ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2022

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал ``Известия НАН Армении, Математика'' публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата A4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
   - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
   - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
   - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы , место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала ``Известия НАН Армении, Математика'', пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
   E-mail: sart@ysu.am, URL: http://www.maik.ru
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале ``Journal of Contemporary Mathematical Analysis''. URL: http://www.springer.com.

****

Заказ N1147. Тираж 150. Подписано к печати 11.01.22.
Печ. л. 5,25. Бумага офсетная. Цена договорная.
Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 1, 2022, стр. 3 – 18.

SOLVABILITY OF QUADRATIC INTEGRAL EQUATIONS WITH SINGULAR KERNEL

M. A. ABDEL-ATY, M. A. ABDOU AND A. A. SOLIMAN

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.1-3-18

Benha University, Benha, Egypt
Alexandria University, Alexandria, Egypt
E-mails: *mohammed.abdallah@fsc.bu.edu.eg; abdella_777@yahoo.com*
a_a_soliman@hotmail.com

Abstract. In this paper, we discussed the existence and uniqueness of solution of the singular Quadratic integral equation (SQIE). The Fredholm integral term is assumed in position with singular kernel. Under certain conditions and new discussions, the singular kernel will tend to a logarithmic kernel. Then, using Chebyshev polynomial, a main of spectral relationships are stated and used to obtain the solution of the singular Quadratic integral equation with the logarithmic kernel and a smooth kernel. Finally, the Fredholm integral equation of the second kind is established and its solution is discussed, also numerical results are obtained and the error, in each case, is computed.

MSC2010 numbers: 45E05; 46B45; 65R20.

Keywords: singular quadratic integral equation; Banach space; fixed point theorem; logarithmic function; Chebyshev polynomial.

1. Introduction

The numerous kinds of integral equations are necessary mathematical tools for describing knowledge models that appear in various areas of applied science, see [6, 22, 23]. Because of extensive application of integral equations and not having the exact solutions in many cases, numerical solution of integral equations has attracted researcher's attention to develop numerical method for approximating solution of these equations. Among these methods, we refer to Degenerate kernel method [29], Resolvent kernel method [2], Trapezoidal rule [3], Wavelet method [4, 8], Homotopy perturbation method [32, 18], Collocation method [12], Separation of variables method [1] and Meshless method [15]. A novel algorithm to get approximate solution of these equations is to express the solution as linear combination of orthogonal or nonorthogonal basis functions and polynomials such as Block-pulse functions [9, 21], Hat functions [10, 24], Bernoulli polynomials [11], Bessel polynomials [34], Chebyshev polynomials [7], Fibonacci polynomials [25], Orthonormal bernstein polynomials [26], and others [20, 33]

Mathematical modeling of many phenomena in the real world is led to a special kind of integral equations called Quadratic integral equations. Quadratic integral equations always arise in many problems of mathematical physics and chemical such as theory of radiative transfer, the kinetic theory of gases, the theory of neutron transport, the queuing theory, and the traffic theory and many other applications. Existence solution and numerical method to solve these type of integral equations have been studied in previous papers, see [14, 27]. Lately, Quadratic integral equations with singular kernels have taken a lot of attention because of their useful applications in describing many events and problems of the real world.

In this paper, we consider the Quadratic integral equation with singular kernel in the position. We use a numerical method to obtain the solution of the singular Quadratic integral equation, where the existence and the uniqueness of the solution of the integral equations can be discussed and proved using Picard's method.
Consider the singular Quadratic integral equation,

$$\psi(x) = g(x) + \int_{-1}^{1} \xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right) \mu(y,\psi(y))\mathrm{d}y \int_{-1}^{1} p(x,y)\eta(y,\psi(y))\mathrm{d}y, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right) &= \int_{0}^{\infty} \left(\frac{L(w)}{w}\right) \cos(\frac{y-x}{\lambda}w)\mathrm{d}w, \\ L(w) &= \frac{w+q}{1+w}, \quad q \geq 1, \quad \lambda \in (0,\infty) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

where, the function $\psi(x)$ is unknown in the Banach space $L_2([-1,1]), -1 \leq x \leq 1$, the domain of integration with respect to the position $x \in [-1,1]$. $p(x,y)$ is given smooth function, the given function $g(x)$ belongs to the space $L_2([-1,1])$. $\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)$ is a discontinuous kernel in position.

This paper is divided into seven sections, In section two, the existence and unique solution of Eq. (1.1) is discussed and proved. In section three, we mentioned a theory explaining that the bad kernel takes the logarithmic form. While, in section four, we state some algebraic and integral formulas for the Chebyshev polynomials, also, we use Chebyshev polynomial method to obtain the solution of the singular Quadratic integral equation. In section five, a main theorem of spectral relationships for the Fredholm–integral equation of the second kind established and its solution is discussed. In section six, numerical results and estimated errors are computed. In section seven, general conclusions are deduced.

2. The existence and uniqueness of solution of the (SQIE)

In order to discuss the existence and uniqueness of solution of Eq. (1.1), we assume the following:

(i): A smooth function $p(x,y)$ satisfies $|p(x,y)| < k, \quad \forall x, y \in [-1,1]$ and k is a constant.

(ii): Bad behavior of the kernel $\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)$ satisfies the discontinuity condition

$$\left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\right|^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}} = Q,$$

where Q is a small constant.

(iii): The two known functions $\mu(y,\psi(y))$, $\eta(y,\psi(y))$ are bounded and satisfy:

(iii − 1) $\quad |\mu(y,\psi(y))| \leq N_1,\ |\eta(y,\psi(y))| \leq N_2$ s.t $N_1,\ N_2$ are a constants.

$$\text{(iii}-2) \quad |\mu(y,\psi_1(y)) - \mu(y,\psi_2(y))| \leq M_1(y)|\psi_1(y) - \psi_2(y)|,$$

$$|\eta(y,\psi_1(y)) - \eta(y,\psi_2(y))| \leq M_2(y)|\psi_1(y) - \psi_2(y)|,$$

where, $|M_1(y)| \leq l_1,\ |M_2(y)| \leq l_2, \quad (l_1,\ l_2$ are a constants).

Theorem 2.1. *Let the conditions* (i − iii) *are satisfied. If the condition*

$$4Qk[l_1N_2 + l_2N_1] < 1 \tag{2.1}$$

is satisfied, then the equation (1.1) *has a unique solution* $\psi(x)$ *in the space* $L_2([-1,1])$.

Proof. To prove the existence and uniqueness of solution of equation (1.1), we use the successive approximations method (*Picard's method*).

We assume the solution of Quadratic integral equation (1.1) approaches to the solution, which takes the following form:

(2.2)

$$\psi_n(x) = g(x) + \int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_{n-1}(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_{n-1}(y))\mathrm{d}y,$$

$$\psi_0(x) = g(x).$$

All the functions $\psi_n(x)$ are continuous functions and $\psi_n(x)$ can be written as a sum of successive differences:

$$\psi_n(x) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^{n}(\psi_i(x) - \psi_{i-1}(x)).$$

This means that convergence of the sequence $\psi_n(x)$ is equivalent to convergence of the finite series $\sum_{i=1}^{n}(\psi_i(x) - \psi_{i-1}(x))$, the solution will be

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(x),$$

i.e. if the finite series $\sum_{i=1}^{n}(\psi_i(x) - \psi_{i-1}(x))$ converges, then the sequence $\psi_n(x)$ will converge to $\psi(x)$.

Now, we must prove the following lemmas:

Lemma 2.1. *A sequence* $\{\psi_n(x)\}$ *is uniformly convergent to a continuous solution function* $\{\psi(x)\}$.

Proof. To prove the uniform convergence of $\{\psi_n(x)\}$, we shall consider the associated series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n(x)-\psi_{n-1}(x)).$$

From Eq. (2.2), for $n=1$, we obtain

$$\psi_1(x)-\psi_0(x)=\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_0(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_0(y))\mathrm{d}y,$$

and

$$|\psi_1(x)-\psi_0(x)|\le QN_1kN_2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y=4QN_1kN_2. \tag{2.3}$$

Now, we shall obtain an estimate for $\psi_n(x)-\psi_{n-1}(x);\quad n\ge 2$,

$$\begin{aligned}\psi_n(x)-\psi_{n-1}(x)&=\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_{n-1}(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_{n-1}(y))\mathrm{d}y\\
&-\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_{n-2}(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_{n-2}(y))\mathrm{d}y,\\
&=\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_{n-1}(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_{n-1}(y))\mathrm{d}y\\
&-\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_{n-2}(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_{n-1}(y))\mathrm{d}y,\\
&+\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_{n-2}(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_{n-1}(y))\mathrm{d}y\\
&-\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_{n-2}(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_{n-2}(y))\mathrm{d}y,\\
&=\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)[\mu(y,\psi_{n-1}(y))-\mu(y,\psi_{n-2}(y))]\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_{n-1}(y))\mathrm{d}y\\
&+\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_{n-2}(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)[\eta(y,\psi_{n-1}(y))-\eta(y,\psi_{n-2}(y))]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Using conditions (i)-(iii), we have

$$\begin{aligned}|\psi_n(x)-\psi_{n-1}(x)|\le&QkN_2\int_{-1}^{1}M_1(y)|\psi_{n-1}(y)-\psi_{n-2}(y)|\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\\
&+QN_1k\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}M_2(y)|\psi_{n-1}(y)-\psi_{n-2}(y)|\mathrm{d}y,\\
\le&Ql_1kN_2\int_{-1}^{1}|\psi_{n-1}(y)-\psi_{n-2}(y)|\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\\
&+QN_1kl_2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}|\psi_{n-1}(y)-\psi_{n-2}(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Putting $n=2$, then using (2.3), we get

$$
\begin{aligned}
&|\psi_2(x)-\psi_1(x)| \le Ql_1kN_2\int_{-1}^{1}|\psi_1(y)-\psi_0(y)|\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\\
&+QN_1kl_2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}|\psi_1(y)-\psi_0(y)|\mathrm{d}y \le 4^2Q^2l_1k^2N_1N_2^2+4^2Q^2N_1^2k^2l_2N_2,\\
&\le 4QkN_1N_2\left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\psi_3(x)-\psi_2(x)| \le & Ql_1kN_2\int_{-1}^{1}|\psi_2(y)-\psi_1(y)|\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\\
&+QN_1kl_2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}|\psi_2(y)-\psi_1(y)|\mathrm{d}y,\\
\le & 4Ql_1kN_2\left(4QkN_1N_2\left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right)\right)\\
&+4QN_1kl_2\left(4QkN_1N_2\left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right)\right),\\
\le & \left(4QkN_1N_2\right)\left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right)\times\left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right).
\end{aligned}
$$

Repeating this technique, we obtain the general estimate for the terms of the series:

$$
\begin{aligned}
|\psi_n(x)-\psi_{n-1}(x)| &\le \left(4QkN_1N_2\right)\left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right)\times\left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right)\times\dots\\
&\times\left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right) \le \left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right)^n.
\end{aligned}
$$

Since $4Qk[l_1N_2+l_2N_1]<1$, then the uniform convergence of

$$
\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n(x)-\psi_{n-1}(x)),
$$

is proved and so the sequence $\{\psi_n(x)\}$ is uniformly convergent.

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(g(x)+\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_n(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_n(y))\mathrm{d}y\right),\\
&= g(x)+\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi(y))\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Thus, the existence of a solution of equation (1.1) is proved.

Lemma 2.2. *The function $\psi(x)$ represents a unique solution of Quadratic integral equation (1.1).*

Proof. To prove the uniqueness of Eq. (1.1), let $\phi(x)$ be another continuous solution of Eq. (1.1). Then

$$
\phi(x)=g(x)+\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\phi(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\phi(y))\mathrm{d}y;\qquad x\in[-1,1],
$$

and

$$\begin{aligned}
\phi(x)-\psi_n(x) &= \int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\phi(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\phi(y))\mathrm{d}y\\
&-\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_n(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_n(y))\mathrm{d}y,\\
&=\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\phi(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\phi(y))\mathrm{d}y\\
&-\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_n(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\phi(y))\mathrm{d}y,\\
&+\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_n(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\phi(y))\mathrm{d}y\\
&-\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_n(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\psi_n(y))\mathrm{d}y,\\
&=\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)[\mu(y,\phi(y))-\mu(y,\psi_n(y))]\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)\eta(y,\phi(y))\mathrm{d}y\\
&+\int_{-1}^{1}\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right)\mu(y,\psi_n(y))\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}p(x,y)[\eta(y,\phi(y))-\eta(y,\psi_n(y))]\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Using assumptions (i)–(iii), we get

$$\begin{aligned}
|\phi(x)-\psi_n(x)| &\le QkN_2\int_{-1}^{1}M_1(y)|\phi(y)-\psi_n(y)|\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\\
&+QN_1k\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}M_2(y)|\phi(y)-\psi_n(y)|\mathrm{d}y,\\
&\le Ql_1kN_2\int_{-1}^{1}|\phi(y)-\psi_n(y)|\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\\
&+QN_1kl_2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}|\phi(y)-\psi_n(y)|\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

But

$$|\phi(x)-g(x)|\le QN_1kN_2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y=4QN_1kN_2, \tag{2.4}$$

and using the inequality (2.4) gives

$$|\phi(x)-\psi_n(x)|\le\left(4Qk[l_1N_2+l_2N_1]\right)^n.$$

Hence

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\phi(x)\Rightarrow\psi(x)=\phi(x),$$

which completes the proof. □

3. The kernel of position

Theorem 3.1. *The bad kernel of equation (1.2) takes the logarithmic form.*

Proof. For $w \in (0, \infty)$, the function $L(w)$ is positive and continuous. Then it can satisfy the asymptotic equalities:

$$L(w) = q - (q-1)w + O(w^2), \quad w \to 0, \tag{3.1}$$

$$L(w) = 1 + \frac{q-1}{w} + O(w^{-2}), \quad w \to \infty, \quad q \geq 1. \tag{3.2}$$

Most of the previous authors have been solved the Fredholm integral equations of the first and second kind in the problems of continuum mechanics, when $w \to \infty$, $q = 1$. i.e. $L(w) = 1$.

Here, we consider the case when $w \to 0$, then for the first and second approximate of $L(w)$ after using the two famous relations

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{y-x}{\lambda} w)}{w} \mathrm{d}w = -\ln|y-x| + d; \quad d = \ln\frac{4\lambda}{\pi}, \\ &\int_0^\infty \cos(\frac{y-x}{\lambda} w)\mathrm{d}w = \delta(y-x); \quad \delta(y-x) \text{ is the Dirac function.} \end{aligned} \tag{3.3}$$

We can arrive

$$\xi\left(\left|\frac{y-x}{\lambda}\right|\right) = -\ln|y-x| + d. \tag{3.4}$$

4. The solution algorithm of the (SQIE)

Let $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1} x)$; $x \in [-1, 1]$; $n \geq 0$ denotes the Chebyshev polynomials of the first kind, while $U_n(x) = \sin[(n+1)\cos^{-1} x]/\sin(\cos^{-1} x)$, $n \geq 0$ denotes the Chebyshev polynomials of the second kind. It is well known that $T_n(x)$ form an orthogonal sequence of functions with respect to the weight function $(1-x^2)^{-1/2}$, while $U_n(x)$ form an orthogonal sequence of functions with respect to the weight function $(1-x^2)^{1/2}$.

