

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2022

Խ Մ Բ Ա Գ Բ Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Մ. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахпетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ ВОЛЬТЕРРА И ВИНЕРА –
ХОПФА И СООТВЕТСТВУЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ
ПЕРВОГО РОДА

Л. Г. Арабаджян

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-4-14>

Институт математики НАН РА

Армянский Государственный Педагогический Университет им. Х. Абовяна

E-mail: arabajyan@mail.ru

Аннотация. В работе изучается возможность разложения интегрального оператора Винера-Хопфа $\mathcal{K}$ в виде $\mathcal{K} = (\mathcal{I} - \mathcal{V}_-) \cdot \mathcal{V}_+$, где $\mathcal{I}$ – единичный оператор, а $\mathcal{V}_\pm$ – операторы Вольтерра вида $(\mathcal{V}_+ f)(x) = \int_0^x V_+(x-t) f(t) dt$, $(\mathcal{V}_- f)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x) f(t) dt$, $x \in R_+ \equiv (0, \infty)$, $V_\pm \in L_1(R_+)$, $V_\pm(x) = 0$ при $x < 0$. Рассматриваемое разложение применено к интегральным уравнениям Винера-Хопфа первого рода.

MSC2020 number: 45A05; 45B05.

Ключевые слова: интегральные операторы Винера-Хопфа и Вольтерра; интегральное уравнение первого рода; условия консервативности.

Рассматривается класс Ω интегральных операторов Винера-Хопфа $\mathcal{K}$: $\mathcal{K} \in \Omega$, если

$$(1) \quad (\mathcal{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt, \quad x \in R_+ \equiv (0, \infty), \quad K \in L_1(R)$$

и подалгебры $\Omega^\pm \subset \Omega$ вольтерровых операторов $\mathcal{V}_\pm$ вида

$$(2) \quad \begin{aligned} (\mathcal{V}_+ f)(x) &= \int_0^x V_+(x-t) f(t) dt, \\ (\mathcal{V}_- f)(x) &= \int_x^\infty V_-(t-x) f(t) dt, \quad x \in R_+, \end{aligned}$$

$V_{\pm} \in L_1(R_+)$, $V_{\pm}(x) = 0$ при $x < 0$. Операторы из Ω действуют в любом из пространств $L_p(R_+)$, $p \geq 1$; $M(R_+) \equiv L_{\infty}(R_+)$, причем

$$\|\mathcal{K}\|_{E^+} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx,$$

где E^+ – одно из этих пространств. В настоящей работе изучается возможность разложения

$$(3) \quad \mathcal{K} = (\mathcal{J} - \mathcal{V}_-) \cdot \mathcal{V}_+,$$

где $\mathcal{V}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, а $\mathcal{J}$ – единичный оператор в E^+ . Обсуждаются также вопросы применения равенства (3) к интегральным уравнениям Винера-Хопфа первого рода.

1°. В работе [1] рассматривалась задача факторизации

$$(4) \quad \mathcal{J} - \mathcal{K} = (\mathcal{J} - \mathcal{V}_-) (\mathcal{J} - \mathcal{V}_+),$$

где $\mathcal{J}$ – единичный оператор в E^+ , а $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}_{\pm}$ – операторы вида (1) и (2). Для решения этой задачи в указанной работе был разработан оригинальный метод, основанный на использовании нелинейных функциональных уравнений. Некоторые из основных результатов этой работы включены в следующую теорему.

Теорема А. Если функция K удовлетворяет условиям

$$K \in L_1(R), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx \leq 1,$$

то существует разложение (4), где ядерные функции $V_{\pm}$ операторов (2) определяются из нелинейной системы Енгибаряна:

$$(5) \quad \begin{aligned} V_+(x) &= K(x) + \int_0^{\infty} V_-(t) \cdot V_+(x+t) dt, \\ V_-(x) &= K(-x) + \int_0^{\infty} V_+(t) \cdot V_-(x+t) dt, \end{aligned} \quad x \in R_+,$$

решение (V_+, V_-) которой существует и обладает свойствами $V_{\pm} \in L_1(R_+)$, $\int_0^{\infty} |V_{\pm}(t)| dt \leq 1$.

1. В консервативном случае

$$(6) \quad 0 \leq K \in L_1(R), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt = 1,$$

имеют место соотношения

$$(7) \quad V_{\pm} \geq 0, \quad \gamma_{\pm} \equiv \int_0^{\infty} V_{\pm}(t) dt \leq 1, \quad (1 - \gamma_-)(1 - \gamma_+) = 0.$$

В случае, когда ядро K – четная функция, удовлетворяющая условиям (6), системе (5) будет удовлетворять пара $(V_+, V_-) = (V, V)$, где V – решение уравнения

$$(8) \quad V(x) = K(x) + \int_0^{\infty} V(t) \cdot V(x+t) dt, \quad x \in R_+.$$

Тогда из (7) следуют

$$(9) \quad 0 \leq V \in L_1(R_+), \quad \gamma \equiv \int_0^{\infty} V(t) dt = 1.$$

Отметим, что условия существования разложения вида $\mathcal{K} = \mathcal{V}_- \cdot \mathcal{V}_+$, где $\mathcal{K} \in \Omega$, $\mathcal{V}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$ были изучены в [2].

2°. Непосредственное применение леммы 1 работы [1] к равенству (3) приводит к следующему утверждению.

Лемма 1. *Для выполнения операторного равенства (3) достаточно, чтобы ядерные функции $V_{\pm}$ удовлетворяли системе*

$$(10) \quad \begin{aligned} V_+(x) &= K_+(x) + \int_0^{\infty} V_-(t) \cdot V_+(x+t) dt, \\ \int_0^{\infty} V_+(t) \cdot V_-(x+t) dt &= -K_-(x), \end{aligned} \quad x \in R_+,$$

где $K_{\pm}(x) = K(\pm x)$, $x \in R_+$.

Доказательство. В лемме 1 из [1] доказано, что $\mathcal{V}_- \cdot \mathcal{V}_+ \in \Omega$, причем ядерная функция W этого произведения имеет вид

$$W(x) = \int_{\max(x,0)}^{\infty} V_-(t) \cdot V_+(x+t) dt, \quad x \in R.$$

Представив равенство (3) в виде $\mathcal{K} = \mathcal{V}_+ - \mathcal{V}_- \cdot \mathcal{V}_+$ и приравняв ядра соответствующих операторов, приходим к системе (10). $\square$

Замечание 1. Пусть для оператора $\mathcal{K}$ с ядром K имеет место равенство (3), где ядерные функции $V_{\pm}$ определяются из системы (10). Легко убедиться, что тогда оператор $\tilde{\mathcal{K}} = \alpha \cdot \mathcal{K}$, где $\alpha \in R$, также допускает разложение вида (3):

$\tilde{\mathcal{K}} = (\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{V}}_-) \cdot \tilde{\mathcal{V}}_+$, где $\tilde{\mathcal{V}}_- = \mathcal{V}_-$, $\tilde{\mathcal{V}}_+ = \alpha \cdot \mathcal{V}_+$, и, следовательно, ядерные функции $\tilde{V}_\pm$ операторов $\tilde{\mathcal{V}}_\pm$ выражаются через функции $V_\pm$ посредством равенств

$$(11) \quad \tilde{V}_-(x) = V_-(x), \quad \tilde{V}_+(x) = \alpha \cdot V_+(x), \quad x \in R_+.$$

Теперь определим некоторые достаточные условия разрешимости системы (10).

Теорема 1. Пусть K – определенная на R суммируемая и нечетная функция. Рассмотрим функции $K_\pm(x) = K(\pm x)$, $x \in R_+$. Пусть функция K_+ удовлетворяет условиям:

$$(12) \quad \begin{aligned} K_+ &\in C^{(1)}(R_+) \cap L_1(R_+), \quad K_+ \geq 0, \quad K'_+ \leq 0 \text{ на } R_+, \quad \int_0^\infty x \cdot K_+(x) dx < \infty, \\ K_+(\infty) &= 0, \quad \mu \equiv K_+(+0) < \infty. \end{aligned}$$

(Аналогичным условиям ввиду нечетности K будет удовлетворять и функция K_- с разницей $K_- \leq 0$, $K'_- \geq 0$ на R_+). Тогда существует решение (V_+, V_-) системы (10) (и, следовательно, имеет место разложение (3)), обладающее свойствами:

$$(13) \quad 0 \leq V_\pm \in L_1(R_+), \quad V_+ \downarrow \text{ на } R_+, \quad V_+(0) = 2\mu, \quad \gamma_- \equiv \int_0^\infty V_-(x) dx = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим систему (срав. с (5))

$$(14) \quad \begin{aligned} U_+(x) &= -K'_+(x) + \int_0^\infty U_-(t) \cdot U_+(x+t) dt, \\ U_-(x) &= K'_-(x) + \int_0^\infty U_+(t) \cdot U_-(x+t) dt, \end{aligned} \quad x \in R_+.$$

Ввиду нечетности K имеет место равенство $K'_- = -K'_+$ на R_+ . Введем обозначения

$$(15) \quad \overset{\circ}{K}(x) \equiv K'_-(x) = -K'_+(x), \quad x \in R_+.$$

Решение (U_+, U_-) системы (14) можно строить посредством решения $\overset{\circ}{U}$ следующего уравнения (см. (8)):

$$(16) \quad \overset{\circ}{U}(x) = \overset{\circ}{K}(x) + \int_0^\infty \overset{\circ}{U}(t) \overset{\circ}{U}(x+t) dt, \quad x \in R_+,$$

полагая $U_{\pm} = \overset{\circ}{U}$. Функция $\overset{\circ}{K}$ в уравнении (16), согласно условиям теоремы, будет удовлетворять следующим условиям:

$$(17) \quad 0 \leq \overset{\circ}{K} \in L_1(R_+), \quad \int_0^{\infty} \overset{\circ}{K}(x) dx = \mu,$$

где $\mu = K_+(+0)$.

Вначале докажем разрешимость уравнения (16) в частном случае $\mu = \frac{1}{2}$. Имеем

$$(18) \quad \overset{\circ}{K} \geq 0, \quad \int_0^{\infty} \overset{\circ}{K}(x) dx = \frac{1}{2}.$$

В силу теоремы А существуют решение уравнения (16) и системы (14), причем $\gamma_{\pm} \equiv \int_0^{\infty} U_{\pm}(t) dt = 1$. Покажем, что пара функций

$$(19) \quad V_+(x) = \int_x^{\infty} U_+(t) dt, \quad V_-(x) = U_-(x), \quad x \in R_+,$$

где (U_+, U_-) – решение системы (14) будет удовлетворять (10).

Действительно, интегрируя первое равенство из (14) в пределах от $x \geq 0$ до ∞ и используя теорему Фубини ([4]), получаем

$$(20) \quad \int_x^{\infty} U_+(t) dt = K_+(x) + \int_0^{\infty} U_-(t) dt \int_{x+t}^{\infty} U_+(\tau) d\tau,$$

а из второго равенства (14) аналогично получается

$$\int_x^{\infty} U_-(t) dt = -K_-(x) + \int_0^{\infty} U_+(t) dt \int_{x+t}^{\infty} U_-(\tau) d\tau, \quad x \in R_+.$$

С учетом последнего равенства и $\gamma_+ = 1$ имеем также

$$(21) \quad \begin{aligned} & \int_0^{\infty} U_-(x+t) dt \int_t^{\infty} U_+(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} U_+(\tau) d\tau \int_x^{x+\tau} U_-(t) dt = \\ & = \int_x^{\infty} U_-(t) dt - \int_0^{\infty} U_+(\tau) d\tau \int_{x+\tau}^{\infty} U_-(t) dt = -K_-(x), \quad x \in R_+. \end{aligned}$$

Равенства (20) и (21) показывают, что функции V_+ и V_- , определяемые посредством равенств (19), представляют решение системы (10).

Покажем, что построенное в случае $\mu = \frac{1}{2}$ решение системы (10) обладает свойствами (13). В силу теоремы А и соотношений (19) имеем $0 \leq V_- \in L_1(R_+)$,

$\gamma_- = 1$. Для доказательства отмеченных в (13) свойств функции V_+ , достаточно лишь показать, что $V_+ \in L_1(R_+)$.

В работе [3] доказано, что в случае $\mu = \frac{1}{2}$ при условии $\int_0^\infty x^2 \overset{\circ}{K}(x) dx < \infty$ конечен первый момент решения $\overset{\circ}{U}$ уравнения (16): $\int_0^\infty x \overset{\circ}{U}(x) dx < \infty$, что означает суммируемость на R_+ функции $V_+(x) = \int_x^\infty \overset{\circ}{U}(t) dt$. Поэтому для доказательства утверждения $V_+ \in L_1(R_+)$ достаточно показать, с учетом (15), конечность интеграла $\int_0^\infty x^2 K'_+(x) dx$. Для этого заметим, что при условиях теоремы имеют место предельные равенства

$$(22) \quad \psi(+0) = \psi(\infty) = 0,$$

где $\psi(x) = x^2 K_+(x)$, $x \in R_+$. Действительно, первое из этих равенств очевидно, поскольку по условиям теоремы значение $K_+(+0)$ ограничено. Доказательство второго равенства содержится в [5] (см. [5], стр. 85), учитывая монотонность функции K_+ и конечность интеграла $\int_0^\infty t \cdot K_+(t) dt$.

Вычисление по частям интеграла $\int_0^\infty t^2 K'_+(t) dt$ с учетом соотношений (22), дает

$$0 < - \int_0^\infty t^2 K'_+(t) dt = 2 \int_0^\infty t K_+(t) dt < \infty.$$

Теперь рассмотрим общий случай произвольного $\mu > 0$.

Пусть функции $K_\pm(x) = K(x)$, $x \in R_+$, определяемые посредством ядерной функции K оператора $\mathcal{K}$, удовлетворяют условиям (12). Легко проверить, что тогда аналогично определяемые функции $\tilde{K}$ и $\tilde{K}_\pm$ оператора $\tilde{\mathcal{K}} = \lambda \cdot \mathcal{K}$, где $\lambda = (2\mu)^{-1}$, также удовлетворяют (12), с той лишь разницей, что $\tilde{K}_+(+0) = \frac{1}{2}$. Согласно доказательству первой части теоремы оператор $\tilde{\mathcal{K}}$ допускает разложение $\tilde{\mathcal{K}} = (\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{V}}_-) \cdot \tilde{\mathcal{V}}_+$, где $\tilde{\mathcal{V}}_\pm \in \Omega^\pm$, причем ядерные функции $\tilde{V}_\pm$ обладают свойствами

$$0 \leq \tilde{V}_\pm \in L_1(R_+), \quad \tilde{V}_+ \downarrow \text{ на } R_+, \quad \tilde{V}_+(0) = 1, \quad \int_0^\infty \tilde{V}_-(x) dx = 1.$$

Тогда, учитывая вышеизложенное замечание, оператор $\mathcal{K} = 2\mu \cdot \tilde{\mathcal{K}}$ допускает разложение (3), где ядерные функции $V_\pm$ операторов $\mathcal{V}_\pm$ будут удовлетворять условиям (13). $\square$

3°. Рассмотрим интегральное уравнение Винера-Хопфа первого рода:

$$(23) \quad \int_0^{\infty} K(x-t) f(t) dt = g(x), \quad x \in R_+.$$

Предположим, что функция K удовлетворяет условиям теоремы 1. Без ограничения общности можно полагать, что $K_+(+0) = \frac{1}{2}$. Тогда существует факторизация (3), что сводит решение уравнения (23) к последовательному решению следующих двух уравнений

$$(24) \quad \varphi(x) = g(x) + \int_x^{\infty} V_-(t-x) \varphi(t) dt, \quad x \in R_+,$$

$$(25) \quad \int_0^x V_+(x-t) f(t) dt = \varphi(x), \quad x \in R_+.$$

В уравнении (24) функция V_- удовлетворяет условиям (консервативности)

$$(26) \quad 0 \leq V_- \in L_1(R_+), \quad \gamma_- \equiv \int_0^{\infty} V_-(t) dt = 1.$$

При условиях (26) и $g \in L_1(R_+)$ разрешимость уравнения (24) была установлена в [3]. Там, в частности, доказана

Теорема В. При $g \in L_1(R_+)$ уравнение (24) в консервативном случае (26) обладает решением $\varphi \in L_1^{loc}(R_+)$, причем $\int_0^x |\varphi(t)| dt = o(x)$, при $x \rightarrow \infty$. Это решение на R_+ можно представить в виде

$$(27) \quad \varphi(x) = g(x) + \int_0^{\infty} \Phi_-(t) g(x+t) dt,$$

где функция $\Phi_- \geq 0$ и определяется из уравнения

$$(28) \quad \Phi_-(x) = V_-(x) + \int_0^x V_-(x-t) \Phi_-(t) dt, \quad x \in R_+,$$

причем в случае $\gamma_- = 1$ имеет место

$$\int_0^x \Phi_-(t) dt = O(x), \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Если конечен интеграл $\int_0^{\infty} x |g(x)| dx$, то решение φ суммируемо на R_+ : $\varphi \in L_1(R_+)$.

Как было отмечено выше, для построения решения f уравнения (23) мы должны решение φ уравнения (24) подставить в (25) и решить полученное уравнение. Для разрешимости последнего уравнения необходимо выполнение условия $\varphi(0) = 0$. Поскольку при условиях (26) константа является решением однородного уравнения ($g \equiv 0$) (24), то в уравнение (25) мы поставим не решение (27), а решение

$$(29) \quad \tilde{\varphi}(x) = g(x) + \int_0^\infty \Phi(t) g(x+t) dt - g(0) - \int_0^\infty \Phi(t) g(t) dt,$$

которое удовлетворяет также условию $\tilde{\varphi}(0) = 0$.

4°. Теперь обсудим вопросы разрешимости уравнения (25). Учитывая соотношения (19), будем иметь

$$(30) \quad 0 \leq U_+ \in L_1(R_+), \quad V_+(x) = \int_x^\infty U_+(t) dt, \quad V_+(0) = \int_0^\infty U_+(t) dt = 1.$$

Если $\tilde{\varphi} \in C^{(1)}(R_+)$, то дифференцируя обе части (25), получаем

$$V_+(0) \cdot f(x) - \int_0^x U_+(x-t) f(t) dt = \tilde{\varphi}'(x), \quad x \in R_+$$

или

$$(31) \quad f(x) = \tilde{\varphi}'(x) + \int_0^x U_+(x-t) f(t) dt, \quad x \in R_+,$$

где функция U_+ удовлетворяет условиям консервативности (30).

Выясним условия при которых существует производная $\tilde{\varphi}'$.

Лемма 2. Если в уравнении (24) в случае (26) функция g удовлетворяет условиям

$$(32) \quad \begin{aligned} 0 \leq g \in C^{(2)}(R_+) \cap L_1(R_+), g(0) < \infty, |g'(+0)| < \infty, \\ g' \leq 0 \text{ и } 0 \leq g'' \downarrow \text{ на } R_+, \end{aligned}$$

то его решение $\tilde{\varphi}$ дифференцируемо на R_+ , причем

$$(33) \quad \tilde{\varphi}'(x) = - \int_0^\infty S(t) \cdot g''(x+t) dt, \quad x \in R_+,$$

где

$$(34) \quad S(x) = 1 + \int_0^x \Phi_-(t) dt, \quad x \in R_+,$$

а Φ_- определяется из уравнения (28).

Доказательство. Из представления (34) следует абсолютная непрерывность функции S на R_+ , а с учетом $\Phi_- \geq 0$ имеем также $1 \leq S(x) \uparrow \infty$. В работе [3] получена оценка

$$(35) \quad S(x) \leq ax + b, \quad x \in R_+,$$

при подходящем выборе констант $a \geq 0$ и $b \geq 0$.

Интегрируя по частям интегралы правой части равенства (29) и учитывая отмеченные свойства функции S , получаем

$$(36) \quad \tilde{\varphi}(x) = \int_0^\infty S(t)(g'(t) - g'(x+t)) dt, \quad x \in R_+.$$

Что касается интеграла в правой части равенства (36), зависящее от параметра, то к нему применимо правило Лейбница дифференцирования под знаком интеграла (см. [6] и [7]), поскольку функция g'' монотонна и непрерывна на R_+ , а несобственный интеграл $\int_0^\infty S(t) \cdot g''(x+t) dt$ равномерно сходится по параметру x , ибо подынтегральная функция мажорируется функцией $S(t) \cdot g''(t)$, а эта функция суммируема на R_+ . Для доказательства суммируемости последней функции заметим, что при условиях (32) имеют место равенства

$$(37) \quad \omega(+0) = \omega(\infty) = 0,$$

где $\omega(x) = x \cdot g'(x)$, $x \in R_+$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предельных равенств (22). Теперь, интегрируя по частям интеграл $\int_0^A t \cdot g''(t) dt$, где $0 < A < \infty$ и учитывая равенства (37), в пределе при $A \rightarrow \infty$ получаем $0 < \int_0^\infty t \cdot g''(t) dt < \infty$. Если учитывать оценку (35), то из последнего неравенства следует

$$0 < \int_0^\infty S(t) \cdot g''(t) dt < \infty.$$

Поэтому справедлива формула (33). $\square$

Замечание. В случае, когда решение Φ_- уравнения (28) непрерывно на R_+ , то условия (32) для дифференцируемости функции $\tilde{\varphi}$ могут быть ослаблены (см. нижеприведенный пример).

Уравнения вида (31) (уравнение восстановления) изучены в теории вероятностей (см. [8]). Мы будем пользоваться результатами работы [3] по свойствам решений таких уравнений.

В [3], в частности, показано, что решение f уравнения (31) можно представить в виде

$$(38) \quad f(x) = \tilde{\varphi}'(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t) \tilde{\varphi}'(t) dt, \quad x \in R_+.$$

где функция Φ_+ определяется из уравнения

$$(39) \quad \Phi_+(x) = U_+(x) + \int_0^x U_+(x-t) \Phi_+(t) dt, \quad x \in R_+.$$

В рассматриваемом случае $U_+ = U_-$. Поэтому $\Phi_+ = \Phi_-$.

