)\}$ является решением (1.1) с $\varphi \in Q(t-s)$, где $\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}} = \{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ есть $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ -поглощающее множество в $C_{\mathcal{H}}$.

Пусть $\Omega_{2k} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2k\}$. Положим $\hat{\eta} = 1 - \eta$, и возьмем

$$(4.26) \quad \hat{u} = \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)u(T, x), \quad \forall T \geq t-s-h, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где η – срезающая функция, определенная в теореме 4.1. Умножив (1.1) на $\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)$, вместе с (4.26) получим, что

$$(4.27) \quad \begin{cases} \partial_{tt}\hat{u} + \alpha\partial_t\hat{u} + \Delta^2\hat{u} + \lambda\hat{u} = f(x, u(T-\rho(T)))\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) + g(x, T)\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) \\ \quad + 4A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)A^{\frac{1}{4}}u + 6A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)A^{\frac{1}{2}}u + 4A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)A^{\frac{3}{4}}u + A\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)u, \\ \hat{u}(x, T) = \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varphi(x, T-t+s), \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t-s-h, t-s], \\ \partial_t\hat{u}(x, T) = \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\partial_t\varphi(x, T-t+s), \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t-s-h, t-s], \\ \hat{u}(x, T) = 0, \quad |x| = 2k, \quad T \in [t-s, \infty]. \end{cases}$$

Теперь пусть $\hat{u} = u_1 + u_2$. Разложим (4.27) следующим образом

$$(4.28) \quad \begin{cases} \partial_{tt}u_1 + \alpha\partial_t u_1 + \Delta^2 u_1 + \lambda u_1 = f(x, u(T - \rho(T)))\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) + g(x, T)\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) \\ \quad + 4A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})A^{\frac{1}{4}}u + 6A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})A^{\frac{1}{2}}u + 4A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})A^{\frac{3}{4}}u + A\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})u, \\ u_1(x, T) = 0, \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ \partial_t u_1(x, T) = 0, \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ u_1(x, T) = 0, \quad |x| = 2k, \quad T \in [t - s, \infty], \end{cases}$$

и

$$(4.29) \quad \begin{cases} \partial_{tt}u_2 + \alpha\partial_t u_2 + \Delta^2 u_2 + \lambda u_2 = 0, \\ u_2(x, T) = \hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})\varphi(x, T - t + s), \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ \partial_t u_2(x, T) = \hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})\partial_t \varphi(x, T - t + s), \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ u_2(x, T) = 0, \quad |x| = 2k, \quad T \in [t - s, \infty]. \end{cases}$$

В силу (4.7) с $f = g = 0$,

$$\|u'_{2t}\|_{C_H}^2 + \|\Delta u_{2t}\|_{C_{H^2}}^2 \leq C e^{-\sigma' s} \|\varphi\|_{C_{\mathcal{H}}}^2.$$

Согласно теореме 2.1 рассмотрим пару решений u^1 и u^2 системы (1.1), соответствующие φ^1 и φ^2 , соответственно. Пусть $w(T) = u_1^1(T) - u_1^2(T)$, где $u_1^1(T)$ и $u_1^2(T)$ суть решения (4.28). Тогда $w(T)$ удовлетворяет

$$(4.30) \quad \begin{cases} \partial_{tt}w + \alpha\partial_t w + \Delta^2 w + \lambda w = \hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})(f(x, u^1(T - \rho(T))) - f(x, u^2(T - \rho(T)))) \\ \quad + 4(A^{\frac{1}{4}}u^1 - A^{\frac{1}{4}}u^2)A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) + 6(A^{\frac{1}{2}}u^1 - A^{\frac{1}{2}}u^2)A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) \\ \quad + 4(A^{\frac{3}{4}}u^1 - A^{\frac{3}{4}}u^2)A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) + (u^1 - u^2)A\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), \\ w(x, T) = 0, \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ \partial_t w(x, T) = 0, \quad x \in \Omega_{2k}, \quad T \in [t - s - h, t - s], \\ w(x, T) = 0, \quad |x| = 2k, \quad T \in [t - s, \infty]. \end{cases}$$

Беря скалярное произведение H в (4.30) с $w'(T)$, получим

$$(4.31) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|w'(T)\|^2 + \|\Delta w(T)\|^2 + \lambda \|w(T)\|^2) + \|w'(T)\|^2 \\ &= (\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2})((f(x, u^1(T - \rho(T))) - f(x, u^2(T - \rho(T))))), w'(t)) \\ & \quad + 4((A^{\frac{1}{4}}u^1 - A^{\frac{1}{4}}u^2)A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), w'(T)) + 6((A^{\frac{1}{2}}u^1 - A^{\frac{1}{2}}u^2)A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), w'(T)) \\ & \quad + 4((A^{\frac{3}{4}}u^1 - A^{\frac{3}{4}}u^2)A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), w'(T)) + ((u^1 - u^2)A\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}), w'(T)). \end{aligned}$$

Простые вычисления дают

$$(4.32) \quad A^{\frac{1}{4}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) = \frac{2|x|}{k^2}\hat{\eta}'(\frac{|x|^2}{k^2}),$$

$$(4.33) \quad A^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(\frac{|x|^2}{k^2}) = \frac{2}{k^2}\hat{\eta}'(\frac{|x|^2}{k^2}) + \frac{4|x|^2}{k^4}\hat{\eta}''(\frac{|x|^2}{k^2}),$$

$$(4.34) \quad A^{\frac{3}{4}}\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) = \frac{12|x|}{k^4}\hat{\eta}''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) + \frac{8|x|^3}{k^6}\hat{\eta}'''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right),$$

$$(4.35) \quad A\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) = \frac{12}{k^4}\hat{\eta}''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) + \frac{48|x|^2}{k^6}\hat{\eta}'''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right) + \frac{16|x|^4}{k^8}\hat{\eta}''''\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right).$$

Интегрируя (4.31) от $t-s$ до $t+\theta$ (где $\theta \in [-h, 0]$), из (4.12) и (4.32) - (4.35) вытекает, что

$$(4.36) \quad \begin{aligned} & \|w'(t+\theta)\|^2 + \|\Delta w(t+\theta)\|^2 \\ & \leq 2\|\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(f(x, u^1(T-\rho(T))) - f(x, u^2(T-\rho(T))))\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])} \cdot \\ & \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])} + \frac{112\sqrt{2}C_0}{k^3} \|A^{\frac{1}{4}}u^1 - A^{\frac{1}{4}}u^2\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])} \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])} \\ & + \frac{60C_0}{k^2} \|A^{\frac{1}{2}}u^1 - A^{\frac{1}{2}}u^2\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])} \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])} \\ & + \frac{8\sqrt{2}C_0}{k} \|A^{\frac{3}{4}}u^1 - A^{\frac{3}{4}}u^2\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])} \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])} \\ & + \frac{172C_0}{k^4} \|u^1 - u^2\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])} \cdot \|w'(T)\|_{L^2(\Omega_{2k} \times [t-s, t])}. \end{aligned}$$

Чтобы доказать асимптотически полукompактность сверху $\{U(t, \tau)\}$, пусть $\mathcal{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$, $s_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), $u_{nt} \in U(t, t-s_n)B(t-s_n)$ даны, тогда достаточно показать, что $\{u_{nt}\}_{n=1}^{\infty}$ есть предкомпакт в $C_{\mathcal{H}}$. Заметим, что существует $N > 0$ такое, что для всех $n \geq N$, имеем $U(t, t-s_n)B(t-s_n) = U(t, t-T_0)U(t-T_0, t-s_n)B(t-s_n) \subset U(t, t-T_0)Q(t-T_0)$. Следовательно, $u_{nt} \in U(t, t-T_0)Q(t-T_0)$, $n \geq N$. Из лемм 4.1 и 4.3, видим, что

$$(4.37) \quad \{u_n(T)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничено в } L^{\infty}(t-T_0-h, t; L^2(\mathbb{R}^n)) \text{ и } L^{\infty}(t-T_0-h, t; H^2(\mathbb{R}^n)),$$

$$(4.38) \quad \{A^{\frac{1}{4}}u_n(T)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничено в } L^{\infty}(t-T_0-h, t; L^2(\mathbb{R}^n)),$$

$$(4.39) \quad \{A^{\frac{1}{2}}u_n(T)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничено в } L^{\infty}(t-T_0-h, t; L^2(\mathbb{R}^n)),$$

$$(4.40) \quad \{A^{\frac{3}{4}}u_n(T)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничено в } L^{\infty}(t-T_0-h, t; L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Следовательно, существует $k_1 > k$, такая, что для всех $n, m \geq N$,

$$(4.41) \quad \begin{aligned} & \frac{112\sqrt{2}C_0}{k_1^3} \|A^{\frac{1}{4}}u_n - A^{\frac{1}{4}}u_m\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t-s, t])} \|u'_{1n} - u'_{2n}\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t-s, t])} \\ & + \frac{60C_0}{k_1^2} \|A^{\frac{1}{2}}u_n - A^{\frac{1}{2}}u_m\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t-s, t])} \|u'_{1n} - u'_{2n}\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t-s, t])} \\ & + \frac{8\sqrt{2}C_0}{k_1} \|A^{\frac{3}{4}}u_n - A^{\frac{3}{4}}u_m\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t-s, t])} \|u'_{1n} - u'_{2n}\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t-s, t])} \\ & + \frac{172C_0}{k_1^4} \|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t-s, t])} \|u'_{1n} - u'_{2n}\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t-s, t])} < \varepsilon. \end{aligned}$$

По теореме Алаоглу, без ограничения общности, из (4.37) – (4.40) находим, что

$$u_n \rightarrow u \text{ слабо на } L^\infty(t - T_0 - h, t; H^2(\Omega_{2k_1}));$$

$$u'_n \rightarrow u' \text{ слабо на } L^\infty(t - T_0 - h, t; L^2(\Omega_{2k_1})).$$

Следовательно, $u_n \rightarrow u$ в $L^2(t - T_0 - h, t; L^2(\Omega_{2k_1}))$ и $u_n(T, x) \rightarrow u(T, x)$ для почти всех $(T, x) \in [t - T_0 - h, t] \times \Omega_{2k_1}$.

Так как $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, то

$$\hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x, u_n(T, x)) \rightarrow \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x, u(T, x)), (T, x) \in [t - T_0 - h, t] \times \Omega_{2k_1}, n \rightarrow \infty.$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(f(x, u_n(T - \rho(T))) - f(x, u_m(T - \rho(T)))) \right\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t - T_0, t])} = 0.$$

Заметим, что $\{u'_{1n}(T)\}$ ограничена в $L^2(\Omega_{2k_1} \times [t - T_0, t])$. Тогда существует $N_1 \geq N$ такое, что для всех $n, m \geq N_1$,

$$(4.42) \quad 2 \left\| \hat{\eta}\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(f(x, u_n(T - \rho(T))) - f(x, u_m(T - \rho(T)))) \right\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t - T_0, t])} \\ \times \|u'_{1n}(T) - u'_{1m}(T)\|_{L^2(\Omega_{2k_1} \times [t - T_0, t])} < \varepsilon.$$

В силу (4.41) – (4.42), из (4.36) следует, что

$$\|u'_{1nt} - u'_{1mt}\|_{C_{L^2(\Omega_{k_1})}}^2 + \|u_{1nt} - u_{1mt}\|_{C_{H^2(\Omega_{k_1})}}^2 = \sup_{\theta \in [-h, 0]} (\|u'_{1n}(t + \theta) - u'_{1m}(t + \theta)\|_{L^2(\Omega_{2k_1})}^2 + \|\Delta u_{1n}(t + \theta) - \Delta u_{1m}(t + \theta)\|_{L^2(\Omega_{2k_1})}^2) < C\varepsilon.$$

Тогда для всех $n, m \geq N_1$,

$$\|u_{nt} - u_{mt}\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 = \|u'_{nt} - u'_{mt}\|_{C_{L^2(\mathbb{R}^n)}}^2 + \|u_{nt} - u_{mt}\|_{C_{H^2(\mathbb{R}^n)}}^2 < C\varepsilon.$$

Следовательно, $\{u_{nt}\}_{n=1}^\infty$ – предкомпакт в $C_{\mathcal{H}}$. Наконец, в силу леммы 4.1, для каждого $t \in \mathbb{R}$, $\{\mathcal{A}_{C_{\mathcal{H}}}\}_{t \in \mathbb{R}}$ определенная, как

$$\mathcal{A}_{C_{\mathcal{H}}}(t) = \omega(\mathcal{Q}_{C_{\mathcal{H}}}, t) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq T} U(t, t - s)Q(t - s)}$$

есть $\mathcal{D}_{C_{\mathcal{H}}}$ – аттрактор для многозначного процесса $\{U(t, \tau)\}$ in $C_{\mathcal{H}}$. Теорема доказана.