In this section, we use Chebyshev polynomial $T_n(x)$ of the first kind of order n to solve the following Quadratic integral equation with singular kernel $(-\ln|y-x|+d)$:

$$\psi(x) + \int_{-1}^{1} (\ln|y-x| - d)\psi(y)\mathrm{d}y \int_{-1}^{1} p(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y = g(x), \tag{4.1}$$

here $\int_{-1}^{1}$ denotes integration in the sense of logarithmic principal value, the singular Quadratic integral equation with Carleman kernel can be obtained from (4.1) by using the famous relation, see [30]

$$\ln|y-x| = E(x,y)|y-x|^{-\alpha}; \qquad 0 \leq \alpha < 1, \tag{4.2}$$

where $E(x,y) = |y-x|^{\alpha} \ln|y-x| \in C[-1,1]$ for all $x \in [-1,1]$.

Assume the unknown function $\psi(x)$, in the light of weight function, takes the form

$$\psi(x) = R(x)H(x); \qquad R(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.3}$$

where $H(x)$ is unknown function and $R(x)$ represents the weight function of $T_n(x)$. Now, to obtain numerically a solution of Eq. (4.1), we express $H(x)$ as

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(x). \tag{4.4}$$

Hence, we have

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.5}$$

the formula (4.5) can be truncated to

$$\psi_N(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.6}$$

where C_n are constants and $T_n(x)$ are the Chebyshev polynomials of the first kind that satisfy the orthogonal relation

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}[T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)], \qquad (m, n \geq 0), \tag{4.8}$$

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{1-n^2}, & n = 0, 2, 4, ... \\ 0, & n = 1, 3, 5, ... \end{cases} \tag{4.9}$$

Also, we say that, if $\psi(x) \in L_2([-1,1])$, then the polynomial series (4.6) belongs to $L_2([-1,1])$. In view of (4.6), the known term of (4.1) can be represented as

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} G_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.10}$$

where the coefficients G_n; $n \geq 0$, are constants. If the known function $g(x) \in L_2([-1,1])$, it follows that the polynomial series (4.10) belongs to $L_2([-1,1])$. Since, any smooth function can be represented in the polynomial series form, therefore we assume the smooth function $p(x,y)$ of (4.1) in the form:

$$p(x,y) = \sum_{m=0}^{M} T_m(x)T_m(y); \qquad m = 0, 1, 2, ..., M. \tag{4.11}$$

Using (4.6), (4.10) and (4.11) in (4.1), we obtain

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{-1}^{1} (\ln|y-x| - d) \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y \times \\ &\times \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_m(x) \int_{-1}^{1} \frac{T_m(y)T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

where

$$G_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} g(x)T_n(x)dx, & n \neq 0, \\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g(x)T_n(x)dx, & n = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

The method of finding the approximate solution through (4.12) depends on comparing the coefficients associated with the same polynomial terms T_n, the approximate solution is obtained directly from (4.6), then the exact solution is obtained from (4.5). This method is said to be convergent of order r if and only if for N sufficiently large, there exists a constant $D > 0$ independent of N such that

$$\|\psi(x) - \psi_N(x)\| \leq DN^{-r}. \tag{4.14}$$

So, the transformation error E_N can be determined as

$$E_N = \|\psi(x) - \psi_N(x)\| \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \right\|. \tag{4.15}$$

In the aid of (4.14), we write

$$E_N \leq DN^{-r}; \qquad \text{(D is a constant)}. \tag{4.16}$$

Using orthogonal the relation (4.7) and the following famous relation:

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\ln|y-x| - d)T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y = \begin{cases} \pi(\ln 2 - d), & n = 0, \\ \pi\frac{T_n(x)}{n}, & n \geq 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

The solution of (4.12) can be obtained after discussing the following:

Case (i): For $n = 0,\ m = 0$, we have

$$C_0 \frac{T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} + C_0^2 \pi^2 (\ln 2 - d) T_0(x) = G_0 \frac{T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.18}$$

multiplying both sides of (4.18) by the term $T_m(x)dx$, then integrating the result from -1 to 1, we get

$$C_0^2 + \frac{1}{\pi(\ln 2 - d)} C_0 - \frac{1}{\pi(\ln 2 - d)} G_0 = 0. \tag{4.19}$$

Case (ii): For $n = 0,\ m \neq 0$, after using the orthogonal relation and formula (4.17), (4.12) tends to

$$\begin{aligned} C_0 \frac{T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= G_0 \frac{T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad m \geq 1, \\ C_0 &= G_0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

where

$$G_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} g(x) dx.$$

Case (iii): For $n \neq 0,\ m = 0$, we deduce

$$\begin{aligned} C_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= G_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad n \geq 1, \\ C_n &= G_n; \qquad n \geq 1, \end{aligned} \tag{4.21}$$

where,

$$G_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} g(x)T_n(x)dx.$$

Case (iv): For $n = m \neq 0$, we can establish

$$C_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = G_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2n} C_n^2 \pi^2 T_n(x) T_m(x); \quad n,\, m \geq 1. \tag{4.22}$$

Multiplying both sides of (4.22) by the term $T_m(x)dx$, then integrating the result from -1 to 1, we get

$$C_n = G_n + \frac{1}{4n} C_n^2 \pi [H + 3H^*]; \quad n,\, m \geq 1, \tag{4.23}$$

where

$$H = \begin{cases} \frac{1}{1-(3m)^2}, & 3m = 0, 2, 4, ... \\ 0, & 3m = 1, 3, 5, ..., \end{cases} \tag{4.24}$$

and

$$H^* = \begin{cases} \frac{1}{1-m^2}, & m = 0, 2, 4, ... \\ 0, & m = 1, 3, 5, ... \end{cases} \tag{4.25}$$

5. Fredholm integral equation of the second kind

From the above discussion, we can establish a famous integral equation as the following: Assume in (4.1) the known smooth function $p(x, y) = 1$ and $\int_{-1}^{1} \psi(y)\mathrm{d}y = P$ where, P is constant, this result is called the pressure condition. Therefore, we have

$$\psi(x) + P\int_{-1}^{1} (\ln|y-x| - d)\psi(y)\mathrm{d}y = g(x). \tag{5.1}$$

The above formula is called Fredholm integral equation of the second kind with logarithmic kernel. In addition, using the famous relation (4.2), we have Fredholm integral equation of the second kind with Carleman kernel, see [30]

$$\psi(x) + P\int_{-1}^{1} E(x, y)|y-x|^{-\alpha}\psi(y)\mathrm{d}y = g(x). \tag{5.2}$$

The important of Carleman kernel came from the work of Aroytion, who proved that the first approximation of the nonlinear integral equation in the theory of plasticity, represent a Fredholm integral equation of the second kind with Carleman kernel, see [5].

Differentiating the integral equation (5.1) with respect to x, we have

$$\psi'(x) + P\int_{-1}^{1} \frac{\psi(y)\mathrm{d}y}{x-y} = g'(x). \tag{5.3}$$

The importance of the above equation came from the work of Frankel, see [16].

Many authors have discussed the solution of the above equations using different methods. For Cauchy methods, see [28], for potential theory method, see [17]. And for orthogonal method, see [31]. The importance of orthogonal polynomials came from its spectral relationships which have many applications in astrophysics and mathematical physics problems. For this, we us the following spectral relationships to discuss the solution of Fredholm integral equation of the second kind with logarithmic kernel. Moreover, we will establish many spectral relationships from the integral equation,

$$\int_{-1}^{1}\left(\ln\frac{1}{|y-x|}+d\right)\frac{T_{2n}(y)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=\begin{cases}\pi(\ln 2+d); & n=0;\\ \frac{\pi}{2n}T_{2n}(x); & n\neq 0,\end{cases}\tag{5.4}$$

for even function, and

$$\int_{-1}^{1}\left(\ln\frac{1}{|y-x|}+d\right)\frac{T_{2n-1}(y)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2n-1}T_{2n-1}(x);\tag{5.5}$$

for odd function, where $T_n(x)$ is the Chebyshev polynomial of the first kind.

Many different spectral relations, that have importance applications in mathematical physics, can be established.

(i) For even values, let

$$x=\frac{\sin\omega/2}{\sin u/2},\qquad y=\frac{\sin v/2}{\sin u/2},$$

and we get the integral relation operators of the first kind in the form:

$$\int_{-1}^{1}\left(\ln\frac{1}{2|\sin(\omega-v)/2|}+d\right)\frac{T_{2n}\left(\frac{\sin v/2}{\sin u/2}\right)}{\sqrt{2(\cos v-\cos u)}}dv=\tag{5.6}$$

$$=\begin{cases}\pi\left(\ln(\sin\frac{u}{2})+d\right); & n=0,\\ \frac{\pi}{2n}T_{2n}\left(\frac{\sin\omega/2}{\sin u/2}\right); & n=1,2,....\end{cases}$$

(ii) For odd values, let in (5.5),

$$x=\frac{\tan\omega/2}{\tan u/2},\qquad y=\frac{\tan v/2}{\tan u/2},$$

and we get

$$\int_{-1}^{1}\left(\ln\frac{1}{2|\sin(\omega-v)/2|}+d\right)\frac{T_{2n-1}\left(\frac{\tan v/2}{\tan u/2}\right)\sec(v/2)}{\sqrt{2(\cos v-\cos u)}}dv=\tag{5.7}$$

$$=\frac{\pi}{2n-1}T_{2n-1}\left(\frac{\tan\omega/2}{\tan u/2}\right);\quad n=1,2,....$$

Differentiating (5.4) and (5.5) with respect to x, we obtain the integral relations for the Chebyshev polynomials with Cauchy kernel in the form:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(y)}{y-x}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pi U_{n-1}(x);\qquad n=1,2,...,\tag{5.8}$$

where $U_n(x)$ is the Chebyshev polynomial of the second kind. Using the two cases (i) and (ii) in polar coordinates, relation (5.8) takes the form:

$$\int_{-1}^{1} \cot \frac{v-\omega}{2} T_n\left(\frac{\tan v/2}{\tan u/2}\right) \frac{\cos(v/2)}{\sqrt{2(\cos v - \cos u)}} dv$$

$$= \begin{cases} 0; & n = 0, \\ \pi \csc(u/2) U_{2m-1}\left(\frac{\tan \omega/2}{\tan u/2}\right); & n = 2m;\ m \geq 1, \\ \pi \csc(u/2) U_{2m-1}\left(\frac{\tan \omega/2}{\tan u/2}\right) + (-1)^m \frac{\sin u/2}{1+\cos u/2} (\tan u/4); & n = 2m-1, \end{cases}$$

and

$$\int_{-1}^{1} \cot \frac{v-\omega}{2} T_n\left(\frac{\tan v/2}{\tan u/2}\right) \frac{\sec(v/2)}{\sqrt{2(\cos v - \cos u)}} dv$$

$$= \begin{cases} \pi \csc(u/2) \sec^2(\omega/2) U_{n-1}\left(\frac{\tan \omega/2}{\tan u/2}\right); & n = 1, 2, 3, ..., \\ \sec(u/2) \tan(\omega/2); & n = 0;\ |\omega| < u. \end{cases}$$

6. Application and numerical results

In this section, we applied presented method in this paper for solving singular Quadratic integral equation (4.1).

To obtain the numerical solution of SQIE (4.1), we calculate the constant C_n of Eqs (4.19)–(4.21) and (4.23). Then, with the aid of the results of main relation, we can calculate the unknown function $\psi_N(x)$; $-1 \leq x \leq 1$, when $N = 50$, $M = 8$, $\lambda = 0.1$, $g(x) = x^2$. The tables and Figs are given for different cases.

In Table 1, we presented the absolute error $|\psi(x) - \psi_N(x)|$, $N = 50$, using the introduced numerical method (Chebyshev polynomial) with $m = 0$ in the interval $x \in [-1, 1]$. Here in the following table, we have taken $m = 0$ and this is present in two cases, the case (i) and from which we get C_0, case (iii) we get C_n, $n \geq 1$.

Table 1. Case (i, iii); represents the solution $\psi_N(x)$ and its error for different position in the simple case $m = 0$.

x	$\psi_N(x)$	$\lvert\psi(x) - \psi_N(x)\rvert$
0.9	0.811029582	4.99495683×10^{-5}
0.7	0.489852149	3.45213542×10^{-6}
0.5	0.249993254	1.23514698×10^{-6}
0.3	0.089735841	1.02514368×10^{-6}
0.1	0.011009523	9.23514569×10^{-7}
-0.1	0.032154867	5.63251201×10^{-7}
-0.3	0.075216987	7.45238743×10^{-6}
-0.5	0.262514871	8.85221476×10^{-6}
-0.7	0.532648796	9.85416321×10^{-6}

In Figure 1, we presented a comparison between the exact solution and the approximate solution using the introduced numerical method (Chebyshev polynomial) with different values of x.

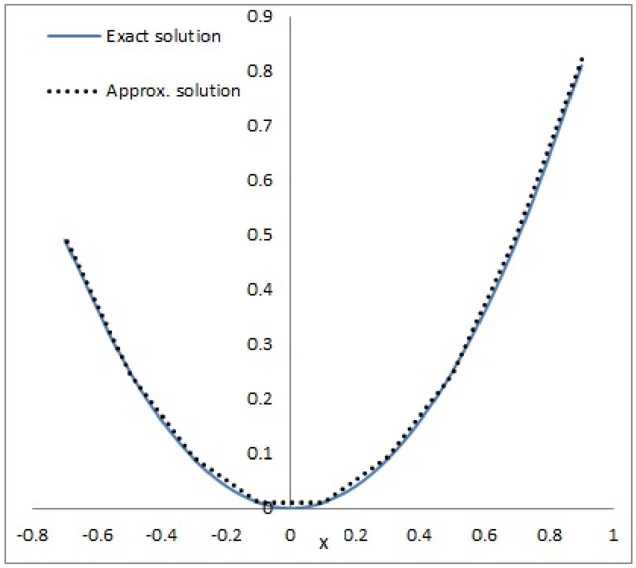


Figure 1.
Exact and approximate solution of Chebyshev polynomial method for $N = 50$.

In Table 2, we have presented approximated solution and the absolute error of approximate solution in some arbitrary points. We take here $m \geq 1$ this is achieved in both cases (ii, iv), where we get C_n, $n \geq 0$.

Table 2. Case (ii, iv); represents the solution $\psi_N(x)$ and its error for different x in $m \neq 0$.

x	$\psi_N(x)$	$\lvert\psi(x) - \psi_N(x)\rvert$
0.9	0.815456797	6.45572136×10^{-5}
0.7	0.489231464	8.21365475×10^{-6}
0.5	0.244625825	6.32014578×10^{-6}
0.3	0.086321456	5.36985212×10^{-6}
0.1	0.012698721	4.14785412×10^{-7}
-0.1	0.039574215	3.32145698×10^{-7}
-0.3	0.0765654566	6.25814736×10^{-6}
-0.5	0.221466574	5.23541587×10^{-6}
-0.7	0.538412301	9.25413698×10^{-6}

In Figure 2, we presented a comparison between the exact solution and the approximate solution using the introduced numerical method (Chebyshev polynomial) with different values of x.

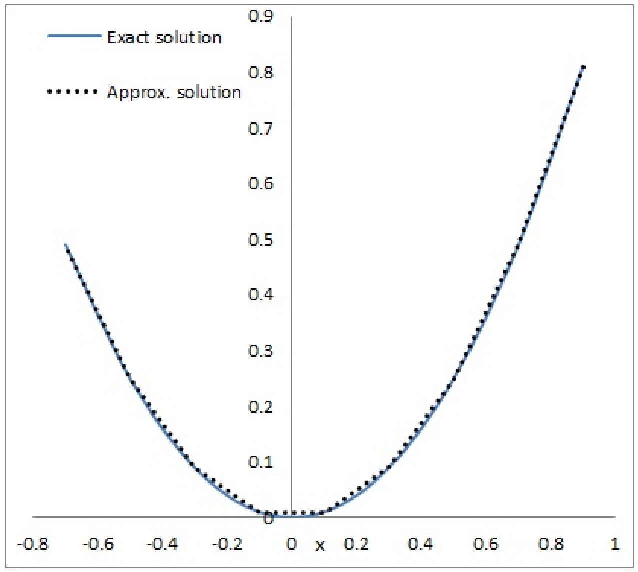


Figure 2.
Exact and approximate solution of Chebyshev polynomial method for $N = 50$.