Изложенные факты приводят к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть в уравнении (23) функция K удовлетворяет условиям теоремы 1, а функция g – условиям (32). Тогда это уравнение обладает решением f , которое получается последовательным решением уравнений (24) и (25) (или уравнений (24) и (31) в случае существования производной $\tilde{\varphi}'$). В последнем случае для построения этого решения могут быть использованы равенства (33) и (38).

Пример. Рассмотрим уравнение (23) в случае, когда

$$(40) \quad K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{если } x > 0, \\ -\frac{1}{2}e^x, & \text{если } x < 0. \end{cases};$$

$$0 \leq g \in C^{(1)}(R_+) \cap L_1(R_+), \quad g(0) < \infty.$$

Тогда для решений систем (10) и (14) имеем $V_{\pm}(x) = e^{-x}$ и $U_{\pm}(x) = e^{-x}$, $x \in R_+$. Нетрудно убедиться, что функции $\Phi_+(x) = \Phi_-(x) = 1$, $x \in R_+$ удовлетворяют уравнениям (28) и (39) соответственно. Из (29) имеем

$$\tilde{\varphi}(x) = g(x) + \int_x^{\infty} g(t) dt - g(0) - \int_0^{\infty} g(t) dt, \quad x \in R_+,$$

откуда получаем

$$\tilde{\varphi}'(x) = g'(x) - g(x), \quad x \in R_+.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (38) для решения f уравнения (23) получаем

$$f(x) = g'(x) - \int_0^x g(t)dt - g(0).$$

Abstract. The possibility of factoring of the Wiener-Hopf integral operator $\mathcal{K}$ in the form $\mathcal{K} = (\mathcal{J} - \nu_-) \cdot \nu_+$, where $\mathcal{J}$ is the unit operator and $\nu_{\pm}$ are Volterrian operators of the forms $(\nu_+ f)(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t)dt$, $(\nu_- f)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)f(t)dt$, $x \in R_+ \equiv (0, \infty)$, $V_{\pm} \in L_1(R_+)$, $V_{\pm}(x) = 0$ for $x < 0$, is studied. This factoring can be applied to the Wiener-Hopf integral equation of the first kind.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, “Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения”, Матем. сборник, **97**, по. 1, 35 – 58 (1975).
- [2] Л. Г. Арабаджян, “О вольтерровом разложении интегрального оператора Винера-Хопфа”, Математич. заметки, **110**, вып. 2, 63 – 69 (2021).
- [3] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, Математ. анализ, **22**, Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР, Москва, 175 – 244 (1984).
- [4] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Наука, Москва (1976).
- [5] Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и Теоремы Анализа, часть 1, Москва, Наука (1978).
- [6] Е. Титчмарш, Теория Функций, Москва, Наука (1980).
- [7] Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления, **2**, Наука, Москва (1966).
- [8] В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и Ее Приложения, часть 2, Мир, Москва (1984).

Поступила 23 декабря 2021

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022

Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 5, 2022, стр. 15 – 24.

О НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ФАКТОРИЗАЦИИ В НОРМИРОВАННОМ КОЛЬЦЕ

Н. Б. Енгибарян

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-15-24>

Институт Математики НАН РА

E-mail: *yengib@instmath.sci.am*

Аннотация. Рассмотрена одна общая форма нелинейных уравнений факторизации (НУФ) в кольцах и нормированных кольцах. С применением НУФ получены два основных факта по существованию факторизации, которые труднодоступны или вовсе недоступны способам непосредственного построения обратной факторизации. Первый из них относится к факторизации элементов “близких” к единичному, построенной ранее при сильных дополнительных ограничениях. Второй факт включает факторизацию необратимых элементов в так называемом консервативном случае.

MSC2020 number: 47A68; 46N20.

Ключевые слова: факторизационные структуры в нормированном кольце; нелинейное уравнение факторизации; малая норма; консервативный случай.

ВВЕДЕНИЕ.

В вопросах теории и решения различных классов линейных алгебраических и функциональных уравнений широко применяются методы, сводящие задачу к уравнению с квадратичной нелинейностью. Такие методы, как правило, прямо или косвенно связаны с факторизацией рассматриваемых линейных операторов или их символов в виде произведения более простых (в том или ином смысле) сомножителей.

К “нелинейным” методам факторизации относятся факторизационная трактовка последовательного исключения Гаусса, метод Винера-Хопфа, принцип инвариантности Амбарцумяна [1], [2] и примыкающий к нему метод инвариантного погружения Р. Беллмана [3], метод уравнения Риккати [4].

Хорошо известны также методы построения обратных операторов в факторизованном виде с использованием линейных уравнений факторизации и факторизацию вдоль цепочки ортопроекторов [5].

Автором и соавторами была выполнена серия работ по созданию общей теории нелинейных уравнений факторизации (НУФ) с применением результатов к

решению линейных и нелинейных задач математической физики, теории стохастических процессов и др. (см. [6]-[16] и цитированную в них литературу).

Метод НУФ был наиболее полно разработан для скалярных и векторных уравнений Винера-Хопфа и некоторых других классов уравнений свертки, в основном без привлечения аппарата гармонического анализа. В настоящей работе вводится в рассмотрение одна общая форма НУФ в кольцах и нормированных кольцах. Демонстрируются две возможности НУФ, которые труднодоступны или вовсе недоступны способам непосредственного построения обратной факторизации.

1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ В КОЛЬЦЕ.

1.1. Факторизационная структура F_0 . Рассмотрим ассоциативное кольцо J с единицей I и нулем 0 . Пусть аддитивная подгруппа G кольца J является прямой суммой своих подгрупп $G^\pm$:

$$(1.1) \quad G = G^+ \oplus G^-.$$

Основное предположение: группы $G^\pm$ обладают следующим совместным мультипликативным свойством:

$$(1.2) \quad \text{если } X^\pm \in G^\pm, \text{ то } X^- X^+ \in G.$$

Единичный элемент I может как принадлежать, так и не принадлежать G^+ или G^- .

Набор $(J, G^\pm)$ назовем факторизационной структурой F_0 .

Пусть в F_0 структуре $G^\pm$ являются кольцами и $X^\pm \in G^\pm$. Элементы $I - X^\pm \in J$ будем считать нормально обратимыми по системе $G^\pm$, если

$$(1.3) \quad \exists (I - X^\pm)^{-1} = I + Y^\pm, \quad Y^\pm \in G^\pm.$$

Задача прямой факторизации: для $A \in G$ найти $X^\pm \in G^\pm$ такие, чтобы имело место разложение

$$(1.4) \quad I - A = (I - X^-) (I - X^+), \quad X^\pm \in G^\pm.$$

Подчеркнем, что обратимость $I - A$ в J не предполагается.

В случае когда $G^\pm$ являются кольцами, факторизация (1.4) называется канонической, если сомножители $I - X^\pm$ нормально обратимы. Тогда из (1.4) следуют существование $(I - A)^{-1} \in J$ и обратная факторизация

$$(1.5) \quad (I - A)^{-1} = (I + Y^+) (I + Y^-), \quad Y^\pm \in G^\pm.$$

Каноническая факторизация единственна.

Факторизация (1.4) является правильной, если хотя бы один из сомножителей нормально обратим. Двойное вырождение соответствует случаю, когда оба сомножителя необратимы.

1.2. Нелинейное уравнение факторизации. Из (1.4) непосредственно следует система нелинейных уравнений относительно $G^\pm$, названная нами нелинейным уравнением факторизации (НУФ).

Обозначим через $P^\pm$ – проекторы, переводящие G в $G^\pm$. Из (1.4) имеем $X^+ + X^- = A + X^- X^+$. Применяя к этому равенству проекторы $P^\pm$, приходим к НУФ относительно $X^\pm \in G^\pm$, где $A^\pm = P^\pm A \in G^\pm$:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} X^+ &= A^+ + P^+ (X^- X^+), \\ X^- &= A^- + P^- (X^- X^+). \end{aligned}$$

Пусть теперь $X^\pm \in G^\pm$ удовлетворяют соотношениям (1.6). Сложением этих равенств приходим к (1.4). Имеет место:

Лемма 1.1. *В структуре F_0 факторизация (1.4) эквивалентна НУФ (1.6).*

Под методом НУФ будем понимать построение и применение факторизации (1.4) путем решения системы (1.6).

Будет использована следующая компактная запись системы (1.6):

$$(1.7) \quad X^\pm = A^\pm + P^\pm (X^- X^+).$$

1.3. Симметричный случай. Приведем одно свойство симметрии структуры F_0 и элемента A , в случае выполнения которых система (1.7) обращается в одно уравнение.

Пусть в J определена унитарная операция $*$ сопряжения, обладающая свойствами

$$(1.8) \quad (X^*)^* = X; \quad (X + Y)^* = X^* + Y^*; \quad (XY)^* = Y^* X^*,$$

через A^* обозначается элемент, сопряженный к A . Предполагается, что классы G^+ и G^- взаимно сопряженные:

$$(1.9) \quad \text{если } X \in G^+ \quad (X \in G^-), \quad \text{то } X^* \in G^- \quad (X^* \in G^+).$$

Имеет место:

Лемма 1.2. *Пусть элемент $A \in G$ обладает свойством симметрии*

$$(1.10) \quad A^* = A,$$

а $X \in G^+$ удовлетворяет уравнению

$$(1.11) \quad X = A^+ + P^+ (X^* X).$$

Тогда пара (X, X^*) является решением системы (1.7).

Под симметрическим случаем факторизации (1.4) будем понимать выполнение условий (1.9), (1.10).

Отметим, что система (1.7) может иметь как симметричное решение, так и несимметричное решение, которое будет неединственным.

1.4. Основное решение НУФ. Рассмотрим следующий итерационный процесс для НУФ (1.7):

$$(1.12) \quad X_{n+1}^\pm = A^\pm + P^\pm (X_n^- X_n^+), \quad X_0^\pm = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Рекуррентные соотношения (1.12) определяют последовательности $X_n^\pm$ в $G^\pm$. Если эти последовательности сходятся по некоторой топологии,

$$(X_n^+, X_n^-) \rightarrow (X^+, X^-)$$

и предел удовлетворяет НУФ (1.7), то этот предел назовем его основным решением. В симметрическом случае в (1.12) имеем $(X_n^-)^* = X_n^+ = X_n$, где X_n определяется из простых итераций для (1.11).

2. НУФ в нормированном кольце.

2.1. Факторизационные структуры F_1 и F . Рассмотрим структуру F_0 при следующих дополнительных предположениях.

- Исходное кольцо J является нормированным кольцом (банаховой алгеброй);
- Классы $G^\pm$ являются подпространствами в пространстве J ;
- Проекторы $P^\pm$ суть непрерывные операторы в G ,

$$(2.1) \quad \|P^\pm U\| \leq c \|U\|, \quad U \in G, \quad c > 0.$$

Факторизационную структуру, обладающую указанными свойствами, назовем структурой F_1 .

Структуру F_1 в случае когда классы $G^\pm$ являются подкольцами исходного кольца J , назовем структурой F .

В структуре F применимо понятие нормальной обратимости (1.3). В случае существования канонической факторизации (1.4) оператор $(I - A)^{-1} \in J$ может не принадлежать классу G .

2.2. Примеры структур F и F_1 . Задачи вольтерровой факторизации интегральных операторов (второго рода) с ядрами Гильберта-Шмидта относятся к структурам типа F .

В случае интегрального уравнения с многопарным ядром, которое эквивалентно краевой задаче для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, НУФ обращается в задачу Коши для скалярного или векторного уравнения типа Риккати.

Важные примеры F структуры, в которой класс G не замкнут относительно умножения, связаны с интегральными и дискретными уравнениями Винера-Хопфа (см. [7], [10]).

В случае уравнения Винера-Хопфа с абсолютно монотонной ядерной функцией, НУФ сводится к обобщенному уравнению Амбарцумяна.

Рассмотренная в работе [12] задача невольтерровой факторизации интегральных операторов относится к структуре типа F_1 .

2.3. Разрешимость НУФ (1.6) в случае малой нормы A . В главе IV монографии [5] содержится основная теорема 5.1 о существовании обратной факторизации вида (1.5) в нормированном кольце вдоль цепочки. Теорема опирается на лемму 4.1 этой главы, которая имеет долгую историю развития. В условиях леммы предполагается, что кольцо обладает рядом дополнительных свойств, а элемент A имеет достаточно малую норму.

Ниже будет показано, что применение НУФ позволяет простыми средствами получить обобщение и усиление отмеченной леммы в произвольной F -структуре. Будем следовать работе [14].

Рассмотрим структуру типа F_1 . Введем в G новую норму, эквивалентную норме в J . Пусть $U^\pm \in G^\pm$. Определим норму пары (U^+, U^-) по формуле

$$(2.2) \quad \|(U^+, U^-)\| = \max(\|U^+\|, \|U^-\|).$$

Запишем систему (1.6) в следующей операторной форме:

$$(2.3) \quad (X^+, X^-) = H(X^+, X^-).$$

Здесь H оператор, действующий в $G^+ \times G^-$ согласно равенствам

$$(2.4) \quad Z^\pm = H^\pm (S^+, S^-) =: A^\pm + P^\pm (S^- S^+).$$

Из (2.1) и определения (2.2) нормы в $G^+ \times G^-$ следует непрерывность отображения $S = U^+ U^-$ из $G^+ \times G^-$ в G и тем самым – непрерывность оператора H .

Запишем итерации (1.12) в виде

$$(2.5) \quad (X_{n+1}^+, X_{n+1}^-) = H (X_n^+, X_n^-), \quad X_0^\pm = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Пусть последовательность (X_n^+, X_n^-) сходится в $G^+ \times G^-$:

$$(2.6) \quad (X_n^+, X_n^-) \rightarrow (X^+, X^-) \in G^+ \times G^-.$$

В силу непрерывности H , в (2.5) можно совершить предельный переход, поэтому пара (X^+, X^-) является основным решением НУФ (2.3).

Лемма 2.1. Пусть в случае структуры F_1 число $\mu_0 > 0$ удовлетворяет условию

$$(2.7) \quad q = \frac{1}{c} \left(1 - \sqrt{1 - 4c^2 \mu_0} \right) < 1$$

и выполняется неравенство $0 < \mu \leq \mu_0$ где $\mu = \|A\|$. Тогда НУФ (2.3) обладает основным решением (X^+, X^-) , причем $\|X^\pm\| < 1$. В случае структуры F этому решению соответствуют каноническая факторизация (1.4) и обратная факторизация (1.5).

Доказательство. Обозначим через $\sigma_r \subset G^+ \times G^-$ замкнутый шар радиуса r с центром в нуле. Из (2.4), с учетом неравенств (2.1) получаем: $\|Z^\pm\| \leq c\mu + c\|S^+\|\|S^-\|$, поэтому $\|Z\| \leq c\mu + c\|S\|^2$. Отсюда следует, что при $4c^2\mu < 1$ оператор H переводит шар σ_ρ радиуса $\rho = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c^2\mu}}{2c}$ в себя. При достаточно малом $\mu > 0$ выполняется неравенство $q = 2\rho < 1$. Покажем, что тогда оператор H сжимающий в σ_ρ с коэффициентом сжатия q . Пусть $(\tilde{Z}^+, \tilde{Z}^-) = H(\tilde{S}^+, \tilde{S}^-)$, где $(\tilde{S}^+, \tilde{S}^-) \in \sigma_\rho$. Обозначим $\delta^\pm = \tilde{S}^\pm - S^\pm$, $\varepsilon^\pm = \tilde{Z}^\pm - Z^\pm$. Из (2.4) и из соответствующих соотношений для $\tilde{Z}^\pm$ получаем $\varepsilon^\pm = P^\pm (\tilde{W}^+ \delta^- + \delta^+ W^-)$. Следовательно, $\|(\varepsilon^+, \varepsilon^-)\| \leq q \|(\delta^+, \delta^-)\|$. Поэтому итерации (2.5) (и (1.12)) сходятся к единственному решению (X^+, X^-) системы (1.7) в σ_ρ . Лемма доказана. $\square$

В условиях леммы простые итерации для уравнения (1.11) сходятся к (X^+, X^-) при произвольном начальном приближении из σ_ρ .

Замечание 2.1. В лемме 2.1 не фигурирует операция умножения элементов J на скаляр. Поэтому требование линейной структуры пространства J можно несколько ослабить. Представляет интерес рассмотрение такой структуры типа F_0 , в которой кольцо J является полным метрическим пространством с метрикой ρ , инвариантной относительно сдвига, то есть $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$.

3. НУФ В СЛУЧАЕ ОПЕРАТОРНОЙ АЛГЕБРЫ J С КОНУСОМ.

В настоящем пункте с использованием НУФ будет получена одна теорема о разрешимости задачи факторизации (1.4), включающая консервативный случай необратимого оператора $I - A$.

Пусть E - банахово пространство с правильным воспроизводящим конусом T неотрицательных элементов, а E^* - сопряженное пространство с конусом T^* . В E определяется модуль $|X|$ элемента X .

В качестве базового пространства J структуры F будем рассматривать B - алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в E . Классы $G^\pm$ являются B - пространствами и могут быть незамкнуты относительно умножения.

Нами будут использованы следующие обозначения.

- Через $r(A)$ обозначается спектральный радиус оператора $A \in J$, а через A^* - оператор, сопряженный к A .
- Обозначим через W конус положительных операторов из J , оставляющих T инвариантным. Конусы T , T^* , W порождают частичный порядок $\geq$ в своих пространствах. Запись $\omega > 0$ означает, что соответствующий конус телесный и ω - его внутренний элемент.
- Пусть $f \geq 0$ ненулевой элемент из T . Обозначим через $E_f \subset E$ B -пространство f - измеримых функций, с нормой $\|x\|_f = \inf \{\lambda; |x| \leq \lambda f\}$.
- Пусть $A \in J$, $g \in E^*$. Записи gA и A^*g считаются эквивалентными (что не приводит к недоразумению).
- Пусть $P^\pm$ непрерывные проекторы, участвующие в структуре F . Предполагается, что $T_\pm := P_\pm T \subset T$ и являются конусами в $G^\pm$.

Рассмотрим итерации (1.12) в случае $A \geq 0$. Тогда последовательности $X_n^\pm$ возрастают по конусам $T_\pm$.

Лемма 3.1. а) Пусть $A \geq 0$ и существуют $f \in T$, $f \neq 0$, и $\mu \in (0, 1]$ такие, что

$$(3.1) \quad Af \leq \mu f.$$

Тогда в (1.12) имеют место неравенства

$$(3.2) \quad X_n^+ f \leq \mu f, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если $\mu < 1$, то

$$(3.3) \quad X_n^- f \leq (1 - \mu)^{-1} A^- f, \quad n = 0, 1, \dots$$

б) Пусть $A \geq 0$ и существуют $\tilde{f} \in T^*$, $\tilde{f} \neq 0$ и $\tilde{\mu} \in (0, 1]$ такие, что

$$(3.4) \quad \tilde{f} A \leq \tilde{\mu} \tilde{f}.$$

Тогда имеют место неравенства

$$(3.5) \quad \tilde{f} X_n^- \leq \tilde{\mu} \tilde{f}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если $\tilde{\mu} < 1$, то

$$(3.6) \quad \tilde{f} X_n^- \leq (1 - \tilde{\mu})^{-1} \tilde{f} \tilde{A}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение а) леммы. Из (1.12) получаем

$$(3.7) \quad X_{n+1}^+ f + X_{n+1}^- f = Af + X_n^- X_n^+ f.$$

Поэтому

$$(3.8) \quad X_{n+1}^+ f \leq \mu f - [X_{n+1}^- - X_n^-] f - X_n^- [f - X_n^+ f].$$

Отсюда, с учетом монотонности последовательности X_n^- , получаем неравенство (3.2). Неравенство (3.3) следует из (3.6) и (3.2). Лемма доказана. $\square$

Так как конус T считается правильным, то из (3.2) следует сходимость X_n^+ в E_f и неравенство

$$(3.9) \quad X^+ f \leq \mu f.$$

Если $\mu < 1$, то в силу (3.3) последовательность X_n^- также сходится в E_f , имеет место неравенство

$$(3.10) \quad X^- f \leq (1 - \mu)^{-1} A^- f.$$

Аналогично обстоит дело при $\tilde{\mu} \leq 1$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда $\mu = \tilde{\mu} = 1$, $\tilde{f} > 0$ и пространство E слабо полное. Тогда последовательность X_n^- слабо сходится в E_f .

Нами доказано следующее утверждение:

Теорема 3.1. *В следующих двух случаях а) и б) существует основное решение (X^+, X^-) НУФ (1.6), которому соответствует факторизация (1.4) как равенство операторов, действующих в E_f .*

а) При $\mu < 1$ имеют место неравенства (3.9) и (3.10).

б) Пусть $\mu = 1$, $\mu' = 1$, $\tilde{f} > 0$ и пространство E слабо полное. Тогда

$$(3.11) \quad X^+ f \leq f, \quad \tilde{f} X^- \leq \tilde{f}.$$

Частные случаи теоремы 3.1 в различных классах интегральных операторов, конечных и бесконечных матриц рассмотрены и применены в ряде работ автора (см. например, [7]-[10], [12], [13], [16]).

Отметим, что в случае б) теоремы 3.1 оператор $I - A$ необратим в E_f .

Существование факторизации (1.4) в случае $\mu = 1$ имеет применения в вопросе изучения и решения однородного и неоднородного консервативного уравнения $f = g + Af$ с некомпактным оператором A . Такие уравнения представляют большой интерес в теории переноса излучения, в кинетической теории газов, в теории полумарковских процессов и др.