Благодарность. Мы благодарим рецензенту за содержательные комментарии и предложения, которые улучшили презентацию статьи.

Abstract. The dynamics of solutions for the plate equation without delay effects has been investigated by many authors. But there are few works on plate equation with variable delay on unbounded domain. Therefore, we firstly consider the existence of pullback attractor for the plate equation with variable delay on $\mathbb{R}^n$ by using the theory of multi-valued dynamical system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. H. Wu, Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, New York, Springer (1996).
- [2] W. M. Ruess, “Existence of solutions to partial differential equations with delay”, Theory and applications of nonlinear operators of accretive monotone type, Lecture Notes Pure Appl. Math., **178**, 259 – 288 (1996).
- [3] T. Caraballo, P. E. Kloeden and J. Real, “Pullback and forward attractors for a damped wave equation with delays”, Stoch. Dyn., **4**, no. 3, 405 – 423 (2004).
- [4] S. P. Wang, Q. Z. Ma, “Existence of pullback attractors for the non-autonomous suspension bridge equation with time delay”, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B., **25**, no. 4, 1299 – 1316 (2020).
- [5] S. P. Wang, Q. Z. Ma, X. K. Shao, “Dynamics of suspension bridge equation with delay”, J. Dynam. Differential Equations, **35**, 3563 – 3588 (2023), <https://doi.org/10.1007/s10884-022-10130-9>.
- [6] T. Caraballo, P. E. Kloeden, “Non-autonomous attractors for integro-differential evolution equations”, Discrete Contin. Dyn. Syst. **2**, 17 – 36 (2009).
- [7] P. Marin-Rubio, J. Real, “Pullback attractors for 2D-Navier-Stokes equation with delay in continuous and sub-linear operators”, Discrete Contin. Dyn. Syst., **26**, 989 – 1006 (2010).
- [8] Y. J. Wang, S. F. Zhou, “Kernal sections and uniform attractors of multi-valued semiprocesses”, J. Differential Equations, **232**, 573 – 622 (2007).
- [9] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, Attractors for Equations of Mathematical Physics, American Mathematical Society Colloquium Publications, Providence, RI (2002).
- [10] T. Caraballo, M. J. Garrido-Atienza, B. Schmalfuß and J. Valero, “Non-autonomous and random attractors for delay random semilinear equations without uniqueness”, Discrete Contin. Dyn. Syst., **21**, 415 – 443 (2008).
- [11] F. Flandoli and B. Schmalfuß, “Random attractors for the 3D stochastic Navier-Stokes equation with multiplicative noise”, Stoch. Stoch. Rep., **59**, 21 – 45 (1996).
- [12] Y. J. Wang, “Pullback attractors for a damped wave equation with delays”, Stoch. Dyn. **15**, no. 2015, 1550003 (2015).
- [13] S. Woinowsky-Krieger, “The effect of axial force on the vibration of hinged bars”, J. Appl. Mech., **17**, 35 – 36 (1950).
- [14] H. M. Berger, “A new approach to the analysis of large deflection of plates”, J. Appl. Mech., **22**, 465 – 472 (1955).
- [15] L. Yang, C. K. Zhong, “Global attractor for plate equation with nonlinear damping”, Nonlinear Anal. **69**, 3802 – 3810 (2008).
- [16] L. Yang, “Uniform attractor for non-autonomous plate equation with a localized damping and a critical nonlinearity”, J. Math. Anal. Appl. **338**, 1243 – 1254 (2008).
- [17] A. Kh. Khanmamedov, “Existence of a global attractors for the plate equation with a critical exponent in an unbounded domain”, Appl. Math. Letters, **18**, 827 – 832 (2005).
- [18] A. Kh. Khanmamedov, “Global attractors for the plate equation with a localized damping and a critical exponent in an unbounded domain”, J. Differential Equations, **225**, 528 – 548 (2006).
- [19] H. B. Xiao, “Asymptotic dynamics of plate equation with a critical exponent on unbounded domain”, Nonlinear Anal. **70**, 1288 – 1301 (2009).
- [20] M. Aouadi, “Global and exponential attractors for extensible thermoelastic plate with time-varying delay”, J. Differential Equations, **269**, 4079 – 4115 (2020).
- [21] R. Temam, “Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics”, 2nd edn. New York, Springer-Verlag (1997).

Поступила 25 июня 2023

После доработки 05 сентября 2023

Принята к публикации 06 сентября 2023

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМАМИ ХААРА И УОЛША В ВЕСОВЫХ ОБОБЩЕННЫХ ГРАНД ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Б. И. ГОЛУБОВ, С. С. ВОЛОСИВЕЦ

Московский физико-технический институт, РФ
Саратовский государственный университет, РФ
E-mails: golubovboris1939@gmail.com; VolosivetsSS@mail.ru

Аннотация. В настоящей статье мы приводим прямые теоремы приближения полиномами Хаара и Уолша в весовом гранд пространстве Лебега. Также изучается порядок приближения средними Бореля, Эйлера, Зигмунда-Рисса и Нерлунда рядов Фурье-Уолша-Пэли в упомянутом выше пространстве.

MSC2020 number: 42C10; 46E30.

Ключевые слова: система Хаара; весовое гранд пространство Лебега; прямая теорема приближения; линейные средние ряда Фурье-Уолша.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ является весовой функцией, т.е. интегрируема по Лебегу и п.в. положительна на $[0, 1]$. Обычное весовое пространство Лебега $L_v^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций f , таких что

$$\|f\|_{p,v} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p v(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Для $v \equiv 1$ мы будем писать $\|f\|_p$ вместо $\|f\|_{p,1}$.

Для $1 < p < \infty$ и $\theta > 0$ мы обозначим через $L_v^{p,\theta}[0, 1]$ весовое обобщенное гранд пространство Лебега, состоящее из всех действительнозначных измеримых на $[0, 1]$ функций f , таких что

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\theta,v} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon^\theta \int_0^1 |f(x)|^{p-\varepsilon} v(x) dx \right)^{1/(p-\varepsilon)} = \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \|f\|_{p-\varepsilon,v} < \infty. \end{aligned}$$

Эти пространства введены для $\theta = 1$ и $v(x) \equiv 1$ Т.Иванцом и К.Сбордоне [1] и позже для $\theta > 1$ и $v(x) \equiv 1$ Л.Греко, Т.Иванцом и К.Сбордоне в [2]. Если $\theta = 0$ и $v(x) \equiv 1$, то получается гранд пространство Лебега $L^p[0, 1]$. Легко видеть, что

$L^p[0, 1] \subset L^p[0, 1] \subset L^{p-\varepsilon}[0, 1]$ при $p > 1$ и $0 < \varepsilon < p - 1$. Поскольку $L^p[0, 1]$ не является плотным в $L^p[0, 1]$ (см. [3]) мы будем рассматривать подпространство $\mathcal{L}_v^{p),\theta}[0, 1]$, которое является замыканием $L_v^p[0, 1]$ в $L_v^{p),\theta}[0, 1]$ и снабжено нормой $\|\cdot\|_{p),\theta,v}$. К. Сбордине [4] установил, что $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \|f\|_{p-\varepsilon,v} = 0.$$

Будем говорить, что весовая функция v принадлежит классу Б.Макенхаупта $A_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, если

$$\sup_I |I|^{-1} \int_I v(x) dx \left(|I|^{-1} \int_I (v(x))^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} = [v]_{A_p[0,1]} < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем интервалам I из отрезка $[0, 1]$ и $|I|$ означает меру Лебега I (см. [5]). Пусть

$$Mf(x) = \sup_{x \in I \subset [0,1]} |I|^{-1} \int_I |f(t)| dt,$$

где I — интервалы, содержащие x . А.Фиоренца, Б.Гупта и П.Джейн [6, теорема 4.1] доказали, что максимальный оператор Mf является ограниченным оператором в $L_v^{p),\theta}[0, 1]$ при $1 < p < \infty$ и $\theta = 1$ в том и только в том случае, когда $v \in A_p[0, 1]$. Подобный результат был получен В.М.Кокилашвили [7, теорема 3.1] при $\theta > 0$ в более общем виде.

Для $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ мы полагаем $I_j^k = [(j-1)/2^k, j/2^k]$, $j \in [1, 2^k] \cap \mathbb{Z}$. Напомним, что система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ задается следующим образом: $\chi_1(x) \equiv 1$ и, для $n = 2^k + j$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathbb{Z} \cap [1, 2^k]$,

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & x \in I_{2j-1}^{k+1}; \\ -2^{k/2}, & x \in I_{2j}^{k+1}; \\ 0, & x \notin I_j^k. \end{cases}$$

Система $\{\chi_i(x)\}_{i=1}^n$ ортогональна на $[0, 1]$ и полна в $L^1[0, 1]$ (см. [8, гл. 3, раздел 1]). Для $f \in L^1[0, 1]$ и $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ определим коэффициенты Фурье-Хаара и частные суммы Фурье-Хаара

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t) \chi_n(t) dt, \quad Q_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n a_k(f) \chi_k(x).$$

Из [9, гл. 10, теорема 10.2.7] вытекает, что $Q_n(f)(x)$ имеет n интервалов постоянства $\{\Delta_{n,m}\}_{m=1}^n$ и удовлетворяет равенству

$$(1.1) \quad Q_n(f)(x) = |\Delta_{n,m}|^{-1} \int_{\Delta_{n,m}} f(t) dt, \quad x \in \Delta_{n,m}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Наилучшее приближение полиномами по системе Хаара для $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0,1]$ определяется равенством

$$E_n(f)_{p,\theta,v} = \inf \left\{ \left\| f - \sum_{k=1}^n a_k \chi_k \right\|_{p,\theta,v} : a_k \in \mathbb{R} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определим теперь систему Уолша-Пэли. Пусть $r_0(x) = 1$ для $x \in [0, 1/2)$, $r_0(x) = -1$ для $x \in [1/2, 1)$ и $r_0(x)$ продолжается на $\mathbb{R}_+$ 1-периодически. Тогда $r_n(x) = r_0(2^n x)$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Для $n \in \mathbb{Z}_+$ с двоичным разложением $n = \sum_{i=0}^{k(n)} \varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, мы полагаем $w_n(x) = \prod_{i=0}^{k(n)} (r_i(x))^{\varepsilon_i}$. Система Уолша-Пэли $\{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является ортонормированной и полной в $L^1[0, 1]$ (см. [9, гл. 1,2]). Для $f \in L^1[0, 1]$ зададим коэффициенты Фурье-Уолша-Пэли и частичные суммы Фурье-Уолша-Пэли следующим образом:

$$\widehat{f}(k) = \int_0^1 f(t) w_k(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) w_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим наилучшее приближение полиномами Уолша-Пэли

$$E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} = \inf \left\{ \left\| f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k \right\|_{p,\theta,v} : a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

для $n \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$.