7. Conclusion and Remarks

In this paper, from the above results and discussion, the following may be concluded, the equation (1.1) has a unique solution $\psi(x)$ in the space $L_2([-1, 1])$, under some conditions. Singular Quadratic integral equation is usually difficult to solve analytically, in many cases, it is required to obtain the approximate solutions. From the Tables 1, 2, we note that the error takes maximum value at the ends when $x = 1$ and $x = -1$, while it is minimum at the middle when $x = 0$.

The smooth function $p(x, y)$ has an effect for the potential function $\psi(x)$, that is the error becomes smaller for bigger powers of x and y in $p(x, y)$. The singular Quadratic integral equation with Carleman kernel can be established from this work by using Eq. 4.2. The Fredholm integral equations of the second kind with logarithmic and Carleman kernels are considered, now, as special cases of this work. Many spectral relations are established from the problem these relations have many important applications in mathematical physics problems.

Acknowledgments. The authors are very grateful to the referees and editors for their useful comments that led to improvement of our manuscript.

Список литературы

[1] M. A. Abdou, A. A. Soliman, M. A. Abdel–Aty, "On a discussion of Volterra–Fredholm integral equation with discontinuous kernel", J. Egypt Math. Soc., **28** (11) (2020). https://doi.org/10.1186/s42787-020-00074-8

[2] M. A. Abdou, M. E. Nasr, M. A. Abdel–Aty, "A study of normality and continuity for mixed integral equations", J. of Fixed Point Theory Appl., **20** (1) (2018). https://doi.org/10.1007/s11784-018-0490-0

[3] M. A. Abdou, M. E. Nasr, M. A. Abdel–Aty, "Study of the normality and continuity for the mixed integral equations with Phase-Lag term", Inter. J. of Math. Analysis, **11**, 787 – 799 (2017). https://doi.org/10.12988/ijma.2017.7798

[4] H. Adibi, P. Assari, "Chebyshev wavelet method for numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind", Math. Probl. Eng., **2010**, 1 – 17 (2010). http://dx.doi.org/10.1155/2010/138408

[5] N. K. Artiunian, "Plane contact problems of the theory of creel", Appl. Math. Mech., **23**, 901 – 923 (1959).

[6] S. András, "Weakly singular Volterra and Fredholm–Volterra integral equations", Stud. Univ. Babes–Bolyai Math., **48** (3), 147 – 155 (2003).

[7] Z. Avazzadeh, M. Heydari, "Chebyshev polynomials for solving two dimensional linear and nonlinear integral equations of the second kind", Comput. Appl. Math., **31** (1), 127 – 142 (2012). http://dx.doi.org/10.1590/S1807-03022012000100007

[8] E. Babolian, A. Shahsavaran, "Numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using Haar wavelets", J. Comput. Appl. Math., **225** (1), 87 – 95 (2009). https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.07.003

[9] E. Babolian, K. Maleknejad, M. Mordad, B. Rahimi, "A numerical method for solving Fredholm-Volterra integral equations in two-dimensional spces using block pulse functions and an operational matrix", J. Comput. Appl. Math., **235** (14), 3965 – 3971 (2011). https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.10.028

[10] E. Babolian, M. Mordad, "A numerical method for solving systems of linear and nonlinear integral equations of the second kind by hat basis functions", Comput. Math. Appl., **62** (1), 187 – 198 (2011). https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.066

[11] S. Bazm, "Bernoulli polynomials for the numerical solution of some classes of linear and nonlinear integral equations", J. Comput. Appl. Math., **275**, 44 – 60 (2015). https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.07.018

[12] H. Brunner, "On the numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations by collocation methods", SIAM J. Numer. Anal., **27**(4), 987 – 1000 (1990). https://doi.org/10.1137/0727057

[13] L. Delves, J. Mohammad, Computational Methods for Integral Equations, Cambridge University press (1988).

[14] A. M. A. El–Sayed, H. H. G. Hashem, Y. M. Y. Omar, "Positive continuous solution of a quadratic integral equation of fractional orders", Math. Sci. Lett., **2** (1), 19 – 27 (2013). https://doi.org/10.12785/msl/020103

[15] H. Fatahi, J. Saberi–Nadjafi, E. Shivanian, "A new spectral meshless radial point interpolation(SMRPI) method for the two-dimensional Fredholm integral equations on general domains with error analysis", J. Comput. Appl. Math., **294**, 196 – 209 (2016). https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.08.018

[16] J. Frankel, "A Galerkin solution to a regularized Cauchy singular Integro–differential equation", Quarterly of Applied Mathematics, **53** (2), 245 – 258 (1995). https://doi.org/10.1090/qam/1330651

[17] C. D. Green, Integral Equation Methods, Nelsson, New York (1969).

[18] M. S. Hashmi, N. Khan, S. Iqbal, "Numerical solutions of weakly singular Volterra integral equations using the optimal homotopy asymptotic method", Comput. Math. Appl., **64** (6), 1567 – 1574 (2012). https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.12.084

[19] E. Kreyszig, Introductory, Functional Analysis with Applications, New York, Wiley (1989).

[20] K. A. Khachatryan, "On a class of nonlinear integral equations with a noncompact operator", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **46** (2), 89 – 100 (2011). https://doi.org/10.3103/S106836231102004X

[21] K. Maleknejad, K. Mahdiani, "Solving nonlinear mixed Volterra–Fredholm integral equations with two dimensional block-pulse functions using direct method", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., **16** (9), 3512 – 3519 (2011).

[22] S. Micula, "On some iterative numerical methods for a Volterra functional integral equation of the second kind", J. of Fixed Point Theory Appl., **19** (3), 1815 – 1824 (2017). https://doi.org/10.1007/s11784-016-0336-6

[23] S. Micula, "An iterative numerical method for Fredholm–Volterra integral equations of the second kind", Appl. Math. Comput., **270** (1), 935 – 942 (2015). https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.110

[24] F. Mirzaee, E. Hadadiyan, "Numerical solution of linear Fredholm integral equations via two-dimensional modification of hat functions", Appl. Math. Comput., **250**, 805 – 816 (2015). https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.10.128

[25] F. Mirzaee, S. F. Hoseini, "Application of Fibonacci collocation method for solving Volterra-Fredholm integral equations", Appl. Math. Comput., **273**, 637 – 644 (2016). https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.10.035

[26] F. Mirzaee, N. Samadyar, "Convergence of 2D–orthonormal Bernstein collocation method for solving 2D-mixed Volterra-Fredholm integral equations", Trans, A, Razmadze Math. Inst., **172** (3), 631 – 641 (2018). https://doi.org/10.1016/j.trmi.2017.09.006

[27] F. Mirzaee, E. Hadadiyan, "Application of modified hat functions for solving nonlinear quadratic integral equations", Iran J. Numer. Anal. Opt., **6** (2), 65 – 84 (2016). https://doi.org/10.22067/ijnao.v6i2.46565

[28] N. I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, Noordhoff, Leiden (1953).

[29] M. E. Nasr, M. A. Abdel-Aty, "Analytical discussion for the mixed integral equations", J. of Fixed Point Theory Appl., **20** (3), (2018). https://doi.org/10.1007/s11784-018-0589-3

[30] A. Palamora, "Product integration for Volterra integral equations of the second kind with weakly singular kernels", Math. Comp., **65** (215), 1201 – 1212 (1996).

[31] G. Y. Popov, Contact Problems for a Linearly Deformable Functions, Kiev., Odessa (1982).

[32] J. Saberi–Nadjafi, A. Ghorbani, "He's homotopy perturbation method: an effective tool for solving nonlinear integral and integro-differential equations", Comput. Math. Appl., **58** (11–12), 2379 – 2390 (2009). https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.03.032

[33] V. V. Ter–Avetisyan, "On dual integral equations in the semiconservative case", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **47** (2), 62 – 69 (2012). https://doi.org/10.3103/S1068362312020021

[34] S. Yüzbaşl, N. Şahin, M. Sezer, "Bessel polynomial solutions of high-order linear Volterra integro–differential equations", Comput. Math. Appl., **62** (4), 1940 – 1956 (2011). https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.06.038

Поступила 01 октября 2020

После доработки 19 января 2021

Принята к публикации 14 февраля 2021

Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 1, 2022, стр. 19 – 34

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ n-КРУЧЕНЫХ ГРУПП

В. С. АТАБЕКЯН, Г. Г. ГЕВОРГЯН

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.1-19-34

Ереванский государственный университет [1]
E-mails: *avarujan@ysu.am; grigor.gevorgyan@ysumail.am*

Посвящается 90-летию Сергея Ивановича Адяна

Аннотация. В работе для n-крученых групп нечетного периода $n \geq 1003$ строится некоторая модификация метода, который был придуман С. И. Адяном для положительного решения известной проблемы о существовании некоммутативных аналогов аддитивной группы рациональных чисел с любым конечным числом порождающих, и с ее помощью доказывается, что любая m-порожденная абелева группа D может быть вложена в качестве центра в некоторую группу A так, что фактор группа A/D изоморфна заданной n-крученой группе с не менее чем m независимыми определяющими соотношениями. В качестве приложения доказывается, что каждая конечная подгруппа любой n-крученой группы является циклической, что обобщает аналогичный результат, доказанный ранее С. И .Адяном для свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 665$. Заметим, что множество неизоморфных s-порожденных n-крученых групп континуально для фиксированного $s > 1$ и любого нечетного $n \geq 1003$.

MSC2010 number: 20E22; 20F50.

Ключевые слова: центральное расширение, n-крученая группа; бернсайдова группа; периодическая группа; конечная подгруппа.

1. Введение

Если в группе G выполнено тождество $x^n = 1$, то говорят, что G является периодической группой экспоненты n, или, что G – n-периодическая группа. Все подобные группы составляют многообразие. Свободная группа ранга m этого многообразия обозначается через $B(m, n)$. Одна из самых известных проблем алгебры и теории групп (поставленный У.Бернсайдом в 1902 г.) имеет простую формулировку: *конечна ли всякая конечно порожденная группа $B(m, n)$*? В настоящее время свободные группы $B(m, n)$ называют также свободными бернсайдовыми группами в честь У. Бернсайда.

[1]Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке КН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместой научной программы 20RF-152 и 20-51-05010 соответственно.

Отрицательное решение проблемы Бернсайда было получено в классической серии работ С. И. Адяна и П. С. Новикова. Несколько лет позже С. И. Адян в монографии [2] модифицировал и усилил построенную теорию и доказал свою знаменитую теорему: *для всех нечетных* $n \geq 665$ *и конечных* $m > 1$ *группы* $B(m, n)$ *бесконечны.* Помимо исследования групп $B(m, n)$, в монографии [2] построены и изучены ряд других групп имеющих новые непривычные свойства. Конструкции и идеи построения этих групп стали основой для решения целой серии хорошо известных старых и трудных проблем теории групп. Первая важная серия групп, построенных в [2] с помощью порождающих и определяющих соотношений, обозначена через $B(m, n, \alpha)$, где m – число порождающих группы, $n \geq 665$ – произвольное нечетное число, а α – натуральный параметр. В [2] доказано, что свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ является прямым пределом по α групп $B(m, n, \alpha)$.

Следующий важный класс связан с известной проблемой конечного базиса теории групп, которая была поставлена Б. Нейманом в 1937 г. В [2] (см. также [3]) доказано, что при любом нечетном $n \geq 1003$ следующее семейство тождеств от двух переменных

$$\{(x^{pn}y^{pn}x^{-pn}y^{-pn})^n = 1\},$$

где параметр p пробегает все простые числа, является неприводимым, т.е. ни одно из этих тождеств не является следствием остальных. Отсюда следует, что для любого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум различных многообразий $\mathcal{A}_n(\Pi)$ соответствующих различным множествам простых чисел Π. При этом, для каждого фиксированного значения $m > 1$ существует *континуум* неизоморфных групп $\Gamma(m, n, \Pi)$, где $\Gamma(m, n, \Pi)$ – относительно свободная группа ранга m многообразия $\mathcal{A}_n(\Pi)$.

Далее, в работе [4] (см. также [5]) было показано, что если группа G не содержит инволюций и задана конечным числом определяющих соотношений вида A^{n_i}, $i = 1, 2, ..., k$, где все показатели n_i делятся на фиксированное нечетное число $n \geq 665$, то в ней разрешимы проблема распознавания равенства слов и проблема сопряженности.

Любая из приведенных выше групп обладает следующими двумя свойствами: 1. группа имеет систему определяющих соотношений вида $A^n = 1$ для некоторых элементов A; 2. каждый элемент a группы, имеющий конечный порядок, удовлетворяет соотношению $a^n = 1$.

Мы приходим к следующему естественному определению. Пусть G – группа, заданная системой порождающих X и $\mathcal{P}$ – множество всех ее элементов конечного порядка записанных в порождающих X, а $n > 1$ – фиксированное натуральное число.

Определение 1.1. Скажем, что группа G имеет n-кручение, или G – n-крученая группа, если она может быть задана следующим образом:

$$G = \langle X \mid R^n = 1,\ R \in \mathcal{P} \rangle, \tag{1.1}$$

Циклическая группа порядка n и любая абсолютно свободная группа являются n-кручеными группами для произвольного натурального n. А. Каррас, В. Магнус и Д. Солитэр в [6] доказали, что в группе $G = \langle X | A^n = 1 \rangle$, где A – простое слово (т.е. слово не являющееся собственной степенью другого слова), элемент A имеет порядок n в G, а каждый элемент конечного порядка в G сопряжен с некоторой степенью элемента A. Помимо [2] – [7], в еще одной работе [8] С. И. Адян исследовал свободные группы многообразия, удовлетворяющего тождеству $[x, y]^n = 1$, доказав, что коммутанты этих групп не являются периодическими группами при нечетных $n > 1001$ (решение проблемы И. Макдональда). На основании работы [8] нетрудно вывести, что эти свободные группы тоже являются n-кручеными группами. В работе [9] 2019 г. доказано, что n-периодическое произведение любого семейства n-крученых групп является n-крученой группой для любого нечетного $n \geq 665$. Напомним, что n-периодические произведения групп были введены С. И. Адяном в 1976 году в [10]. Легко убедится, что свободные группы любого многообразия вида $\mathcal{B}_n\mathcal{U}$, где $\mathcal{B}_n$ – бернсайдово многообразие, а $\mathcal{U}$ – многообразие, свободные группы которой не имеют кручение, тоже являются n-крученными группами. Некоторые группы, которые, по сути, являются n-кручеными, были построены и изучены также в работах А. Ю. Ольшанского, С. В. Иванова, И. Г. Лысенка и других авторов (см., например, [11] – [20]).

Из определения n-крученой группы G непосредственно следует, что тождественное на порождающих X отображение из G в $B(X, n)$ продолжается до сюръективного гомоморфизма, где $B(X, n)$ свободная бернсайдова группа периода n с одинаковой с G системой порождающих X. В частности, любая нециклическая n-крученая группа бесконечна, если n имеет нечетный делитель $k \geq 665$ или делитель вида $k = 16m \geq 8000$ в силу вышеуказанной теоремы С. И. Адяна и теоремы И. Г. Лысенка [13] (см. также [12]).