Замечание 3.1. *Теорема 3.1 легко распространяется на случай, когда положительность элемента A не требуется и условие (3.1) заменяется условием $|A|f \leq \mu f$.*

Abstract. A general form of non-linear factorization equation (NFE) in rings and normed rings is considered. Using NFE, two basic facts on the existence of factorization are obtained, which are difficult to access or not at all accessible by methods of directly constructing the inverse factorization. The first of them refers to the factorization of elements "close" to unit constructed earlier with strong additional restrictions. The second fact involves the factorization of non-invertible elements in the so-called conservative case.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Амбарцумян, Научные Труды, **1**, Ереван (1960).
- [2] В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Наука, Москва (1985).

- [3] Н. Н. Kagitvada, R. E. Kalaba, A. Shumitzky, “An initial-value method for Fredholm equations”, J. Math. Anal. Appl. **19**, 197 – 203 (1967).
- [4] В. С. Владимиров, “Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка”, ПММ, **19**, 315 – 324 (1955).
- [5] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория Вольтерровых Операторов В Гильбертовом Пространстве и Ее Приложения, Наука, М. (1967).
- [6] Н. Б. Енгибарян, “О факторизации симметрических интегральных операторов”, ДАН СССР, **203**, no. 1, 19 – 21 (1972).
- [7] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, “Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения”, Матем. сб., **97** (139):1(5), 35 – 58 (1975).
- [8] Н. Б. Енгибарян, “Некоторые факторизационные теоремы для интегральных операторов”, ДАН СССР, **230**, 1021 – 1024 (1976).
- [9] Н. Б. Енгибарян, “О нелинейных уравнениях факторизации операторов”, Применение методов теории функций и функц. анализа к задачам мат. физики, Ереван, Изд. ЕрГУ, 123 – 128 (1982).
- [10] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, Итоги науки и техники, Мат. анализ, **22**, М.: ВИНТИ, 175 – 244 (1984).
- [11] Н. Б. Енгибарян, “О многократной факторизации интегральных операторов типа свертки”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **37**, no. 4, 447 – 458 (1997).
- [12] Н. Б. Енгибарян, “Постановка и решение некоторых задач факторизации для интегральных операторов”, Мат. Сборник, **191**, no. 12, 61 – 76 (2000).
- [13] N. B. Yengibarian, “Factorization of Markov Chains”, J. of Theoretical probability, **17**, no. 2, 459 – 481 (2004).
- [14] Н. Б. Енгибарян, “О факторизации интегральных операторов в пространствах суммируемых функций”, Изв. РАН. Сер. матем., **73**, no. 5, 67 – 82 (2009).
- [15] Х. А. Хачатрян, “Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью”, Изв. РАН, Сер. матем., **76**, no. 1, 173 – 200 (2012).
- [16] Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян, “Об одном уравнении свертки теории фильтрации случайных процессов”, Украинський математичний журнал, **66**, no. 8, 1092 – 1105 (2014).

Поступила 30 марта 2022

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022

MULTIPLE FACTORIZATION OF SKEW-SYMMETRIC MATRICES

B. N. YENGIBARYAN, N. B. YENGIBARYAN

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-25-32>

Institute of Mathematics of Armenian National Academy of Sciences

E-mails: *b.yengibaryan@eif.am; yengib@instmath.sci.am*

Abstract. Multiple Factorization $A = \Pi D \Pi^T$ is proposed for real skew-symmetric matrix $A \neq 0$ of order $n \geq 3$. The block-diagonal factor D contains skew-symmetric invertible blocks of order 2 and the zero block of order $n - \text{rank } A$, if $\text{rank } A < n$. The matrix Π is an alternate product of Permutation matrices and Unit Lower triangular matrices with two columns. The applied approach is economical and contributes to the computational stability. The number of arithmetic operations $\sim \frac{1}{3}n^3$. The inverse matrix A^{-1} and the skeletal decomposition of A are presented in factorized form without additional calculations.

MSC2020 numbers: 15A23; 42B25.

Keywords: skew-symmetric matrix; multiple factorization; stability; inverse matrix.

1. INTRODUCTION

For a skew-symmetric (SS) matrix A the LDL^T factorization is well known(see [1]):

$$(1.1) \quad PAP^T = LDL^T.$$

Here P is a permutation matrix, L is unit lower triangular, D is block diagonal with SS blocks of order 2 or 1. L^T is the matrix transposed to L .

One modification of the LDL^T factorization is presented in this paper. It will be shown that a nonzero SS matrix $A \in R^{n \times n}$ of order $n \geq 3$ admits $\Pi D \Pi^T$ factorization:

$$(1.2) \quad A = \Pi D \Pi^T.$$

The block-diagonal factor D consists of invertible blocks of order 2 and one zero block of order $n - \text{rank } A$ (if A is non-invertible). The matrix Π is the alternate product of permutation matrices and unit lower triangular matrices with two columns.

The proposed method for constructing $\Pi D \Pi^T$ factorization is economical and contributes to the computational stability. The number of arithmetic operations $\sim \frac{1}{3}n^3$ (half the cost of LU factorization). The inverse matrix A^{-1} and the skeletal decomposition are presented in multiple factorized form without additional calculations.

Factorization $\Pi D \Pi^T$ has some similarity with multiple factorization of convolution <https://meet.google.com/syd-jmcc-ttg> integral operators (see [2]).

Notations. We will consider real skew-symmetric (SS) matrices of fixed order $n \geq 3$:

$$(1.3) \quad A = (a_{km})_{k,m=1}^n \neq 0, \quad a_{mk} = -a_{km}, \quad n \geq 3,$$

and their same submatrices. Sizes of matrices will be noted as appropriate.

- The index k in W_k means that the given square matrix has an order k .
- E_s is the unit matrix of order s . The notation E is used for E_n .
- Zero matrix of any size is denoted by 0.
- $\Lambda_2 \{W\}$ is the leading principal submatrix of order 2 of W .

2. PREPARATORY FACTORIZATION

Consider the following SS matrix $C(s)$ of order $n - 2s + 2 \geq 3$:

$$(2.1) \quad C(s) = (c_{km}(s))_{k,m=2s-1}^n \neq 0, \quad c_{mk}(s) = -c_{km}(s),$$

where:

$$(2.2) \quad 2 \leq 2s \leq n - 1, \quad J(s) := \Lambda_2 \{C(s)\} \neq 0.$$

We have:

$$(2.3) \quad J(s) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda(s) \\ -\lambda(s) & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda(s) := c_{2s-1,2s}(s) \neq 0,$$

$$\exists J^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -[\lambda(s)]^{-1} \\ [\lambda(s)]^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Let's represent $C(s)$ in the form

$$(2.4) \quad C(s) = \begin{pmatrix} J(s) & U^T(s) \\ -U(s) & G(s) \end{pmatrix}.$$

Here $U(s)$ is a $(n - 2s) \times 2$ matrix.

The following factorization holds (see [1]):

$$(2.5) \quad C(s) = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \tilde{V}(s) & E_{n-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & W(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & \tilde{V}^T(s) \\ 0 & E_{n-2s} \end{pmatrix}.$$

Here

$$(2.6) \quad \tilde{V}(s) = U(s) J^{-1}(s),$$

the SS matrix $W(s)$ of order $n - 2s$ is the Schur complement of the block $J(s)$:

$$(2.7) \quad W(s) = G(s) + U(s) J^{-1}(s) U^T(s).$$

Permutation of rows and columns. Let $B(s)$ be nonzero SS matrix of order $n - 2s + 2 \geq 3$:

$$(2.8) \quad B(s) = (b_{km}(s))_{k,m=2s-1}^n \neq 0, \quad b_{mk}(s) = -b_{km}(s), \quad 2 \leq 2s \leq n-1.$$

Unlike $C(s)$, invertibility of block $\Lambda_2\{B(s)\}$ is not assumed.

Consider the application of such a permutation $\tilde{P}(s)$, that the SS matrix

$$(2.9) \quad C(s) = \tilde{P}(s) B(s) \tilde{P}^T(s)$$

satisfies condition (2.2) and promotes computational stability (when constructing (2.5)).

We will assume that the rows and columns of the permutation matrices are numbered in the same way as $B(s)$: from $2s-1$ to n .

Let $b_{ij}(s)$ be any nonzero element of the matrix $B(s)$. By virtue of skew-symmetry of $B(s)$, one can take $i > j$:

$$(2.10) \quad b_{ij}(s) \neq 0, \quad i > j.$$

Let's translate the element $b_{ij}(s)$ into the position $(2s+2, 2s+1)$ using the following two elementary permutation matrices $Q(s)$ and $F(s)$. The matrix $Q(s)$ permutes rows or columns $2s-1$ and i , the matrix $F(s)$ permutes positions $2s$ and j . Consider transform (2.9), where

$$(2.11) \quad \tilde{P}(s) = F(s) Q(s), \quad \tilde{P}^T(s) = Q(s) F(s).$$

The matrix $C(s)$ determined by (2.9) is skew-symmetric, hence $c_{kk}(s) = 0$, $2s-1 \leq k \leq n$.

The Block $J(s) = \Lambda_2\{C(s)\}$ has the form (2.3), where

$$(2.12) \quad \lambda(s) = b_{ij}(s) \neq 0.$$

Hence the decomposition (2.5) takes place.

We have:

$$(2.13) \quad B(s) = \tilde{P}^T(s) C(s) \tilde{P}(s).$$

The following lemma holds.

Lemma 2.1. *Skew-symmetric matrix $B(s)$ of the form (2.8) admits factorization*

$$(2.14) \quad B(s) = \tilde{P}^T(s) \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \tilde{V}(s) & E_{n-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & W(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & \tilde{V}^T(s) \\ 0 & E_{n-2s} \end{pmatrix} \tilde{P}(s),$$

The permutation matrix $\tilde{P}(s)$ is given by (2.11). Matrices $V(s)$ and $W(s)$ are determined by (2.6) and (2.7) respectively.

Selected element $b_{ij}(s)$ will be called the Pivot element of factorization (2.14).

Choice of a pivot element. To facilitate the computational stability of constructing factorization (2.14), one can take as a pivot element $b_{ij}(s)$ (any) largest modulus element of the matrix $B(s)$.

In the framework of pivoting strategy of Bunch (see [1]), the pivot element is the largest modulus element of the first column (if this column is nonzero). Then $\tilde{P}(s) = Q(s)$.

The following version of the Bunch strategy can be used. Let the first column (and first row) of the matrix $B(s)$ be zero or consist of elements small in modulus, and sometime any element $b_{i,2s}(s)$ of the second column is “sufficiently large” in modulus. Then $J(s)$ can be formed by translating $b_{i,2s}(s)$ into the position $(2s-1, 2s)$, and element $b_{2s,i}(s) = -b_{i,2s}(s)$ into the position $(2s, 2s-1)$. Then only one elementary permutation matrix is used, as in the case of the Bunch strategy. However, the degree of computational stability may be significantly higher.

3. ONE STEP OF MULTIPLE FACTORIZATION

Consider the following SS matrices $A(s)$ of order n :

$$(3.1) \quad A(1) = B(1), \quad A(s) = \begin{pmatrix} D(s) & 0 \\ 0 & B(s) \end{pmatrix}, s \geq 2, \quad 2s \leq n-1.$$

Here $B(s) \neq 0$ is a matrix of the form (2.9); $D(s)$ is SS matrix of order $2s-2$.

Factorization (2.14) of $B(s)$ generates the following factorization for $A(s)$, $s \geq 2$:

$$(3.2) \quad A(s) = \begin{pmatrix} E_{2s} & 0 \\ 0 & \tilde{P}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2s} & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & \tilde{V}(s) & E_{n-2s-2} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} D(s) & 0 & 0 \\ 0 & J(s) & 0 \\ 0 & 0 & W(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2s} & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & \tilde{V}^T(s) \\ 0 & 0 & E_{n-2s-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2s} & 0 \\ 0 & \tilde{P}^T(s) \end{pmatrix}, s \geq 2.$$

Let $V(s)$ and $P(s)$ are the following continuations of $\tilde{V}(s)$ and $\tilde{P}(s)$, up to n -order matrices:

$$(3.3) \quad V(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{V}(s) & 0 \end{pmatrix}, P(s) = \begin{pmatrix} E_{2s-2} & 0 \\ 0 & \tilde{P}(s) \end{pmatrix}.$$

Denote also

$$(3.4) \quad D(s+1) = \begin{pmatrix} D(s) & 0 \\ 0 & J(s) \end{pmatrix}, \quad B(s+1) = W(s); \\ A(s+1) = \begin{pmatrix} D(s+1) & 0 \\ 0 & B(s+1) \end{pmatrix}.$$

In the new notation equality (3.3) takes the following recursive form at $s \geq 2$, $2s \leq n-1$:

$$(3.5) \quad A(s) = P(s) (E + V(s)) A(s+1) (E + V^T(s)) P^T(s).$$

Equality (3.6) for $s = 1$ follows from (2.14) in which

$$(3.6) \quad D(2) = J(1) = \Lambda_2 \{C(1)\} \neq 0.$$

The following lemma holds.

Lemma 3.1. *The matrix $A(s)$, $s \geq 1$, given by (3.1), admits factorization (3.5), where $V(s)$, $P(s)$, $A(s+1)$ are determined by relations (3.3), (3.4).*

Thus, defining matrices $\tilde{V}(s)$ and $W(s)$ by (2.6) and (2.7), decomposition (2.5) is constructed, which leads to (3.5).

The matrices $V(s)$ and $V^T(s)$ that appear in (3.5) are nilpotent with index 2. Therefore

$$(3.7) \quad (E + V(s))^{-1} = E - V(s), \quad (E + V^T(s))^{-1} = E - V^T(s).$$

4. MULTIPLE FACTORIZATION

Let the matrix $A = A(1)$ have the form (1.3). Consider the question of recursive constructing of the following multiple factorizations

$$(4.1) \quad A = P(1) (E + V(1)) \cdots P(k) (E + V(k)) \cdot \\ \cdot A(k+1) (E + V^T(k)) P^T(k) \cdots (E + V^T(1)) P^T(1),$$

with suitable values of $k \geq 1$, using recurrent relations (3.6).

The existence of (4.1) for $k = 1$ is contained in Lemma 3.1. Let (4.1) be constructed for some $k \geq 1$. Thus, all intermediate matrices $J(s)$ have been constructed. It follows from (3.5) that the matrix $D(k+1)$ of order $2k$ has the form

$$(4.2) \quad D(k+1) = \begin{pmatrix} J(1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J(k) \end{pmatrix}, \quad 2 \leq 2k \leq n-1,$$

with invertible SS blocks $J(1), \dots, J(k)$ of order 2.

To continue the decomposition (4.1), the matrix $A(k+1)$ must satisfy conditions of Lemma 3.1, that is:

$$(4.3) \quad B(k+1) \neq 0 \quad \text{and} \quad 2k \leq n-3.$$

These conditions will be violated for some value of k if one of the following two situations a) and b) arises:

- a) **The case of invertible matrix A .** Let the number n is even: $n = 2m$; $k = m - 1$ and the matrix $B(s + 1)$ of order 2 is invertible:

$$(4.4) \quad 2k = n - 2, B(k + 1) \neq 0.$$

Then the matrix $B(k + 1) = J(k + 1)$ joins to the matrix $D(s + 1)$ as the last diagonal block.

We obtain the factorization (1.2) where

$$(4.5) \quad D = \begin{pmatrix} J(1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J(k + 1) \end{pmatrix}$$

$$(4.6) \quad \Pi = P(1)(E + V(1)) \cdots P(k)(E + V(k)).$$

- b) The case of non-invertible matrix A . Let

$$(4.7) \quad 2k \leq n - 1 \quad \text{and} \quad B(k + 1) = 0.$$

Then we obtain the factorization (1.2) where Π is given by (4.6) and

$$(4.8) \quad D = \begin{pmatrix} D(k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

zero diagonal block of which has the order $n - 2k + 2$.

Because of invertibility of blocks $J(1), \dots, J(k)$ we have $\text{rank } D = \text{rank } D(k) = 2k - 2$. It follows from invertibility of matrices $E + V(s)$ (see (3.7)) that

$$(4.9) \quad r := \text{rank } A = 2k - 2.$$

Hence the previously unknown rank r of the matrix A is also determined. The following Theorem holds.

Theorem 4.1. *Any real SS matrix $A \neq 0$ of order $n \geq 3$ admits complete factorization (1.2), in which Π is the product of the form (4.6). The equality (4.9) holds. In the case (4.4) the matrix D has the form (4.5) and $r = n$. In the case (4.7) the matrix D has the form (4.8).*

5. CONSTRUCTION OF THE INVERSE MATRIX A^{-1} AND SKELETAL DECOMPOSITION

Construction of the inverse matrix. In the case of invertible matrix A , taking into account (4.1), we obtain the following expression for A^{-1} :

$$(5.1) \quad A^{-1} = P(1)(E - V(1)) \cdots P(k)(E - V(k)) \begin{pmatrix} J^{-1}(1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J^{-1}(k+1) \end{pmatrix} \times \\ \times (E - V^T(k)) P(k) \cdots (E - V^T(1)) P(1)$$

Numerical construction of the inverse matrix in the form (5.1) does not imply additional calculations compared with the direct decomposition (4.1), except for calculating $J^{-1}(k+1)$. All other matrices involved in (5.1) were determined when constructing a direct decomposition (4.1).

Skeletal decomposition. Let $r = \text{rank } A < n$. Then the factorization (4.2) leads to the following skeletal decomposition of the matrix A :

$$(5.2) \quad A = \left[\Pi \begin{pmatrix} D(k+1) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot [(E_r \ 0) \Pi^T], \quad r = 2k - 2.$$

Note, that the Skeletal decomposition applies to the construction of the pseudoinverse matrix A^+ .

The number of arithmetic operations. The numerical construction of the decomposition (3.5) is reduced to the calculation of the elements of the matrices $\tilde{V}(s)$ and $W(s)$ in accordance with the formulas (2.6), (2.7). In the case of an invertible matrix, the total number of arithmetic operations is about $\frac{1}{3}n^3$ (half the cost of LU factorization). In the case $\text{rank } A < n$, the number of arithmetic operations may be significantly less.

After constructing the inverse matrix A^{-1} in the factorized form (5.2), the following question arises: Is it necessary to expand the parentheses in the product $P(1)(E - V_1) \cdots P(k)(E - V_m)$ and obtain a three-factor decomposition, while performing a large amount of additional calculations? We only note that in the question of solving the equations $Ax = b$ there is no need for it.

Low-rank approximation. Suppose that in the recurrent construction of the decompositions (3.5). For some all elements of the matrix $B(k+1)$ are small enough (according to the chosen criterion of smallness). Then the decomposition can be stopped, the matrix $B(k+1)$ is replaced by a zero matrix.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, University of Manchester, Manchester, England (2002).
- [2] B. N. Engibarian (Yengibaryan), “Multiple factorization of convolution-type integral operators”, Comput. Math. Math. Phys., **37**: 4, 435 – 446 (1997).

Поступила 30 марта 2022

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022

О СРАВНЕНИИ МОЩНОСТИ ЧАСТИЧНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-25-33-43>

Российско - Армянский Университет¹

Институт Математики Академии Наук Армении

E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com; haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Сравниваются частично гипоеллиптические (по Гордингу, Мальгранжу и Эренпрейсу) и (частично) - гипоеллиптические по Буренкову операторы (многочлены). Получаются условия при которых добавление младших членов к частично - гипоеллиптическому оператору (многочлену) данного типа не нарушает тип его частной гипоеллиптичности.

MSC2020 number: 12E10; 26C05; 35H10; 35G05.

Ключевые слова: гипоеллиптический (по Хёрмандеру); частично гипоеллиптический (по Гордингу, Мальгранжу, Эренпрейсу и Буренкову) оператор (многочлен); младшие члены.

1. ВВЕДЕНИЕ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n := \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ – множество n - мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_j \in \mathbb{N}_0$, $(j = 1, \dots, n)$, $\mathbb{R}^n$ n -мерное евклидово пространство вещественных точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\mathbb{R}^{n,0} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n \neq 0\}$ и $\mathbb{R}^{n,+} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0 (j = 1, \dots, n)\}$.

Для $\nu \in \mathbb{R}^{n,+}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$ положим $(\xi, \nu) := \xi_1 \nu_1 + \dots + \xi_n \nu_n$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$, $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' := (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$, $\xi = (\xi', \xi'')$. $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ($j = 1, \dots, n$).

Пусть $R(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ многочлен с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(R) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Введем еще следующие обозначения: для многочлена R и числа $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$: через (r) обозначим множество мультииндексов $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ для которых

¹Исследование выполнено при финансовой поддержки тематического фонда Российско - Армянского университета министерства образования и науки Российской Федерации.

существует мультииндекс $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{n-k}$ такой, что $\alpha := (\alpha', \alpha'') \in (R)$, а для $\alpha' \in (r)$ обозначим $(r_{\alpha'}) := \{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{n-k}, \alpha := (\alpha', \alpha'') \in (R)\}$ и положим

$$r_{\alpha'}(\xi'') := \sum_{\alpha'' \in (r_{\alpha'})} \gamma_{(\alpha', \alpha'')}(\xi'')^{\alpha''}.$$

Тогда многочлен R можно представить в виде

$$(1.1) \quad R(\xi) = \sum_{\alpha' \in (r)} (\xi')^{\alpha'} r_{\alpha'}(\xi'').$$

Определение 1.1 (см. [1], определение 11.1.2 и теорему 11.1.3). Многочлен R называется гипоеллиптическим, если $R^{(\alpha)}(\xi)/R(\xi) := D^\alpha R(\xi)/R(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ для любого $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Определение 1.2 (см. [2], [3] или [1], определение 11.2.4 и теорему 11.3.3). Многочлен R называется частично гипоеллиптическим по Гордингу - Мальгранжу (далее Г - М - гипоеллиптическим) относительно переменных $\xi'' := (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ $1 \leq k < n$, если (см. представление (1.1)) многочлен $r_{\alpha'}(\xi'')$ является гипоеллиптическим относительно ξ'' и для любого $0 \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ $r_{\alpha'}(\xi'')/r_{0'}(\xi'') \rightarrow 0$ при $|\xi''| \rightarrow \infty$.