Для $f \in L^1[0, 1)$, продолженной на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 1-периодически, мы рассмотрим средние Стеклова $s_h(f)(x) = h^{-1} \int_0^h f(x+t) dt$, $h > 0$. С помощью леммы 2.8 ниже мы получаем равномерную ограниченность s_h , $h > 0$, в $L_v^{p,\theta}[0, 1]$ для $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$. Таким образом, в этом случае мы можем определить модуль непрерывности в $\mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$:

$$\Omega(f, \delta)_{p,\theta,v} = \sup\{\|f - s_h(f)\|_{p,\theta,v} : 0 \leq h \leq \delta\}, \quad \delta \in [0, 1].$$

Будем писать $f \in W^1 L_v^{p,\theta}[0, 1]$, если f абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, 1-периодична и $f' \in L_v^{p,\theta}[0, 1]$. Определим следующий K -функционал

$$\begin{aligned} K_{p,\theta,v}(f, t) &= K(f, t, \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1], W^1 L_v^{p,\theta}[0, 1]) := \\ &:= \inf\{\|f - g\|_{p,\theta,v} + t\|g'\|_{p,\theta,v} : g \in W^1 L_v^{p,\theta}[0, 1]\}. \end{aligned}$$

Мы можем определить $\Omega(f, \delta)_{p,v}$ и $E_n(f)_{p,v}$ как выше, заменив норму $\|\cdot\|_{p,\theta,v}$ на норму $\|\cdot\|_{p,v}$. Используя некоторые идеи И. И. Шарпудинова [10], второй из авторов статьи [11] доказал прямую теорему приближения полиномами Хаара в весовых симметричных (или перестановочно-инвариантных) пространствах. Из

этого результата мы выделим утверждение, касающееся весовых пространств $L_v^p[0, 1]$.

Теорема А. Пусть $1 < p < \infty$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in L_v^p[0, 1]$. Тогда

$$E_n(f)_{p,v} \leq \|f - Q_n(f)\|_{p,v} \leq C\Omega(f, 1/n)_{p,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Первой целью работы является получение аналога теоремы А для функций из $\mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$. Отметим, что приближения тригонометрическими полиномами в подобных пространствах изучалось Н. Данелия и В. М. Кокилашвили в [12], а затем В. М. Кокилашвили и А. Н. Месхи в [13]. Также мы напомним, что прямая теорема приближения полиномами Хаара в $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, была доказана П. Л. Ульяновым (см. [9, гл. 10, теорема 10.2.3], тогда как соответствующая обратная теорема была получена первым из авторов настоящей статьи [9, гл. 10, теорема 10.2.8]. В работе М. Г. Григоряна [14] получены интересные результаты о сходимости жадных алгоритмов по системе Уолша.

Теперь мы определим некоторые линейные средние рядов Фурье-Уолша-Пэли, такие как средние Бореля

$$B_r(f)(x) = e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} S_{k+1}(f)(x), \quad r \geq 1,$$

средние Эйлера

$$e_n^q(f)(x) = (1+q)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} S_{k+1}(f)(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

средние Зигмунда-Рисса

$$\sigma_n^{(r)}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k^r/n^r) \widehat{f}(k) w_k(x), \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

и средние Нерлунда

$$N_n(f)(x) = P_n^{-1} \sum_{k=1}^n p_{n-k+1} S_k(f)(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел и $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$. Также мы рассмотрим общие линейные средние

$$\tau_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k(f)(x), \quad a_{nk} \geq 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $A_{n,m} = m^{-1} \sum_{k=1}^m a_{nk}$ и $a_{nk} = 0$ при $k \geq n+1$. Матрица $A = \{a_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $AMIMS$ (почти монотонно возрастающие в среднем последовательности) или классу $AMDMS$ (почти монотонно убывающие в среднем

последовательности), если существует $K > 0$, такое что для любых $n \in \mathbb{N}$ и натуральных m, l , удовлетворяющих неравенству $1 \leq m \leq l \leq n$, мы имеем

$$A_{nm} \leq K A_{nl} \quad \text{или} \quad A_{nm} \geq K A_{nl}$$

соответственно. Определения классов $AMIMS$ и $AMDMS$ были предложены Р. Н. Мохapatрой и Б. Жалем [15].

Неубывающая и непрерывная на $[0, 1]$ функция $\omega(t)$ принадлежит классу Φ , если $\omega(0) = 0$. Функция $\omega \in \Phi$ принадлежит классу Бари-Стечкина BS_α , $\alpha > 0$, если $\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1} \omega(1/k) = O(n^\alpha \omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Это определение и его эквивалентные формы см. в [16, лемма 3].

Второй целью статьи является получение оценок сверху для приближений в $L_v^{p, \theta}[0, 1]$ средними Бореля, Эйлера, Зигмунда-Рисса и Нерлунда рядов Фурье-Уолша-Пэли. Отметим, что приближение линейными средними тригонометрических рядов Фурье в таких пространствах изучались в [12].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Следующая лемма 2.1 играет ключевую роль в нашей работе. Она доказана В. М. Кокилашвили и А. Н. Месхи [13, теорема 2.1].

Лемма 2.1. Пусть $p_0 \in (1, \infty)$ и $\mathcal{F}[0, 1]$ является классом пар неотрицательных измеримых функций, определенных на $[0, 1]$. Предположим, что для произвольной пары $(f, g) \in \mathcal{F}[0, 1]$ и всех $v \in A_{p_0}[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\left(\int_0^1 g^{p_0}(x) v(x) dx \right)^{1/p_0} \leq C_1 N([v]_{A_{p_0}[0, 1]}) \left(\int_0^1 f^{p_0}(x) v(x) dx \right)^{1/p_0},$$

где $N(x)$ — неотрицательная неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция и C_1 независима от (f, g) и v . Тогда для всех $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $(f, g) \in \mathcal{F}[0, 1]$ и $v \in A_p[0, 1]$ верно неравенство

$$\|g\|_{p, \theta, v} \leq C_2 \|f\|_{p, \theta, v},$$

где C_2 не зависит от (f, g) , но зависит от v .

Лемма 2.2. Пусть $1 < p < \infty$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in L_v^p[0, 1]$ и $Hf(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)|$. Тогда $\|Hf\|_{p, v} \leq C \|f\|_{p, v}$, где C зависит от p и $[v]_{A_p[0, 1]}$.

Лемма 2.2 принадлежит Дж. Госселину [17] и доказана им в более общей ситуации. Более сильный критерий установлен Янг Во-Санг [18].

Лемма 2.3. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0, 1]$. Тогда

$$(2.1) \quad \|S_n(f)\|_{p),\theta,v} \leq C_1 \|f\|_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(2.2) \quad \|f - S_n(f)\|_{p),\theta,v} \leq (C_1 + 1) E_n^{wp}(f)_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Неравенство (2.1) вытекает из лемм 2.1 и 2.2. Пусть $t_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k$ такое, что $\|f - t_n\|_{p),\theta,v} = E_n^{wp}(f)_{p),\theta,v}$. Поскольку $S_n(t_n) = t_n$, имеем

$$\|f - S_n(f)\|_{p),\theta,v} \leq \|f - t_n\|_{p),\theta,v} + \|Q_n(t_n - f)\|_{p),\theta,v} \leq (C_1 + 1) E_n^{wp}(f)_{p),\theta,v}$$

благодаря (2.1). $\square$

Лемма 2.4 вытекает из [9, гл. 10, теорема 10.2.7] и [9, гл. 1, (1.4.13)].

Лемма 2.4. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L^1[0, 1]$. Тогда

$$S_{2^k}(f)(x) = Q_{2^k}(f)(x), \quad x \in [0, 1].$$

Кроме того, если $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, то $Q_n(f)(x) = Q_{2^{k+1}}(f)(x)$ при $x \in [0, i/2^k)$ и $Q_n(f)(x) = Q_{2^k}(f)(x)$ при $x \in [i/2^k, 1)$.

Лемма 2.5. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0, 1]$. Тогда

$$(2.3) \quad \|Q_n(f)\|_{p),\theta,v} \leq C_1 \|f\|_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(2.4) \quad \|f - Q_n(f)\|_{p),\theta,v} \leq (C_1 + 1) E_n(f)_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2.4 мы получаем $|Q_n(f)(x)| \leq Hf(x)$, где Hf определен в лемме 2.2. В силу леммы 2.2 мы выводим (2.3), тогда как (2.4) доказывается аналогично (2.2). $\square$

Лемма 2.6. Если $\alpha > 0$ и $\omega \in BS_\alpha$, то существуют $\beta \in (0, \alpha)$ и $C > 0$, такие что

$$(2.5) \quad \omega(u) \leq C(u/v)^\beta \omega(v), \quad 0 < v \leq u \leq 1.$$

Обратно, из выполнения (2.5) для некоторого $\beta \in (0, \alpha)$ и $\omega \in \Phi$ вытекает, что $\omega \in BS_\alpha$.

Лемма 2.6 доказана Н. К. Бари и С. Б. Стечкиным [16, лемма 3].

Лемма 2.7. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$ и $f(x, y)$ неотрицательна и измерима на $[0, 1) \times [0, 1)$. Тогда

$$(2.6) \quad \left\| \int_0^1 f(\cdot, y) dy \right\|_{p),\theta,v} \leq \int_0^1 \|f(\cdot, y)\|_{p),\theta,v} dy.$$

Доказательство. Обобщенное неравенство Минковского верно в L^p норме по отношению к произвольной мере. Таким образом,

$$\varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \left\| \int_0^1 f(\cdot, y) dy \right\|_{p-\varepsilon, v} \leq \int_0^1 \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \|f(\cdot, y)\|_{p-\varepsilon, v} dy.$$

Взяв точную верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, p-1)$, получаем (2.6). $\square$

Лемма 2.8. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$ и функции $f \in L_v^{p, \theta}[0, 1]$ продолжены на $\mathbb{R}$ 1-периодически. Тогда максимальный оператор M ограничен в $L_v^{p, \theta}[0, 1]$. Как следствие, односторонние операторы Стеклова s_h , $0 < h < 1$, равномерно ограничены в $L_v^{p, \theta}[0, 1]$.

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано в [6, теорема 4.2] и оно верно также в $L_v^{p, \theta}[-1, 2]$. Таким образом, мы имеем $\|Mg\|_{L_v^{p, \theta}[-1, 2]} \leq C_1 \|g\|_{L_v^{p, \theta}[-1, 2]} \leq C_2 \|f\|_{p, \theta, v}$, где g есть 1-периодическое продолжение f . Также,

$$\left\| h^{-1} \int_0^h f(\cdot + t) dt \right\|_{p, \theta, v} \leq 2 \left\| (2h)^{-1} \int_{-h}^h f(\cdot + t) dt \right\|_{p, \theta, v} \leq 2 \|Mg\|_{L_v^{p, \theta}[-1, 2]}.$$

Эти факты дают второе утверждение леммы 2.8. $\square$

Лемма 2.9. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in W^1 L_v^{p, \theta}[0, 1]$. Тогда

$$\Omega(f, \delta)_{p, \theta, v} \leq C \delta \|f'\|_{p, \theta, v}, \quad \delta \in [0, 1].$$

Доказательство. По определению s_h и условию $f \in W^1 L_v^{p, \theta}[0, 1]$ имеем

$$s_h(f)(x) - f(x) = h^{-1} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt = h^{-1} \int_0^h \int_0^t f'(x+s) ds dt.$$

используя леммы 2.7 и 2.8, получаем

$$\|s_h(f) - f\|_{p, \theta, v} \leq h^{-1} \int_0^h t \left\| t^{-1} \int_0^t f'(x+s) ds \right\|_{p, \theta, v} dt \leq C_1 \frac{h}{2} \|f'\|_{p(\cdot), \theta}.$$

Беря точную верхнюю грань по $0 \leq h \leq \delta$, получаем

$$\Omega(f, \delta)_{p, \theta, v} = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|s_h(f) - f\|_{p, \theta, v} \leq \frac{C_1 \delta}{2} \|f'\|_{p, \theta, v}. \quad \square$$

Следуя Шарапудинову [10], рассмотрим оператор

$$\Theta_z(f)(x) = \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \int_0^h f(x+t) dt h^{-1} dh, \quad z \in (0, 1].$$

Аналогично [10, теорема 4] доказывається

Лемма 2.10. Пусть функция $f \in L^1[0, 1]$ продолжена 1-периодически на $\mathbb{R}_+$. Тогда

- (i) функция $\Theta_z(f)(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и 1-периодична;
- (ii) производная $\Theta'_z(f)(x)$ равна

$$2z^{-1} \int_{z/2}^z h^{-1}(f(x+h) - f(x)) dh \quad \text{н.в. на } [0, 1].$$

Используя лемму 2.10, мы можем доказать следующую эквивалентность между модулем непрерывности и соответствующим K -функционалом аналогично [11, теорема 2]. Отметим, что близкий результат для пространств с переменным показателем содержится в [10] в неявном виде.