В работе [9] показано, что при нечетных $n \geq 665$ для каждой n-крученой группы можно построить теорию, аналогичную теории построенной в монографии [2], что позволяет n-крученые группы исследовать методами развитыми в [2] и изучить их ключевые свойства. В частности, в [9] доказано, что любая n-крученая группа может быть задана с помощью некоторой независимой системы определяющих соотношений вида $A^n = 1$ для некоторых слов A (см. (2.6) ниже). Такое представление n-крученой группы мы будем называть **представлением Адяна**.

В совместной работе [21] была построена некоторая модификация метода, который был использован С. И. Адяном (см. [2], [22]) для положительного решения известной проблемы П. Г. Конторовича о существовании некоммутативных аналогов аддитивной группы рациональных чисел с любым конечным числом порождающих. Было показано, что любая счетная абелева группа D может быть вербально вложена в качестве центра в некоторую m-порожденную группу A так, что фактор группа A/D будет изоморфна свободной бернсайдовой группе $B(m, n)$. Мы покажем, что на самом деле аналогичную модификацию можно построить для n-крученых групп. В продолжении работы мы будем предполагать, что $n \geq 1003$ – произвольное фиксированное нечетное число.

Теорема 1.1. *Любая m-порожденная (m может быть и бесконечной) абелева группа D может быть вложена в качестве центра в некоторую группу A_D так, что фактор группа A_D/D будет изоморфна заданной n-крученой группе с представлением Адяна* (2.6)*, в которой не менее чем m определяющих соотношений.*

С помощью теоремы 1.1 мы докажем

Теорема 1.2. *Любая конечная подгруппа каждой n-крученой группы – циклическая.*

Первыми примерами неабелевых периодических групп, все конечные подгруппы которых циклические, были свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ (см. теорему VII.1.8 из [2]). По словам С. И. Адяна, именно эти примеры явились поводом для постановки известного вопроса А. Тарского о существовании так называемого "монстра Тарского": существует ли бесконечная группа периода n, все собственные подгруппы которой циклические?

В дальнейшем мы неоднократно будем ссылаться на монографию [2]. При ссылках на утверждения из [2] мы используем принятые в ней стандартные обозначения и систему ссылок. Например, II.5.3 [2] означает пункт 3 параграфа 5 главы II монографии [2].

В следующем параграфе мы построим так называемое представление Адяна для заданной n-крученой группы. В параграфе 3 будут построены специальные центральные расщирения n-крученых групп. На основе этих построений в параграфах 4 и 5 докажем теоремы 1.1 и 1.2 соответственно.

2. Представления Адяна для n-крученых групп

Пусть задана произвольная n-крученая группа G с представлением (1.1). Для каждой такой группы индукцией по натуральному параметру α в [9] построено некоторое представление с помощью порождающих X и новой системы определяющих соотношений $\{A^n = 1; A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha\}$. Коротко изложим построенную в [9] систему понятий, используя заданное множество слов $\mathcal{P}$ из представления (1.1).

Прежде всего, можно считать, что все слова $R \in \mathcal{P}$ в представлении (1.1) являются циклически несократимыми и простыми, т.е. ни одно слово R не является собственной степенью какого-либо слова. Действительно, если $R_1^k = R \in \mathcal{P}$, то элемент R_1 в G имеет конченый порядок, и так как G является n-крученой группой, то $R_1^n = 1$ в G. Тогда вместо соотношений $R^n = 1$ и $R_1^n = 1$ достаточно взять одно соотношение $R_1^n = 1$.

Для ранга 0 все понятия из I.4.1 [2] остаются без изменений. В частности, все несократимые слова называются приведенными в ранге 0, а всякое циклически несократимое слово есть период ранга 1.

Все слова $R \in \mathcal{P}$ являются *минимальными* периодами ранга 1 в силу их циклически несократимости и простоты (см. определение I.4.9 [2]). Среди всех приведенных в ранге 0 слов (множество которых обозначается через $\mathcal{R}_0$) выделим все *элементарные периоды* ранга 1 согласно определению I.4.10 из [2]. Элементарный период E ранга 1 назовем *отмеченным* (в ранге 0), если какой либо циклический сдвиг слова E или его обратного принадлежит множеству $\mathcal{P}$. В противном случае элементарный период ранга 1 назовем *неотмеченным.* Затем мы введем повороты ранга 1 для всех периодических слов, периоды которых отмеченные в ранге 0 элементарные периоды ранга 1. Эти повороты будут иметь обычную форму:

$$PA^tA_1Q \to P(A^{-1})^{n-t-1}A_2^{-1}Q, \tag{2.1}$$

где A или A^{-1} есть отмеченный элементарный период ранга 1 или некоторый его циклический сдвиг, $A \equiv A_1A_2$ и слова A^tA_1 и $(A^{-1})^{n-t-1}A_2^{-1}$ содержат не менее $p = 9$ участков, т.е. являются p-степенями.

Естественным образом мы определяем *реальные повороты* ранга 1. На базе реальных поворотов определяется понятие *ядра* ранга 1 для слов $W \in \mathcal{N}_1$, где множество слов $\mathcal{N}_1$ определяется согласно I.4.21 из [2]. Далее согласно I.4.26 из [2] мы определяем множества $\mathcal{R}_1, \mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1$, отношение эквивалентности ранга 1, обозначаемое через $\overset{1}{\sim}$, а также все остальные понятия ранга 1. Доказательства всех необходимых свойств введенных в §4 главы I монографии [2] понятий ранга 1 проходят без изменений. Новым является только ограничение класса элементарных слов отмеченными элементарными словами ранга 1. Наконец, для любых слов $B, C \in \mathcal{R}_1$ определим бинарную *операцию* $[B, C]_1$ *смыкания* ранга 1 по аналогии определения I.4.36 [2]:

$$[B, C]_1 = PQ \leftrightarrow \exists T(B \overset{1}{\sim} PT \ \& \ C \overset{1}{\sim} T^{-1}Q \ \& \ PQ \in \mathcal{R}_1).$$

Далее совместной индукцией по рангу α все введенные понятия определяются для всех натуральных рангов. Пусть *отмеченные* периоды ранга α и аналоги всех понятий, которые были определены в §4 главы I моногарфии [2], уже введены для всех рангов $\leq \alpha$. Определим их в ранге $\alpha + 1$.

Если $W \in \mathcal{R}_0$ и $W \equiv x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, где $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ принадлежат множеству порождающих X (знак $\equiv$ означает графическое равенство), то через $[W]_\alpha$ обозначим результат следующей последовательности смыканий ранга α:

$$[[\cdots[[x_{i_1}, x_{i_2}]_\alpha], \cdots]_\alpha, x_{i_k}]_\alpha.$$

Таким образом,

$$[W]_\alpha \equiv [[\cdots[[x_{i_1}, x_{i_2}]_\alpha, \cdots]_\alpha, x_{i_k}]_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha. \tag{2.2}$$

Элементарный период A ранга $\alpha + 1$ назовем *отмеченным элементарным периодом* (в ранге α), если можно указать такое слово B и такое слово $R \in \mathcal{P}$, что

$$[R]_\alpha \overset{\alpha}{\sim} [BA^jB^{-1}]_\alpha \tag{2.3}$$

для некоторого целого j. В противном случае элементарный период ранга $\alpha + 1$ назовем *неотмеченным элементарным периодом ранга* $\alpha + 1$. Легко проверить, что при $\alpha = 1$ определение отмеченного элементарного периода ранга α совпадает с приведенным выше определением отмеченного элементарного периода ранга 1, так как если $BE^jB^{-1} \overset{0}{\sim} R \in \mathcal{P}$, то $BE^jB^{-1} = R$ в свободной группе. Тогда $|j| = 1$, поскольку слово R является простым. Следовательно один из слов E, E^{-1} является циклическим сдвигом слова R в силу циклической несократимости элементов из $\mathcal{P}$ и элементарного периода E.

Используя понятие отмеченного элементарного периода мы по аналогии с §2 главы VII монографии [2] вносим некоторые изменения в определениях некоторых понятий из §4 главы I монографии [2]. Именно, во всех упоминаниях о нормированных вхождениях элементарных слов ранга α будем предполагать, что имеются ввиду отмеченные элементарные периоды ранга α. Все остальные определения формально остаются без изменения. Все утверждения глав II-V монографии [2], а также все утверждения из пунктов 2.3, 2.4 и 2.7-2.10 главы VII [2] и лемма 2.6 из работы [23] их доказательства формально повторяются и остаются в силе с учетом поправки о понятии отмеченного элементарного периода в приведенном выше новом смысле. Подчеркнем, в частности, что согласно леммы V.1.8 [2] бинарная операция смыкания ранга α является ассоциативной операцией при любом $\alpha \geq 0$.

На основании введенных понятий мы построим новое представление для группы G. Пусть $\Gamma_G(X, 0)$ есть свободная группа с образующими X. Сначала построим вспомогательные группы $\Gamma_G(X, \alpha)$, которые строятся индукцией по рангу α (по аналогии определения VI.2.2 групп $B(m, n, \alpha)$ из монографии [2]).

Предположим $\alpha > 0$ и группы $\Gamma_G(X, \gamma)$ уже построены для всех $\gamma \leq \alpha - 1$. Через $\mathcal{E}_\alpha$ обозначим множество, состоящее из таких отмеченных элементарных периодов A ранга α, чтобы выполнялись условия:

(a) для всякого отмеченного элементарного периода E ранга α имеется одно и только одно слово $A \in \mathcal{E}_\alpha$ такое, что период E сопряжен в группе $\Gamma_G(X, \alpha - 1)$ или с периодом A, или с A^{-1}.

(b) если $A \in \mathcal{E}_\alpha$, то для некоторых слов P и Q имеет место включение $PA^nQ \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$.

Замечание. *Существование элементарных периодов A с указанным выше свойствами* (a) *и* (b) *следует из леммы* 2.6 (см. ниже).

Через $\Gamma_G(X, \alpha)$ обозначим группу с теми же образующими X и системой определяющих соотношений $A^n = 1$, где $A \in \bigcup_{\alpha=1}^n \mathcal{E}_\alpha$:

$$\Gamma_G(X, \alpha) = \langle X \mid A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{E}_\alpha \rangle.$$

Далее, обозначим

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha. \tag{2.4}$$

Предельную группу обозначим через $\Gamma_G(X)$. Она порождается образующими X и имеет систему определяющих соотношений $A^n = 1$, где $A \in \mathcal{E}$:

$$\Gamma_G(X) = \langle X \mid A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \rangle. \tag{2.5}$$

В [9] доказано

Лемма 2.1. *Группы G и $\Gamma_G(X)$ совпадают:*

$$G = \langle X \mid R^n = 1,\ R \in \mathcal{P} \rangle = \langle X \mid A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \rangle = \Gamma_G(X). \tag{2.6}$$

Как отметили выше, представление (2.6) мы называем представлением Адяна группы G.

В [9] обоснованы также следующие важные леммы.

Лемма 2.2. *Для любых двух слов $C, D \in \mathcal{R}_\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ выполнено соотношение*

$$C \overset{\alpha}{\sim} D \ \Leftrightarrow C = D \text{ в } \Gamma_G(X, \alpha).$$

Лемма 2.3. *Для любого ранга α и любого слова C в $\Gamma_G(X, \alpha)$ имеет место равенство*

$$C = [C]_\alpha.$$

Лемма 2.4. *Для любого ранга α и любого слова C можно указать такое слово $D \in \mathcal{K}_\alpha$, что $C = D$ в $\Gamma_G(X, \alpha)$. Если $\alpha \geq \partial(C)$, то такое D можно указать в $\mathcal{A}_{\alpha+1}$.*

Лемма 2.5. *Элементарный период A является отмеченным элементарным периодом ранга α тогда и только тогда, когда можно указать такое слово $R \in \mathcal{P}$ и такое слово B, что*

$$R = BA^jB^{-1}$$

в группе $\Gamma_G(X, \alpha - 1)$ для некоторого целого j.

Лемма 2.6. *Каждый элементарный период E ранга $\alpha \geq 1$ сопряжен в группе $\Gamma_G(X, \alpha - 1)$ некоторому элементарному периоду A ранга α такому, что для некоторых слов P и Q имеет место включение $PA^nQ \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$. При этом, если E – отмеченный (неотмеченный) элементарный период ранга α, то и A является отмеченным (неотмеченным) элементарным периодом ранга α.*

Лемма 2.7. *Если E есть отмеченный элементарный период некоторого ранга $\gamma \geq 1$ (или если $E \in \mathcal{E}_\gamma$), то E имеет порядок n в группе $\Gamma_G(X, \gamma)$ (и в группе $\Gamma_G(X)$).*

Лемма 2.8. *Если E есть неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ, то E имеет бесконечный порядок в $\Gamma_G(X)$.*

Лемма 2.9. *Для любого слова C, которое не равно 1 в группе $\Gamma_G(X)$, можно указать такие слова T и E, что $C = TE^rT^{-1}$ в $\Gamma_G(X)$ при некотором целом r, где либо $E \in \mathcal{E}$, либо E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.*

3. Центральные расширения

Первые примеры *неабелевых* групп без кручения, в которых любые две неединичные подгруппы имеют нетривиальное пересечение (вопрос 1.63 из Коуровской тетради), были построены С. И. Адяном в работе [22] (см. также [2], гл. VII). Построенные С. И. Адяном неабелевы аналоги группы рациональных чисел, обозначаемые в монографии [2] через $A(m, n)$, представляют собой центральные расширения свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ с бесконечным центром, порождаемым новым образующим элементом d бесконечного порядка. Задание группы $A(m, n)$ порождающими и определяющими соотношениями получается из задания группы $B(m, n)$ с помощью построенной в [2, VI.2.1] *независимой* системы определяющих соотношений $\{A^n = 1 | \, A \in \mathcal{E}\}$ в результате добавления к ее алфавиту новой буквы d, которая коммутирует со всеми порождающими, и заменой каждого соотношения $A^n = 1$ на $A^n = d$. Если к определяющим соотношениям группы $A(m, n)$ добавить еще одно соотношение $d^k = 1$, то в полученной группе $A'(m, n)$ центр, порождаемый элементом d, будет иметь порядок k. Группа $A'(m, n)$ обладает интересным свойством: группа $A'(m, n)$ допускает только дискретную топологию. Вопрос о существовании нетопологизируемой счетной группы был поставлен А. А. Марковым и оставался открытым несколько десятилетий. Позже в работе [21] была предложена некоторая модификация определения группы $A(m,n)$, что позволило с помощью некоторой модификации в изложенном в монографии [2] методе исследования этих групп для произвольной счетной абелевой группы $\mathcal{D}$ построить группу, центр которой совпадает с $\mathcal{D}$, а фактор группа по подгруппе $\mathcal{D}$ изоморфна свободной бернсайдовой группе $B(m,n)$. Определение n-крученых групп позволяет эту модификацию продвинуть дальше и для произвольной m-порожденной абелевой группы $\mathcal{D}$ построить группу, центр которой совпадает с $\mathcal{D}$, а фактор группа по подгруппе $\mathcal{D}$ изоморфна заданной n-крученой группе, в представлении Адяна которой не менее m определяющих соотношений. Ниже мы построим указанные центральные расширения.