Определение 1.3 (см. [4] - [5]) Многочлен R называется гипоеллиптическим по Буренкову (далее Б - гипоеллиптическим) относительно переменных $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_k)$ $1 \leq k < n$, если $|R^{(\alpha')}(\xi)|/[1 + |R(\xi)|] \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ для любого $0 \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$.

Определение 1.4 (см. [6] и [1] определение 10.3.4) Говорят, что оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) мощнее (соответственно сильнее) оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$) и пишут $Q < P$, (соответственно $Q \prec P$,) если с некоторой постоянной $C > 0$ $|Q(\xi)| \leq C[1 + |P(\xi)|]$ (соответственно $\tilde{Q}(\xi) \leq C\tilde{P}(\xi)$, где для оператора $R(D)$ — функция Л. Хёрмандера, определяемая формулой $\tilde{R}(\xi) := \sqrt{\sum_{|\alpha| \geq 0} |D^\alpha(\xi)|^2}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$).

Пусть $\mathfrak{M} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^M\}$ набор мультииндексов. Многогранником Ньютона набора $\mathfrak{M}$ назовем наименьший выпуклый многогранник $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$, содержащий все точки $\mathfrak{M}$. Многогранником Ньютона оператора $R(D)$ (многочлена $R(\xi)$) назовем многогранник Ньютона $\mathfrak{R}((R))$ набора $(R) \cup \{0\}$.

Определение 1.5 (см. [7]) Оператор $R(D)$ (многочлен $R(\xi)$) назовем регулярным (или невырожденным), если существует число $c > 0$ такое, что

$$\sum_{\nu \in \mathfrak{R}((R))} |\xi^\nu| \leq c[1 + |R(\xi)|] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Гладкость решений линейных дифференциальных уравнений часто определяется поведением на бесконечности символа (характеристического многочлена) соответствующего дифференциального оператора. Например, эллиптическим уравнениям, все непрерывные решения которых являются аналитическими функциями (вещественных переменных), соответствуют символы, которые бесконечно возрастают при стремлении аргумента на бесконечность. При этом, скорость такого стремления является оптимальной, т.е. если

$$(1.1)' \quad R(D) = \sum_{k=0}^m R_{m-k}(D) =: \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=m-k} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$$

эллиптический оператор порядка $ord R = m$, то существует число $\sigma > 0$ такое, что $|R_m(\xi)| + 1 \geq \sigma [|\xi|^m + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, в частности, что а) $Q < R$ (следовательно $Q \prec R$) для любого оператора Q порядок которого не превосходит m , б) к эллиптическому оператору можно добавить любой оператор Q порядка $ord Q < m$, не нарушая его эллиптичность.

Гипоэллиптическим операторам, все непрерывные решения отвечающих им уравнений которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями, также соответствуют символы, которые бесконечно возрастают при стремлении аргумента на бесконечность (см. [1], теорема 11.1.3). Однако добавление младшего члена (конечно представляет интерес только случай когда его порядок строго меньше порядка данного оператора) может нарушить его гипоэллиптичность.

Символы гиперболических (по Гордингу) операторов уже могут не возрастать на бесконечности. Однако оказывается, что если (см. представление (1.1)') главная часть $R_m(D)$ оператора $R(D)$ гиперболическа, то оператор $R(D)$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда $R_{m-k} \prec R_m$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$ (см. [7] - [8] или [1] теорема 12.4.6).

Нахождению условий, при которых тот или иной младший член можно добавить к данному гипоэллиптическому оператору, не нарушая его гипоэллиптичность, посвящены много работ (см., например [9] - [11]). Но сравнительно мало изучен этот вопрос для разных частично гипоэллиптических операторов.

Настоящая заметка посвящена этому вопросу и, непосредственно связанный с этой тематикой, вопросу о сравнении частично гипоэллиптических операторов разных типов.

Сначала докажем несколько вспомогательных предложений, которыми будем пользоваться при получении основных результатов.

Лемма 1.1. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Γ - M - гипозэллиптичен относительно ξ'' и $Q < P$. Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что (см. представление (1.1) где многочлены $\{p_{\alpha'}\}$, и $\{q_{\alpha'}\}$ и множества (p) и (q) для многочленов P и Q определяются аналогично тому, как это делалось для многочлена R)

$$(1.2) \quad \sum_{\alpha' \in (q)} |q_{\alpha'}(\xi'')| \leq c [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \quad \forall \xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Доказательство. Из условия леммы на многочлен P (см. определение 1.2) следует существование постоянной $c_1 \geq 1$ такой, что

$$c_1^{-1} [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \leq |P(\xi)| + 1 \leq c_1 [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi'| \leq 1.$$

Отсюда и из условия $Q < P$ следует существование числа $c_2 > 0$ такого, что

$$(1.3) \quad |Q(\xi)| \leq c_2 [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi'| \leq 1.$$

Пусть m' размерность пространства многочленов от k переменных с комплексными коэффициентами степень которых не превышает $d_q := \max\{|\alpha'|, \alpha' \in (q)\}$ и пусть множество $\mathcal{A} := \{\tau'(j) \in \mathbb{R}^k, |\tau'(j)| \leq 1\}_{j=1}^{m'}$ определяется так, что любой многочлен от k переменных порядка не выше d_q , обращающийся в нуль на множестве $\mathcal{A}$, обращается в нуль тождественно на $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим следующую линейную алгебраическую систему уравнений относительно $\{q_{\alpha'} : \alpha' \in (q)\}$

$$\sum_{\alpha' \in (q)} [\tau'(j)]^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi'') = Q(\tau'(j), \xi'') \quad j = 1, \dots, m'; \quad \xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Из определения множества $\mathcal{A}$ следует, что эта система однозначно разрешима и для любого мультииндекса $\alpha' \in (q)$ существуют числа $\{c_{\alpha', j}\}_{j=1}^{m'}$ такие, что $q_{\alpha'}(\xi'') = \sum_{j=1}^{m'} c_{\alpha', j} Q(\tau'(j), \xi'')$ для всех $\xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}$, откуда, в силу (1.3), следует утверждение Леммы 1.1. $\square$

Ниже мы будем пользоваться следующим легко проверяемым предложением

Предложение 1.1. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Lambda \subset \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = r\}$. Тогда существуют векторы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_j > 0 \ (j = 1, \dots, n)$ и $\beta \in \Lambda$ такие, что

$$(\lambda, \beta) > \max\{(\lambda, \alpha) \mid \alpha \in \Lambda \setminus \{\beta\}\},$$

$$(\lambda, \beta) > (\lambda, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad |\alpha| < r,$$

$$(\lambda, \beta) < (\lambda, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad |\alpha| > r.$$

Лемма 1.2. Если $(q) \setminus \{0'\} \neq \emptyset$, то, при условиях леммы 1.1 $|q_{\alpha'}(\xi'')| / [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \rightarrow 0$ при $|\xi''| \rightarrow \infty$ для любого $\alpha \in (q) : |\alpha'| \neq 0$.

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях леммы существуют постоянная $c_1 > 0$, мультииндекс $\beta' \in (q) : |\beta'| \neq 0$ и последовательность $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty : |\xi''(s)| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ такие, что

$$(1.4) \quad |q_{\beta'}(\xi''(s))| \geq c_1 [|p_{0'}(\xi''(s))| + 1] \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Обозначим $t_s := \max_{0' \neq \alpha' \in (q)} |q_{\alpha'}(\xi''(s))|$ ($s = 1, 2, \dots$). В силу конечности множества (q) существует мультииндекс $\gamma' \in (q) : |\gamma'| \neq 0$ и подпоследовательность последовательности $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$ (которую, не умаляя общности, также обозначим через $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$) для которых $|q_{\gamma'}(\xi''(s))| = t_s$ для всех $s = 1, 2, \dots$.

Пусть $(q)_l := \{\beta' \in (q), |\beta'| = l \text{ } (l = 1, 2, \dots)\}$ и r максимальная длина тех $\alpha' \in (q) : |\alpha'| \neq 0$ для которых $\sum_{\alpha' \in (q)_r} |q_{\alpha'}(\xi''(s))|/t_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Тогда, за счет выбора подпоследовательности последовательности $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$ (которую также обозначим через $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$) и определения числа r получаем существование числа $c_2 \geq 1$ такого, что

$$(1.5) \quad \sum_{\alpha' \in (q)_l} |q_{\alpha'}(\xi''(s))| \leq c_2 t_s \quad l = 1, \dots, r-1, \quad s = 1, 2, \dots,$$

$$(1.6) \quad \sum_{\alpha' \in (q)_r} |q_{\alpha'}(\xi''(s))| \leq c_2 t_s \quad s = 1, 2, \dots$$

и при $s \rightarrow \infty$

$$(1.7) \quad \sum_{\alpha' \in (q)_j} |q_{\alpha'}(\xi''(s))|/t_s \rightarrow 0 \quad j > r.$$

Из определения и конечности множества $(q)_r$ следует, что существуют подпоследовательность последовательности $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$ (которую также обозначим через $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$), непустое множество $\mathbb{B}(q) \subset (q)_r$ и постоянная $c_3 > 0$ для которых при всех $\alpha' \in \mathbb{B}(q)$ (см. определение последовательности $\{t_s\}_{s=1}^\infty$)

$$(1.8) \quad c_3^{-1} t_s \leq |q_{\alpha'}(\xi''(s))| \leq c_3 t_s \quad s = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots$$

и для любого $\beta' \in (q)_r \setminus \mathbb{B}(q)$ при $s \rightarrow \infty$

$$(1.9) \quad |q_{\alpha'}(\xi''(s))|/t_s \rightarrow 0.$$

В силу определения последовательности $\{t_s\}$ из оценки (1.4) имеем

$$(1.10) \quad t_s \geq c_1/c_3 [|p_{0'}(\xi''(s))| + 1], \quad s = 1, 2, \dots$$

Так как $\mathbb{B}(q) \neq \emptyset$, то в силу предложения 1.1 существует вектор $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_j > 0$ ($j = 1, \dots, k$) и мультииндекс $\delta' \in \mathbb{B}(q)$ такие, что

$$(1.11) \quad (\lambda', \delta') > (\lambda', \alpha') \quad \forall \alpha' \in (q)_l, \quad l < r,$$

$$(1.12) \quad (\lambda', \delta') > (\lambda', \alpha') \quad \forall \alpha' \in \mathbb{B}(q) \setminus \{\delta'\},$$

$$(1.13) \quad (\lambda', \delta') < (\lambda', \alpha') \quad \forall \alpha' \in (q)_l, \quad l > r,$$

Для каждого $s \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\theta_s := \min \left\{ \min_{\alpha' \in (q)_r \setminus \mathbb{B}(q)} \left| \frac{q_{\delta'}(\xi''(s))}{q_{\alpha'}(\xi''(s))} \right|^{2/(\lambda', \alpha')}, \right. \\ \left. \min_{\alpha' \in (q)_l, l > r} \left| \frac{q_{\delta'}(\xi''(s))}{q_{\alpha'}(\xi''(s))} \right|^{1/[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]}, \min_{0' \neq \alpha' \in (p)} \left| \frac{p_{0'}(\xi''(s))}{p_{\alpha'}(\xi''(s))} \right|^{1/(\lambda', \alpha')} \right\}.$$

Так как $|\xi''(s)| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то из частичной гипоеллиптичности многочлена P , из соотношений (1.9), (1.7) и из оценки (1.8), в силу соотношений (1.9) и (1.11) имеем, что $\theta_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Положим $\xi(s) = (\xi'(s), \xi''(s))$, где $\xi'(s) = (\theta_s^{\lambda_1/2}, \dots, \theta_s^{\lambda_k/2})$ и рассмотрим поведения многочленов P и Q на последовательности $\{\xi(s)\}$ для достаточно больших s .

Так как, в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}_{s=1}^\infty$, $p_{0'}(\xi''(s)) \neq 0$ для достаточно больших s (см. определения 1.2 и 1.1), то для достаточно больших s имеем

$$|P(\xi(s))| \leq \sum_{\alpha' \in (p)} \theta_s^{(\lambda', \alpha')} |p_{\alpha'}(\xi''(s))| = |p_{0'}(\xi''(s))| \left[1 + \sum_{0' \neq \alpha' \in (p)} \theta_s^{(\lambda', \alpha')} \left| \frac{p_{\alpha'}(\xi''(s))}{p_{0'}(\xi''(s))} \right| \right] \\ \leq |p_{0'}(\xi''(s))| \left[1 + \sum_{0' \neq \alpha' \in (p)} \theta_s^{-(\lambda', \alpha')} \right].$$

Так как координаты λ' положительны и $\theta_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то отсюда получаем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.14) \quad |P(\xi(s))| = |p_{0'}(\xi''(s))| [1 + o(1)].$$

Рассмотрим следующие четыре возможных случая 1) $\alpha' \in (q)_l$ и $l < r$, 2) $\alpha' \in (q)_l$ и $l > r$ 3) $\alpha' \in (q)_r \setminus \mathbb{B}(q)$, 4) $\alpha' \in \mathbb{B}(q) \setminus \{\delta'\}$.

В случае 1) $\alpha' \in (q)_l$ и $l < r$ в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}$ и оценок (1.11), (1.5), (1.8) имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.15) \quad \left| \frac{(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))}{(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| = \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \left| \frac{q_{\alpha'}(\xi''(s))}{q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| \\ \leq \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \frac{c_2 t_s}{c_4^{-1} t_s} \rightarrow 0.$$

В случае 2) $\alpha' \in (q)_l$ и $l > r$ в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}$ и неравенства (1.13) аналогично имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.16) \quad \left| \frac{(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))}{(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| \leq \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \theta_s^{-[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]} \\ = \theta_s^{-[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \rightarrow 0.$$

В случае 3) $\alpha' \in (q)_r \setminus \mathbb{B}(q)$, в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}$, имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.17) \quad \left| \frac{(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))}{(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| = \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \left| \frac{q_{\alpha'}(\xi''(s))}{q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| \leq \theta_s^{-(\lambda', \delta')/2} \rightarrow 0.$$

В случае 4) $\alpha' \in \mathbb{B}(q) \setminus \{\delta'\}$. в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}$ и неравенств (1.8), (1.12) имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.18) \quad \left| \frac{(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))}{(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| \leq \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \frac{c_4 t_s}{c_4^{-1} t_s} \rightarrow 0.$$

Из соотношений (1.15) - (1.18), в силу неравенства (1.8) имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.19) \quad |Q(\xi(s))| \geq |(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))| - \sum_{\alpha' \in (q) \setminus \{\delta'\}} |(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))| \\ = \theta_s^{(\lambda', \delta')/2} |q_{\delta'}(\xi''(s))| [1 - o(1)] \geq c_4^{-1} t_s \theta_s^{(\lambda', \delta')/2} [1 - o(1)].$$

Так как $\theta_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ то отсюда, в силу (1.14), получаем, что $|Q(\xi(s))|/[1 + |P(\xi(s))|] \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Это противоречит условиям леммы и доказывает лемму. Лемма 1.2 доказана. $\square$

Докажем еще следующее вспомогательное предположение, которое понадобится нам далее

Лемма 1.3. Пусть многочлены P и Q такие, что $|Q(\xi)|/[1 + |P(\xi)|] \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Тогда при для любых $l, r \in \mathbb{N}$, $l > r$ и $x \rightarrow \infty$

$$(1.20) \quad f(x) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|x^r Q(\xi)|}{1 + |x^l Q(\xi)| + |P(\xi)|} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Легко усматреть, что при условиях леммы функция f непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^{1,+}$. Предположим обратное, что при условиях леммы соотношение (1.20) нарушается, т.е. существует последовательность $\{x_s\}_{s=1}^\infty$ такая, что $x_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и число $c > 0$ такие, что

$$(1.21) \quad f(x_s) \geq c \quad s = 1, 2, \dots$$

Из определения функции f в силу (1.21) имеем, что для любого $s \in \mathbb{N}$ существует точка $\xi(s) \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$(1.22) \quad \frac{|x_s^r Q(\xi(s))|}{1 + |x_s^l Q(\xi(s))| + |P(\xi(s))|} \geq \frac{c}{2} \quad s = 1, 2, \dots$$

Из (1.22) следует, что $Q(\xi(s)) \neq 0 \quad s = 1, 2, \dots$. Следовательно при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{c}{2} \leq \frac{|x_s^r Q(\xi(s))|}{|x_s^l Q(\xi(s))|} = x_s^{r-l} \rightarrow 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Всюду ниже будем считать, что изучаемые многочлены $P, Q, R, \dots$ представлены в виде (1.1), где $1 \leq k < n$, $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' := (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$, $\xi = (\xi', \xi'')$.

Теорема 2.1. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Γ - M -гипоэллиптичен относительно группы переменных ξ'' и $Q < P$. Тогда многочлен $R(\xi) := P(\xi) + Q(\xi) - Q_{0'}(\xi)$ также Γ - M -гипоэллиптичен относительно ξ'' .

Доказательство. Из определения многочлена R следует, что $r_{0'}(\xi'') = p_{0''}(\xi'')$ и $r_{\alpha'}(\xi'') = p_{\alpha'}(\xi'') + q_{\alpha'}(\xi'')$ для любого $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$.

Так как в силу условия теоремы многочлен $p_{0''}(\xi'')$ гипоэллиптичен как многочлен от ξ'' , то многочлен $r_{0'}(\xi'')$ гипоэллиптичен как многочлен от ξ'' . С другой стороны, из условия теоремы на многочлен P (см. определение 1.2) и леммы 1.2 для любого $0 \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ имеем $|r_{\alpha'}(\xi'')|/|p_{0'}(\xi'')| \leq [p_{\alpha'}(\xi'')| + |q_{\alpha'}(\xi'')|]/|p_{0'}(\xi'')| \rightarrow 0$ при $|\xi''| \rightarrow \infty$.

Откуда (см. определение 1.2) получаем, что многочлен $R(\xi)$ Γ - M -гипоэллиптичен относительно переменных ξ'' . $\square$

Следствие 2.1. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Γ - M -гипоэллиптичен относительно группы переменных ξ'' . Если для многочлена $Q(\xi'')$ существуют мультииндекс $0' \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ и число $c > 0$ такие, что $|(\xi')^{\alpha'} Q(\xi'')| \leq c [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, то для любого мультииндекса $\beta' \in \mathbb{N}_0^k$ многочлен $P(\xi) + (\xi')^{\beta'} Q(\xi'')$ Γ - M -гипоэллиптичен относительно ξ'' .

Теорема 2.2. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ B -гипоэллиптичен относительно группы переменных ξ' , при этом многочлен $p_{0'}(\xi'') = P(0', \xi'')$ гипоэллиптичен как многочлен от ξ'' . Тогда многочлен P Γ - M -гипоэллиптичен относительно ξ'' .

Доказательство. По определению 1.2 достаточно показать, что $p_{\alpha'}(\xi'')/p_{0'}(\xi'') \rightarrow 0$ при $|\xi''| \rightarrow \infty$. В силу условия теоремы для любого $0 \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ имеем при $|\xi''| \rightarrow \infty$

$$\frac{|p_{\alpha'}(\xi'')|}{|p_{0'}(\xi'')|} = \frac{|D^{\alpha'} P(\xi', \xi'')|}{\alpha'! |P(\xi', \xi'')|} \Big|_{\xi'=0} \rightarrow 0,$$

что доказывает теорему, так как по условию теоремы многочлен $p_{0'}(\xi'')$ гипоеллиптичен относительно ξ'' . $\square$

Следствие 2.1. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Б - гиперболичен относительно ξ' , при этом многочлен $p_{0'}(\xi'') = P(0', \xi'')$ гипоеллиптичен как многочлен от ξ'' . Если $Q < P$, то многочлен $R(\xi) := P(\xi) + Q(\xi) - Q_{0'}(\xi)$ является Г-М - гипоеллиптическим относительно ξ'' .

Теорема 2.3. Пусть $k = n - 1$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\xi'' = \xi_n$. Если отличный от постоянной многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Б - гиперболичен относительно ξ' , то многочлен P Г - М - гипоеллиптичен относительно ξ_n .

Доказательство. Из Б - гиперболичности относительно ξ' , многочлена P следует, что для любого $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}$ при $\xi'' = \xi_n \rightarrow \infty$

$$(2.1) \quad \frac{|p_{\alpha'}(\xi_n)|}{1 + |p_{0'}(\xi_n)|} = \frac{|(D^{\alpha'} P)(\xi', \xi_n)|}{1 + |P(\xi', \xi_n)|} \Big|_{\xi'=0} \rightarrow 0.$$

Так как мультииндексы $\{\alpha'\}$ и последовательности $\{\xi_n\}$ произвольные, то их можно выбирать так, чтобы $p_{\alpha'}(\xi_n) \neq 0$ для всех ξ_n из этой последовательности. Тогда из (2.1) следует, что $ord_{p_{0'}}(\xi_n) \geq 1$. Так как любой многочлен одного переменного, отличный от постоянной, гипоеллиптичен, то утверждение настоящей теоремы непосредственно следует из теоремы 2.2. $\square$

На примерах покажем, что требование $k = n - 1$ в этой теореме является существенным.

Пример 2.1. Пусть $n = 3$, $k = 1$, т.е. $\xi' = \xi_1$, $\xi'' = (\xi_2, \xi_3)$, $P(\xi) = (\xi_2^2 - \xi_3^2)^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 + \xi_1^2 (\xi_2^2 + \xi_3^2)$. Легко проверить, что это Б - гипоеллиптический многочлен относительно ξ_1 . Однако из теоремы 2 работы [9] следует, что многочлен $p_{0'}(\xi'') = P(0, \xi_2, \xi_3) = (\xi_2^2 - \xi_3^2)^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4$ как многочлен двух переменных ξ_2, ξ_3 не является гипоеллиптическим, поэтому многочлен P не является частично гипоеллиптическим по ξ_2, ξ_3 .