Лемма 2.11. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p), \theta}[0, 1]$. Тогда существуют постоянные $C_2 > C_1 > 0$, такие что

$$C_1 \Omega(f, t)_{p, \theta, v} \leq K_{p, \theta, v}(f, t) \leq C_2 \Omega(f, t)_{p, \theta, v}, \quad t \in [0, 1].$$

Лемма 2.12. Пусть $j \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Тогда существует $C = C(j, t)$, независимая от n , такая что

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{t^{n-k}}{(k+1)^j} \leq C \frac{(t+1)^n}{(n+1)^j}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.12 доказана в [19].

3. ПРЯМЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Теорема 3.1. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in W^1 L_v^{p), \theta}[0, 1]$. Тогда

$$(3.1) \quad E_n(f)_{p, \theta, v} \leq \|f - Q_n(f)\|_{p, \theta, v} \leq C n^{-1} \|f'\|_{p, \theta, v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(3.2) \quad E_n^{wp}(f)_{p, \theta, v} \leq \|f - S_n(f)\|_{p, \theta, v} \leq C n^{-1} \|f'\|_{p, \theta, v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Левое неравенство (3.1) очевидно. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, и $n = 2^k + i$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq 2^k$. Если $\Delta_{n, m}$, $1 \leq m \leq n$, являются интервалами постоянства для $Q_n(f)$, то в силу (1.1) для $x \in \Delta_{n, m}$ имеем

$$\begin{aligned} n|Q_n(f)(x) - f(x)| &\leq n|\Delta_{n, m}|^{-1} \int_{\Delta_{n, m}} |f(y) - f(x)| dy = \\ &= n|\Delta_{n, m}|^{-1} \int_{\Delta_{n, m}} \left| \int_x^y f'(t) dt \right| dy \leq n|\Delta_{n, m}|^{-1} \int_{\Delta_{n, m}} \int_{\Delta_{n, m}} |f'(t)| dt dy \leq \\ &\leq n \int_{\Delta_{n, m}} Q_n(|f'|)(y) dy = n|\Delta_{n, m}| Q_n(|f'|)(x) \leq 2Q_n(|f'|)(x) \end{aligned}$$

и в силу (2.3)

$$n\|f - Q_n(f)\|_{p,\theta,v} \leq 2\|Q_n(|f'|)\|_{p,\theta,v} \leq C_1\|f'\|_{p,\theta,v},$$

так что (3.1) доказано. Используя (3.1) и лемму 2.4, получаем

$$E_{2^k}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \|f - Q_{2^k}(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_1 2^{-k} \|f'\|_{p,\theta,v}.$$

Теперь для $n = 2^k + i$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq 2^k$, мы находим, что

$$E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq E_{2^k}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \frac{2C_1}{2^{k+1}} \|f'\|_{p,\theta,v} \leq \frac{2C_1}{n} \|f'\|_{p,\theta,v}.$$

Применяя (2.2), доказываем все неравенства из (3.2). $\square$

Теорема 3.2. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$. Тогда

$$(3.3) \quad E_n(f)_{p,\theta,v} \leq \|f - Q_n(f)\|_{p,\theta,v} \leq C\Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(3.4) \quad E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \|f - S_n(f)\|_{p,\theta,v} \leq C\Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\Theta_z(f)$ — оператор, рассмотренный в лемме 2.10. В силу пункта (ii) этой леммы мы имеем

$$(3.5) \quad \|\Theta'_z(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_1 z^{-1} \Omega(f, z)_{p,\theta,v}.$$

Согласно лемме 2.7 мы получаем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \|f - \Theta_z(f)\|_{p,\theta,v} &= \left\| 2z^{-1} \int_{z/2}^z (f(\cdot) - s_h(f)(\cdot)) dh \right\|_{p,\theta,v} \leq \\ &\leq \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \|f - s_h(f)\|_{p,\theta,v} \leq \Omega(f, z)_{p,\theta,v}. \end{aligned}$$

Из (3.5), (3.6), теоремы 3.1 и (2.6) мы выводим, что

$$\begin{aligned} \|f - Q_n(f)\|_{p,\theta,v} &\leq \|f - \Theta_{1/n}(f)\|_{p,\theta,v} + \|\Theta_{1/n}(f) - Q_n(\Theta_{1/n}(f))\|_{p,\theta,v} + \\ &+ \|Q_n(\Theta_{1/n}(f) - f)\|_{p,\theta,v} \leq C_2 \|f - \Theta_{1/n}(f)\|_{p,\theta,v} + C_3 n^{-1} \|\Theta'_{1/n}(f)\|_{p(\cdot),\theta} \\ &\leq C_3 \Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

и (3.3) доказано.

Для $k \in \mathbb{N}$ по лемме 2.11 мы получаем

$$(3.7) \quad \Omega(f, 2^k t)_{p,\theta,v} \leq C_4 K_{p,\theta,v}(f, 2^k t) \leq 2^k C_4 K_{p,\theta,v}(f, t) \leq C_5 2^k \Omega(f, t)_{p,\theta,v}.$$

В силу леммы 2.4 и (3.3) мы имеем

$$E_{2^k}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \|f - Q_{2^k}(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_6 \Omega(f, 1/2^k)_{p,\theta,v}.$$

Наконец, для $2^k \leq n < 2^{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, из (3.7) вытекает

$$\begin{aligned} E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} &\leq E_{2^k}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq C_6 \Omega(f, 1/2^k)_{p,\theta,v} \leq \\ &\leq 2C_5 C_6 \Omega(f, 1/2^{k+1})_{p,\theta,v} \leq C_7 \Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и (2.2) мы выводим (3.4). $\square$

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ-УОЛША-ПЭЛИ

Используя неравенства (2.2) и (2.4), легко оценить приближение линейными средними рядов Фурье-Уолша-Пэли или рядов Фурье-Хаара в терминах соответствующих наилучших приближений. Поэтому нашей целью является получение оценок этих величин в терминах модуля непрерывности функции или его мажоранты.

Теорема 4.1. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$. Тогда

$$(4.1) \quad \|f - B_r(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_1 e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq C_2 \Omega(f, 1/r)_{p,\theta,v}, \quad r \geq 1,$$

где $[r]$ — целая часть r и C_1, C_2 — некоторые постоянные.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} = \|f - t_n\|_{p,\theta,v}$, $t_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k$. Используя (2.1) из леммы 2.3, получаем

$$(4.2) \quad \|B_r(f)\|_{p,\theta,v} \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-r} \frac{r^k}{k!} \|S_{k+1}(f)\|_{p,\theta,v} \leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-r} \frac{r^k}{k!} \|f\|_{p,\theta,v} = C_1 \|f\|_{p,\theta,v}.$$

Применяя (4.2), мы имеем

$$\begin{aligned} \|f - B_r(f)\|_{p,\theta,v} &\leq \|B_r(f) - B_r(t_n)\|_{p,\theta,v} + \|B_r(t_n) - t_n\|_{p,\theta,v} + \\ &+ \|t_n - f\|_{p,\theta,v} \leq (1 + C_1) E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} + \|B_r(t_n) - t_n\|_{p,\theta,v}. \end{aligned}$$

По определению, $S_{k+1}(t_n) = t_n$ для $k \geq n$ и

$$\|B_r(t_n) - t_n\|_{p,\theta,v} = \left\| e^{-r} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} (S_{k+1}(t_n) - t_n) \right\|_{p,\theta,v} \leq C_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} E_{k+1}^{wp}(t_n)_{p,\theta,v}.$$

Поскольку для $0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} E_{k+1}^{wp}(t_n)_{p,\theta,v} &\leq E_{k+1}^{wp}(t_n - f)_{p,\theta,v} + E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \\ &\leq E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} + E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq 2E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 \|f - B_r(f)\|_{p,\theta,v} &\leq C_2 \left(E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} + \left\| e^{-r} \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} (S_{k+1}(t_n) - t_n) \right\|_{p,\theta,v} \right) \\
 (4.3) \quad &\leq C_2 \left(E_n^{wp}(f)_{p,\theta,v} + C_2 e^{-r} \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} E_{k+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \right).
 \end{aligned}$$

Докажем, что

$$(4.4) \quad e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} \geq C_4 > 0, \quad r \geq r_0.$$

Пусть $r \geq 1$, $n = [r]$, $m = [n^{1/2}]$,

$$D_1 = \sum_{k=n-m}^n \frac{r^k}{k!}, \quad D_2 = \sum_{k=n}^{n+m} \frac{r^k}{k!}, \quad a_{nk} = \frac{r^{n-k}}{(n-k)!} : \frac{r^{n+k}}{(n+k)!}.$$

Тогда для $k = 1, 2, \dots, m$ мы имеем (считаем $\prod_{i=1}^0 = 1$)

$$\begin{aligned}
 a_{nk} &= \frac{n(n+k)}{r^2} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n^2 - i^2}{r^2} \geq \frac{n^2}{r^2} \frac{n^{2k-2}}{r^{2k-2}} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i^2}{n^2} \right) \geq \\
 &\geq \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n} \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i^2}{n^2} \right)
 \end{aligned}$$

в силу неравенства Бернулли $\prod_{i=1}^m (1 + h_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^m h_i$, $h_i > -1$. Значит,

$$a_{nk} \geq e^{-2} \left(1 - \frac{(m-1)m(2m-1)}{n^2} \right) \geq e^{-2} \left(1 - \frac{2m^3}{n^2} \right) \geq e^{-2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) \geq \frac{1}{3e^2}$$

при $r \geq n \geq 9$ и $k = 1, 2, \dots, m$. Мы заключаем, что $D_1 \geq D_2/(3e^2)$.

Следующим шагом, чтобы получить (4.4), будет оценка

$$\begin{aligned}
 D_3 &:= \sum_{k=n+m+1}^{2n} \frac{r^k}{k!} \leq \frac{r^{n+m+1}}{(n+m+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{(n+m+1)^j} = \\
 &= \frac{r^{n+m+1}}{(n+m+1)!} \frac{n+m+1}{n+m-r+1} \leq \frac{r^{n+m}}{(n+m)!} \frac{n+m+1}{m} \leq \\
 &\leq \frac{1}{a_{nm}} \frac{r^{n-m}}{(n-m)!} (m+3+2/m) \leq 3e^2 \frac{11}{9} m \frac{r^{n-m}}{(n-m)!} \leq 4e^2 D_1
 \end{aligned}$$

при $m \geq 3$ (или $r \geq n \geq 9$), поскольку

$$\frac{r^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{r^k}{k!} > 1 \quad \text{для} \quad k = n-m, n-m+1, \dots, n-1.$$

Наконец, мы видим, что

$$D_4 := \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \leq \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{(2n+1)^j} \leq \frac{2}{3} \frac{r^{2n}}{(2n)!} \sum_{j=0}^{\infty} (2/3)^j \leq 2D_3 \leq 8e^2 D_1,$$

поскольку $r/(2n+1) \leq (n+1)/(2n+1) \leq 2/3$ при $r \geq 1$. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} \geq e^r - D_2 - D_3 - D_4 \geq e^r - e^2(3D_1 + 4D_1 + 8D_1)$$

и $16e^2 \sum_{k=0}^n r^k/k! \geq e^r$, т.е. (4.4) доказано с постоянной $C_4 = (4e)^{-2}$ и $r_0 = 9$.