Для определенности фиксируем конечный алфавит $X = \{a_1, ..., a_m, a_1^{-1}, ..., a_m^{-1}\}$, $m > 1$, и рассмотрим в этом алфавите множество элементарных слов (2.4) для заданной n-крученой группы G (1.1). Множество $\mathcal{E}$ не более чем счетно. Фиксируем некоторую нумерацию и пусть $\mathcal{E} = \{A_j | j \in \mathbb{J}\}$ (где $\mathbb{J}$ – или множество натуральных чисел, или его начальный отрезок).

Фиксируем также произвольную не более чем счетную абелеву группу $\mathcal{D}$, заданную порождающими и определяющими соотношениями:

$$\mathcal{D} = \langle d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots \mid r = 1,\, r \in \mathcal{R}\rangle, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{R}$ – некоторое множество слов в групповом алфавите $d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots$ По условию теоремы 1.1 имеет место неравенство $|\mathbb{J}| \geq |\{d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots\}|$.

Через $A_{\mathcal{D}}(G)$ обозначим группу, заданную системой образующих двух видов

$$a_1, a_2, ..., a_m \tag{3.2}$$

и

$$d_1, d_2, ..., d_i, ... \tag{3.3}$$

и системой определяющих соотношений трех сортов:

$$r = 1, \text{ для всех } r \in \mathcal{R}, \tag{3.4}$$

$$a_i d_j = d_j a_i, \tag{3.5}$$

$$A_j^n = d_j \tag{3.6}$$

для всех $i = 1, 2, ..., m$, $j \in \mathbb{J}$ и $A_j \in \mathcal{E}$. При этом, если $|\mathbb{J}| > |\{d_1, d_2, \dots, d_i, \dots\}| = k$, то для всех $j > k$ определяем

$$A_j^n = d_k. \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.6) вытекает, что группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ являются m-порожденными группами с порождающими (3.2). Для групп $A_{\mathcal{D}}(G)$ справедлива следующая основная теорема.

Теорема 3.1. *При любом $m > 1$ и нечетном $n \geq 1003$ и для любой абелевой группы $\mathcal{D}$ с представлением (3.1) имеют место следующие утверждения:*

1. центр группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ совпадает с $\mathcal{D}$,

2. фактор группа группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ по подгруппе $\mathcal{D}$ есть заданная n-крученая группа G.

Замечание. Обращаем внимание читателя на определенную свободу при построении групп $A_{\mathcal{D}}(G)$. Во первых, порядок нумерации элементарных периодов $A_j \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$ – свободный. Во вторых, мы имеем свободу и при выборе задания (3.1) абелевой группы $\mathcal{D}$. Таким образом, в силу определяющих соотношений вида (3.6), для фиксированной группы $\mathcal{D}$ мы можем получить разные группы $A_{\mathcal{D}}(G)$. При этом для каждой из них справедлива теорема 3.1.

4. Доказательство теоремы 1.1

Для обоснования теоремы 1.1, очевидно, достаточно доказать теорему 3.1.

Для слов в алфавите (3.2)–(3.3) группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ мы построим обобщенные аналоги понятий, которые были построены и изучены в главах I-V монографии [2].

Множество всех слов вида Qd, где Q – слово в алфавите (3.2), принадлежащее множеству $\mathcal{R}_\alpha$, а $d \in \mathcal{D}$, где группа D имеет задание (3.1), обозначим через $\mathcal{R}_\alpha^D$. Аналогично, через $\mathcal{N}_\alpha^D$, $\mathcal{P}_\alpha^D$, $\mathcal{K}_\alpha^D$, $\mathcal{L}_\alpha^D$, $\mathcal{M}_\alpha^D$, $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^D$, $\mathcal{A}_\alpha^D$ обозначим множество слов вида Qd, где $d \in \mathcal{D}$, а Q принадлежит, соответственно, множеству $\mathcal{N}_\alpha$, $\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{K}_\alpha$, $\mathcal{L}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha$, $\overline{\mathcal{M}}_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha$.

Мы будем рассматривать только такие вхождения в слова Qd, основы которых входят в Q, т.е. являются словами в алфавите (3.2). При этом если V есть вхождение в слово Q, то через Vd будем обозначать вхождение, получающееся в результате приписывания слова d к вхождению V справа.

Понятия периодического, целого, полуцелого и элементарного слова ранга α, порождающего вхождения ранга α и опорного ядра ранга α и все понятия, которые были определены в [2, гл. I, пункты 4.3-4.10], определяются точно так, как они определились выше в параграфе 2 для заданной n-крученой группы G.

С учетом этих изменений далее мы буквально повторим параграф 3 работы [9]. В частности, совместной индукцией по рангу α определим на множестве $\mathcal{R}_\alpha^\mathcal{D}$ отношение $\overset{\alpha}{\approx}$ обобщенной эквивалентности ранга α и операцию обобщенного смыкания $[X,Y]_\alpha^\mathcal{D}$ ранга α. При этом, аналогично соотношениям (12) и (13) из [9], доказывается, что отношение $\overset{\alpha}{\approx}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$P \overset{\alpha}{\approx} Q \Leftrightarrow \exists d \forall d' \, (Pd' \overset{\alpha}{\approx} Q(dd')), \tag{4.1}$$

$$Qd \overset{\alpha}{\approx} Qd' \Rightarrow d = d' \text{ в } \mathcal{D}, \tag{4.2}$$

где P, Q – слова в алфавите (3.2), $d, d' \in \mathcal{D}$, (dd') – произведение элементов d и d' в абелевой группе $\mathcal{D}$.

На этом основании построим вспомогательную группу $\Gamma^\mathcal{D}(G,\alpha)$, элементами которой являются классы эквивалентностей, на которые множество $\mathcal{R}_\alpha^\mathcal{D}$ разбивается отношением эквивалентности $\overset{\alpha}{\approx}$, а групповая операция совпадает с операцией смыкания ранга α. По аналогии с пунктами 1.4, 1.5 главы VII работы [2] проверяется, что $\Gamma^\mathcal{D}(G,\alpha)$ относительно указанной операции является группой. Опишем эту группу с помощью порождающих и определяющих соотношений. Для этого через $A_\mathcal{D}(G,\alpha)$ обозначим группу с порождающими $a_1, a_2 ..., a_m, d_1, d_2, ..., d_i, ...$ и системой определяющих соотношений видов (3.4), (3.5) и вида (3.6) для всех тех $j \in \mathbb{N}$, для которых $A_j \in \bigcup\limits_{t=1}^{\alpha} \mathcal{E}_t$.

Лемма 4.1. *Для любых слов $X, Y \in \mathcal{R}_\alpha^\mathcal{D}$ выполнены эквивалентности*

$$X = Y \quad \textit{в} \quad A_\mathcal{D}(G,\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad X \overset{\alpha}{\approx} Y \quad \Leftrightarrow \quad X = Y \quad \textit{в} \quad \Gamma^\mathcal{D}(G,\alpha).$$

Эта лемма доказывается аналогично лемме 3 работы [9]. Нужно лишь в ее доказательстве группу $A_\mathcal{D}(m,n,\alpha)$ заменить на $A_\mathcal{D}(G,\alpha)$, а группу $\Gamma^\mathcal{D}(m,n,\alpha)$ заменить на $\Gamma^\mathcal{D}(G,\alpha)$.
Обозначим через $\mathcal{Z}$ подгруппу группы $A_\mathcal{D}(G)$, порожденную элементами $\{d_j | j \in \mathbb{N}\}$.

Лемма 4.2. *Подгруппа $\mathcal{Z}$ совпадает с центром группы $A_\mathcal{D}(G)$ и фактор группа $A_\mathcal{D}(G)/\mathcal{Z}$ изоморфна заданной n-крученой группе G.*

Доказательство. В силу соотношений (3.5) $\mathcal{Z}$ содержится в центре группы $A_{\mathcal{D}}(G)$. Согласно предложению 2.1 и соотношениям (3.6), (3.7) фактор группа группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ по подгруппе $\mathcal{Z}$ есть заданная n-крученая группа G. Более того, в силу следствия 1 работы [9], согласно которой центр любой нециклической n-крученой группы тривиален, группа $G = A_{\mathcal{D}}(G)/\mathcal{Z}$ имеет тривиальный центр, поэтому $\mathcal{Z}$ совпадает с центром группы $A_{\mathcal{D}}(G)$. □

Согласно лемме 4.2 подгруппа $\mathcal{Z}$, порожденная элементами $\{d_j | j \in \mathbb{N}\}$ совпадает с центром группы $A_{\mathcal{D}}(G)$, фактор группа $A_{\mathcal{D}}(G)/\mathcal{Z}$ изоморфна группе G. Поэтому теорема 3.1 будет доказана, если мы покажем, что абелева группа $\mathcal{D}$ с этими же порождающими $\{d_j | j \in \mathbb{N}\}$ вложена в группу $A_{\mathcal{D}}(G)$ и, тем самым, совпадает с $\mathcal{Z}$.

Сначала убедимся, что группа $\mathcal{D}$ вложена в группу $\Gamma^{\mathcal{D}}(G, \alpha)$ для любого ранга α. Предположим, что для некоторых элементов $d', d'' \in \mathcal{D}$ имеет место эквивалентность $d' \overset{\alpha}{\approx} d''$. Тогда $d' \overset{\gamma}{\approx} d''$ для любого ранга $\gamma \geq \alpha$, так как, по определению, $d', d'' \in \mathcal{R}_{\gamma}^{\mathcal{D}}$. Отсюда, в силу соотношения (4.2), немедленно получаем, что $d' = d''$ в абелевой группе $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{D}$ вложена в группу $\Gamma^{\mathcal{D}}(G, \gamma)$. Отсюда, в силу леммы 4.1, вытекает, что абелева группа $\mathcal{D}$ вложена в группу $A_{\mathcal{D}}(G, \gamma)$ для любого ранга $\gamma \geq \alpha$. Поскольку множество определяющих соотношений (3.4)–(3.7) группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ есть объединение множеств определяющих соотношений групп $A_{\mathcal{D}}(G, \gamma)$ для всех $\gamma \geq \alpha$, то $\mathcal{D}$ вложена и в группу $A_{\mathcal{D}}(G)$. Теорема 3.1 доказана.

5. Конечные подгруппы n-крученых групп

Докажем утверждение теоремы 1.2 о том, что любая конечная подгруппа каждой n-крученой группы – циклическая. Мы проведем рассуждения, близкие к рассуждениям доказательства теоремы 1.8 из [2] о том, что все конечные подгруппы свободной бенсайдовой группы нечетного периода $n \geq 665$ конечны.

Для заданной n-крученой группы $\Gamma(X)$ по указанной в (3.2)–(3.6) схеме построим группу $A_{\mathcal{D}}(X)$, в качестве группы $\mathcal{D}$ взяв бесконечную циклическую группу

$$\mathcal{D} = \langle d_1 \rangle.$$

В силу пункта 1 теоремы 3.1, центр этой группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $d = d_1$.

Мы утверждаем, что группа $A_{\mathfrak{D}}(X)$ не имеет кручения. Чтобы доказать это, сначала заметим, что в силу пункта 2 теоремы 3.1, всякий нетривиальный элемент a группы $A_{\mathfrak{D}}(X)$ можно представить в виде $a = xd^j$, где x есть слово в групповом алфавите X, а d порождающий элемент центра $A_{\mathfrak{D}}(X)$. Покажем, что a имеет бесконечный порядок.

Если слово x равно 1 в $\Gamma(X)$, то $x = d^i$ в $A_{\mathfrak{D}}(X)$ для некоторого целого i, поскольку $A_{\mathfrak{D}}(X)/D = \Gamma(X)$. Тогда $a = d^{j+i} \neq 1$, где d – элемент бесконечного порядка. Значит, a имеет бесконечный порядок.

Если $x \neq 1$ в $\Gamma(X)$, то в силу леммы 2.9 найдутся такие слова T и E, что $x = TE^sT^{-1}$ в группе $\Gamma(X)$ при некотором целом r, где или $E \in \mathcal{E}$, т.е., E является отмеченным элементарным периодом некоторого ранга γ, или E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ, причем слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.

В случае, когда E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$, то по лемме 2.8, элемент E, а значит и x, имеет бесконечный порядок в фактор группе $\Gamma(X)$. Тогда его прообраз a в $A_{\mathfrak{D}}(X)$ тоже имеет бесконечный порядок.

Теперь предположим, что $E \in \mathcal{E}$, т.е., что E отмеченный элементарный период некоторого ранга γ. Представим число s в виде $s = nq + r$, где $0 < r < n$ ($x \neq 1$ в $\Gamma(X)$). Используя соотношения (3.5), (3.6), получим

$$a = TE^{nq+r}T^{-1}d^j = TE^rT^{-1}d^{q+j}. \tag{5.1}$$

в $A_{\mathfrak{D}}(X)$. Поскольку d – центральный элемент, из (5.1) вытекает

$$a^n = d^{n(q+j)+r}.$$

Так как $0 < r < n$ и d порождающий элемент бесконечной циклической группы, то $a^n = d^{n(q+j)+r}$ нетривиальный элемент бесконечного порядка. Следовательно, элемент a тоже имеет бесконечный порядок. Таким образом, мы показали, что группа $A_{\mathfrak{D}}(X)$ является группой без кручения.

Покажем, что любая конечная подгруппа произвольной n-крученой группы $\Gamma(X)$ является циклической группой. Пусть конечная подгруппа K группы $\Gamma(X)$ порождается элементами $g_1, g_2, ..., g_k$. Рассмотрим порожденную элементами g_1, g_2, ..., g_k, d подгруппу K_1 группы $A_{\mathfrak{D}}(X)$, где $A_{\mathfrak{D}}(X)$ – построенное выше центральное расширение группы $\Gamma(X)$ с помощью бесконечной циклической группы $\langle d\rangle$. Элемент d содержится в центре группы K_1, поэтому фактор группа группы

K_1 по своему центру конечна. По известной теореме Бэра (см. [24]) из конечности фактор группы по центру следует конечность коммутанта. Следовательно, коммутант группы K_1 конечен. В силу доказанному выше, группа $A_{\mathfrak{D}}(X)$ является группой без кручения и в ней конечна только единичная подгруппа. Значит коммутант группы K_1 тривиален, т.е. K_1 является абелевой группой. Тогда образ K в $\Gamma(X)$ группы K_1 тоже является абелевой группой. Согласно следствию 2 работы [9] всякая абелева подгруппа группы $\Gamma(X)$ – циклическая группа. Значит, K – циклическая подгруппа. Теорема 1.2 доказана.

Abstract. For n-torsion groups of odd period $n \geq 1003$ we construct a certain modification of the method invented by S. I. Adyan to positively solve the well-known problem of the existence of non-commutative analogs of the additive group of rational numbers with a finite number of generators. Using this modification we prove that any m-generated abelian group D can be embedded as a center into some group A so that the quotient group A/D is isomorphic to a given n-torsion group with at least m independent defining relations. As an application, it is proved that every finite subgroup of any n-torsion group is cyclic, which generalizes a similar result proved earlier by S. I. Adyan for free Burnside groups of odd period $n \geq 665$. Note that the set of non-isomorphic s-generated n-torsion groups has a cardinality of the continuum for fixed $s > 1$ and any odd $n \geq 1003$.