Пример 2.2. Пусть $n = 3$, $k = 1$, т.е. $\xi' = \xi_1$, $\xi'' = (\xi_2, \xi_3)$, $P(\xi) = \xi_2^6 \xi_3^6 + \xi_2^4 + \xi_3^4 \xi_1^2 (\xi_2^2 + \xi_3^2)$. Легко проверяется, что это Б - гипоеллиптический многочлен относительно ξ_1 .

Так как многогранник Ньютона многочлена $p_{0'} = \xi_2^6 \xi_3^6 + \xi_2^4 + \xi_3^4$ не является вполне правильным, то по лемме 2.1 работы [12] многочлен $p_{0'}$ не является гипозэллиптическим, следовательно, P не является частично гипозэллиптическим по ξ_2, ξ_3 .

Теорема 2.4. Пусть регулярный (см. определение 1.5) многочлен R Γ - M - гипозэллиптичен относительно $\xi'' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$. Тогда он B - гипозэллиптичен относительно $\xi' = \xi_1$.

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях теоремы, существуют последовательность $\{\xi(s)\}_{s=1}^\infty$ такая, что $|\xi(s)| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, мультииндекс $0 \neq \alpha' = \alpha_1 \in \mathbb{N}$, и число $c_1 > 0$ такие, что

$$(2.2) \quad \frac{|(D_1^{\alpha_1} R)(\xi(s))|}{1 + |R(\xi(s))|} \geq c_1 \quad s = 1, 2, \dots$$

Из условия Γ - M - гипозэллиптичности многочлена P и из оценки (2.2) следует, что $\xi'(s) = \xi_1(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Так как многочлен R регулярен, то с некоторыми положительными постоянными c_2 и c_3 имеем (см. представление (1.1))

$$(2.3) \quad \begin{aligned} 1 + |R(\xi(s))| &\geq c_2 \left[1 + \sum_{\beta \in (R)} |\xi^\beta| \right] \\ &\geq c_3 \left[1 + \sum_{\beta' \in (r)} |(\xi')^{\beta'} r_{\beta'}(\xi'')| \right] = c_3 \left[1 + \sum_{\beta_1=0}^M |\xi_1^{\beta_1} r_{\beta_1}(\xi'')| \right]. \end{aligned}$$

Так как из Γ - M - гипозэллиптичности многочлена R относительно $\xi'' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$ следует, что $r_{\beta'}(\xi'')/[1 + |r_0(\xi'')|] \rightarrow 0$ при $\xi'' \rightarrow \infty$ то из оценок (2.2) - (2.3), применяя лемму 1.3 имеем, что при $s \rightarrow \infty$

$$c_1 \leq \sum_{\beta_1 \geq \alpha_1} \frac{\beta_1!}{(\beta_1 - \alpha_1)!} \frac{|\xi_1^{\beta_1 - \alpha_1}(s) r_{\beta_1}(\xi''(s))|}{1 + |\xi_1^{\beta_1}(s) r_{\beta_1}(\xi''(s))| + |r_0(\xi''(s))|} \rightarrow 0.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. $\square$

В силу теоремы 2.4 и основной теоремы работы [4] непосредственно следует

Теорема 2.5. Пусть регулярный оператор $P(D', D_n)$ с многогранником Ньютона $\mathfrak{R}(P)$ Γ - M - частично гипозэллиптичен, $r > 0$, $\Omega_r := \{x = (x', x_n); x' \in \mathbb{E}^{n-1}, |x_n| < r\}$. Тогда любое слабое решение u уравнения $P(D', D_n)u = 0$ такое, что $\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} < \infty \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}(P)$, является бесконечно дифференцируемой функцией.

Abstract. Partially hypoelliptical operators (according to Gording, Malgrange and Ehrenpreis) and (partially) Burenkov hypoelliptic operators (polynomials) are compared. Conditions are obtained under which the addition of lower terms to a partially hypoelliptic operator (polynomial) of a given type does not violate the type of its partial hypoellipticity.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, **2**, Springer (1983).
- [2] L. Gording, B. Malgrange, “Operateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques”, Math. Scand. **9**, 5 – 21 (1961).
- [3] L. Ehrenpreis, “Solutions of some problems of division IV”, American J. Math. **82**, 522 – 588 (1960).
- [4] В. И. Буренков, “Аналог теоремы Хермандера для функций стремящихся к нулю на бесконечности”, Труды Советско - Чехословацкой конференции, Ереван, 63 – 67 (1980).
- [5] V. I. Burenkov, “Conditional hypoellipticity and Fourier multipliers in weighted L_p - spaces with an exponential weight”, Proc. of the Summer School “Function spaces, differential operators, nonlinear analysis”, Stuttgart - Leipzig, Teubner Texte zur Matematik, **133**, 256 – 265 (1993).
- [6] Г. Г. Казарян, “Сравнение дифференциальных операторов и дифференциальные операторы постоянной силы”, ДАН СССР, **208**, no. 6, 1272 – 1275 (1973).
- [7] В. П. Михайлов, “О поведении на бесконечности одного класса многочленов”, Труды МИАН СССР, **91**, 58 – 81 (1967).
- [8] L. Gording, “Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients”, Acta Math. **85**, 1 – 62 (1951).
- [9] L. Svensson, “Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part”, Ark. Mat. **8**, 145 – 162 (1968).
- [10] G. G. Kazaryan, “Estimates of differential operators, and hypoelliptic operators”, Proc. Steklov Inst. Math. **140**, 130 – 161 (1976).
- [11] G. G. Kazaryan, “Hyperbolic operators with given principal parts”, Journal “Differential Equations”, June, **XY**, no. 6, 1059 – 1069 (1979).

Поступила 26 января 2021

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Г. Мурадян

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-44-54>

Армянский государственный экономический университет

E-mail: *maxim_muradyan@yahoo.com*

Аннотация. Предлагается способ построения общего решения $2n$ -мерной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, фундаментальная система которой состоит из n ограниченных и n неограниченных решений при $t \rightarrow \infty$. Алгоритм основан на предварительном решении двух матричных алгебраических уравнений Риккати и устойчивых линейных задач Коши. Метод реализован для конечномерного уравнения переноса излучения, а также для линейной гамильтоновой системы.

MSC2020 number: 34A30; 70H05; 85A25.

Ключевые слова: неустойчивая система; алгебраическое уравнение Риккати; уравнение переноса излучения; гамильтонова система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается $2n$ -мерная система дифференциальных уравнений

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + By, \quad -\frac{dy}{dt} = Cx + Dy, \quad 0 \leq t \leq r,$$

где A , B , C и D – независимые от t вещественные матрицы n -ого порядка. Предполагается, что среди собственных значений матрицы коэффициентов имеются числа как с положительными, так и с отрицательными вещественными частями, т.е. система (1.1) неустойчива.

Надо отметить, что структура общего решения системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами хорошо известна и существуют различные алгоритмы построения ее общего решения в том или другом случае. Однако, непосредственное построение общего решения путем нахождения собственных чисел и собственных векторов довольно трудоемко (особенно если матрица коэффициентов большого размера) и мало применяется на практике. Процесс для неустойчивой системы усложняется тем, что наряду с убывающими, имеются и быстро возрастающие частные решения, которые численно определить с

удовлетворительной точностью очень трудно, особенно если промежуток интегрирования не мал. Более того, даже если частные решения и будут определены, для удовлетворения начальных или краевых условий, придется решить плохо обусловленную систему алгебраических уравнений.

Ниже всюду предполагается, что фундаментальная система уравнения (1.1) состоит из n ограниченных и n неограниченных решений при $t \rightarrow +\infty$. На основе этого в п.2 предполагается, что следующие две задачи однозначно разрешимы.

Задача А. Система (1.1) рассматривается на полуоси $[0; +\infty)$, к уравнениям (1.1) присоединяются условия

$$(1.2) \quad x(0) = \alpha, \quad y(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow +\infty.$$

Задача В. Система (1.1) рассматривается на $(-\infty; r]$, к уравнениям (1.1) присоединяются условия

$$(1.3) \quad y(r) = \beta, \quad x(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow -\infty.$$

В настоящей работе предлагается способ построения общего решения системы (1.1). В наших построениях центральное место занимают алгебраические уравнения Риккати вида

$$(1.4) \quad \rho A + D\rho + \rho B\rho + C = 0.$$

Связь между матричными уравнениями Риккати и системами линейных дифференциальных уравнений давно известна и стала основой плодотворных математических построений и эффективных численных алгоритмов. Поскольку система (1.1) рассматривается на конечном промежутке, то, вообще говоря, она ассоциируется с дифференциальным уравнением Риккати

$$(1.5) \quad \frac{dR}{dt} + RA + DR + RBR + C = 0, \quad 0 \leq t \leq r.$$

Уравнение (1.5) получается, если при решении краевых или начальных задач для системы (1.1) использовать соотношение $y(t) = R(t)x(t)$, $0 \leq t \leq r$, последующим дифференцированием этого равенства.

Использование алгебраического уравнения Риккати связано с полубесконечным интервалом времени, поэтому, при решении задач на конечном промежутке, механическая аппроксимация дифференциального уравнения Риккати (1.5) соответствующим алгебраическим уравнением (1.4) вряд ли приведет к удовлетворительной точности, особенно если интервал $[0; r]$ не очень велик.

В настоящей работе общее решение системы (1.1) на конечном промежутке получено посредством алгебраических уравнений Риккати, фактически минуя дифференциальные уравнения Риккати типа (1.5).

В п.2 излагается общая схема построения общего решения системы (1.1). В остальных параграфах работы изложено применение развитого метода в некоторых конкретных приложениях.

2. ОБЩАЯ СХЕМА

Рассмотрим две задачи для матричной системы дифференциальных уравнений

$$(2.1) \quad \frac{dX}{dt} = AX + BY, \quad -\frac{dY}{dt} = CX + DY,$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ – матрицы n -ого порядка.

Задача АМ. Система (2.1) рассматривается на полуоси $[0; +\infty)$, к ней присоединяются условия (I – единичная матрица)

$$(2.2) \quad X(0) = I, \quad Y(t) \text{ ограничена при } t \rightarrow +\infty.$$

Задача ВМ. Система (2.1) рассматривается на $(-\infty; r]$, к ней присоединяются условия

$$(2.3) \quad Y(r) = I, \quad X(t) \text{ ограничена при } t \rightarrow -\infty.$$

Очевидно, задачи (2.1)-(2.2) и (2.1)-(2.3) однозначно разрешимы.

Пусть $X(t), Y(t)$ решение задачи (2.1)-(2.2). Очевидно $X(t+t_0), Y(t+t_0)$ также удовлетворяют этой задаче, но с начальным значением $X(t_0)$, при $t = 0$. Этим же условиям удовлетворяют также матрицы-функции $X(t)X(t_0)$ и $Y(t)X(t_0)$. Поэтому, из однозначной разрешимости задачи АМ следует, что

$$X(t+t_0) = X(t)X(t_0), \quad Y(t+t_0) = Y(t)X(t_0).$$

Первое равенство означает, что множество $X(t)$ составляет полугруппу, а из второго соотношения следует, что

$$(2.4) \quad Y(t) = Y(0)X(t), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Лемма 2.1. Матрица $X(t)$ обратимая при всех $t \in [0; +\infty)$.

Доказательство. Пусть для некоторого t_0 , $\det X(t_0) = 0$. Следовательно, для некоторого ненулевого вектора σ выполняется равенство $X(t_0)\sigma = 0$. Из (2.4)

следует также $Y(t_0)\sigma = 0$. Теперь из (2.1)-(2.2) имеем, что вектор функции $X(t)\sigma$, $Y(t)\sigma$ удовлетворяют системе (1.1) с начальным условием $X(0)\sigma = \sigma$. Однако, как решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями, $X(t)\sigma = 0$, $Y(t)\sigma = 0$ при всех $t \in [0; +\infty)$, что противоречит условию $X(0)\sigma = \sigma$. Следовательно равенство $\det X(t_0) = 0$ невозможно. Лемма доказана.

Обозначим $Y(0) = \rho^+$, имеем также, что $\rho^+ = Y(t)X^{-1}(t)$. Дифференцируя обе части равенства (2.4), с учетом уравнений (2.1), а также леммы 2.1, для матрицы ρ^+ получаем матричное уравнение Риккати

$$(2.5) \quad \rho A + D\rho + \rho B\rho + C = 0.$$

Так как $Y(t)$ ограничена при $t \rightarrow +\infty$, то из структуры общего решения линейной системы следует, что $X(t)$ также ограничена при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, $X(t)$ определяется из устойчивой задачи Коши

$$(2.6) \quad \frac{dX}{dt} = (A + B\rho^+)X, \quad X(0) = I.$$

Обозначим решение задачи (2.6) через $X^+(t)$. Таким образом нами доказана

Теорема 2.1. *Уравнение (2.5) имеет такое решение ρ^+ , что задача Коши (2.6) является устойчивой. При любом векторе u , пара вектор функций $x(t) = X^+(t)u$, $y(t) = \rho^+ X^+(t)u$ при $t \rightarrow +\infty$ является ограниченным решением системы (1.1).*

Рассматривая задачи В и ВМ, аналогичным путем можно доказать теорему.

Теорема 2.2. *Матричное уравнение Риккати*

$$(2.7) \quad A\rho + \rho D + \rho C\rho + B = 0$$

имеет такое решение ρ^- , что решение $Y^-(t)$ задачи Коши

$$(2.8) \quad -\frac{dY}{dt} = (D + C\rho^-)Y, \quad Y(r) = I, \quad -\infty < t \leq r$$

ограничено при $t \rightarrow -\infty$. Для любого вектора v , пара вектор функций $x(t) = \rho^- Y^-(t)v$, $y(t) = Y^-(t)v$ при $t \rightarrow -\infty$ является ограниченным решением системы (1.1).

Комбинируя теоремы 2.1 и 2.2, получаем следующее утверждение. Для произвольных векторов u и v пара вектор функций

$$(2.9) \quad \begin{aligned} x(t) &= X^+(t)u + \rho^- Y^-(t)v, \\ y(t) &= \rho^+ X^+(t)u + Y^-(t)v \end{aligned}$$

являются решением системы (1.1) на любом промежутке $[0; r]$.

Теорема 2.3. *Если матрица $I - \rho^- \rho^+$ неособенная, то формулы (2.9) представляют общее решение системы (1.1).*

Доказательство. Докажем, что подходящим выбором векторов u и v можно из (2.9) выделить решение системы (1.1) с произвольными начальными условиями $x(0) = \alpha$, $y(0) = \beta$. Действительно, из (2.9) имеем

$$(2.10) \quad \begin{cases} u + \rho^- Y^-(0)v = \alpha, \\ \rho^+ u + Y^-(0)v = \beta. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение слева на ρ^- и вычитая из первого уравнения, получаем

$$(I - \rho^- \rho^+)u = \alpha - \rho^- \beta.$$

Если матрица $I - \rho^- \rho^+$ неособенная, то из этого уравнения определяется вектор u , после него из второго уравнения (2.10), с учетом $\det Y^-(0) \neq 0$, определяется вектор v . Теорема доказана.

Сформулируем алгоритм построения общего решения системы (1.1)

- а) Из уравнений (2.5) и (2.7) определяются матрицы ρ^+ и ρ^- соответственно. Единственный аргумент их выбора является устойчивость матриц $A + B\rho^+$ и $D + C\rho^-$.
- б) Из устойчивых задач Коши (2.6) и (2.8) определяются матрицы $X^+(t)$ и $Y^-(t)$ при $t \in [0; r]$.
- в) Общее решение строится по формулам (2.9).

Во многих приложениях, например в теории переноса излучения, рассматривается краевая задача для системы (1.1)

$$(2.11) \quad x(0) = \alpha, \quad y(r) = \beta \quad 0 \leq t \leq r,$$

На основе представления (2.9), аналогично доказательству теоремы 2.3, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Если матрица $I - X^-(0)Y^+(r)$ обратимая, то краевая задача (1.1)-(2.11) однозначно разрешима.*

3. КОНЕЧНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Вследствии дискретизации по направлениям, частотам и др. уравнение переноса излучения сводится к системе дифференциальных уравнений [1, 2]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (-A + L^+)x + L^-y, \\ -\frac{dy}{d\tau} &= L^-x + (-A + L^+)y, \quad 0 \leq \tau \leq r. \end{aligned}$$

Здесь A и $L^\pm$ независимые от τ квадратные матрицы порядка n , A – диагональная матрица с положительными элементами a_i , $L^\pm = (\ell_{ij}^\pm)$ – неотрицательные матрицы, причем L^- – неразложимая матрица. Матрицы $L^\pm$ и A связаны условием балансности

$$(3.2) \quad \sum_{j=1}^n (\ell_{ij}^+ + \ell_{ij}^-) = \lambda a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\lambda \in (0; 1]$ – вероятность выживания частицы при элементарном акте рассеяния, n -мерные вектор-функции $x(\tau)$ и $y(\tau)$ – интенсивности излучения на глубине τ по направлениям возрастания и убывания τ соответственно.

Обычно различают две принципиально различные ситуации: диссипативный случай, когда $\lambda < 1$, и консервативный случай, когда $\lambda = 1$.

Некоторые результаты настоящего раздела синтезированы из результатов ранее опубликованных работ автора [3, 4].

Для системы (3.1) роль алгебраического уравнения Риккати (2.5) играет следующее уравнение, относительно квадратной матрицы $\rho = (\rho_{i,j})$:

$$(3.3) \quad A\rho + \rho A = L^- + L^+\rho + \rho L^+ + \rho L^-\rho.$$

Уравнение (3.3) является конечномерным аналогом известного в астрофизике уравнения Амбарцумяна относительно коэффициента яркости для задачи переноса излучения в однородном полупространстве [5]. Разработан (см. [6]) устойчивый алгоритм определения “физического” решения уравнения (3.3). Оно является пределом следующих монотонно возрастающих итераций

$$A\rho_{n+1} + \rho_{n+1}A = L^- + L^+\rho_n + \rho_n L^+ + \rho_n L^-\rho_n, \quad \rho_0 = 0,$$

и обладает свойством

$$(3.4) \quad \rho_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \leq \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3.1. *Для уравнения (3.1) задачи A и B однозначно разрешимы.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что для системы (3.1) матричные уравнения (2.5) и (2.7) совпадают. Поэтому в качестве ρ^- можно взять матрицу ρ^+ , где под ρ^+ подразумевается физическое решение уравнения (3.3). Поэтому имеем, что $A + B\rho^+ = D + C\rho^-$. Таким образом матрицы $X^+(\tau)$ и $Y^-(\tau)$ удовлетворяют задачам Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= (-A + L^+ + L^-\rho^+)X, & -\frac{dY}{d\tau} &= (-A + L^+ + L^-\rho^+)Y, \\ X(0) &= I, \quad t \geq 0, & Y(r) &= I, \quad t \leq r. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $Y^-(\tau) = X^+(r - \tau)$.

Докажем, что спектр системы (3.1) является объединением спектров матриц $-A + L^+ + L^-\rho^+$ и $-(-A + L^+ + L^-\rho^+)$. Пусть λ – собственное значение матрицы $-A + L^+ + L^-\rho^+$, а u – соответствующий собственный вектор $(-A + L^+ + L^-\rho^+)u = \lambda u$. Из (3.3) следует равенство $\rho^+(-A + L^+ + L^-\rho^+) = -L^- + A\rho^+ - L^+\rho^+$. Поэтому $(-L^- + A\rho^+ - L^+\rho^+)u = \lambda\rho^+u$. Из этих равенств следует, что

$$\begin{pmatrix} -A + L^+ & L^- \\ -L^- & A - L^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \rho^+u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \rho^+u \end{pmatrix},$$

т.е. λ является собственным значением матрицы коэффициентов G системы (3.1).

Пусть теперь λ является собственным значением матрицы $-(-A + L^+ + L^-\rho^+)$, а v – соответствующий собственный вектор $(-A + L^+ + L^-\rho^+)v = -\lambda v$. Пользуясь тем, что ρ^+ удовлетворяет уравнению (3.3), нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} -A + L^+ & L^- \\ -L^- & A - L^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^+v \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \rho^+v \\ v \end{pmatrix},$$

т.е. λ является собственным значением матрицы коэффициентов G .

Убедимся, что собственные значения матрицы $Q = -A + L^+ + L^-\rho^+$ имеют неположительные вещественные части. Действительно, так как матрица $\rho = (\rho_{ij})$ удовлетворяет условиям (3.4), то с учетом (3.2), имеем

$$Q_{ij} \geq 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{j=1}^n Q_{ij} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где Q_{ij} – элементы матрицы Q . Согласно известным результатам теории матриц (см. напр. [7], с. 419) собственные значения матрицы Q неположительны.

Таким образом матрица G имеет n собственных значений с неположительными вещественными частями и еще n собственных значений – с неотрицательными вещественными частями.

В диссипативном случае (когда $\lambda < 1$), этот результат можно уточнить, а именно, в этом случае вещественные части всех собственных значений матрицы Q отрицательные числа [7]. Отсюда следует, что в диссипативном случае система (3.1) имеет ровно n линейно независимых решений, стремящихся к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$, и n решений – стремящихся к нулю при $\tau \rightarrow -\infty$. Поэтому задачи А и В в диссипативном случае однозначно разрешимы.