Из (4.3), (4.4) и убывания $E_k(f)_{p,\theta,v}$ выводим первое неравенство в (4.1). Для $0 < t \leq u \leq 1$ существует $k \in \mathbb{Z}_+$, такое что $2^k \leq u/t < 2^{k+1}$. Используя (3.7), мы получаем

$$(4.5) \quad \Omega(f, u)_{p,\theta,v} \leq C_5 2^{k+1} \Omega(f, t)_{p,\theta,v} \leq 2C_5 \frac{u}{t} \Omega(f, t)_{p,\theta,v}.$$

Применяя доказанное первое неравенство из (4.1), (3.4) и (4.5), имеем

$$\begin{aligned} \|f - B_r(f)\|_{p,\theta,v} &\leq C_6 \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} e^{-r} \Omega(f, (k+1)^{-1})_{p,\theta,v} \leq \\ &\leq C_7 \Omega(f, (r+1)^{-1})_{p,\theta,v} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r+1}{k+1} \frac{r^k e^{-r}}{k!} \leq \\ &\leq C_7 \Omega(f, (r+1)^{-1})_{p,\theta,v} 2e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+1}}{(k+1)!} \leq 2C_7 \Omega(f, r^{-1})_{p,\theta,v}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 4.2. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$, $t > 0$. Тогда

$$\|f - e_n^t(f)\|_{p,\theta,v} \leq C \Omega(f, 1/n)_{p,\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. По определению средних Эйлера и теореме 3.2 мы имеем

$$\begin{aligned} (4.6) \quad \|f - e_n^t(f)\|_{p,\theta,v} &= \frac{1}{(1+t)^n} \left\| \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^{n-j} (f - S_{j+1}(f)) \right\|_{p,\theta,v} \leq \\ &\leq \frac{C_1}{(1+t)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^{n-j} E_{j+1}^{wp}(f)_{p,\theta,v} \leq \frac{C_2}{(1+t)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^{n-j} \Omega(f, (j+1)^{-1})_{p,\theta,v}. \end{aligned}$$

Используя (4.5), получаем

$$(4.7) \quad \Omega(f, (j+1)^{-1})_{p,\theta,v} \leq C_3 \frac{n+1}{j+1} \Omega(f, (n+1)^{-1})_{p,\theta,v}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

Применяя (4.6), (4.7) и лемму 2.12, мы заключаем, что

$$\|f - e_n^t(f)\|_{p(\cdot),\theta} \leq \frac{C_4(n+1)}{(1+t)^n} \Omega(f, (n+1)^{-1})_{p,\theta,v} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{t^{n-j}}{j+1} \leq C_5 \Omega(f, n^{-1})_{p,\theta,v}$$

при $n \in \mathbb{N}$. □

Лемма 4.1. Пусть $A = (a_{nk})_{n=1, k=1}^{\infty, n}$ — треугольная матрица. Если (a) $A \in AMIMS$ или (b) $A \in AMDMS$ и $na_{n1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$, то для любого числа $\alpha \in (0, 1)$ существует $C > 0$, такое что неравенство $\sum_{k=1}^n k^{-\alpha} a_{nk} \leq Cn^{-\alpha}$ выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 4.1 доказана Р.Н.Мохapatрой и Б.Жалем [15]. Следующая теорема 4.3 и ее следствия дают оценки приближения средними рядов Фурье-Уолша-Пэли в терминах мажоранты модуля непрерывности.

Теорема 4.3. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p, \theta}[0, 1]$, $\omega \in BS_1$ и $\Omega(f, t)_{p, \theta, v} = O(\omega(t))$, $t \in [0, 1]$. Если выполнено одно из условий

(i) $A \in AMIMS$;

(ii) $A \in AMDMS$ и $na_{n1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$;

то для $\tau_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k(f)(x)$ имеем

$$(4.8) \quad \|f - \tau_n(f)\|_{p, \theta, v} = O(\omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. (i) Пусть $A \in AMIMS$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $m = [n/2]$. По определению $\tau_n(f)$ и теореме 3.2 имеем

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \|\tau_n(f) - f\|_{p, \theta, v} &\leq \left(\sum_{k=1}^m + \sum_{k=m+1}^n \right) a_{nk} \|S_k(f) - f\|_{p, \theta, v} \leq \\ &\leq C_1 \left(\sum_{k=1}^m a_{nk} \omega(k^{-1}) + \omega(m^{-1}) \sum_{k=m+1}^n a_{nk} \right) =: C_1(I_1 + I_2), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

По лемме 2.6 найдем $\beta \in (0, 1)$, такое что

$$\frac{\omega(u)}{u^\beta} \leq C_2 \frac{\omega(v)}{v^\beta}, \quad 0 < v \leq u \leq 1.$$

Используя последнее неравенство и лемму 4.1. мы получаем

$$(4.10) \quad \begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{k=1}^m a_{nk} C_2 (m/k)^\beta \omega(1/m) \leq C_2 m^\beta \omega(1/m) \sum_{k=1}^m a_{nk} k^{-\beta} \leq \\ &\leq C_3 \frac{m^\beta}{n^\beta} \omega(1/m) \leq C_4 \omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

поскольку $\omega(2t) \leq C_5 \omega(t)$ в силу (2.5) справедливо неравенство $1/m \leq 2/(n-1)$.

Применяя равенство $\sum_{k=1}^n a_{nk} = 1$, имеем

$$(4.11) \quad I_2 = \omega(1/m) \sum_{k=m+1}^n a_{nk} \leq C_5 \omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сопоставление неравенств (4.9), (4.10) и (4.11) дает (4.8).

(ii) Пусть $A \in AMDMS$, $na_{n1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае снова имеем (4.9) и (4.11). Используя пункт (b) леммы 4.1, получаем (4.10) и (4.8) доказано. $\square$

Следствие 4.1. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$, $\omega \in BS_1$, $r \geq 1$ и $\Omega(f, t)_{p,\theta,v} = O(\omega(t))$, $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\|f - \sigma_n^{(r)}(f)\|_{p,\theta,v} \leq C\omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Используя преобразование Абеля, мы видим, что

$$\sigma_n^{(r)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^r - (k-1)^r}{n^r} S_k(f) =: \sum_{k=1}^n b_{nk} S_k(f).$$

Если $r \geq 1$, то функция $y = x^r$ выпукла на $[0, +\infty)$ и $(k+1)^r + (k-1)^r \geq 2k^r$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $\{b_{nk}\}_{k=1}^n$ не убывает по k и можно применить пункт (i) теоремы 4.3, чтобы получить результат следствия. $\square$

Следствие 4.2. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0, 1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p,\theta}[0, 1]$, $\omega \in BS_1$, $\Omega(f, t)_{p,\theta,v} = O(\omega(t))$, $t \in [0, 1]$, $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ — монотонно неубывающая последовательность положительных чисел, такая что $np_n = O(P_n)$, $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$. Тогда

$$\|f - N_n(f)\|_{p,\theta,v} \leq C\omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Положим $a_{nk} = p_{n-k+1}/P_n$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Тогда a_{nk} является невозрастающей по k и $na_{n1} = np_n/P_n = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Применяя часть (ii) теоремы 4.3, мы получаем результат следствия 4.2. $\square$

Abstract. In the paper we give direct theorems on approximation by Haar and Walsh polynomials in weighted generalized grand Lebesgue space. Also the degree of approximation by Borel, Euler, Riesz-Zygmund and Nörlund linear means of Walsh-Paley-Fourier series are treated in the above cited space.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Iwaniec and C. Sbordone, "On integrability of the Jacobian under minimal hypotheses," Arch. Ration. Mech. Anal., **119** (2), 129–143, 1992.
- [2] L. Greco, T. Iwaniec and C. Sbordone, "Inverting the p -harmonic operator," Manuscr. Math., **92** (2), 249–258, 1997.
- [3] L. D'Onofrio, C. Sbordone and R. Schiattarella, "Grand Sobolev spaces and their application in geometric function theory and PDEs," J. Fixed Point Theory Appl., **13** (2), 309–340, 2013.
- [4] C. Sbordone, "New estimates for div-curl products and very weak solutions of PDEs," Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **25** (3-4), 739–756, 1997.
- [5] B. Muckenhoupt, "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function," Trans. Amer. Math. Soc., **165**, 207–226, 1972.

- [6] A. Fiorenza, B. Gupta and P. Jain, "The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces," *Studia Math.*, **188** (2), 123–133, 2008.
- [7] V. Kokilashvili, "Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces," *J. Math. Sci.*, **170** (1), 20–33, 2010.
- [8] Б. С. Кашин, А. А. Саакян. *Ортогональные ряды*. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
- [9] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, М.: Наука, 1987.
- [10] И. И. Шарапудинов, "Приближение функций из пространств Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье-Хаара," *Матем. сб.*, **205** (2), 145–160, 2014.
- [11] С. С. Волосивец, "Приближение полиномами по системе Хаара в весовых симметричных пространствах," *Матем. заметки*, **99** (5), 649–657, 2016.
- [12] N. Danelia and V. Kokilashvili, "Approximation by trigonometric polynomials in subspace of weighted grand Lebesgue spaces," *Bull. Georgian Nat. Acad. Sci.*, **7** (1), 11–15, 2013.
- [13] В. М. Кокилашвили, А. Н. Месхи, "Весовая экстраполяция в пространствах Иванец-Сбордоне. Приложения к интегральным операторам и теории приближений," *Труды МИ-АН*, **293**, 167–192, 2016.
- [14] M. Grigoryan, "Uniform convergence of the greedy algorithm with respect to the Walsh system," *Studia Math.*, **198** (2), 197–206, 2010.
- [15] R. N. Mohapatra and B. Szal, "On trigonometric approximation of functions in the L^q -norm," *Demonstr. Math.*, **51** (1), 17–26, 2018.
- [16] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, "Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций," *Труды Москов. матем. об-ва*, **5**, 483–522 (1956).
- [17] J. A. Gosselin, "A weighted norm inequality for Fourier-Vilenkin series," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **49** (2), 349–353, 1975.
- [18] W. S. Young, "Weighted norm inequalities for Vilenkin-Fourier series," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340** (1), 273–291, 1993.
- [19] S. S. Volosivets and A. A. Tyuleneva, "Approximation of functions and their conjugates in L^p and uniform metric by Euler means," *Demonstr. Math.*, **51** (1), 141–150, 2018.

Поступила 26 мая 2023

После доработки 30 августа 2023

Принята к публикации 15 сентября 2023

МЕРОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФЕРМА

К. ЖУ, К. КИ

Университет Цзинань, Китай¹

E-mails: 2579612796@qq.com; xiaoguang.202@163.com; xiaogqi@mail.sdu.edu.cn

Аннотация. В статье изучается существование мероморфных решений гипер порядка меньше 1 дифференциально-разностных уравнений типа Ферма. Улучшаются ранее известные результаты подобных исследований.

MSC2020 numbers: 39B32; 30D35.

Ключевые слова: мероморфные функции; уравнение типа Ферма; теорема Кантана; дифференциально-разностное уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Следующее функциональное уравнение типа Ферма

$$(1.1) \quad f^n(z) + g^m(z) = 1,$$

можно считать функциональным аналогом диофантового уравнения Ферма $x^n + y^n = 1$. Монтель [15] доказал, что (1.1) не имеет трансцендентального целого решения при $n = m \geq 3$. Потом Гросс [6] доказал, что (1.1) не имеет трансцендентального мероморфного решения при $n = m \geq 4$. Далее, Гросс [6, 7] и Бейкер [1] получили вид мероморфных решений (целых решений при $n = m = 2$) уравнения (1.1) при $n = m = 2$ и при $n = m = 3$, соответственно.

В дальнейшем уравнение (1.1) интенсивно изучалось. Соответствующие результаты можно найти в [3].

С широким применением теории Неванлины в области разностных уравнений в комплексных областях во многих исследованиях были рассмотрены уравнение (1.1) при $g = f(z + c)$ ($c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Изучались существование и вид решений уравнений $f^n(z) + f^m(z + c) = 1$ и $f^n(z) + f^m(z + c) = e^{Az+B}$, где A и B константы. Соответствующие результаты можно найти в [5, 8, 9, 10, 12, 13] и т.д.