Список литературы

[1] S. I. Adian, “The Burnside problem and related topics”, Russian Math. Surveys, **65**:5, 805 – 855 (2010).
[2] S. I. Adian, The Burnside Problem and Identities in Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **95**, Springer-Verlag, Berlin (1979).
[3] S. I. Adian, “Infinite irreducible systems of group identities”, Math. USSR-Izv., **4**:4, 721 – 739 (1970).
[4] S. I. Adian, “On the word problem for groups defined by periodic relations”, Burnside groups, Proc. Workshop, Univ. Bielefeld (1977), Lecture Notes in Math., 806, Springer, Berlin, 41 – 46 (1980).
[5] S. I. Adian, “Groups with periodic defining relations”, Mat. Zametki, **83**:3, 323 -– 332; Math. Notes, **83**:3, 293 — 300 (2008).
[6] A. Karrass, W. Magnus, D. Solitar, “Elements of finite order in groups with a single defining relation”, Comm. Pure Appl. Math. **13**, 57 – 66 (1960).
[7] S. I. Adian, “New estimates of odd exponents of infinite Burnside groups”, Proc. Steklov Inst. Math., **289**, 33 – 71 (2015).
[8] S. I. Adyan, “Groups with periodic commutators”, Dokl. Math., **62**:2, 174 -– 176 (2000).
[9] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “n-torsion groups”, J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci., **54**:6, 319 – 327 (2019).
[10] S. I. Adian, “Periodic products of groups”, Number theory, mathematical analysis and their applications, Proc. Steklov Inst. Math., **142**, 1 – 19 (1979).

[11] A. Yu. Olshanskii, The Geometry of Defning Relations in Groups, Kluwer Academic Publishers (1991).
[12] S. V. Ivanov, "The free Burnside groups of sufficiently large exponents", Int. J. of Algebra and Computation, **4**, 1 – 307 (1994).
[13] I. G. Lysenok, "Infinite Burnside groups of even exponent", Izv. Math., **60**:3, 453 – 654 (1996).
[14] S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii, "On finite and locally finite subgroups of free Burnside groups of large even exponents", J. Algebra, **195**:1, 241 – 284 (1997).
[15] A. Yu. Ol'shanskii, "Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups", Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John's, NF, 2001), Math. Appl., **555**, Kluwer, Dordrecht 179 – 187 (2003).
[16] V. L. Shirvanjan, "Embedding the group $B(\infty, n)$ in the group $B(2, n)$", Math. USSR-Izv., **10**:1, 181 -– 199 (1976).
[17] V. S. Atabekian, "On subgroups of free Burnside groups of odd exponent n>1003", Izv. Math., **73**:5, 861 – 892 (2009).
[18] V. S. Atabekyan, "Normal automorphisms of free Burnside groups", Izv. Math., **75**:2, 223 – 237 (2011).
[19] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, "On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian", Izv. Math., **81**:5, 889 – 900 (2017).
[20] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, "Normal automorphisms of free groups of infinitely based varieties", Math. Notes, **108**:2, 149 -– 154 (2020).
[21] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, "Central extensions of free periodic groups", Sb. Math., **209**:12, 1677 – 1689 (2018).
[22] S. I. Adian, "On some torsion-free groups", Math. USSR-Izv., **5**:3, 475 – 484 (1971).
[23] S. I. Adian, I. G. Lysenok, "On groups all of whose proper subgroups of which are finite cyclic", Math. USSR-Izv., **39**:2, 905 – 957 (1992).
[24] R. Baer, "Endlichkeitskriterien fur Kommutatorgruppen", Math. Aim. **124**, 161 – 177 (1952).

Поступила 27 марта 2021

После доработки 27 марта 2021

Принята к публикации 20 сентября 2021

Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 1, 2022, стр. 35 – 44

НЕРАВЕНСТВА ТИПА МАРЦИНКЕВИЧА-ЗИГМУНДА В ВЕЩЕСТВЕННОМ ШАРЕ

К. АВЕТИСЯН

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.1-35-44

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *avetkaren@ysu.am*

Аннотация. Установлены некоторые обобщения классического неравенства Марцинкевича–Зигмунда о мажорации g-функции Литтлвуда-Пэли для гармонических функций в единичном шаре пространства $\mathbb{R}^n$.

MSC2010 number: 31B05; 42B25.

Ключевые слова: g-функции Литтлвуда-Пэли; интеграл площадей Лузина; неравенства Литтлвуда-Пэли; некасательные допустимые области; конус Лузина.

1. Введение

Исследования в теории рядов Фурье и граничного поведения голоморфных функций в 1930-х годах привели Литтлвуда и Пэли [1] к так называемой g-функции, носящей их имя:

$$g(f)(\theta) := \left(\int_0^1 (1-r)\,|f'(re^{i\theta})|^2\, dr \right)^{1/2}, \qquad \theta \in (-\pi,\pi), \tag{1.1}$$

где $f(z)$ – голоморфная функция в единичном круге $\mathbb{D} = B_2$. В этом направлении один из основных результатов Литтлвуда и Пэли – это эквивалентность L^p-норм функций $g(f)$ и f на единичной окружности при $p > 1$ (см. [1], [2, Гл.14]). Доказательства существенно основаны на поточечных оценках g-функции. В частности, Марцинкевич и Зигмунд [3] показали, что g-функция мажорируется интегралом площадей (или функцией) Лузина S_δ,

$$g(f)(\theta) \le C_\delta\, S_\delta(f)(\theta) := C_\delta \left(\iint_{\Omega_\delta(\theta)} |f'(z)|^2\, dx\,dy \right)^{1/2}, \qquad \theta \in (-\pi,\pi), \tag{1.2}$$

где для параметра δ, $0 < \delta < 1$, и точки $e^{i\theta}$ обозначен сектор Лузина $\Omega_\delta(\theta)$ в круге $\mathbb{D}$, т.е. область, ограниченная двумя касательными, исходящими из точки $\zeta = e^{i\theta}$ к окружности $|z| = \delta$, и наибольшей дугой окружности $|z| = \delta$ между

[1]Настоящее исследование выполнено при поддержке Центра Математических Исследований Ереванского Государственного Университета

точками касания. Подобную область называют также углом Штольца. Двойной интеграл в правой части (1.2) есть площадь образа сектора Лузина $\Omega_\delta(\theta)$ при отображении f. Этим объясняется название функции $S_\delta(f)$.

В настоящей статье мы обобщаем g-функцию Литтлвуда–Пэли и функцию Лузина по нескольким направлениям. Голоморфные функции заменяем на гармонические функции в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$, вместо интегрируемых с квадратом функций рассматриваем для них различные степенные показатели, а также берем производные и градиенты высокого порядка. Кроме того, вместо сектора (конуса) Лузина $\Omega_\delta(\theta)$ позволяем более широкий класс допустимых областей. В этом контексте различные обобщения функций Литтлвуда–Пэли и Лузина изучались в работах [4] – [8]. Мы доказываем поточечные оценки для обобщенных функций Литтлвуда–Пэли $g_{q,m}$ и Лузина $S_{\delta,q}$ с различными индексами q, $0 < q \le \infty$.

Пусть $B = B_n$ – открытый единичный шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n \ge 2$), и $S = \partial B$ – его граница, единичная сфера. Точки в $\mathbb{R}^n$ будем представлять в виде $x = r\zeta = rx'$, $|x| = r$, так что проекцию точки $x \ne 0$ на единичной сфере будем обозначать либо как $\zeta \in S$, либо $x' \in S$. Аналогично будем представлять $y = \rho\eta = \rho y'$, $|y| = \rho$, $\eta = y' \in S$. Через $B(x, s)$ обозначим открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $s > 0$, т.е. $B(x, s) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < s\}$, в частности, $B = B(0, 1)$. Символы $C(\alpha, \beta, \dots), C_\alpha$ и т.п. будут обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от указанных параметров. Дополнение множества $G \subset E$ в E обозначим как G^C_E, или кратко G^C. Множество положительных целых чисел обозначим через $\mathbb{N}$, также $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Для заданной достаточно гладкой функции $u(x)$ ее градиент $\nabla^m u$ порядка $m \in \mathbb{N}$ определяется как вектор-функция, чьи компоненты частные производные $\partial^k u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}$, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, порядка $m = |k|$, упорядоченные в некотором фиксированном порядке. Норма $\nabla^m u$ находится из равенства

$$|\nabla^m u(x)| = \left(m! \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_+, |k|=m} \frac{|\partial^k u(x)|^2}{k_1! k_2! \cdots k_n!} \right)^{1/2}.$$

2. Допустимые области

В единичном шаре определим два известных типа допустимых областей – конус Лузина $\Omega_\alpha(x')$ и некасательную допустимую область $\Gamma_\delta(x')$. Для фиксированной точки $x' \in S$ и радиуса $0 < s < 1$ определяем открытую область $\Omega_\alpha(x')$ как внутренность наименьшего выпуклого множества, содержащего точку x' и шар $B(0,s)$, см. Рисунок 1. Область $\Omega_\alpha(x')$ называется конусом Лузина с вершиной x' и раствором 2α, $0<\alpha<\pi/2$, так что $s=\sin\alpha$. Введем в рассмотрение другую, но схожую некасательную допустимую область (non-tangential approach region)

$$\Gamma_\delta(x') := \Big\{ y\in B:\ |y-x'| < \delta(1-|y|)\Big\}, \qquad \delta>1.$$

Очевидно, обе области расширяются относительно α и δ, соответственно,

$$\begin{aligned} &\Omega_{\alpha_1}(x')\subset\Omega_{\alpha_2}(x'), \qquad 0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2},\\ &\Gamma_{\delta_1}(x')\subset\Gamma_{\delta_2}(x'), \qquad 1<\delta_1<\delta_2. \end{aligned}$$

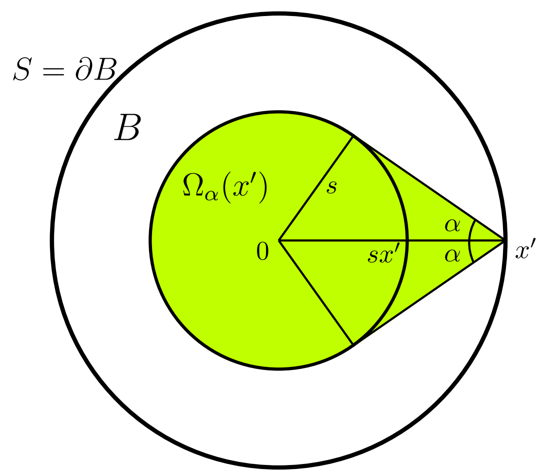


Рисунок 1.

Затененная область есть сечение конуса Лузина $\Omega_\alpha(x')$
с вершиной x', раствором 2α и $s=\sin\alpha$

Хотя конус Лузина $\Omega_\alpha(x')$ геометрически проще, чем $\Gamma_\delta(x')$, обе области имеют яйцевидную форму в B с заостренным концом на сфере S. Область $\Gamma_\delta(x')$ при $y\to x'$ асимптотически близка к конусу $\Omega_\alpha(x')$. Более того, эти два типа допустимых областей сравнимы в следующем смысле.

Теорема 2.1. *Пусть $x\in B$, $x\neq 0$ – фиксированная точка.*

(**i**) *Для любого $0<\alpha<\pi/2$ найдется постоянная $\delta>2$, зависящая только от α, такая, что*

$$\Omega_\alpha(x')\subset\Gamma_\delta(x').$$

А если $0 < \alpha < 1/3$, *то существует постоянная* $\delta_\alpha > 1$, *зависящая только от* α *и такая, что*

$$\Omega_\alpha(x') \subset \Gamma_{\delta_\alpha}(x'), \quad \text{и} \qquad \lim_{\alpha\to 0^+} \delta_\alpha = 1.$$

Постоянную δ_α *можно взять, например,* $\delta_\alpha := \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

(ii) *Для любого* $\delta > 1$ *найдется постоянная* $\beta = \beta(\delta) \in (0, \pi/2)$ *такая, что*

$$\Gamma_\delta(x') \subset \Omega_\beta(x').$$

Постоянную β *можно взять, например,* $\beta := \arccos(1/\delta)$.

Доказательство. **(i)** В общем случае $y \in \Omega_\alpha(x')$ оценка с применением теоремы косинусов дает

$$\frac{|x'-y|}{1-|y|} \le \widetilde{\delta}_\alpha := \max\left\{\frac{2}{1-\sin\alpha}, \frac{2}{\cos\alpha}\right\} = \frac{2}{1-\sin\alpha}, \qquad \widetilde{\delta}_\alpha > 2,$$

см., например, [9, p.167]. В специальном случае $0 < \alpha < 1/3$ значение постоянной $\delta = \delta_\alpha > 1$ можно взять меньше, причем $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \delta_\alpha = 1$.

Действительно, если точка $y \in \Omega_\alpha(x')$ лежит на радиусе $(0, x')$, т.е. $y = |y|x'$, то очевидно $\frac{|x'-y|}{1-|y|} = \frac{1-|y|}{1-|y|} = 1$.

Если $y \in \overline{B(0,s)}$, $s = \sin\alpha$, т.е. $|y| \le \sin\alpha$, то

$$\frac{|x'-y|}{1-|y|} \le \frac{1+|y|}{1-|y|} \le \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} =: \delta'_\alpha.$$

Если y лежит вне $\overline{B(0,\sin\alpha)}$, т.е. $y \in \Omega_\alpha(x')$ и $\sin\alpha < |y| < 1$, то теорема синусов, примененная к треугольнику с вершинами $0, x', y$, приводит к

$$\sin\angle(x,y) \le \frac{|x'-y|\sin\alpha}{|y|}, \tag{2.1}$$

где символ $\angle(x,y)$ означает угол между векторами x и y. В тождестве

$$|x'-y|^2 = \big(1-|y|\big)^2 + 4|y|\sin^2\frac{\angle(x,y)}{2} = \big(1-|y|\big)^2 + |y|\,\frac{\sin^2\angle(x,y)}{\cos^2\big(\angle(x,y)/2\big)}, \tag{2.2}$$

последний знаменатель ограничен снизу, $\cos^2\left(\frac{\angle(x,y)}{2}\right) > \frac{1}{2}\big(1+\sin\alpha\big) > \frac{1}{2}$. Это вместе с (2.1) и (2.2) дает

$$\begin{aligned}|x'-y|^2 &\le \big(1-|y|\big)^2 + 2|y|\,\sin^2\angle(x,y) \le \\ &\le \big(1-|y|\big)^2 + 2|y|\,\frac{|x'-y|^2\sin^2\alpha}{|y|^2} \le \\ &\le \big(1-|y|\big)^2 + 2\,\frac{|x'-y|^2\sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \big(1-|y|\big)^2 + 2\sin\alpha\,|x'-y|^2.\end{aligned}$$

Так как $\sin\alpha \le \alpha < 1/3$, то $\frac{|x'-y|}{1-|y|} \le \frac{1}{\sqrt{1-2\sin\alpha}} =: \delta''_\alpha$. Поэтому для любого $y \in \Omega_\alpha(x')$ определим постоянную

$$\delta_\alpha := \max\left\{\delta'_\alpha, \delta''_\alpha\right\} = \max\left\{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}, \frac{1}{\sqrt{1-2\sin\alpha}}\right\} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha},$$

где последнее равенство гарантировано условием $0 < \alpha < 1/3$. Таким образом, $\frac{|x'-y|}{1-|y|} \le \delta_\alpha$, что означает $y \in \Gamma_{\delta_\alpha}(x')$, и $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \delta_\alpha = 1$.