В консервативном случае (когда $\lambda = 1$) 0 является двукратным собственным значением матрицы G , причем в этом случае [8]

$$\rho_{ij} \geq 0 \quad \sum_{j=1}^m \rho_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В работе [4] доказано, что в консервативном случае также задачи А и В имеют единственное решение. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что для системы (3.1) справедливы утверждения теорем 2.1 и 2.2. Так как матрицы $\rho^\pm$ удовлетворяют условиям (3.4), то в диссипативном случае это условие обеспечивает обратимость матрицы $I - \rho^- \rho^+$ (см напр. [7]), поэтому справедлив аналог представления (2.9).

Теорема 3.2. *Общее решение системы (3.1) в диссипативном случае представляется в виде (u и v произвольные n -мерные векторы)*

$$\begin{aligned} x(\tau) &= X(\tau)u + \rho X(r - \tau)v, \\ y(\tau) &= \rho X(\tau)u + X(r - \tau)v, \quad 0 \leq \tau \leq r, \end{aligned}$$

где ρ – решение матричного уравнения (3.3), удовлетворяющая условиям (3.4), а матрица $X(\tau)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{dX}{d\tau} = (-A + L^+ + \rho L^-)X, \quad X(0) = I.$$

В работе [4], посредством матриц ρ и $X(\tau)$ получено также общее решение системы (3.1) в консервативном случае.

4. ГАМИЛЬТОНОВА ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА

Когда функция Гамильтона есть вещественная квадратичная форма переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, то гамильтонова система принимает вид (см. напр. [9])

$$(4.1) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + By, \quad -\frac{dy}{dt} = Cx + A'y, \quad 0 \leq t \leq r,$$

где A , B и C независимые от t квадратные матрицы n -ого порядка, а A' – транспонированная матрица, причем C и B симметрические матрицы.

Уравнение Гамильтона (также называемое каноническим уравнением) является одним из основных уравнений теоретической механики. Оно играет важную роль в теории динамических систем, в теории оптимального управления и т.д.

В настоящем разделе результаты п.2 распространяются на систему (4.1). Основой для этого служит следующий хорошо известный факт [9]: спектр гамильтоновой системы расположен симметрично (с учетом кратности) относительно мнимой оси, т.е. если $\alpha + i\beta$ – собственное значение матрицы коэффициентов системы (4.1), то собственным значением является также число $-\alpha + i\beta$.

Рассмотрим тот случай, когда фундаментальная система уравнения (4.1) состоит из n ограниченных и n неограниченных решений при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, задачи А и В для уравнения (4.1) однозначно разрешимы.

Для системы (4.1) уравнения Риккати (2.5) и (2.7) принимают вид

$$(4.2) \quad \rho A + A' \rho + \rho B \rho + C = 0, \quad A \rho + \rho A' + \rho C \rho + B = 0$$

Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что эти уравнения, соответственно, имеют такие решения ρ^+ и ρ^- , что следующие задачи Коши устойчивы, первое при $t \rightarrow +\infty$, а второе – при $t \rightarrow -\infty$

$$(4.3) \quad \frac{dX}{dt} = (A + B\rho^+)X, \quad X(0) = I; \quad -\frac{dY}{dt} = (A' + C\rho^-)Y, \quad Y(r) = I.$$

Таким образом, для реализации нашего подхода, вопрос сводится к определению матриц ρ^+ и ρ^- . В теории оптимального управления, для численного решения уравнений (4.2), помимо других методов (см. напр. [10], применяют также итерационный процесс, основой которого служит метод Ньютона решения нелинейных уравнений [11]).

Для первого уравнения (4.2) определяется последовательность $\{\rho_n\}$ следующим соотношением

$$(4.4) \quad \rho_{n+1}(A + B\rho_n) + (A + B\rho_n)' \rho_{n+1} = \rho_n B \rho_n - C,$$

где матрица ρ_0 выбирается так, чтобы была симметрической, а матрица $A + B\rho_0$ была устойчивой. Эти соотношения (для каждого n) можно представить как уравнение следующего типа относительно матрицы ρ_{n+1}

$$(4.5) \quad VL + L'V = -W.$$

Уравнение (4.5), называемая уравнением Ляпунова, хорошо известно и развиты эффективные методы его решения (см. напр. [10]). На каждом шагу решая уравнение Ляпунова определяется матричная последовательность $\{\rho_n\}$.

Если матрица B отрицательно определенная, а C – положительно определенная, то стандартными рассуждениями можно показать, что для каждого n , ρ_n симметрическая, положительно определенная матрица и последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно-убывающая (по смыслу положительной определенности) стремится к положительно определенной матрице ρ^+ .

Аналогичным образом организуется также итерационная последовательность для второго нелинейного уравнения (4.2) которая стремится к матрице ρ^- .

Сформулируем теперь следующий способ определения общего решения гамильтоновой системы (4.1).

- (1) Из уравнений (4.2) итерационным путем определяются матрицы ρ^+ и ρ^- соответственно.
- (2) Из устойчивых задач Коши (4.3) определяются матрицы $X^+(t)$ и $Y^-(t)$ на промежутке $[0; r]$.
- (3) Общее решение системы (4.1) строится по формулам (2.9).

В конце отметим, что результаты настоящей работы можно распространить на операторный случай, например, когда A, B, C, D интегральные операторы, независящие от t (для одного частного случая это сделано в работе [12]). Нам кажется, что здесь могут возникнуть трудности в основном технического характера. Нам также кажется, что результаты работы можно распространить на случай периодических матриц коэффициентов A, B, C и D . Для уравнений переноса это сделано в работах [13, 14]. В этом случае алгебраическое уравнение Риккати заменяется дифференциальным уравнением Риккати с периодическими коэффициентами.

Abstract. A method for constructing of a general solution for a $2n$ - dimensional system of differential equations with constant coefficients, the fundamental system of which consists of n bounded and n unbounded solutions (as $t \rightarrow \infty$) is proposed. The algorithm is based on preliminary solution of two matrix algebraic Riccati equations and on stable linear Cauchy problems. The proposed method is implemented for the nite dimensional radiative transfer equation, as well as for a linear Hamiltonian system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Bellman, G. M. Wing, An Introduction to Invariant Imbedding, N.Y. Wiley and Sons., (1975).
- [2] Alan Ping-I Wang, “Discrete radiative transfer in slabs”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **24**, no. 3, 530 – 544 (1968).
- [3] М. Г. Мурадян, “О решении одной задачи теории переноса”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **33**, no. 2, 271 — 282 (1993).
- [4] М. Г. Мурадян, “К определению операторов отражения и пропускания излучения в плоском слое”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **54**, no. 3, 529 — 535, (2014).
- [5] В. А. Амбарцумян, Научные Труды, **1**, Ереван, изд.-во АН Арм. ССР (1960).
- [6] Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян, “Перенос излучения в плоском слое и уравнения Амбарцумяна”, Принцип инвариантности и его приложения, Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 326 — 333 (1989).
- [7] Р. Хорн, Ч. Джонсон, Матричный Анализ, М., Мир (1989).
- [8] М. Г. Мурадян, “Проблема Милна для периодической среды”, Дифференц. уравнения, **40**, no. 8, 1050 — 1058 (2004).
- [9] В. А. Якубович, В. М. Старжинский, Линейные Дифференциальные Уравнения с Периодическими Коэффициентами, М., Наука (1972).
- [10] Ю. Н. Андреев, Управление Конечномерными Линейными Объектами, М., Наука (1976).
- [11] D. L. Kleinman, “On an iterative technique for Riccati equation computations”, IEEE Trans. Autom. Control, AC-13, no. 2, 114 – 115 (1968).
- [12] M. G. Mouradian (Muradyan), “Analytical solution of the linear problem of radiation transfer in a plane Homogeneous Layer”, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer, **46**, no. 5, 477 – 481 (1991).
- [13] М. Г. Мурадян, “Построение общего решения линейного уравнения переноса для периодической среды”, Дифференц. уравнения, **31**, no. 5, 885 — 887 (1995).
- [14] М. Г. Мурадян, “Аналитическое решение задачи переноса излучения в периодической среде”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **37**, no. 7, 794 — 798 (1997).

Поступила 23 декабря 2021

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022

О СУММИРУЕМЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С МОНОТОННОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-55-64>

Ереванский государственный университет

Национальный аграрный университет Армении¹

E-mails: *khachatur.khachatryan@ysu.am*, *Khach82@rambler.ru* *Haykuhi25@mail.ru*

Аннотация. В настоящей заметке исследуется класс двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с монотонной нелинейностью на четверти плоскости. Такие уравнения встречаются в динамической теории p -адических струн. Доказывается конструктивная теорема существования положительного суммируемого и ограниченного решения. Изучается асимптотическое поведение решения на бесконечности. Приводятся также конкретные примеры соответствующих ядер и нелинейностей.

MSC2020 number: 45G05.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра; нелинейность; итерация; монотонность; выпуклость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующий класс двумерных интегральных уравнений с двумя нелинейностями типа Вольтерра на четверти плоскости:

$$(1.1) \quad B(x, y) = \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) \{G(B(x', y')) + \omega(x', y', B(x', y'))\} dy' dx', \\ (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

относительно искомой неотрицательной и измеримой на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функции $B(x, y)$, где $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$. Здесь первая нелинейность $G(u)$ – непрерывная и монотонно возрастающая на $\mathbb{R}^+$ функция удовлетворяющая следующим условиям:

- а) $G(0) = 0$ и существует ее производная $G'(0)$ такая, что $1 < G'(0) < +\infty$,
причем

$$(1.2) \quad G(u) \leq G'(0)u, \quad u \in \mathbb{R}^+,$$

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта No. 21T-1A047

- b) $G(u)$ – выпуклая вверх функция на $\mathbb{R}^+$, для которой существует число $\eta > 0$ такое, что $G(\eta) = \eta$.

Вторая нелинейность $\omega(x, y, u)$ определена на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, принимает вещественные значения и обладает следующим основными свойствами:

- A) $\omega(x, y, 0) \equiv 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и при всяком фиксированном $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функция $\omega(x, y, u)$ монотонно возрастает по u на $\mathbb{R}^+$,
 B) $\omega(x, y, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, т.е. при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $\omega(x, y, u)$ измерима по (x, y) на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и почти при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ данная функция непрерывна по u на множестве $\mathbb{R}^+$.

Ядро $V(x, y)$ определено на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и удовлетворяет следующим ограничениям:

- I) $V \in L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$,
 II) $V(x, y) > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y) dx dy = 1$,

где $L_1(E)$ – пространство суммируемых функций на множестве E , а $M(E)$ – пространство существенно ограниченных функций на E .

Уравнение (1.1) возникает в реологических моделях вязкоупругой среды (см. [1]–[3]). Кроме того такие уравнения встречаются в динамической теории p -адических струн (см. [4]–[6]). В одномерном случае, когда $G(u) = \alpha u$, $\alpha > 1$, уравнение (1.1) подробно исследовалось в работе [7].

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА. ПРИМЕРЫ

Прежде чем накладывать основные условия на функцию $\omega(x, y, u)$, введем некоторые обозначения. Пусть $a > 1$ – произвольное число.

Рассмотрим вспомогательную функцию на множестве $\mathbb{R}^+$:

$$(2.1) \quad \chi_a(\lambda) := a \int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y) e^{-\lambda(x+y)} dx dy, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Из условия II) немедленно следует, что справедливы следующие утверждения:

$$(2.2) \quad \chi_a(0) = a > 1, \chi_a \in C(\mathbb{R}^+), \chi_a(\lambda) \downarrow \text{ по } \lambda \text{ на } \mathbb{R}^+$$

и

$$(2.3) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \chi_a(\lambda) = 0.$$

Следовательно, согласно теореме Больцано-Коши для каждого $a > 1$ существует единственное число $\lambda = \lambda(a)$ такое, что $\chi_a(\lambda(a)) = 1$.

Обозначим через $\lambda^* = \lambda^*(G'(0))$ единственное положительное решение характеристического уравнения $\chi_{G'(0)}(\lambda) = 1$.

Относительно нелинейности $\omega(x, y, u)$ предположим также выполнение следующих условий:

C) существует число $\varepsilon > G'(0) - 1$ такое, что имеет место неравенство

$$(2.4) \quad \omega(x, y, \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}) \geq \varepsilon \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

в котором число λ_ε единственным образом определяется из характеристического уравнения $\chi_{1+\varepsilon}(\lambda) = 1$,

D) существует $\rho(x, y) := e^{\lambda^*(x+y)} \sup_{u \in \mathbb{R}^+} \omega(x, y, u)$ и $\rho(x, y) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $\rho(x, y) \downarrow$ по y на $\mathbb{R}^+$, причем $\int_0^\infty x \rho(x, 0) dx < +\infty$, $\rho(0, 0) < +\infty$.

Основным результатом настоящей заметки является следующая:

Теорема 2.1. *При условиях a), b), A) – D), I) и II) уравнение (1.1) имеет положительное решение в пространстве $L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. Более того, для всех $\lambda \in [0, \lambda^*)$ имеет место включение*

$$e^{\lambda(x+y)} B(x, y) \in L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+), \quad a \quad e^{\lambda^*(x+y)} B(x, y) \in M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+). \quad (*)$$

Прежде чем перейдем к доказательству сформулированной теоремы, приведем несколько примеров нелинейностей G, ω и ядра V .

Примеры функций G :

- 1) $G(u) = \gamma(1 - e^{-u})$, $u \in \mathbb{R}^+$, где $\gamma > 1$ – числовой параметр,
- 2) $G(u) = \frac{\gamma(1 - e^{-u}) + u}{2}$, $u \in \mathbb{R}^+$.

Примеры функций ω :

- a₁) $\omega(x, y, u) = \frac{2e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)} \varepsilon u}{u + \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}}$, $(x, y, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,
где $\varepsilon > G'(0) - 1$ – числовой параметр,
- a₂) $\omega(x, y, u) = \frac{(1 - \delta e^{-u}) \varepsilon \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}}{1 - \delta \exp(\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)})}$, $(x, y, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,
где $\delta \in (0, 1)$ – числовой параметр, а $\exp(A) := e^A$.

Примеры функций V :

$$b_1) \quad V(x, y) = \frac{4}{\pi} e^{-(x^2 + y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

$b_2)$ $V(x, y) = \int_a^b e^{-(x+y)s} Q(s) ds$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, где $Q(s)$ – непрерывная и положительная функция на множестве $[a, b]$, $0 < a < b \leq +\infty$, причем

$$(2.5) \quad \int_a^b \frac{Q(s)}{s^2} ds = 1.$$

Подробно остановимся на примере a_1). Для остальных примеров проверка соответствующих условий осуществляется аналогичным образом. С этой целью докажем следующую простую лемму:

Лемма 2.1. *Имеет место неравенство: $\lambda^* < \lambda_\varepsilon$.*

Доказательство. Предположим обратное: $\lambda^* \geq \lambda_\varepsilon$. Тогда из этого неравенства, в силу условия II) сразу следует оценка:

$$(2.6) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)} V(x, y) dx dy \geq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda^*(x+y)} V(x, y) dx dy.$$

В силу определения функции $\chi_a(\lambda)$ из (2.6) получаем $\frac{1}{1+\varepsilon} \geq \frac{1}{G'(0)}$ или $G'(0) \geq 1 + \varepsilon$. Последнее неравенство противоречит условию $\varepsilon > G'(0) - 1$. $\square$

Вернемся к примеру a_1). Так как $\frac{\partial \omega(x, y, u)}{\partial u} = \frac{2\varepsilon e^{-2\lambda_\varepsilon(x+y)} \eta}{(u + \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)})^2} > 0$, то $\omega(x, y, u) \uparrow$ по u . Поскольку $\omega(x, y, u)$ в a_1) из себя представляет непрерывную функцию по совокупности своих аргументов на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, то условие Каратеодори (см условие B)) также выполняется. Заметим, что $\omega(x, y, \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}) = \varepsilon \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, т.е. условие C) выполняется очевидным образом. Проверим условие D). Во-первых, несложно заметить, что $\sup_{u \in \mathbb{R}^+} \omega(x, y, u) = 2\varepsilon e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Следовательно, $\rho(x, y) = 2\varepsilon e^{-(\lambda_\varepsilon - \lambda^*)(x+y)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Используя доказанную лемму, можем утверждать, что $\rho(x, y) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $\rho(x, y) \downarrow$ по y на $\mathbb{R}^+$ и $\int_0^\infty x \rho(x, 0) dx = 2\varepsilon \int_0^\infty x e^{-(\lambda_\varepsilon - \lambda^*)x} dx = \frac{2\varepsilon}{(\lambda_\varepsilon - \lambda^*)^2} < +\infty$. Итак, для примера a_1) условия A) – D) выполнены.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Перейдем к доказательству сформулированной теоремы.

Доказательство. Введем следующие последовательные приближения для уравнения (1.1):

(3.1)

$$B_{n+1}(x, y) = \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) \{G(B_n(x', y')) + \omega(x', y', B_n(x', y'))\} dy' dx',$$

$$B_0(x, y) = \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где число $\eta > 0$ определяется из условия b), а λ_ε – из характеристического уравнения $\chi_{1+\varepsilon}(\lambda) = 1$.

Индукцией по n докажем, что

$$(3.2) \quad B_n(x, y) \uparrow \text{ по } n.$$

Сперва проверим неравенство $B_1(x, y) \geq B_0(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Действительно, во-первых заметим, что из условий a) и b) немедленно следует, что $G(u) \geq u$, когда $u \in [0, \eta]$. Учитывая последнее неравенство, условия C), II), I), из (3.1) имеем

$$\begin{aligned} B_1(x, y) &\geq \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) (\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x'+y')} + \eta \varepsilon e^{-\lambda_\varepsilon(x'+y')}) dy' dx' = \\ &= \eta(1 + \varepsilon) \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) e^{-\lambda_\varepsilon(x'+y')} dy' dx' = \\ &= \eta(1 + \varepsilon) \int_0^\infty \int_0^\infty V(t_1, t_2) e^{-\lambda_\varepsilon(x+t_1+t_2+y)} dt_2 dt_1 = \\ &= \eta(1 + \varepsilon) e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)} \int_0^\infty \int_0^\infty V(t_1, t_2) e^{-\lambda_\varepsilon(t_1+t_2)} dt_2 dt_1 = \\ &= \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)} \chi_{1+\varepsilon}(\lambda_\varepsilon) = \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)} = B_0(x, y). \end{aligned}$$

Предполагая, что $B_n(x, y) \geq B_{n-1}(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, при этом учитывая монотонность функций G, ω (см. условие A) и условия на функцию G) по переменной u на $\mathbb{R}^+$ и положительность ядра V , из (3.1) получаем, что $B_{n+1}(x, y) \geq B_n(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Имея ввиду непрерывность функции $G(u)$ и условие Каратеодори на функцию $\omega(x, y, u)$ (см. условие B)), индукцией несложно проверить, что каждый элемент функциональной последовательности $\{B_n(x, y)\}_{n=0}^\infty$ является измеримой функцией на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Теперь наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее одномерное интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$(3.3) \quad f(x) = g(x) + \int_x^\infty T(x' - x)f(x')dx', \quad x \in \mathbb{R}^+$$

относительно искомой измеримой функции $f(x)$, где

$$(3.4) \quad g(x) := \frac{\rho(x, 0)}{G'(0)}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$(3.5) \quad T(x) = \int_0^\infty \tilde{V}(x, y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

а $\tilde{V}(x, y)$ допускает представление вида:

$$(3.6) \quad \tilde{V}(x, y) = G'(0)V(x, y)e^{-\lambda^*(x+y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Из условий A) и D) немедленно следует, что

$$(3.7) \quad g(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad g \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad m(g) := \int_0^\infty xg(x)dx < +\infty.$$

Так как число λ^* - единственное решение характеристического уравнения $\chi_{G'(0)}(\lambda) = 1$, то из (3.5) и (3.6) следует, что ядро $T(x)$ удовлетворяет условию консервативности:

$$(3.8) \quad T(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^\infty T(x)dx = 1.$$

Таким образом, учитывая (3.7) и (3.8) из результатов работы [8] следует, что уравнение (3.3) имеет положительное суммируемое решение $f(x)$. Убедимся, что данное решение является также ограниченной функцией. Действительно, так как $\rho(x, 0) \leq \rho(0, 0) < +\infty$, $G'(0) > 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, с учетом условия I), и суммируемости на $\mathbb{R}^+$ решения $f(x)$ из (3.3) будем иметь

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \rho(0, 0) + \frac{G'(0)}{\lambda^*} \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \{V(x, y)\} e^{-\lambda^*x} \int_x^\infty f(x')dx' \leq \\ &\leq \rho(0, 0) + \frac{G'(0)}{\lambda^*} \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \{V(x, y)\} \int_0^\infty f(x')dx' < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Итак, уравнение (3.3) обладает положительным суммируемым и ограниченным на множестве $\mathbb{R}^+$ решением $f(x)$.