¹Работа выполнена при поддержке NNSF of China (No. 12061042) и NSF of Shandong Province (ZR2022MA071).

С другой стороны, Янг и Лайне [23] изучили существование решений разностного уравнения

$$(1.2) \quad f^2(z) + P(z)f(z+1) = Q(z),$$

что можно рассмотреть как обобщение разностного уравнения типа Ферма. Они доказали, что уравнение (1.2) не имеет трансцендентальных целых решений конечного порядка, если $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы. После них Ки и Янг [17] доказали, что уравнение

$$f^n(z) + P(z)f^m(z+c) = Q(z)$$

не имеет трансцендентальных целых решений конечного порядка, если $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы, а n и m положительные целые числа с $n \neq m$. Подробности можно найти в [8, 11, 16, 18, 21] и т.д.

Недавно, многие исследователи начали применять теорию Неванлинны для изучения комплексных дифференциально-разностных уравнений. В частности, Лиу и др. [10, 11] рассмотрели существование дифференциально-разностных уравнений типа Ферма.

Теорема А [10]. *Уравнение*

$$(1.3) \quad f^n(z) + (f'(z+c))^m = 1$$

не имеет трансцендентальных целых решений конечного порядка, при условии $n \neq m$, где n, m – положительные целые числа.

Потом, Ки и Янг рассмотрели обобщение уравнения:

Теорема В [19]. *Пусть $p(z)$ – полином, а n и m – положительные целые числа с условием $n \neq m$. Тогда уравнение*

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = p(z)$$

не имеет трансцендентальных целых решений конечного порядка.

Теорема С [19]. *Пусть $p(z)$, $q(z)$ и $r(z)$ – ненулевые полиномы, а $n > m + 1$ – положительные целые числа. Тогда уравнение*

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = p(z)e^{r(z)} + q(z)$$

не имеет трансцендентальных целых решений конечного порядка.

Теорема D [20]. *Пусть $p(z)$ и $q(z)$ – ненулевые полиномы, а $r(z)$, $s(z)$ – непостоянные полиномы. Если $n > m + 2$ – положительные целые числа, и*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{r(z)}{s(z)} \right| \neq \left(\frac{m}{n} \right)^{\pm 1},$$

тогда уравнение

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = p(z)e^{r(z)} + q(z)e^{s(z)}$$

не имеет трансцендентальных целых решений конечного порядка.

В настоящей статье рассматриваются следующие вопросы

1. Что будет, если условие “ $p(z)$ и $q(z)$ – ненулевые полиномы,” заменить на “ $p(z)$ и $q(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше, чем $\max\{\deg r(z), \deg s(z)\}$ ”?

2. Можно ли в Теореме D улучшить ограничение на степень $f(z)$?

В настоящей статье мы даем ответы на эти вопросы.

Теорема 1.1. Пусть $r(z)$, $s(z)$ – ненулевые полиномы, $p(z)$ и $q(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше, чем $\max\{\deg r(z), \deg s(z)\}$. Если $n > m + 2$, и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{r(z)}{s(z)} \right| \neq \left(\frac{m}{n} \right)^{\pm 1},$$

тогда уравнение

$$(1.4) \quad f^n(z) + (f'(z + c))^m = p(z)e^{r(z)} + q(z)e^{s(z)}$$

не имеет трансцендентальных целых решений гиперпорядка меньше 1.

На самом деле, при условии теоремы 1.1, если $\deg r(z) = \deg s(z) = k > 0$, $r(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0$ и $s(z) = b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_0$, где a_j , b_j – постоянные и $a_k b_k \neq 0$, ($j = 0, 1, \dots, k$), тогда уравнение (1.4) можно заменить на

$$(1.5) \quad f^n(z) + (f'(z + c))^m = P_1(z)e^{A_1 z^k} + Q_1(z)e^{B_1 z^k},$$

при $a_k \neq b_k$, где $A_1 = a_k$, $B_1 = b_k$, а $P_1(z)$, $Q_1(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше k , и

$$(1.6) \quad f^n(z) + (f'(z + c))^m = P_2(z)e^{A_2 z^k},$$

при $a_k = b_k$, где $A_2 = a_k = b_k$, а $P_2(z)$ – ненулевая целая функция порядка меньше k ,

Когда $\deg r(z) \neq \deg s(z)$, без ограничения общности, можем считать, что $k = \deg r(z) > \deg s(z)$, тогда уравнение (1.4) трансформируется в

$$(1.7) \quad f^n(z) + (f'(z + c))^m = P_3(z)e^{A_3 z^k} + Q_3(z),$$

где $P_3(z)$, $Q_3(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше k , и A_3 – отличная от нуля константа.

Поэтому в дальнейшем мы изучим существование решений уравнений (1.5)-(1.7).

Теорема 1.2. Пусть $P_1(z), Q_1(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше k , а A_1, B_1 – разные отличные от нуля константы, и пусть n, m – натуральные числа с $n > m + 2$. Если уравнение (1.5) имеет мероморфное решение $f(z)$ гиперпорядка строго меньше 1, и $N(r, f) = S(r, f)$, тогда возможны следующие два случая:

- (1) $f(z) = r(z)e^{\frac{A_1 z^k}{n}}$ и $\frac{A_1}{B_1} = \frac{n}{m}$, где $r^n(z) = P_1(z)$.
- (2) $f(z) = s(z)e^{\frac{B_1 z^k}{n}}$ и $\frac{A_1}{B_1} = \frac{m}{n}$, где $s^n(z) = Q_1(z)$.

Пример. Легло видеть, что уравнение

$$f^4(z) + f'(z+1) = e^{4z}e^{4z^2} + (2z+3)e^{3z+2}e^{z^2}$$

имеет решение $f(z) = e^z e^{z^2}$. Здесь, $P_1(z) = e^{4z}$, $A_1 = 4$ и $Q_1(z) = (2z+3)e^{3z+2}$, $B_1 = 1$, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{4}{1} = \frac{n}{m}$. Конечно, можно также сказать, что $P_1(z) = (2z+3)e^{3z+2}$, $A_1 = 1$ и $Q_1(z) = e^{4z}$, $B_1 = 4$, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{4} = \frac{m}{n}$. Этот пример показывает, что при условии теоремы 1.2, вид решений уравнения (1.5) соответствует нашим результатам.

Следствие 1.3. Пусть $P_1(z), Q_1(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше k , а A_1, B_1 – различные ненулевые константы. Если $n > m + 2$ – два натуральных числа и $\frac{A_1}{B_1} \neq \left(\frac{m}{n}\right)^{\pm 1}$, тогда уравнение (1.5) не имеет целых трансцендентных решений гиперпорядка строго меньше 1.

Теорема 1.4. Пусть $P_2(z)$ – целая функция порядка меньше k , а A_2 – ненулевая константа, и пусть $n > m + 1$ – два натуральных числа. Тогда уравнение (1.6) не имеет целых трансцендентных решений гиперпорядка строго меньше 1.

Теорема 1.5. Пусть $P_3(z), Q_3(z)$ – ненулевые целые функции порядка меньше k , A_3 – ненулевая константа, и пусть $n > m + 2$ – два целых положительных числа. Тогда уравнение (1.7) не имеет целых трансцендентных решений гиперпорядка строго меньше 1.

Фактически, из теоремы 1.5 мы можем получить улучшение теоремы С.

Следствие 1.6. Пусть $r(z)$ – непостоянный полином, $p(z)$ и $q(z)$ – две ненулевые целые функции порядка меньше $\deg r(z)$. Если $n > m + 2$ – два целых положительных числа, тогда

$$f^n(z) + (f'(z+c))^m = p(z)e^{r(z)} + q(z)$$

не имеет целых трансцендентных решений гиперпорядка строго меньше 1.

Замечания (1) В условиях теоремы 1.4 и теоремы 1.5 мы видим, что уравнение (1.6) и уравнение (1.7) не имеют трансцендентных мероморфных решений гиперпорядка строго меньше 1, удовлетворяющих $N(r, f) = S(r, f)$.

(2) Требуемый результат теоремы 1.1 непосредственно следует из следствия 1.3 и теорем 1.4-1.5.

В дальнейшем мы предполагаем, что читатель знаком со стандартными обозначениями и фундаментальными результатами теории Неванлинны [22].

2. НЕКОТОРЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 2.1. [4, Теорема 5.1] Пусть $f(z)$ — мероморфная функция гиперпорядка строго меньше 1. Тогда

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) + m\left(r, \frac{f(z)}{f(z+c)}\right) = S(r, f).$$

Замечание. В этой статье мы будем обозначать через $S(r, f)$ любую величину, удовлетворяющую $S(r, f) = o(T(r, f))$, при $r \rightarrow \infty$ вне возможного исключительного множества E конечной логарифмической меры. При этом через $S_1(r, f)$ мы обозначаем любую величину, удовлетворяющую $S_1(r, f) = o(T(r, f))$ для всех r вне возможного исключительного множества E_1 конечной линейной меры. E и E_1 не обязательно должны быть одинаковыми в каждом случае.

Из леммы 2.1 и леммы 8.3 в [4] мы получаем следующий результат.

Лемма 2.2. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция гиперпорядка строго меньше 1, тогда имеем

$$\begin{aligned} N(r, f(z+c)) &= N(r, f) + S(r, f), \\ N\left(r, \frac{1}{f(z+c)}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f), \end{aligned}$$

и

$$T(r, f(z+c)) = T(r, f) + S(r, f).$$

Замечание. Из леммы 2.1 и леммы 2.2 видим, что если $f(z)$ — мероморфная функция гиперпорядка строго меньше 1, то

$$(2.1) \quad m\left(r, \frac{f'(z+c)}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{f'(z+c)}{f(z+c)}\right) + m\left(r, \frac{f(z+c)}{f}\right) + O(1) \leq S(r, f).$$

Более того,

$$\begin{aligned} (2.2) \quad T(r, f'(z+c)) &\leq N(r, f'(z+c)) + m\left(r, \frac{f'(z+c)}{f}\right) + m(r, f) + O(1) \\ &\leq 2N(r, f(z+c)) + m(r, f) + S(r, f) \leq 2T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Лемма 2.3. [22, Theorem 1.49] *Предположим, что $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ — линейно независимые мероморфные функции, удовлетворяющие $\sum_{j=1}^n f_j \equiv 1$. А если*

$$\sum_{j=1}^n \bar{N}(r, f_j) = o\left(\max_{1 \leq j \leq n} \{T(r, f_j)\}\right),$$

тогда

$$\max_{1 \leq j \leq n} \{T(r, f_j)\} \leq \sum_{j=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + o\left(\max_{1 \leq j \leq n} \{T(r, f_j)\}\right),$$

при $r \rightarrow \infty, r \notin E_1$, где D — определитель Вронского $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Лемма 2.4. [2] *Пусть $f_1(z), f_2(z), \dots, f_p(z)$ — линейно независимые целые функции, где $p \geq 2$. Предположим, что для каждого комплексного числа z ,*

$$\max\{|f_1(z)|, |f_2(z)|, \dots, |f_p(z)|\} > 0.$$

Для $r > 0$:

$$T(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta - u(0), \quad u(z) = \sup_{1 \leq j \leq p} \log |f_j(z)|.$$

Положим $f_{p+1} = f_1 + f_2 + \dots + f_p$. Тогда

$$T(r) \leq \sum_{j=1}^{p+1} N_{p-1}\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + S(r) \leq (p-1) \sum_{j=1}^{p+1} \bar{N}_{p-1}\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + S(r),$$

где $S(r)$ — величина, удовлетворяющая:

$$S(r) = O(\log T(r)) + O(\log r), \quad r \rightarrow \infty, r \notin E_1.$$

Если хотя бы одно из частных $\frac{f_j}{f_m}$ является трансцендентной функцией, то

$$S(r) = o(T(r)), \quad r \rightarrow \infty, r \notin E_1,$$

а если все частные $\frac{f_j}{f_m}$ являются рациональными функциями, то

$$S(r) \leq -\frac{1}{2}p(p-1) \log r + O(1), \quad r \rightarrow \infty, r \notin E_1.$$

Здесь $n_p\left(r, \frac{1}{f}\right)$ обозначает количество нулей f в $\{z : |z| \leq r\}$, рассчитанное следующим образом: ноль f кратности t считается ровно k раз, где $k = \min\{t, p\}$. Далее, через $N_p\left(r, \frac{1}{f}\right)$ обозначаем соответствующую среднюю считающую функцию, где p — целое положительное число.