(ii) Для произвольной точки $y \in \Gamma_\delta(x')$, обозначая $w = x' - y$, из неравенства $|x'-y| < \delta(1-|y|)$ найдем угол между векторами x и w,

$$\begin{aligned} |w| &< \delta(1-|x'-w|), \\ |x'-w|^2 &< \left(1 - \frac{1}{\delta}|w|\right)^2, \\ 1 + |w|^2 - 2|w|\cos\angle(x,w) &< 1 + \frac{1}{\delta^2}|w|^2 - \frac{2}{\delta}|w|, \end{aligned}$$

$$\cos\angle(x,w) > \frac{|w|}{2}\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) + \frac{1}{\delta}\,. \tag{2.3}$$

Правая часть (2.3) меньше 1 для w, $|w| < \frac{2\delta}{1+\delta}$, в частности для $|w| < 1$, поэтому имеет место

$$|\angle(x,w)| < \arccos\left[\frac{|w|}{2}\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) + \frac{1}{\delta}\right] < \arccos\frac{1}{\delta} =: \beta.$$

Таким образом, $|\angle(x, x'-y)| = |\angle(x,w)| < \beta = \arccos(1/\delta) < \pi/2$ для всех $y \in \Gamma_\delta(x')$ с $|w| = |y - x'| < 1$, что приводит к вложению

$$\Gamma_\delta(x') \cap B(x',1) \subset \Omega_\beta(x') \cap B(x',1), \qquad \delta > 1, \quad \beta = \arccos\frac{1}{\delta}\,.$$

Примыкающее вложение $\Gamma_\delta(x') \cap B^C(x',1) \subset \Omega_\beta(x') \cap B^C(x',1)$ следует из неравенств $1 \le |y - x'| < \delta(1-|y|)$, так что $|y| < 1 - \frac{1}{\delta} = 1 - \cos\beta < \sin\beta$, и следовательно $y \in \Omega_\beta(x')$. $\square$

3. Функции типа Литтлвуда-Пэли и Лузина

Будем рассматривать (вещественные) гармонические функции $u(x)$ в единичном шаре B. Для параметров $0 < q < \infty$, $\delta > 1$ определим вариант функции (или интеграла площадей) Лузина (1.2) следующим объемным интегралом

$$S_{\delta,q}(u)(\zeta) := \left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} \frac{|u(x)|^q}{(1-|x|)^{n-q}}\,dx\right)^{1/q}, \qquad \zeta \in S. \tag{3.1}$$

При $q = 2$ функция $S_{\delta,2}(\nabla u)$ с конусом $\Omega_\delta(\zeta)$ вместо $\Gamma_\delta(\zeta)$ была предложена Гаспером [4], а в случае верхнего полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$ – Стейном [10]. Вместе с тем, функция (3.1) сводится к классической функции Лузина, если подставить $n = q = 2$, заменить $\Gamma_\delta(\zeta)$ на $\Omega_\delta(\zeta)$, а также $u(x)$ на $\nabla u(x)$. Ясно, что функция $S_{\delta,q}(u)$ возрастающая относительно параметра δ. Другим объектом теории Литтлвуда-Пэли являются g-функции. Определим обобщенную версию g-функции Литтлвуда-Пэли (1.1):

$$g_{q,m}(u)(\zeta) := \left(\int_0^1 (1-r)^{mq-1}|u(r\zeta)|^q\,dr\right)^{1/q}, \qquad \zeta\in S, \quad 0<q<\infty,$$
$$g_{\infty,m}(u)(\zeta) := \sup_{0<r<1}(1-r)^m|u(r\zeta)|, \qquad \zeta\in S.$$

Особенно нас интересуют g-функции $g_{q,m}\big(\nabla^{m-1}u\big)(\zeta)$ и $g_{\infty,m}\big(\nabla^m u\big)(\zeta)$, $m\in\mathbb{N}$. Наша задача – установить аналог неравенства Марцинкевича-Зигмунда (1.2) для обобщенных функций $S_{\delta,q}$ и $g_{q,m}$.

Теорема 3.1. *Пусть $u(x)$ – произвольная гармоническая функция в единичном шаре B, $0<p\le q<\infty$, $m\in\mathbb{N}$, $\delta>1$. Тогда*

$$g_{q,m}\big(\nabla^{m-1}u\big)(\zeta) \le C(\delta,p,q,m,n)\,S_{\delta,p}(u)(\zeta), \qquad \zeta\in S. \tag{3.2}$$

Доказательство. Нам следует доказать неравенство

$$\left(\int_0^1 (1-r)^{mq-1}\big|\nabla^{m-1}u(r\zeta)\big|^q\,dr\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} \frac{|u(x)|^p}{(1-|x|)^{n-p}}\,dx\right)^{1/p} \tag{3.3}$$

на сфере S с некоторой постоянной $C = C(\delta,p,q,m,n)$. Воспользуемся оригинальными идеями из [3], [2, Гл.14].

Для фиксированного $\zeta\in S$ левый интеграл в (3.3) разложим в ряд по точкам $\rho_k = 1-\frac{1}{2^k}$, $k = 0,1,2,\ldots$. Кроме того выберем значение $r_k\in[\rho_k,\rho_{k+1}]$, на котором достигается максимум

$$\max_{\rho_k\le r\le\rho_{k+1}}\big|\nabla^{m-1}u(r\zeta)\big| = \big|\nabla^{m-1}u(r_k\zeta)\big|, \qquad k=0,1,2,\ldots.$$

Тогда поскольку $p/q\le 1$, то получим

$$g^p_{q,m}\big(\nabla^{m-1}u\big)(\zeta) = \left(\int_0^1 (1-r)^{mq-1}\big|\nabla^{m-1}u(r\zeta)\big|^q\,dr\right)^{p/q} =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^\infty \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} (1-r)^{mq-1}\big|\nabla^{m-1}u(r\zeta)\big|^q\,dr\right)^{p/q} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} (1-r)^{mq-1} \left|\nabla^{m-1} u(r\zeta)\right|^q dr \right)^{p/q} \le$$

$$\le \frac{1}{(mq)^{p/q}} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\nabla^{m-1} u(r_k\zeta)\right|^p \left[(1-\rho_k)^{mq} - (1-\rho_{k+1})^{mq} \right]^{p/q} =$$

$$= \frac{1}{(mq)^{p/q}} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\nabla^{m-1} u(r_k\zeta)\right|^p \left(\frac{1}{2^{mqk}} - \frac{1}{2^{mq(k+1)}} \right)^{p/q} =$$

$$= \left(\frac{2^{mq}-1}{mq\, 2^{mq}} \right)^{p/q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left|\nabla^{m-1} u(r_k\zeta)\right|^p}{2^{mpk}} . \tag{3.4}$$

Далее, в точках $r_k\zeta$ применим неравенство среднего значения по шару $B(r_k\zeta, R_k)$, где радиусы R_k выберем достаточно малыми, чтобы $B(r_k\zeta, R_k) \subset \Gamma_\delta(\zeta)$. Для этого можно явно выбрать радиусы R_k как

$$R_k := \frac{\beta}{8 \cdot 2^k} = \frac{\arccos(1/\delta)}{8 \cdot 2^k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Кроме того, выбор радиусов R_k сделан с таким расчетом, чтобы каждый шар $B(r_k\zeta, R_k)$ пересекался только с двумя соседними шарами,

$$B(r_{k-1}\zeta, R_{k-1}) \bigcap B(r_{k+1}\zeta, R_{k+1}) = \varnothing, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

ибо $r_{k-1} + R_{k-1} < r_{k+1} - R_{k+1}$. Заключаем, что шары $B(r_k\zeta, R_k)$ с четными (или нечетными) номерами k попарно не пересекаются, а в сумме вложены в допустимую область $\Gamma_\delta(\zeta)$,

$$B(r_{2k}\zeta, R_{2k}) \bigcap B(r_{2k+2}\zeta, R_{2k+2}) = \varnothing, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.5}$$

$$B(r_{2k-1}\zeta, R_{2k-1}) \bigcap B(r_{2k+1}\zeta, R_{2k+1}) = \varnothing, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.6}$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B(r_k\zeta, R_k) \subset \Gamma_\delta(\zeta). \tag{3.7}$$

Итак, применим вариант известного неравенства среднего значения Феффермана-Стейна по шару $B(r_k\zeta, R_k)$,

$$\left|\nabla^{m-1} u(r_k\zeta)\right|^p \le \frac{C(p,q,m,n)}{R_k^{p(m-1)+n}} \int_{B(r_k\zeta, R_k)} |u(x)|^p\, dx =$$

$$= C\, 2^{k(p(m-1)+n)} \int_{B(r_k\zeta, R_k)} (1-|x|)^{n-p} \frac{|u(x)|^p}{(1-|x|)^{n-p}}\, dx \le$$

$$\le C\, 2^{k(mp+n-p)} \Big[1 - (r_k - R_k) \Big]^{n-p} \int_{B(r_k\zeta, R_k)} \frac{|u(x)|^2}{(1-|x|)^{n-p}}\, dx \le$$

$$\le C(\delta, p, q, m, n)\, 2^{mpk} \int_{B(r_k\zeta, R_k)} \frac{|u(x)|^p}{(1-|x|)^{n-p}}\, dx ,$$

так как

$$R_k = \frac{\arccos(1/\delta)}{4\cdot 2^{k+1}} < \frac{1}{2^{k+1}} < 1-r_k < \frac{1}{2^k} \qquad \text{и} \qquad 1-r_k+R_k < 2(1-r_k) < 2\,\frac{1}{2^k}\,.$$

Отсюда, а также из (3.4) получаем

$$\begin{aligned} g^p_{q,m}\big(\nabla^{m-1}u\big)(\zeta) &= \left(\int_0^1 (1-r)^{mq-1}\big|\nabla^{m-1}u(r\zeta)\big|^q\,dr\right)^{p/q} \le \\ &\le C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big|\nabla^{m-1}u(r_k\zeta)\big|^p}{2^{mpk}} \le \\ &\le C(\delta,p,q,m,n)\sum_{k=0}^{\infty}\int_{B(r_k\zeta,R_k)}\frac{|u(x)|^p}{(1-|x|)^{n-p}}\,dx\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Теперь достаточно под знаком суммы отделить четные и нечетные k и воспользоваться соотношениями (3.5)–(3.7),

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{B(r_k\zeta,R_k)}\frac{|u(x)|^p}{(1-|x|)^{n-p}}\,dx \le C\int_{\Gamma_\delta(\zeta)}\frac{|u(x)|^p}{(1-|x|)^{n-p}}\,dx\,. \tag{3.9}$$

Наконец, неравенства (3.8) и (3.9) вместе приводят к требуемому неравенству (3.3), (3.2). □

Замечание 3.1. *В случае* $m=1$ *неравенство* (3.2)–(3.3) *соответствует неравенству Столла* [8, Thm 3.1]. *Принципиально ничего не изменится, если в неравенстве* (3.2) *заменить гармоническую функцию* $u(x)$ *на ее градиент. В результате получим*

$$g_{q,m}\big(\nabla^m u\big)(\zeta) \le C(\delta,p,q,m,n)\,S_{\delta,p}(\nabla u)(\zeta), \qquad \zeta\in S, \tag{3.10}$$

т.е.

$$\left(\int_0^1 (1-r)^{mq-1}\big|\nabla^m u(r\zeta)\big|^q\,dr\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)}\frac{\big|\nabla u(x)\big|^p}{(1-|x|)^{n-p}}\,dx\right)^{1/p}. \tag{3.11}$$

В частном случае $n=p=q=2$, $m=1$ *неравенство* (3.10)–(3.11) *сводится к классическому неравенству Марцинкевича–Зигмунда* (1.2) *для гармонических функций.*

Предельный случай $q=\infty$ не охвачен Теоремой 3.1 и требует отдельного рассмотрения. В этом случае функция $g_{\infty,m}$ имеет другую мажоранту вместо функции Лузина, а именно некасательную максимальную функцию

$$u^*_\lambda(\zeta) := \sup_{y\in\Gamma_\lambda(\zeta)}|u(y)|, \qquad \zeta\in S, \quad \lambda>1.$$

Теорема 3.2. *Пусть $u(x)$ – произвольная гармоническая функция в единичном шаре B, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 1$. Тогда имеет место неравенство*

$$g_{\infty,m}\big(\nabla^m u\big)(\zeta) \le C(\lambda, m, n)\, u_\lambda^*(\zeta), \qquad \zeta \in S.$$

Доказательство. Поскольку по Теореме 2.1 имеет место вложение $\Omega_\alpha(\zeta) \subset \Gamma_\lambda(\zeta)$ для некоторого $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\lambda = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$, то достаточно доказать неравенство

$$(1-r)^m \big|\nabla^m u(r\zeta)\big| \le C(\alpha, m, n) \sup_{y \in \Omega_\alpha(\zeta)} |u(y)|, \qquad 0 < r < 1, \quad \zeta \in S.$$

Обозначив $s := \sin\alpha$, для фиксированной точки $x = r\zeta \in B$ рассмотрим шар

$$B_x := B\big(x, s(1-r)/2\big) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < R := \frac{(1-r)s}{2} \right\} \subset \Omega_\alpha(\zeta).$$

Последнее вложение обеспечено выбором малого радиуса $R = \frac{(1-r)s}{2}$. Функцию $u(x)$ представим интегралом Пуассона по сфере ∂B_x

$$u(y) = \int_{\partial B_x} P_{B_x}(y, z)\, u(z)\, d\sigma(z), \qquad y \in B_x\,, \tag{3.12}$$

где $d\sigma$ – нормированная $(n-1)$-мерная поверхностная мера Лебега на сфере и обозначено ядро Пуассона для шара B_x

$$P_{B_x}(y, z) := \frac{R^2 - |y - x|^2}{R\,|z - y|^n}\,, \qquad y \in B_x\,, \quad z \in \partial B_x\,.$$

В формуле Пуассона (3.12) возьмем градиент порядка $m \in \mathbb{N}$ и оценим, пользуясь известными оценками ядра Пуассона, см., например, [11], [12],

$$\begin{aligned}
\big|\nabla_y^m u(y)\big| &\le \int_{\partial B_x} \big|\nabla_y^m P_{B_x}(y, z)\big|\, |u(z)|\, d\sigma(z) \le \\
&\le u_\lambda^*(\zeta) \int_{\partial B_x} \big|\nabla_y^m P_{B_x}(y, z)\big|\, d\sigma(z) \le \\
&\le C(m, n)\, u_\lambda^*(\zeta) \int_{\partial B_x} \frac{d\sigma(z)}{|z - y|^{m+n-1}} = \\
&= C(m, n)\, u_\lambda^*(\zeta) \int_S \frac{R^{n-1}\, d\sigma(\xi)}{\big|R\xi - (y - x)\big|^{m+n-1}} \le \\
&\le C(m, n)\, u_\lambda^*(\zeta) \frac{1}{\big(R - |y - x|\big)^m}.
\end{aligned}$$

Наконец, берем $y = x$,

$$\big|\nabla^m u(x)\big| \le C(m, n)\, u_\lambda^*(\zeta) \frac{1}{R^m} = C(\alpha, m, n)\, \frac{u_\lambda^*(\zeta)}{(1-r)^m},$$

что завершает доказательство Теоремы 3.2. □

Abstract. Some generalizations for classical Marcinkiewicz-Zygmund inequality on majorization of Littlewood-Paley g-function for harmonic functions in the unit ball of the space $\mathbb{R}^n$ are established.