Рассмотрим теперь следующее нелинейное двумерное интегральное уравнение с нелинейностью G :

$$(3.9) \quad F(x, y) = g_0(x, y) + \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) G(F(x', y')) dy' dx', \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

относительно искомой функции $F(x, y)$, где

$$(3.10) \quad g_0(x, y) := \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) \rho(x', y') e^{-\lambda^*(x' + y')} dy' dx', \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Сперва убедимся, что

$$(3.11) \quad 0 \leq g_0(x, y) \leq \frac{\rho(x, 0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Действительно, неотрицательность функции g_0 сразу вытекает из условий II) и A). Учитывая условие D) и тот факт, что $\chi_{G'(0)}(\lambda^*) = 1$, из (3.10) получим

$$\begin{aligned} g_0(x, y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty V(t_1, t_2) \rho(x + t_1, y + t_2) e^{-\lambda^*(x+t_1+y+t_2)} dt_2 dt_1 \leq \\ &\leq e^{-\lambda^*(x+y)} \rho(x, 0) \int_0^\infty \int_0^\infty V(t_1, t_2) e^{-\lambda^*(t_1+t_2)} dt_2 dt_1 = \frac{\rho(x, 0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь следующие простые итерации для вспомогательного уравнения (3.9):

$$(3.12) \quad \begin{aligned} F_{n+1}(x, y) &= g_0(x, y) + \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) G(F_n(x', y')) dy' dx', \\ F_0(x, y) &= g_0(x, y), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Учитывая неотрицательность функции g_0 , положительность ядра V и монотонность нелинейности G индукцией по n несложно доказать, что

$$(3.13) \quad F_n(x, y) \uparrow \text{ по } n, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

В силу непрерывности G и условия B) индукцией можно также проверить, что каждый элемент из функциональной последовательности $\{F_n(x, y)\}_{n=0}^\infty$ является измеримой функцией на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Ниже подробно докажем, что

$$(3.14) \quad F_n(x, y) \leq e^{-\lambda^*(x+y)} f(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Неравенство (3.14) для $n = 0$ сразу следует из цепочки неравенств:

$$F_0(x, y) = g_0(x, y) \leq \frac{\rho(x, 0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)} = g(x) e^{-\lambda^*(x+y)} \leq f(x) e^{-\lambda^*(x+y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Предположим, что (3.14) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда учитывая неравенства (1.2), (3.11), монотонность функции G и положительность ядра V , а также обозначения (3.5), (3.6), из (3.12) будем иметь

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x, y) &\leq g_0(x, y) + \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) G(e^{-\lambda^*(x'+y')} f(x')) dy' dx' \leq \\ &\leq \frac{\rho(x, 0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)} + G'(0) \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) e^{-\lambda^*(x'+y')} f(x') dy' dx' = \\ &= \frac{\rho(x, 0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)} + e^{-\lambda^* y} G'(0) \int_x^\infty f(x') e^{-\lambda^* x'} \int_0^\infty V(x' - x, z) e^{-\lambda^* z} dz dx' = \\ &= \frac{\rho(x, 0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)} + e^{-\lambda^*(x+y)} \int_x^\infty T(x - x') f(x') dx' = f(x) e^{-\lambda^*(x+y)}. \end{aligned}$$

Таким образом из (3.13) и (3.14) получаем поточечную сходимость последовательности измеримых функций $\{F_n(x, y)\}_{n=0}^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y) = F(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Согласно предельной теореме Б. Леви (см. [9]) $F(x, y)$ почти всюду на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ удовлетворяет уравнению (3.9).

Из (3.13) и (3.14) следует также, что предельная функция $F(x, y)$ удовлетворяет следующему двустороннему неравенству:

$$(3.15) \quad g_0(x, y) \leq F(x, y) \leq e^{-\lambda^*(x+y)} f(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Так как $f \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+)$ и $g_0(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, то из (3.15), во - первых, получаем, что $F \in L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, а, во - вторых,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F(x, y) dx dy \leq \frac{1}{\lambda^*} \int_0^\infty e^{-\lambda^* x} f(x) dx < +\infty.$$

Наконец перейдем к уравнению (1.1). В последовательных приближениях (3.1) докажем, что

$$(3.16) \quad B_n(x, y) \leq \eta e^{-\lambda^*(x+y)} + F(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Так как $\lambda_\varepsilon > \lambda^*$ (см. лемму), то в силу (3.15) имеем

$$B_0(x, y) = \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)} \leq \eta e^{-\lambda^*(x+y)} \leq \eta e^{-\lambda^*(x+y)} + F(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Предполагая, что неравенство (3.16) выполняется при некотором натуральном n , при этом имея в виду положительность ядра V монотонность функций G, ω а также следующее легко проверяемое неравенство для выпуклых вверх функций

(со свойствами a) и b)) (см. например [10]): $G(u_1 + u_2) \leq G(u_1) + G(u_2)$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^+$, из (3.1) получаем

$$\begin{aligned}
 B_{n+1}(x, y) &\leq \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) \{G(\eta e^{-\lambda^*(x'+y')} + F(x', y')) + \\
 &\quad + \omega(x', y', \eta e^{-\lambda^*(x'+y')} + F(x', y'))\} dy' dx' \leq \\
 &\leq \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) \{G(\eta e^{-\lambda^*(x'+y')} + F(x', y')) + \rho(x', y') e^{-\lambda^*(x'+y')}\} dy' dx' \leq \\
 &\leq \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) G(\eta e^{-\lambda^*(x'+y')}) dy' dx' + \\
 &\quad + \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) G(F(x', y')) dy' dx' + g_0(x, y) \leq \\
 &\leq F(x, y) + \eta G'(0) \int_x^\infty \int_y^\infty V(x' - x, y' - y) e^{-\lambda^*(x'+y')} dy' dx' = \\
 &= F(x, y) + \eta G'(0) e^{-\lambda^*(x+y)} \int_0^\infty \int_0^\infty V(t_1, t_2) e^{-\lambda^*(t_1+t_2)} dt_2 dt_1 = \\
 &= F(x, y) + \eta e^{-\lambda^*(x+y)} \chi_{G'(0)}(\lambda^*) = F(x, y) + \eta e^{-\lambda^*(x+y)}.
 \end{aligned}$$

Итак, оценка (3.16) доказана. Следовательно, учитывая (3.2) и (3.16) заключаем, что последовательность измеримых функций $\{B_n(x, y)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x, y) = B(x, y)$. Предельная функция $B(x, y)$ в силу условия B) и теоремы Б. Леви удовлетворяет почти всюду на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ уравнению (1.1). Из (3.2) и (3.16) следует также, что имеет место

$$(3.17) \quad \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)} \leq B(x, y) \leq \eta e^{-\lambda^*(x+y)} + F(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

Учитывая (3.15), из (3.17) приходим к двойной оценке

$$(3.18) \quad \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)} \leq B(x, y) \leq \eta e^{-\lambda^*(x+y)} + e^{-\lambda^*(x+y)} f(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

В силу ограниченности функции $f(x)$, из (3.18), сразу приходим к включениям: $e^{\lambda(x+y)} B(x, y) \in L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, $\lambda \in [0, \lambda^*)$, $e^{\lambda^*(x+y)} B(x, y) \in M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. $\square$

Замечание 3.1. *Вопрос единственности построенного решения до сих пор остается открытой проблемой.*

Замечание 3.2. На самом деле для решения $B(x, y)$ мы получили более сильную асимптотику (см. (3.18)), из которой, в частности, следует (*).

Abstract. In this note, we study a class of two-dimensional integral equations of the Volterra type with monotonic nonlinearity on a quarter-plane. Such equations are encountered in the dynamical theory of p -adic strings. A constructive existence theorem is proved for a positive summable and bounded solution. The asymptotic behavior of the solution at infinity is studied. Specific examples of the corresponding kernels and nonlinearities are also given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Малкин, А. И. Исаев, “Реология: концепции, методы, приложения”, СПб: Профессия (2007).
- [2] А. Р. Ржаницын, Теория ползучести, М.: Стройиздат (1968).
- [3] А. Н. Тынды, А. Е. Романов, “Численное решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с дробно-экспоненциальными ядрами реологических моделей вязкоупругой среды”, Изв. Иркутского гос. универс., серия математика, **5**, no. 2, 69 – 80 (2012).
- [4] И. Я. Арефьева, “Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в p -адических струнах”, Избранные вопросы p -адической математической физики и анализа, Сборник статей, К 80-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимиров, Тр. МИАН, **245**, Наука, М., 47 – 54 (2004).
- [5] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, “О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны”, ТМФ, **138**, no. 3, 355 – 368 (2004).
- [6] Х. А. Хачатрян, “О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p -адической струны”, Изв. РАН. Сер. матем., **82**:2, 172 – 193 (2018).
- [7] Kh. A. Khachatryan, Ts. E. Terdzhyan, M. F. Broyan, “One - parameter family of integrable solution of a system of nonlinear integral equations of the Hammerstein-Volterra type in the supercritical case”, Differential Equations, **52**, no. 8, 1036 – 1042 (2016).
- [8] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, Итоги науки и техн., Сер. Мат. анализ, **22**, ВИНТИ, М., 175 – 244 (1984).
- [9] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, “Элементы теории функций и функционального анализа”, М.: Наука (1980).
- [10] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, “Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода”, Тр. ИММ УрО РАН, **27**, no. 1, 188 – 206 (2021).

Поступила 22 декабря 2021

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА
ВСЕЙ ПРЯМОЙ С ВЫПУКЛОЙ И МОНОТОННОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-65-80>

Национальный аграрный университет Армении¹

Ереванский государственный университет

E-mails: *Aghavard59@mail.ru*, *khachatur.khachatryan@ysu.am*,
Khach82@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматривается система нелинейных интегральных уравнений типа свертки на всей прямой. Данная система встречается во многих разделах математической физики и математической биологии. Исследуются вопросы существования и отсутствия нетривиальных ограниченных решений. Доказывается также теорема единственности решения в определенном классе ограниченных функций. В конце работы приводятся прикладные примеры указанной системы.

MSC2020 number: 45G05.

Ключевые слова: система уравнений; нелинейность; ядро; спектральный радиус; выпуклость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию следующей системе интегральных уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью:

$$(1.1) \quad f_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(f_j(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

относительно искомой непрерывной вектор-функции $f(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ (T – знак транспонирования). В системе (1.1) ядра $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ определены на множестве $\mathbb{R}$ и удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $K_{ij}(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$,
- 2) $K_{ij}(x) = K_{ji}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $K_{ij}(-\tau) = K_{ij}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$,
- 3) $K_{ij}(x)$ монотонно убывает по x на множестве $\mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2, \dots, n$,

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта No. 21T-1A047

- 4) $r(A) = 1$, $A := (a_{ij})_{i,j=1}^{n \times n}$, $a_{ij} := \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x)dx$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где $r(A)$ спектральный радиус матрицы A , т.е. наибольшее абсолютное значение собственных значений матрицы A ,
- 5) $\int_{-\infty}^{\infty} |x|K_{ij}(x)dx < +\infty$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Учитывая условия 1) – 4), в силу теоремы Перрона-Фробениуса (см. [1]), существует вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ с положительными координатами η_i , $i = 1, 2, \dots, n$, такой, что

$$(1.2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В дальнейших рассуждениях нам понадобятся следующее обозначение:

$$(1.3) \quad \eta_i^* := \frac{\eta_i}{\min_{1 \leq i \leq n} \eta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ определены и непрерывны на множестве $\mathbb{R}$, причем обладают следующими свойствами:

- a) $G_j(-u) = -G_j(u)$, $u \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2, \dots, n$,
- b) функции $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ выпуклы вверх на множестве $\mathbb{R}^+$,
- c) $y = G_j(u)$ монотонно возрастает по u на множестве $\mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$,
- d) $G_j(\eta_j^*) = \eta_j^*$, $j = 1, 2, \dots, n$, где числа $\eta_j^* \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, n$ определяются согласно формуле (1.3).

Система нелинейных уравнений (1.1) имеет применение в различных направлениях современного естествознания. Такие системы встречаются в динамической теории p -адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в кинетической теории газов (при изучении интегро-дифференциального уравнения Больцмана в рамках нелинейной модифицированной модели Бхатнагара-Гросса-Крука), в теории нелинейного переноса излучения в спектральных линиях, в математической теории пространственно-временного распространения пандемии (см. [2]-[8]).

Вопросы существования нетривиального знакопеременного нечетного непрерывного и ограниченного решения для системы (1.1) обсуждались в работе [9]. Соответствующие скалярные нелинейные интегральные уравнения подробно исследовались в работах [10]-[15].

Следует отметить, что вопросы существования положительных и ограниченных решений для соответствующих систем нелинейных интегральных уравнений

на положительной полупрямой (т.е. когда интегрирование совершается на множестве $\mathbb{R}^+$) изучены в работах [16], [17] в случае когда ядра $\{K_{ij}(x)\}_{j=1}^n$ не обладают свойством симметричности 2). В отмеченных работах, в основном используя инструменты из линейной теории векторных консервативных интегральных уравнений Винера-Хопфа, удается построить однопараметрическое семейство положительных монотонных непрерывных и ограниченных решений.

В настоящей работе мы будем заниматься вопросами существования и отсутствия нетривиальных ограниченных решений для нелинейной системы (1.1) при условиях 1)–5) и а)–d). Будет также доказана теорема единственности решения в определенном классе ограниченных функций. В конце мы приведем конкретные прикладные примеры ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Обозначим через $Q_i(u)$, обратную функцию к функции $G_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, n$ на множестве $\mathbb{R}$ (в силу свойств а) – с) существование такой функции обеспечено). Из свойств а) – d) сразу следует, что для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует $\varepsilon_i \in (0, 1)$ такое, что уравнение $Q_i(u) = \varepsilon_i u$ имеет единственное положительное решение ξ_i , причем $\xi_i < \eta_i^*$.

Рассмотрим следующие характеристические уравнения:

$$(2.1) \quad \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty K_{ij}(t) e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon_i \eta_i^*}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

относительно переменной $p > 0$. В работе [9] показано, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ характеристическое уравнение (2.1) обладает единственным положительным решением p_i . Обозначим через $p^* := \min\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим следующую видоизмененную нелинейную систему:

$$(2.2) \quad Q_i(F_i(x)) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^\infty K_{ij}(x-t) F_j(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

относительно непрерывной вектор-функции $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$.

В той же работе [9] доказано, что система нелинейных интегральных уравнений (2.2) имеет нетривиальное знакопеременное нечетное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение, причем

I) $\xi_i^*(1 - e^{-p^*x}) \leq F_i(x) \leq \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n$, где

$$(2.3) \quad \xi_i^* := \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\xi_i}{\eta_i^*} \right) \eta_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

II) $y = F_i(x)$ монотонно неубывает на множестве $\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$,

III) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_i(x) = \eta_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n$,

IV) $\eta_i^* - F_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Очевидно, что вектор функция $f(x) = (Q_1(F_1(x)), Q_2(F_2(x)), \dots, Q_n(F_n(x)))^T$ будет решением системы (1.1). Заметим, что

$$(2.4) \quad \eta_i^* - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Действительно, учитывая неравенства I), включение IV), условия 1), 5), монотонность функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ по u на $\mathbb{R}$, а также соотношения $Q_i(\eta_i^*) = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, в силу теоремы Фубини (см. [18]), из (2.2) будем иметь

$$0 \leq \eta_i^* - f_i(x) = \eta_i^* - Q_i(F_i(x)) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - F_j(t))dt \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

ибо

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - F_j(t))dt &= \int_{-\infty}^0 K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - F_j(t))dt + \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - F_j(t))dt \leq \\ &\leq \eta_j^* \int_x^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau + \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - F_j(t))dt \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

В силу нечетности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ и $\{F_i(x)\}_{i=1}^n$ можно утверждать, что

$$(2.5) \quad \eta_i^* + f_i \in L_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(2.6) \quad f_i(-x) = -f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Из предельного соотношения III) с учетом непрерывности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ и соотношений $Q_i(\eta_i^*) = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, заключаем, что

$$(2.7) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_i(x) = \pm \eta_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Из нечетности функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ следует, что системе (1.1) удовлетворяет также вектор-функция $f^*(x) = (-f_1(x), -f_2(x), \dots, -f_n(x))^T$.

Замечание 2.1. Рассмотрим следующую систему нелинейных интегральных уравнений:

$$(2.8) \quad \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j^*(\varphi_j(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}$$

относительно вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$, где

$$(2.9) \quad G_j^*(u) = \eta_j^* - G_j(\eta_j^* - u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Прямой проверкой можно убедиться, что тогда функции

$$\varphi_i^{\pm}(x) := \eta_i^* \pm f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}$$

удовлетворяют системе (2.8). Из (1.2), (2.4) - (2.7) сразу следует, что

$$\text{А) } 0 \leq \varphi_i^{\pm}(x) \leq 2\eta_i^*, \quad \varphi_i^{\pm}(x) \neq 0, \quad \varphi_i^{\pm}(x) \neq \eta_i^*, \quad \varphi_i^{\pm}(x) \neq 2\eta_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\text{В) } \varphi_i^{-} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \varphi_i^{+} \in L_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+), \quad \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \varphi_i^{\pm}(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Возникает естественный вопрос: система нелинейных интегральных уравнений (1.1) может иметь нетривиальное неотрицательное (неположительное) решение в конусном отрезке $[0, \eta_1^*] \times [0, \eta_2^*] \times \dots \times [0, \eta_n^*]$ с одинаковыми предельными значениями в $\pm \infty$?

Ответ на этот вопрос можно получить в §3. Прежде чем перейдем к изучению данного вопроса докажем следующую важную вспомогательную лемму:

Лемма 2.1. Пусть элементы матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n \times n}$ положительны, причем $a_{ij} = a_{ji}$ и $r(A) = 1$. Тогда, если нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ удовлетворяют условиям а) - д), то система нелинейных алгебраических уравнений

$$(2.10) \quad c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} G_j(c_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

в классе $\mathfrak{M} := \{x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T : x_i \geq 0, x \neq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ обладает единственным решением $c_i = \eta_i^*, i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Во-первых заметим, что в силу условия д) и соотношения (1.2) $c = (\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*)^T$ является решением системы (2.10). Докажем, что в классе $\mathfrak{M}$ система (2.10) других решений не имеет. Предположим обратное: система (2.10) обладает также решением $\tilde{c} := (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)^T, \tilde{c} \neq c$. Рассмотрим разность:

$$(2.11) \quad |\eta_i^* - \tilde{c}_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} |\eta_j^* - \tilde{c}_j|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Умножим обе части неравенства (2.11) на $G_i(\tilde{c}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и просуммируем полученное неравенство по всем $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда, учитывая симметричность матрицы A , будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n G_i(\tilde{c}_i) |\eta_i^* - \tilde{c}_i| &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} |\eta_j^* - G_j(\tilde{c}_j)| \right) G_i(\tilde{c}_i) = \\ &= \sum_{j=1}^n |\eta_j^* - G_j(\tilde{c}_j)| \sum_{i=1}^n a_{ij} G_i(\tilde{c}_i) = \sum_{j=1}^n |\eta_j^* - G_j(\tilde{c}_j)| \sum_{i=1}^n a_{ji} G_i(\tilde{c}_i) = \sum_{j=1}^n |\eta_j^* - G_j(\tilde{c}_j)| \tilde{c}_j, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(2.12) \quad \sum_{i=1}^n (G_i(\tilde{c}_i) |\eta_i^* - \tilde{c}_i| - |\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)| \tilde{c}_i) \leq 0.$$

Ясно, что

$$(2.13) \quad \sum_{i=1}^n (G_i(\tilde{c}_i) |\eta_i^* - \tilde{c}_i| - |\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)| \tilde{c}_i) = \sum_{i \in \mathcal{P}} (G_i(\tilde{c}_i) |\eta_i^* - \tilde{c}_i| - |\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)| \tilde{c}_i),$$

где

$$(2.14) \quad \mathcal{P} := \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : \tilde{c}_i \neq \eta_i^*, \tilde{c}_i \neq 0\}.$$

Следовательно, учитывая (2.13) и (2.12), приходим к неравенству

$$(2.15) \quad \sum_{i \in \mathcal{P}} |\eta_i^* - \tilde{c}_i| \tilde{c}_i \left(\frac{G_i(\tilde{c}_i)}{\tilde{c}_i} - \frac{|\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)|}{|\eta_i^* - \tilde{c}_i|} \right) \leq 0.$$

Заметим теперь, что в силу монотонности и выпуклости вверх на $\mathbb{R}^+$ функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ для всех $i \in \mathcal{P}$ имеет место неравенство

$$(2.16) \quad \frac{G_i(\tilde{c}_i)}{\tilde{c}_i} > \frac{|\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)|}{|\eta_i^* - \tilde{c}_i|}$$

Неравенства (2.15) и (2.16) приводят к противоречию. Следовательно, $\tilde{c} = c = (\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*)^T$ является единственным решением системы (2.10) в классе векторов $\mathfrak{M}$. $\square$

3. ОТСУТСТВИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ (НЕПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ) РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ (1.1).