Лемма 2.5. [2] *Предположим, что условия леммы 2.4 выполнены. Тогда для любых j и m , мы имеем*

$$T\left(r, \frac{f_j}{f_m}\right) = T(r) + O(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

и для любого j ,

$$N\left(\frac{1}{f_j}\right) \leq T(r) + O(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

Лемма 2.6. [14, Лемма 2.5] Пусть m, k — целые положительные числа, $A_1, \dots, A_m$ — различные ненулевые комплексные числа, а $B_0, B_1, \dots, B_m$ — мероморфные функции порядка меньше k такие, что $B_j \not\equiv 0$ ($1 \leq j \leq m$). Положим

$$\varphi(z) = B_0(z) + \sum_{j=1}^m B_j e^{A_j z^k}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) Существуют два положительных числа $d_1 < d_2$ такие, что для достаточно больших r

$$d_1 r^k \leq T(r, \varphi) \leq d_2 r^k.$$

- (2) Если $B_0 \not\equiv 0$, то $m\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) = o(r^k)$, $r \rightarrow \infty$.

Лемма 2.7. [22, Теорема 1.24] Пусть $f(z)$ — непостоянная мероморфная функция, а k — целое положительное число. Затем,

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f}\right) + k\bar{N}(r, e) + S_1(r, e).$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть $f(z)$ — мероморфное решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условиям теоремы 1.2. Тогда по лемме 2.6 и (2.1) имеем

$$\begin{aligned} d_1 r^k &\leq m(r, P_1 e^{A_1 z^k} + Q_1 e^{B_1 z^k}) = T(r, f^n + (f'(z+c))^m) + S(r, f) \\ &= m(r, f^n + (f'(z+c))^m) + S(r, f) \\ (3.1) \quad &\leq m(r, f^n) + m\left(r, \left(\frac{f'(z+c)}{f}\right)^m\right) + m(r, f^m) + S(r, f) \\ &\leq (m+n)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

При этом из леммы 2.6, уравнений (1.5) и (2.1) получаем

$$\begin{aligned} nT(r, f) &= T(r, f^n) = m(r, f^n) + S(r, f) \\ &\leq m(r, P_1 e^{A_1 z^k} + Q_1 e^{B_1 z^k}) + m\left(r, \left(\frac{f'(z+c)}{f}\right)^m\right) + m(r, f^m) + S(r, f) \\ &\leq d_2 r^k + mT(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

то есть

$$(3.2) \quad (n-m)T(r, f) \leq d_2 r^k + S(r, f).$$

Из (3.1) и (3.2) мы знаем, что

$$(3.3) \quad D_1 r^k \leq T(r, f) \leq D_2 r^k, \quad r \rightarrow \infty, r \notin E,$$

где D_1, D_2 — положительные числа. Итак, $\rho(f) = k$, здесь и далее мы обозначаем через $\rho(f)$ порядок $f(z)$. Кроме того, из предположения, что $\rho(P_1) < k$, $\rho(Q_1) < k$, имеем

$$(3.4) \quad T(r, P_1) = S(r, f), \quad T(r, Q_1) = S(r, f).$$

Более того,

$$(3.5) \quad S(r, f) = o(r^k), \quad r \rightarrow \infty, r \notin E.$$

Согласно факторизационной теореме Адамара существует целая функция $H(z) (\neq 0)$ такая, что $f(z)H(z)$ будет целой функцией. И тогда,

$$(3.6) \quad N\left(r, \frac{1}{H}\right) = N(r, f) = S(r, f).$$

Кроме того, из уравнения (1.5) получаем, что $(f'(z+c))^m H^n$ также является целой функцией. Учитывая, что

$$T(r, f^n) \leq T\left(r, \frac{f^n}{(f'(z+c))^m}\right) + T(r, (f'(z+c))^m) + O(1),$$

получим, что

$$(3.7) \quad \begin{aligned} T\left(r, \frac{f^n}{(f'(z+c))^m}\right) &\geq nT(r, f) - m(m(r, f'(z+c)) + S(r, f)) \\ &\geq nT(r, f) - m\left(m\left(r, \frac{f'(z+c)}{f}\right) + m(r, f)\right) + S(r, f) \geq (n-m)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Предположим, $G_1(z)$ — каноническое произведение (или многочлен), образованное общими нулями a_i функций $f^n H^n$, $(f'(z+c))^m H^n$, $P_1 e^{A_1 z^k} H^n$, $Q_1 e^{B_1 z^k} H^n$, причем каждое a_i считается по минимальному числу соответствующих кратностей общих нулей всех четырех функции. Тогда $G_1(z)$ является целой функцией и удовлетворяет условию

$$(3.8) \quad N\left(r, \frac{1}{G_1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{P_1 H^n}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{P_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{H^n}\right) = S(r, f),$$

согласно (3.4) and (3.6). Пусть

$$f_1 = -\frac{(f'(z+c))^m H^n}{G_1}, f_2 = \frac{P_1 e^{A_1 z^k} H^n}{G_1}, f_3 = \frac{Q_1 e^{B_1 z^k} H^n}{G_1}, f_4 = \frac{f^n H^n}{G_1}.$$

Тогда f_j ($j = 1, 2, 3, 4$) — целые функции. При этом, функции f_j не имеют общих нулей. Следовательно,

$$\max\{|f_1(z)|, |f_2(z)|, |f_3(z)|, |f_4(z)|\} > 0$$

для всех $z \in \mathbb{C}$. Более того, из (1.5), имеем, что

$$(3.9) \quad f_4 = f_1 + f_2 + f_3.$$

Случай 1. Если $(f'(z+c))^m$, $P_1(z)e^{A_1z^k}$, $Q_1(z)e^{B_1z^k}$ линейно независимы. тогда f_1, f_2, f_3 линейно независимы, и из (3.3) и (3.7) имеем, что функция $\frac{f_4(z)}{f_1(z)}$ трансцендентна. Следовательно, согласно (3.4), (3.6), (3.8), (3.9), леммам 2.4-2.5 и лемме 2.7 получаем, что

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad nN\left(r, \frac{1}{f}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f^n}\right) \leq N\left(r, \frac{G_1}{f^n H^n}\right) + N(r, H^n) + N\left(r, \frac{1}{G_1}\right) + S(r, f) \\
 &= N\left(r, \frac{1}{f_4}\right) + S(r, f) \leq T_1(r) + S(r, f) \leq \sum_{j=1}^4 N_2\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + o(T_1(r)) + S(r, f) \\
 &\leq N_2\left(r, \frac{1}{f^n}\right) + N_2\left(r, \frac{1}{(f'(z+c))^m}\right) + o(T_1(r)) + S(r, f) \\
 &\leq 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^m}\right) + o(T_1(r)) + S(r, f) \\
 &\leq 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + mN\left(r, \frac{1}{f}\right) + o(T_1(r)) + S(r, f) \\
 &\leq (m+2)T(r, f) + o(T_1(r)) + S(r, f),
 \end{aligned}$$

где

$$T_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(re^{i\theta})d\theta - u_1(0), \quad u_1(z) = \sup_{1 \leq j \leq 3} \log |f_j(z)|.$$

Из уравнения (3.10) следует, что

$$(3.11) \quad N\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r, f),$$

при условии $n > m + 2$. Кроме того, $o(T_1(r)) = S(r, f)$. Перепишем (1.5) в виде

$$(3.12) \quad \frac{P_1(z)e^{A_1z^k}}{f^n(z)} + \frac{Q_1(z)e^{B_1z^k}}{f^n(z)} - \frac{(f'(z+c))^m}{f^n(z)} = 1.$$

Положим

$$F_1 = \frac{P_1e^{A_1z^k}}{f^n}, F_2 = \frac{Q_1e^{B_1z^k}}{f^n}, F_3 = -\frac{(f'(z+c))^m}{f^n}.$$

Тогда, из (3.4), (3.11), из Лемм 2.2, 2.7, и предположения $N(r, f) = S(r, f)$, имеем, что

$$N(r, F_j) = S(r, f), \quad N\left(r, \frac{1}{F_j}\right) = S(r, f), \quad j = 1, 2, 3.$$

Более того, из (2.2) и (3.3)-(3.5) следует, что $T(r, F_j) = O(r^k)$, $r \rightarrow \infty, r \notin E$.

Тогда, применив лемму 2.3 к (3.12), и из (3.5), получим, что

$$T(r, F_3) \leq o\left(\max_{1 \leq j \leq 3} T(r, F_j)\right) + S(r, f) = o(r^k) + S(r, f) = S(r, f),$$

что противоречит (3.7).

Случай 2. Если $(f'(z+c))^m$, $P_1(z)e^{A_1z^k}$, $Q_1(z)e^{B_1z^k}$ линейно зависимы, тогда

$$(3.13) \quad (f'(z+c))^m = C_1P_1(z)e^{A_1z^k} + C_2Q_1(z)e^{B_1z^k},$$

где по крайней мере одно из чисел C_1 и C_2 отлично от нуля. Подставив (3.13) в (1.5), находим, что

$$(3.14) \quad f^n(z) = (1 - C_1)P_1(z)e^{A_1 z^k} + (1 - C_2)Q_1(z)e^{B_1 z^k}.$$

Случай 2.1. Если $C_1 \neq 1$ и $C_2 \neq 1$, тогда

$$f^n(z) = e^{A_1 z^k} ((1 - C_1)P_1(z) + (1 - C_2)Q_1(z)e^{(B_1 - A_1)z^k}).$$

Применив лемму 2.6 получим:

$$(3.15) \quad N\left(r, \frac{1}{f}\right) \geq d_3 r^k, \quad r \rightarrow \infty,$$

где d_3 — положительное число. Очевидно, $P_1(z)e^{A_1 z^k}$ и $Q_1(z)e^{B_1 z^k}$ линейно независимы. Более того, из (3.14) мы видим, что $f(z)$ — целая функция. Предположим, $G_2(z)$ — каноническое произведение (или многочлен), образованное общими нулями b_i числа $f^n, (1 - C_1)P_1(z)e^{A_1 z^k}, (1 - C_2)Q_1(z)e^{B_1 z^k}$, а каждая из b_i считается по минимальному числу соответствующих кратностей общих нулей всех трех вышеперечисленных функций. Тогда мы видим, что $G_2(z)$ является целой функцией и удовлетворяет условию

$$(3.16) \quad N\left(r, \frac{1}{G_2}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{P_1}\right) = S(r, f),$$

согласно (3.4). Положим

$$g_1 = \frac{(1 - C_1)P_1 e^{A_1 z^k}}{G_2}, g_2 = \frac{(1 - C_2)Q_1 e^{B_1 z^k}}{G_2}, g_3 = \frac{f^n}{G_2}.$$

Тогда g_j ($j = 1, 2, 3$) — целые функции. Так как g_j не имеют общих нулей, $\max\{|g_1(z)|, |g_2(z)|, |g_3(z)|\} > 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Но из (3.14), имеем:

$$(3.17) \quad g_3 = g_1 + g_2.$$

И функция $\frac{g_2}{g_1} = \frac{(1 - C_2)Q_1}{(1 - C_1)P_1} e^{(B_1 - A_1)z^k}$ трансцендентна. Тогда из (3.4), лемм 2.4-2.5 и (3.16) получим, что

$$\begin{aligned} nN\left(r, \frac{1}{f}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f^n}\right) \leq N\left(r, \frac{G_2}{f^n}\right) + N\left(r, \frac{1}{G_2}\right) + S(r, f) \\ &= N\left(r, \frac{1}{g_3}\right) + S(r, f) \leq T_2(r) + S(r, f) \leq \sum_{j=1}^3 N_1\left(r, \frac{1}{g_j}\right) + o(T_2(r)) + S(r, f) \\ &\leq N_1\left(r, \frac{1}{f^n}\right) + o(T_2(r)) + S(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{f}\right) + o(T_2(r)) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + o(T_2(r)) + S(r, f), \end{aligned}$$

где

$$T_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(re^{i\theta}) d\theta - u_2(0), \quad u_2(z) = \sup_{1 \leq j \leq 2} \log |g_j(z)|.$$

Следовательно, $T_2(r) \leq T(r, f) + o(T_2(r)) + S(r, f)$,

$$(n-1)N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq o(T_2(r)) + S(r, f).$$

Согласно (3.5),

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r, f) = o(r^k), \quad r \rightarrow \infty, r \notin E,$$

что противоречит (3.15).