Теорема 3.1. *При условиях 1)–5) и а)–д) система нелинейных интегральных уравнений (1.1) в конусном отрезке $[0, \eta_1^*] \times [0, \eta_2^*] \times \dots \times [0, \eta_n^*]$ не может иметь нетривиальное неотрицательное (неположительное) решение с одинаковыми предельными значениями в $\pm\infty$.*

Доказательство. В силу нечетности нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ достаточно доказать отсутствие нетривиальных неотрицательных решений указанными выше свойствами. Предположим обратное: система нелинейных интегральных уравнений (1.1) имеет нетривиальное неотрицательное решение в конусном отрезке $[0, \eta_1^*] \times [0, \eta_2^*] \times \dots \times [0, \eta_n^*]$, причем существуют $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_i(x) = c_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Так как по предположению $0 \leq f_i(x) \leq \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $c_i \in [0, \eta_i^*]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Так как свертка суммируемой и ограниченной функций из себя представляет непрерывную функцию (см. [19]), то в силу условий 1), а), с) и d) заключаем, что $f_i \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Перейдем в обеих частях системы (1.1) к пределу, когда $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда, используя следующее известное предельное соотношение для операции свертки (см. [20]):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\phi(t)dt = \phi(\pm\infty) \int_{-\infty}^{\infty} K(u)du,$$

с учетом непрерывности функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ из (1.1) приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений (2.10), в которой $a_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x)dx$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Так как $K_{ij}(x) = K_{ji}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $r(A) = 1$ и $G_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, то согласно доказанной лемме либо $c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, либо $c_i = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ниже убедимся, что

- если $c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$,
- если же $c_i = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $\eta_i^* - f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 < 0$ такие, что

$$(3.1) \quad 0 \leq f_i(x) < \frac{\eta_i^*}{2}, \quad x > r_1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(3.2) \quad 0 \leq f_i(x) < \frac{\eta_i^*}{2}, \quad x < r_2, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Используя неравенства $0 \leq f_i(x) \leq \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, соотношение (1.2), а также условия 4), 5), а), с) и d), в силу теоремы Фубини из (1.1) для произвольного $R > r_1$ будем иметь

$$0 \leq \int_{r_1}^R (\eta_i^* - f_i(x))dx = \sum_{j=1}^n \int_{r_1}^R \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dt dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \int_{r_1}^R \int_{-\infty}^0 K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt dx + \sum_{j=1}^n \int_{r_1}^R \int_0^\infty K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt dx \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{r_1}^R \int_x^\infty K_{ij}(\tau) d\tau dx + \sum_{j=1}^n \int_{r_1}^R \int_0^{r_1} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt dx + \\
&+ \sum_{j=1}^n \int_{r_1}^R \int_{r_1}^R K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt dx + \sum_{j=1}^n \int_{r_1}^R \int_R^\infty K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt dx \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty \int_x^\infty K_{ij}(\tau) d\tau dx + \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{r_1}^\infty \int_0^{r_1} K_{ij}(x-t) dt dx + \\
&+ \sum_{j=1}^n \int_{r_1}^R \int_{r_1}^R K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt dx + \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^R \int_R^\infty K_{ij}(x-t) dt dx = \\
&= \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty \tau K_{ij}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{r_1}^\infty \int_{x-r_1}^x K_{ij}(y) dy dx + \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^R \int_{-\infty}^{x-R} K_{ij}(y) dy dx + \\
&+ \sum_{j=1}^n \int_{r_1}^R \int_{r_1}^R K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt dx \leq \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty \tau K_{ij}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{r_1}^\infty \int_{x-r_1}^\infty K_{ij}(y) dy dx + \\
&+ \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z K_{ij}(y) dy dz + \sum_{j=1}^n \int_{r_1}^R \int_{r_1}^R K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt dx \leq \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty \tau K_{ij}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{-\infty}^0 K_{ij}(y)(-y) dy + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{r_1}^R (\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt = \\
&= 3 \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty \tau K_{ij}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{r_1}^R (\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt.
\end{aligned}$$

Итак, мы получили следующую двойную оценку:

$$(3.3) \quad 0 \leq \int_{r_1}^R (\eta_i^* - f_i(x)) dx \leq \gamma_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{r_1}^R (\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$(3.4) \quad \gamma_i := 3 \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty \tau K_{ij}(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Умножим обе части неравенства (3.3) на η_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$ и просуммируем полученные неравенства по всем $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда с учетом условия симметричности матрицы A и соотношения (1.2) приходим к следующему двойному неравенству:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \eta_i^* \int_{r_1}^R (\eta_i^* - f_i(x)) dx \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i \eta_i^* + \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{r_1}^R (\eta_j^* - G_j(f_j(t))) dt$$

или

$$(3.5) \quad \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{r_1}^R (G_j(f_j(t)) - f_j(t)) dt \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i \eta_i^*.$$

Учитывая неравенства (3.1) и выпуклость вверх функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ на множестве $\mathbb{R}^+$ несложно проверить, что

$$(3.6) \quad G_i(f_i(t)) \geq \frac{2G_i(\frac{\eta_i^*}{2})}{\eta_i^*} f_i(t), \quad t > r_1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, в силу (3.6) из (3.5) приходим к оценке

$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^n \eta_i^* \left(\frac{2G_i(\frac{\eta_i^*}{2})}{\eta_i^*} - 1 \right) \int_{r_1}^R f_i(t) dt \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i \eta_i^*.$$

Из выпуклости вверх функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ на множестве $\mathbb{R}^+$ с учетом условий а), с) и d) следует, что

$$T_i := \frac{2G_i(\frac{\eta_i^*}{2})}{\eta_i^*} - 1 > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, $T := \min_{1 \leq i \leq n} \{T_i\} > 0$. Итак, учитывая (1.3), из (3.7) получаем, что

$$(3.8) \quad 0 \leq \int_{r_1}^R f_i(t) dt \leq \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \gamma_i \eta_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Устремляя число $R \rightarrow +\infty$ в (3.8) приходим к выключению $f_i \in L_1(r_1, +\infty)$. С использованием неравенств (3.2) аналогично можно доказать, что $f_i \in L_1(-\infty, r_2)$. Так как $f_i \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$, то из доказанных фактов следует, что $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В случае когда $c_i = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ совершенно идентичными рассуждениями можно доказать, что $\eta_i^* - f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Теперь докажем, что

(!): если $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \leq f_i(x) \leq \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $f_i(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$,

(!!): если же $\eta_i^* - f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \leq f_i(x) \leq \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $f_i(x) \equiv \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Интегрируем обе части системы (1.1) по x на $\mathbb{R}$, затем умножим обе части полученного равенства на η_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$ и просуммируем по всем $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда, если учитывать соотношение (1.2) и симметричность матрицы A , в силу теоремы Фубини получим

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^n \eta_i^* \int_{-\infty}^{\infty} (G_i(f_i(t)) - f_i(t)) dt = 0$$

Так как $0 \leq f_i(t) \leq \eta_i^*$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то из условий а) – д) сразу следует, что

$$(3.10) \quad G_i(f_i(t)) \geq f_i(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

причем равенство в (3.10) возможно только тогда, когда $\begin{cases} f_i(t) = 0, \\ f_i(t) = \eta_i^*, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Поскольку $f_i \in L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$, то из (3.9), в силу (3.10), получаем, что $f_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Точно также можно проверить, что если $\eta_i^* - f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \leq f_i(t) \leq \eta_i^*$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $f_i(t) \equiv \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Итак, в обоих случаях мы получаем только тривиальные решения. Следовательно, **теорема 3.1 полностью доказана.**

4. О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1.1). ПРИМЕРЫ

Как уже было отмечено в §2, система (1.1) обладает двумя непрерывными знакопеременными монотонными решениями: $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ и $f^*(x) = (-f_1(x), \dots, -f_n(x))^T$, где функции $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ обладают свойствами (2.5) – (2.7).

Замечание 4.1. *Прямой проверкой можно убедиться, что системе (1.1) удовлетворяют также следующие однопараметрические семейства вектор-функций:*

$$f_c(x) = (f_1(x+c), \dots, f_n(x+c))^T, \quad f_c^*(x) = (-f_1(x+c), \dots, -f_n(x+c))^T, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Возникает следующий вопрос: в классе непрерывных нечетных и ограниченных функций на $\mathbb{R}$ система нелинейных интегральных уравнений (1.1), кроме решений $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, $f^*(x) = (-f_1(x), \dots, -f_n(x))^T$, может ли иметь других решений?

Ответ на этот вопрос нам удастся дать частично. А именно, справедлива следующая

Теорема 4.1. *При условиях 1) – 5), а) – d) система нелинейных интегральных уравнений (1.1) в классе нетривиальных нечетных функций, определенных на множестве $\mathbb{R}$, принадлежащих конусному отрезку $[-\eta_1^*, \eta_1^*] \times \dots \times [-\eta_n^*, \eta_n^*]$, и имеющих конечный предел в $\pm\infty$, не может иметь более двух решений.*

Прежде чем займемся доказательством данной теоремы, рассмотрим следующую вспомогательную систему нелинейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром на положительной полупрямой:

$$(4.1) \quad Q_i(\varphi_i(x)) = \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t)) \varphi_j(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

относительно искомой вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$, где, как уже было отмечено, $Q_i = G_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Вопросу существования неотрицательного нетривиального ограниченного и монотонно неубывающего решения системы (4.1) посвящена работа [9]. Мы докажем следующую вспомогательную лемму о единственности решения системы (4.1).

Лемма 4.1. *При условиях 1) – 5), а) – d) система (4.1) в классе нетривиальных неотрицательных вектор-функций, определенных на множестве $\mathbb{R}^+$, принадлежащих конусному отрезку $[0, \eta_1^*] \times \dots \times [0, \eta_n^*]$, и имеющих конечный предел в $+\infty$ имеет единственное решение.*

Доказательство леммы 4.1. Аналогичными рассуждениями, как в доказательстве теоремы 3.1, здесь можно убедиться, что если $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ – любое нетривиальное неотрицательное решение системы (4.1), причем $0 \leq \varphi_i(x) \leq \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) < +\infty$, $i = 1, 2, \dots, n$, то либо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, либо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$. Более того, в первом случае $\varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$, а во втором случае $\eta_i^* - \varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$. С другой стороны, из результатов работы [9] следует, что система (4.1) обладает неотрицательным монотонно неубывающим непрерывным на $\mathbb{R}^+$ решением $\varphi^*(x) = (\varphi_1^*(x), \dots, \varphi_n^*(x))^T$, причем

$$\xi_i^*(1 - e^{-p^*x}) \leq \varphi_i^*(x) \leq \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i^*(x) = \eta_i^*, \quad \eta_i^* - \varphi_i^* \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ниже докажем, что на самом деле такое решение единственно в выше упомянутом классе вектор-функций (см. формулировку леммы 4.1). Предположим обратное: тогда либо система (4.1) обладает вторым неотрицательным нетривиальным ограниченным решением $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ со свойствами: $0 \leq \varphi_i(x) \leq \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) = \eta_i^*$, $\eta_i^* - \varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$, либо обладает также неотрицательным нетривиальным суммируемым на $\mathbb{R}^+$ решением $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$, причем

$$(4.2) \quad 0 \leq \varphi_i(x) \leq \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если существует неотрицательное нетривиальное суммируемое решение $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ со свойствами (4.2), то, снова используя непрерывность операции свертки суммируемых и ограниченных функций, можно утверждать, что $\varphi_i \in C(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Более того, из (4.1), в силу четности ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ по x и свойств функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, легко следует, что $\varphi_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Убедимся, что $\varphi_i(x) > 0$, при $x > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Так как $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ тождественно ненулевая вектор-функция и $\varphi_i(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, n$, то в силу легко проверяемого неравенства:

$$(4.3) \quad K_{ij}(x-t) > K_{ij}(x+t), \quad x, t > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

из (4.1) получим, что $Q_i(\varphi_i(x)) \geq 0$ и $Q_i(\varphi_i(x)) \not\equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Учитывая монотонность нечетности и непрерывность функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, заключаем, что для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует $x_i > 0$ такое, что $\varphi_i(x_i) > 0$. В силу непрерывности функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, следует, что существуют положительные числа $\{\delta_i\}_{i=1}^n$, такие, что $\varphi_i(x) > 0$, при $x \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$, причем $x_i > \delta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда в силу (4.3) из (4.1) будем иметь

$$(4.4) \quad Q_i(\varphi_i(x)) \geq \sum_{j=1}^n \int_{x_j - \delta_j}^{x_j + \delta_j} (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t)) \varphi_j(t) dt > 0 = Q_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая монотонность функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, из (4.4) получаем

$$(4.5) \quad \varphi_i(x) > 0, \quad \text{при } x > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Используя неравенства (4.3), оценим теперь разность:

$$(4.6) \quad |Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))| \leq \sum_{j=1}^n \int_0^\infty (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t)) |\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)| dt, \\ x \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, n$$

Умножим обе части неравенства (4.6) на функцию $\varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$ интегрируем обе части полученного неравенства по x пределах от 0 до $+\infty$, затем просуммируем по всем $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как $K_{ij} \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi_j, \varphi_j^* \in C_M(\mathbb{R}^+)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ ($C_M(\mathbb{R}^+)$ – пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$), то имея в виду теорему Фубини, четность и симметричность ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \varphi_i(x) |Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))| dx \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \varphi_i(x) \int_0^\infty (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t)) |\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)| dt dx = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)| \int_0^\infty (K_{ji}(t-x) - K_{ji}(t+x)) \varphi_i(x) dx dt = \\ & = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty |\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)| \left(\sum_{i=1}^n \int_0^\infty (K_{ji}(t-x) - K_{ji}(t+x)) \varphi_i(x) dx \right) dt = \\ & = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty |\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)| Q_j(\varphi_j(t)) dt \end{aligned}$$

или

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \{ |Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))| \varphi_i(x) - |\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)| Q_i(\varphi_i(x)) \} dx \leq 0.$$

Так как $\eta_i^* - \varphi_i^* \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\varphi_i(0) = \varphi_i^*(0) = 0$, $\varphi_i^*(x) > 0$, $\varphi_i(x) > 0$, $x > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует $x_i > 0$, такое, что $\varphi_i^*(x_i) \neq \varphi_i(x_i)$. Снова используя непрерывность этих функций, заключаем, что существуют положительные числа $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ такие, что $\varphi_i^*(x) \neq \varphi_i(x)$, $x_i > \lambda_i$, $x \in (x_i - \lambda_i, x_i + \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что когда $x \in (x_i - \lambda_i, x_i + \lambda_i)$

$$(4.8) \quad \varphi_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Введем следующие измеримые множества:

$$\mathcal{P}_i := \{x \in \mathbb{R}^+ : \varphi_i^*(x) \neq \varphi_i(x), \varphi_i(x) \neq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что $0 \notin \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В силу сказанного выше имеем $(x_i - \lambda_i, x_i + \lambda_i) \subset \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, $mes \mathcal{P}_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Из соотношений $Q_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ сразу следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \{ |Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))| \varphi_i(x) - |\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)| Q_i(\varphi_i(x)) \} dx = \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{P}_i} \{ |Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))| \varphi_i(x) - |\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)| Q_i(\varphi_i(x)) \} dx \leq 0 \end{aligned}$$

или

$$(4.9) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{P}_i} |\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)| \varphi_i(x) \left(\frac{|Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))|}{|\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)|} - \frac{Q_i(\varphi_i(x))}{\varphi_i(x)} \right) dx \leq 0.$$

В тоже время в силу выпуклости вниз нелинейностей $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на множестве $\mathbb{R}^+$ можем утверждать, что для всех $x \in \mathcal{P}_i$:

$$(4.10) \quad \frac{|Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))|}{|\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)|} > \frac{Q_i(\varphi_i(x))}{\varphi_i(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Сопоставляя неравенства (4.9) и (4.10), определение множеств $\{\mathcal{P}_i\}_{i=1}^n$ и тот факт, что $\varphi_i(x) > 0$ при $x \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, приходим к противоречию. Повторяя идентичные рассуждения в случае существования второго нетривиального ограниченного решения $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ (со свойствами $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) = \eta_i^*$, $\eta_i^* - \varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$) опять приходим к противоречию. $\square$

Теперь перейдем к доказательству теоремы 4.1.

Доказательство теоремы 4.1. Используя нечетность функций $\{G_i(u)\}_{i=1}^n$ и четность ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$, прямой проверкой можно убедиться, что если $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ нетривиальное решение системы (4.1), то вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, $f^*(x) = (-f_1(x), \dots, -f_n(x))^T$, где

$$f_i(x) = \begin{cases} Q_i(\varphi_i(x)), & x \geq 0, \\ -Q_i(\varphi_i(-x)), & x < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

будут решениями системы (1.1). Более того, если $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, нечетное нетривиальное решение системы (1.1), то $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$, $\varphi_i(x) = G_i(f_i(x))$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, n$ будет решением системы (4.1). Используя эти факты согласно лемме 4.1 приходим к завершению доказательства теоремы 4.1. $\square$

В конце работы приведем примеры прикладного характера ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ и нелинейностей $\{G_i(u)\}_{i=1}^n$, для которых выполняются условия доказанных утверждений.

Примеры ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$:

- $p_1)$ $K_{ij}(x) = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ элементы матрицы A , спектральный радиус которого равен единице,
- $p_2)$ $K_{ij}(x) = \int_a^b e^{-|x|s} B_{ij}(s) ds$, $x \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где $\{B_{ij}(s)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ — положительные и непрерывные функции на множестве $[a, b)$, $0 < a < b \leq +\infty$, причем спектральный радиус матрицы $B := \left(2 \int_a^b \frac{B_{ij}(s)}{s} ds \right)_{i,j=1}^{n \times n}$ равен единице.

Примеры нелинейностей $\{G_i(u)\}_{i=1}^n$:

- $q_1)$ $G_j(u) = \begin{cases} \gamma_j(1 - e^{-u}), & u > 0, \\ \gamma_j(e^u - 1), & u < 0 \end{cases}$, $j = 1, 2, \dots, n$, где $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ — числовые параметры, причем $\gamma_j > 1$, $j = 1, 2, \dots, n$,
- $q_2)$ $G_j(u) = \alpha_j \sqrt[p]{u}$, $j = 1, 2, \dots, n$, где $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ — числовые параметры, а $p > 2$ — нечетное число.

Замечание 4.2. Отметим, что нелинейности вида $q_1)$ с ядрами вида $p_1)$ встречаются в математической теории пространственно - временного распространения пандемии (см. [7], [8]), а нелинейности вида $q_2)$ с ядрами $p_2)$ возникают в кинетической теории газов и в теории переноса излучения (см. [4]-[6]). В случае гауссовского распределения ядер вида $p_1)$ нелинейности типа $q_2)$ встречаются в задаче динамической теории p -адических открыто-замкнутых струн (см. [2], [3]).

Замечание 4.3. Следует отметить также, что в скалярном случае $n = 1$ и $K(x) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, к изучению интегральных уравнений вида (1.1) сводятся задачи нахождения волновых гладких решений нелинейных классических эллиптических уравнений и уравнений типа Клейна-Гордона (см. [15]).

Abstract. The paper considers a system of nonlinear integral equations of the convolution type on the whole line. This system arises in many branches of mathematical physics and mathematical biology. The questions of existence and absence of nontrivial bounded solutions are investigated. A uniqueness theorem for a solution in a certain

class of bounded functions is also proved. At the end of the work, applied examples of this system are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Ланкастер, Теория Матриц, М., Наука (1973).
- [2] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, "Non-archimedean string dynamics", Nuclear Physics B, **302**, no. 3, 365 – 402 (1988).
- [3] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, "О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны", ТМФ, **138**, no. 3, 355 – 368 (2004).
- [4] Н. Б. Енгибарян, "Об одной задаче нелинейного переноса излучения", Астрофизика, **2**, no. 1, 31 – 36 (1966).
- [5] C. Cercignani, The Boltzmann Equation and Its Application, Springer, New York (1988).
- [6] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны", ТМФ, **189**, no. 2, 239 – 255 (2016).
- [7] O. Diekmann, "Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection", Journal. Math. Biol., **6**, no. 2, 109 – 130 (1978).
- [8] O. Diekmann, "Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic", Journal of Diff. Equation, **33**, no. 1, 58 – 73 (1979).
- [9] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой", Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика, Механика, Информатика, **19**, no. 2, 164 – 181 (2019).
- [10] O. Diekmann, H. G. Kaper, "On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation", Nonlinear Analysis, **2**, no. 6, 721 – 737 (1978).
- [11] В. С. Владимиров, "О решениях p -адических струнных уравнений", ТМФ, **167**, no. 2, 163 – 170 (2011).
- [12] Л. В. Жуковская, "Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих солитонные решения в теории струн", ТМФ, **146**, no. 3, 402 – 409 (2006).
- [13] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p -адической струны", Изв. РАН. Сер. матем., **82**, no. 2, 172 – 193 (2018).
- [14] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одной граничной задачи в p -адической теории струн", Тр. ММО, **79**, no. 1, 117 – 132 (2018).
- [15] Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan, "Integral equations on the whole line with monotone nonlinearity and difference kernel", Journal of Mathematical Sciences, **255**, no. 6, 790 – 804 (2021).
- [16] Kh. A. Khachatryan, "On some systems of nonlinear integral Hammerstein-type equations on the semiaxis", Ukrainian Mathematical Journal, **62**, no. 4, 630 – 647 (2010).
- [17] Х. А. Хачатрян, Ц. Э. Терджян, Т. Г. Сардарян, "О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси", Укр. матем. журнал, **69**, no. 8, 1107 – 1122 (2017).
- [18] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, М., Наука (1981).
- [19] У. Рудин, Функциональный Анализ, М., Мир (1975).
- [20] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, **22**, ВИНТИ, М., 175 – 244 (1984).

Поступила 22 декабря 2021

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 57, номер 5, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Л. Г. АРАБАДЖЯН, Об интегральных операторах Вольтерра и Винера-Хопфа и соответствующих уравнениях первого рода	4
Н. Б. ЕНГИБАРЯН, О нелинейном уравнении факторизации в нормированном кольце	15
В. Н. YENGIBARYAN, N. B. YENGIBARYAN, Multiple factorization of skew-symmetric matrices	25
В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН, О сравнении мощности частично гипоеллиптических многочленов	33
М. Г. МУРАДЯН, О построении общего решения неустойчивой системы дифференциальных уравнений	44
Х. А. ХАЧАТРЯН, А. С. ПЕТРОСЯН, О суммируемых решениях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с монотонной нелинейностью на четверти плоскости	55
А. Х. ХАЧАТРЯН, Х. А. ХАЧАТРЯН, Об одной системе интегральных уравнений на всей прямой с выпуклой и монотонной нелинейностью ...	65 – 80

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 57, No. 5, 2022

CONTENTS

PREFACE	3
L. G. ARABADJYAN, On Volterra and Wiener-Hopf integral operators and on corresponding equations of the first kind	4
N. B. YENGIBARIAN, On nonlinear factorization equation in normed ring	15
V. N. YENGIBARYAN, N. B. YENGIBARYAN, Multiple factorization of skew-symmetric matrices	25
V. N. MARGARYAN, H. G. KHAZARYAN, On comparison of powers of partially hypoelliptic polynomials	33
M. G. MURADYAN, On the construction of a general solution of an unstable system of differential equations	44
Kh. A. KHACHATRYAN, H. S. PETROSYAN, On summable solutions of two-dimensional integral equations of Volterra type with monotone nonlinearity on a quarter-plane	55
A. Kh. KHACHATRYAN, Kh. A. KHACHATRYAN, On one system of integral equations on the whole line with convex and monotonic nonlinearity	65 – 80