Случай 2.2. Если $C_1 \neq 1$ и $C_2 = 1$, тогда по (3.14), имеем, что

$$(3.18) \quad f^n(z) = (1 - C_1)P_1(z)e^{A_1 z^k}.$$

Из равенств (3.4), (3.5) и (3.18) вытекает, что

$$(3.19) \quad nN\left(r, \frac{1}{f}\right) = N\left(r, \frac{1}{f^n}\right) = N\left(r, \frac{1}{P_1}\right) = S(r, f) = o(r^k), \quad r \rightarrow \infty, r \notin E.$$

Пусть $C_1 \neq 0$. Применив леммы 2.2, 2.6 и 2.7 к (3.13), находим, что

$$\begin{aligned} mN\left(r, \frac{1}{f}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f^m}\right) \geq N\left(r, \frac{1}{(f'(z+c))^m}\right) \\ &= N\left(r, \frac{1}{C_1 P_1 e^{B_1 z^k} + C_2 Q_1 e^{B_1 z^k}}\right) \geq d_4 r^k, \quad r \rightarrow \infty, d_4 > 0, \end{aligned}$$

что противоречит (3.19). Следовательно, $C_1 = 0$, и

$$(3.20) \quad f^n(z) = P_1(z)e^{A_1 z^k},$$

$$(3.21) \quad (f'(z+c))^m = Q_1(z)e^{B_1 z^k}.$$

Из (3.20), имеем, что $f(z) = r(z)e^{\frac{A_1 z^k}{n}}$, где $r^n(z) = P_1(z)$. Следовательно,

$$f'(z+c) = \left(r'(z+c) + r(z+c)\frac{kA_1(z+c)^{k-1}}{n}\right)e^{\frac{A_1(z+c)^k}{n}}.$$

Отсюда и из (3.21), видим, что $\frac{A_1}{B_1} = \frac{n}{m}$.

Случай 2.3. Если $C_1 = 1$ и $C_2 \neq 1$, тогда, аналогично случаю 2.2, имеем, что $f(z) = s(z)e^{\frac{B_1 z^k}{n}}$ и $\frac{A_1}{B_1} = \frac{m}{n}$, где $s^n(z) = Q_1(z)$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4

Предположим, что уравнение (1.6) имеет трансцендентное целое решение $f(z)$ гиперпорядка строго меньше 1. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $P_2(z) \equiv 0$, тогда из (1.6) и (2.1), имеем:

$$\begin{aligned} nT(r, f) &= T(r, f^n) = T(r, (f'(z+c))^m) = m(r, (f'(z+c))^m) + S(r, f) \\ &\leq m\left(r, \frac{(f'(z+c))^m}{f^m}\right) + m(r, f^m) + S(r, f) \leq mT(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

что противоречит предположению $n > m + 1$.

Случай 2. Если $P_2(z) \neq 0$, тогда, мы получаем противоречие аналогично случаю 1 в теореме 1.2, поскольку $(f'(z+c))^m$, $P_2(z)e^{A_2z^k}$ линейно независимы. Кроме того, когда $(f'(z+c))^m$, $P_2(z)e^{A_2z^k}$ линейно зависимы, получаем, что

$$(4.1) \quad f^n(z) = (1 - C_3)P_2(z)e^{A_2z^k}$$

$$(4.2) \quad (f'(z+c))^m = C_3P_2(z)e^{A_2z^k},$$

где $C_3 \neq 0$ и $C_3 \neq 1$. Из (4.1), имеем, что $f(z) = r_1(z)e^{\frac{A_2z^k}{n}}$, где $r_1^n(z) = (1 - C_3)P_1(z)$. Следовательно,

$$(4.3) \quad f'(z+c) = \left(r_1'(z+c) + r_1(z+c) \frac{kA_2(z+c)^{k-1}}{n} \right) e^{\frac{A_2(z+c)^k}{n}}.$$

Из (4.2) и (4.3), имеем $m = n$, что противоречит предположению $n > m + 1$.

5. PROOF OF THEOREM 1.5

Аналогично теореме 1.2 имеем:

$$(5.1) \quad S(r, f) = o(r^k), \quad r \rightarrow \infty, r \notin E.$$

Переписав (1.7) в виде

$$\frac{1}{P_3(z)e^{A_3z^k} + Q_3(z)} + \frac{(f'(z+c))^m}{f^n(z)(P_3(z)e^{A_3z^k} + Q_3(z))} = \frac{1}{f^n(z)}.$$

и учитывая лемму 2.6 и (5.1), будем иметь, что

$$\begin{aligned} nm \left(r, \frac{1}{f} \right) &\leq m \left(r, \frac{1}{P_3(z)e^{A_3z^k} + Q_3(z)} \right) + m \left(r, \frac{(f'(z+c))^m}{f^m} \right) \\ &+ m \left(r, \frac{1}{f^{n-m}} \right) + m \left(r, \frac{1}{P_3(z)e^{A_3z^k} + Q_3(z)} \right) + S(r, f) \\ &\leq (n-m)m \left(r, \frac{1}{f} \right) + o(r^k) + S(r, f), \quad r \rightarrow \infty, r \notin E. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$m \left(r, \frac{1}{f} \right) = S(r, f).$$

Следовательно,

$$(5.2) \quad N \left(r, \frac{1}{f} \right) + S(r, f) = T(r, f).$$

Аналогично теореме 1.2, получим, что

$$(5.3) \quad N \left(r, \frac{1}{f} \right) = S(r, f),$$

где либо $(f'(z+c))^m$, $P_3(z)e^{A_3z^k}$ и $Q_3(z)$ линейно независимы, либо линейно зависимы. Очевидно, (5.2) и (5.3) противоречат друг другу. Теорема доказана.

Благодарность. Авторы хотели бы поблагодарить рецензента за полезные предложения и комментарии.

Abstract. In this paper, we study the existence of meromorphic solutions of hyper-order strictly less than 1 to the Fermat type differential-difference equations, which improves earlier results of such studies.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. N. Baker, “On a class of meromorphic functions”, *Proc. Am. Math. Soc.* **17**, 819 – 822 (1966).
- [2] H. Cartan, “Sur les zéros des combinaisons lineaires de p fonctions holomorphes données”, *Mathematica Cluj* **7**, 5 – 31 (1933).
- [3] W. Chen, Q. Han and J. B. Liu, “On Fermat Diophantine functional equations, little Picard theorem and beyond”, *Aequ. Math.* **93**, 425 – 432 (2019).
- [4] R. G. Halburd and R. J. Korhonen and K. Tohge, “Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366**, 4267 – 4298 (2014).
- [5] Q. Han and F. Lü, “On the equation $f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z + \beta}$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.* **54**, 98 – 102 (2019).
- [6] F. Gross, “On the equation $f^n + g^n = 1$ ”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72**, 86 – 88 (1966).
- [7] F. Gross, “On the equation $f^n + g^n = h^n$ ”, *Am. Math. Mon.* **73**, 1093 – 1096 (1966).
- [8] K. Liu, “Meromorphic functions sharing a set with applications to difference equations”, *J. Math. Anal. Appl.* **359**, 384 – 393 (2009).
- [9] K. Liu, “Existence of entire solutions of nonlinear difference equations”, *Czech. Math. J.* **61**, 565 – 576 (2011).
- [10] K. Liu, T. B. Cao and H. Z. Cao, “Entire solutions of Fermat type differential-difference equations”, *Arch. Math.* **99**, 147 – 155 (2012).
- [11] K. Liu and L. Z. Yang, “On entire solutions of some differential-difference equations”, *Comput. Methods Funct. Theory* **13**, 433 – 447 (2013).
- [12] F. Lü and Q. Han, “On the Fermat-type equation $f^3(z) + f^3(z + c) = 1$ ”, *Aequ. Math.* **91**, 129 – 136 (2017).
- [13] F. Lü and H. X. Guo, “On meromorphic solutions of the Fermat-Type functional equation $f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z + \beta}$ ”, *Mediterr. J. Math.* **19**, paper number 118 (2022).
- [14] Z. Q. Mao and H. F. Liu, “On meromorphic solutions of nonlinear delay-differential equations”, *J. Math. Anal. Appl.* **509**, article ID 125886 (2022).
- [15] P. Montel, “Lecons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications” [in French], Gauthier-Villars, Paris, 135 – 136 (1927).
- [16] C. W. Peng and Z. X. Chen, “On a conjecture concerning some nonlinear difference equations”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **36**, 221 – 227 (2013).
- [17] X. G. Qi, “Value distribution and uniqueness of difference polynomials and entire solutions of difference equations”, *Ann. Polon. Math.* **102**, 129 – 142 (2011).
- [18] X. G. Qi and K. Liu, “Uniqueness and value distribution of differences of entire functions”, *J. Math. Anal. Appl.* **379**, 180 – 187 (2011).
- [19] X. G. Qi, Y. Liu and L. Z. Yang, “A note on solutions of some differential-difference equations”, *J. Contemp. Math. Anal.* **52**, 128 – 133 (2017).
- [20] X. G. Qi and L. Z. Yang, “Entire solutions of some differential-difference equations”, *Bull. Iranian Math. Soc.* **46**, 579 – 591 (2020).
- [21] Z. T. Wen, J. Heittokangas and I. Laine, “Exponential polynomials as solutions of certain nonlinear difference equations”, *Acta Math. Sin.* **28**, 1295 – 1306 (2012).
- [22] C. C. Yang and H. X. Yi, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003).
- [23] C. C. Yang and I. Laine, “On analogies between nonlinear difference and differential equations”, *Proc. Japan Acad. Ser. A.* **86**, 10 – 14 (2010).
- [24] J. Zhang and L. W. Liao, “On entire solutions of a certain type of nonlinear differential and difference equations”, *Taiwan. J. Math.* **15**, 2145 – 2157 (2011).

Поступила 01 июня 2023

После доработки 06 ноября 2023

Принята к публикации 27 ноября 2023

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 59, номер 3, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Л. АКОПЯН, К. КЕРЯН, Безусловная базисность периодических ортонормированных сплайн-систем в $H^1(\mathbb{T})$: Достаточность	3
С. ВАНГ, К. МА, Динамика уравнения пластины с задержкой переменных на $\mathbb{R}^n$	38
Б. И. ГОЛУБОВ, С. С. ВОЛОСИВЕЦ, Приближение полиномами Хаара и Уолша в весовых обобщенных гранд пространствах Лебега	57
К. ЖУ, К. КИ, Мероморфные решения для дифференциально разностных уравнений типа Ферма	72 – 84

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 59, No. 3, 2024

CONTENTS

L. AKOPYAN, K. KERYAN, Unconditionality of periodic orthonormal spline systems in $H^1(\mathbb{T})$: Sufficiency	3
S. WANG, Q. MA, Dynamics of plate equation with variable delay on $\mathbb{R}^n$	38
B. I. GOLUBOV, S. S. VOLOSIVETS, Approximation by Haar and Walsh polynomials in weighted generalized grand Lebesgue spaces	57
X. ZHU, X. QI, Meromorphic solutions for the Fermat type differential-difference equations	72 – 84