Список литературы

[1] J. E. Littlewood and R. E. A. C. Paley, "Theorems on Fourier series and power series" (II), Proc. London Math. Soc. (Ser. 2), **42**, 52 – 89 (1936).
[2] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, **2**, Мир, М. (1965).
[3] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, "A theorem of Lusin", Duke Math. J., **4**, 473 – 485 (1938).
[4] G. Gasper, "On the Littlewood-Paley g-function and the Lusin s-function", Trans. Amer. Math. Soc., **134**, no. 3, 385 – 403 (1968).
[5] T. M. Flett, "Mean values of power series", Pacific J. Math., **25**, 463 – 494 (1968).
[6] К. Л. Аветисян, "Неравенства типа Литтлвуда-Пэли для n-гармонических функций в поликруге", Мат. Заметки, **75**, no. 4, 483 – 492 (2004).
[7] К. Л. Аветисян, "Обобщенная проблема Литтлвуда", Известия НАН Армении, Математика, **40**, no. 3, 3 – 15 (2005).
[8] M. Stoll, "Littlewood-Paley theory for subharmonic functions on the unit ball in $\mathbb{R}^N$", J. Math. Anal. Appl. **420**, 483 – 514 (2014).
[9] A. Torchinsky, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, Orlando (1986).
[10] E. M. Stein, "On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz", Trans. Amer. Math. Soc., **88**, 430 – 466 (1958).
[11] M. Jevtić and M. Pavlović, "Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$", Acta Math. Hungar., **85**, 81 – 96 (1999).
[12] G. Ren, "Harmonic Bergman spaces with small exponents in the unit ball", Collect. Math., **53**, 83 – 98 (2002).

Поступила 8 мая 2021
После доработки 8 мая 2021
Принята к публикации 20 сентября 2021

Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 1, 2022, стр. 45 – 63.

GEOMETRIC PROPERTIES OF THE FOUR PARAMETERS WRIGHT FUNCTION

S. DAS AND K. MEHREZ

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.1-45-63

National Institute of Technology Jamshedpur, Jharkhand, India
University of Kairouan, Kairouan, Tunisia
E-mails: *souravdasmath@gmail.com, souravdas.math@nitjsr.ac.in*
k.mehrez@yahoo.fr

Abstract. In this paper, four parameters Wright function is considered. Certain geometric properties such as starlikeness, convexity, uniform convexity and close-to-convexity are discussed for this function. Further, certain geometric properties of normalized Bessel function of the first kind and two parameters Wright function are studied as a consequence. Interesting corollaries and examples are provided to support that these results are better than the existing ones and improve several results available in the literature.

MSC2010 numbers: 30C45, 30D15, 33C10.

Keywords: Wright function; analytic function; univalent function; starlike function; close-to-convex function.

1. Introduction

The Wright function

$$W_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \beta, z \in \mathbb{C}, \alpha > -1 \tag{1.1}$$

was introduced by E. M. Wright [33] in connection with the asymptotic theory of partitions. The Wright function plays vital role in fractional calculus [13, 22], the Mikusiński operational calculus, integral transforms of the Hankel type and stochastic processes. For a historical overview regarding the Wright function and its applications we refer to [21, Appendix F]. Note that $W_{\alpha,\beta}(z)$ is an entire function of order $1/(1+\alpha)$ and also known as the generalized Bessel function [4, 22]. These functions generalize hypergeometric functions [1, 2].

The four parameters Wright function [13,16]

$$\mathrm{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(a+k\mu)\Gamma(b+k\nu)}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \ \mu, \nu \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

was studied by E. M. Wright for the case $\mu, \nu > 0$ in [32]. Further, he derived several properties of $\mathrm{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ for the case $b = \nu = 1$ and $-1 < \mu < 0$ in [34]. It can be verified [16] that if $\mu + \nu > 0$, then the infinite series expansion (1.2) of

$\mathcal{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ converges absolutely for all $z \in \mathbb{C}$. It is well-known (see [13]) that $\mathcal{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is an entire function for $a, b \in \mathbb{C}$ and $0 < -\mu < \nu$.

Note that $\mathcal{H}$ denotes the class of all analytic functions inside the unit disk $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, and $\mathcal{A}$ is the class of all functions $f \in \mathcal{H}$ which are normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ such that

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

A function $f \in \mathcal{A}$ is said to be a starlike function (with respect to the origin 0) in $\mathbb{D}$, if f is univalent in $\mathbb{D}$ and $f(\mathbb{D})$ is a star-like domain with respect to 0 in $\mathbb{C}$. This class of starlike functions is denoted by $\mathcal{S}^*$. The analytic characterization of $\mathcal{S}^*$ is given [6] below:

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \ \ \forall z \in \mathbb{D} \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{S}^*.$$

Let $\eta \in [0, 1)$ and $z \in \mathbb{D}$. If $\Re\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \eta$, then the function $f \in \mathcal{A}$ is said to be a starlike function of order η. We denote the class of starlike functions of order η by $\mathcal{S}^*(\eta)$.

A function $f \in \mathcal{A}$ is said to be convex in $\mathbb{D}$ if f is univalent in $\mathbb{D}$ and $f(\mathbb{D})$ is a convex domain in $\mathbb{C}$. We denote this class of convex functions by $\mathcal{K}$. This class can be analytically characterized as follows:

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \ \forall z \in \mathbb{D} \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{K}.$$

A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be a convex function of order η $(0 \leq \eta < 1)$, if

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \eta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

This class is denoted by $\mathcal{K}(\eta)$. In particular, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(0)$ and $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(0)$. It is well-known that zf' is starlike if and only if $f \in \mathcal{A}$ is convex. A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is said to be close-to-convex in $\mathbb{D}$ if there exists a starlike function $g(z)$ in $\mathbb{D}$ such that

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

The class of all close-to-convex functions is denoted by $\mathcal{C}$. It can be easily verified that $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{C}$. It is well-known that every close-to-convex function in $\mathbb{D}$ is also univalent in $\mathbb{D}$.

A function $f \in \mathcal{A}$ is said to be uniformly convex (starlike) if for every circular arc γ contained in $\mathbb{D}$ with center $\zeta \in \mathbb{D}$ the image arc $f(\gamma)$ is convex (starlike w.r.t. the image $f(\zeta)$). The class of all uniformly convex (starlike) functions is denoted by UCV (UST) [27]. In [10,11], A. W. Goodman introduced these classes. Later, F. Rønning [27] introduced a new class of starlike functions $\mathcal{S}_p$ defined by

$$\mathcal{S}_p := \{f : f(z) = zF'(z),\ F \in UCV\}.$$

For further details on geometric properties of analytic functions we refer to [4,6,8, 9,14,15,18,19,25] and references cited therein.

Problems for investing geometric properties including starlikeness, closed-to-convexity, convexity or univalency of family of analytic functions in the $\mathbb{D}$ involving special functions have always been attracted by several researchers [3,4,6,8,9,14, 15,20,24,28,29].

We observe that $\mathcal{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) \notin \mathcal{A}$. For this reason, we consider the following normalization of $\mathcal{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ as follows

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) &= z\Gamma(a)\Gamma(b)\mathcal{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)z^{k+1}}{\Gamma(a+k\mu)\Gamma(b+k\nu)},\ a,b \in \mathbb{C},\ \mu,\nu \in \mathbb{R} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{k+1},\end{aligned} \tag{1.3}$$

where

$$\alpha_k = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+k\mu)\Gamma(b+k\nu)}.$$

Although in (1.3), $a, b, z \in \mathbb{C}$, however in this work a and b are restricted to real valued and $z \in \mathbb{D}$. For two functions f and g, which are analytic in $\mathbb{D}$, we say that the function $f(z)$ is subordinate to $g(z)$ in $\mathbb{D}$, and write $f(z) \prec g(z)$ or $f \prec g$ ($z \in \mathbb{D}$), if there exists a function $w(z)$, which is analytic in $\mathbb{D}$ with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1$ for all $z \in \mathbb{D}$, such that $f(z) = g(w(z))$, $z \in \mathbb{D}$. It is well-known that if $f(z) \prec g(z)$ ($z \in \mathbb{D}$), then $f(0) = g(0)$ and $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$. Furthermore, if the function $g(z)$ is univalent in $\mathbb{D}$, then $f(z) \prec g(z)$ if and only if $f(0) = g(0)$ and $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$.

Following definition is helpful to prove some of the main results.

Definition 1.1. Let $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ be a sequence of complex numbers. Then $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ is called a subordinating factor sequence, if

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n \in \mathcal{K} \tag{1.4}$$

implies

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n z^n \prec f(z). \tag{1.5}$$

This class is denoted by $\mathcal{F}$. A finite sequence $\{\beta_n\}_{n=1}^{k}$ is called a subordinating factor sequence if (1.4) yields (1.5) whenever $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \cdots = 0$. This class of such finite sequences of length k is denoted by $\mathcal{F}_k$.

This paper is organized as follows. We provide some lemmas in Section 2, which will be helpful to prove the main results. In Section 3, starlikeness, convexity and uniform convexity of $\mathcal{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$, are discussed using the properties of Fox-Wright function. In Section 4, we provide some alternative conditions for starlikeness, convexity and uniform convexity of $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$, which will be helpful to discuss close-to-convexity (univalency) of $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$. In Section 5, we derive some properties and inequalities related to $\mathcal{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ and $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ involving hypergeometric function. In Section 6, we discuss geometric properties of normalized Bessel function of the first kind and two parameters Wright function, as applications and show that the results obtained in this paper, are better than the existing ones available in the literature.

2. Some lemmas

In this section, we provide some lemmas which are useful to complete the proof of the main results.

Lemma 2.1 ([7]). *Let $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of non-negative real numbers such that $a_1 = 1$. If $\{a_k\}_{k=2}^{\infty}$ is convex decreasing, i.e., $0 \geq a_{k+2} - a_{k+1} \geq a_{k+1} - a_k$, then*

$$\Re\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}\right) > \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Lemma 2.2 ([29]). *Let $\{\gamma_k\}$ be a sequence of complex numbers and $z \in \mathbb{D}$. Then the following statements are equivalent:*

(i) $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$.

(ii) $\Re\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k\right) > 0$.

Lemma 2.3 ([17]). *Let $f(z) \in \mathcal{A}$ and $|f'(z) - 1| < 2/\sqrt{5}$ $\forall\, z \in \mathbb{D}$. Then $f(z)$ is a starlike function in $\mathbb{D}$.*

Lemma 2.4 ([14]). *Suppose that $f(z) \in \mathcal{A}$ and $|(f(z)/z) - 1| < 1$ $\forall\, z \in \mathbb{D}$. Then $f(z)$ is a univalent and starlike in $\mathbb{D}_{1/2} = \{z : |z| < 1/2\}$.*

Lemma 2.5 ([15]). *Let $f(z) \in \mathcal{A}$ and $|f'(z) - 1| < 1$ $\forall\, z \in \mathbb{D}$. Then $f(z)$ is a convex function in $\mathbb{D}_{1/2} = \{z : |z| < 1/2\}$.*

Lemma 2.6 ([26]). *Let $f(z) \in \mathcal{A}$.*

(i) *If* $\left|\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \dfrac{1}{2}$, *then* $f(z) \in UCV$.

(ii) *If* $\left|\dfrac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \dfrac{1}{2}$, *then* $f(z) \in \mathcal{S}_p$.

Lemma 2.7. *For any $a, b > 0$, the following inequalities hold:*

$$\frac{k}{a(a+1)\cdots(a+k-1)} \leq \frac{1}{a(a+1)^{k-2}}, \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{b(b+1)\cdots(b+k-1)} \leq \frac{1}{b(b+1)^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Proof. Under the given hypothesis, it can be observed that

$$1\left(1+\frac{1}{a+1}\right)\left(1+\frac{2}{a+1}\right)\cdots\left(1+\frac{k-3}{a+1}\right)\left(1+\frac{a-1}{k}\right) \geq 1. \tag{2.3}$$

Multiplying both sides of (2.3) by $a(a+1)^{k-2}$, we obtain

$$a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-2)\frac{(a+k-1)}{k} \geq a(a+1)^{k-2}, \quad \text{for } k \geq 2,$$

which proves the inequality (2.1).

It can be noted that under the given hypothesis, following inequality holds true:

$$1\left(1+\frac{1}{b+1}\right)\left(1+\frac{2}{b+1}\right)\cdots\left(1+\frac{k-2}{b+1}\right) \geq 1. \tag{2.4}$$

Multiplying both sides of (2.4) by $b(b+1)^{k-1}$, we obtain

$$b(b+1)(b+2)\cdots(b+k-1) \geq b(b+1)^{k-1}, \quad \text{for } k \geq 1,$$

which proves the inequality (2.2). $\square$

3. Starlikeness, convexity and uniform convexity

To prove some of the main results, we need the Fox-Wright function ${}_p\Psi_q[z]$, defined by [31, p. 4, Eq. (2.4)]

$${}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix}\middle| z\right] = {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{matrix}\middle| z\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma(a_i+kA_i)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+kB_j)}\frac{z^k}{k!}, \tag{3.1}$$

where $A_i,\ B_j \in \mathbb{R}^+$ $(i = 1,...,p, j = 1,...,q)$ and $a_i, b_j \in \mathbb{C}$. The series (3.1) converges uniformly and absolutely for all bounded $|z|, z \in \mathbb{C}$ when

$$\epsilon = 1 + \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j > 0.$$

In [23, Theorem 4], the authors established the following two-sided inequality

$$\psi_0 e^{\psi_1\psi_0^{-1}|z|} \leq {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{matrix}\middle| z\right] \leq \psi_0 - (1-e^{|z|})\psi_1, \tag{3.2}$$

is valid for all $z \in \mathbb{R}$ and for all ${}_p\Psi_q[z]$ satisfying

$$\psi_1 > \psi_2 \ \text{ and } \ \psi_1^2 < \psi_0\psi_2. \tag{3.3}$$

Here,

$$\psi_k = \frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+kAj)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+kB_j)},\ k = 0, 1, 2.$$

Theorem 3.1. *Assume that* $a, b, \mu, \nu > 0$. *Suppose that the following conditions hold:*

$$(H_1): \begin{cases} (i) & \frac{\Gamma(a+2\mu)}{\Gamma(a+3\mu)} < \frac{\Gamma(b+3\nu)}{3\Gamma(b+2\nu)}, \\ (ii) & \frac{\Gamma(a+\mu)\Gamma(a+3\mu)}{\Gamma^2(a+2\mu)} < \frac{3\Gamma^2(b+2\nu)}{2\Gamma(b+\nu)\Gamma(b+3\nu)}, \\ (iii) & \frac{2\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} + \frac{3(e-1)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)} < 1. \end{cases}$$

Then the function $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ *is starlike in* $\mathbb{D}$.

Proof. Let us assume that $q(z) = \dfrac{z\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}$, $z \in \mathbb{D}$. Then $q(z)$ is analytic in $\mathbb{D}$ and $q(0) = 1$. To prove that $\Re(q(z)) > 0$, it is enough to show that $|q(z)-1| < 1$.

From (1.3), we get

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) - \frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}\right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu+k\mu)\Gamma(b+\nu+k\nu)} \\ &= \Gamma(a)\Gamma(b)_1\Psi_2\Big[\begin{array}{c} (2,1) \\ (a+\mu,\mu),(b+\nu,\nu) \end{array} \Big| 1 \Big]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

In our case

$$\psi_0 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)}, \ \psi_1 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}, \text{ and } \psi_2 = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(a+3\mu)\Gamma(b+3\nu)}.$$

It is easy to see that the hypotheses "$(H_1) : (i), (ii)$" are equivalent to $\psi_2 < \psi_1$ and $\psi_1^2 < \psi_0\psi_2$, and consequently

$${}_1\Psi_2\Big[\begin{array}{c} (2,1) \\ (a+\mu,\mu),(b+\nu,\nu) \end{array} \Big| 1 \Big] \leq \frac{1}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} - \frac{2(1-e)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}. \tag{3.5}$$

Combining (3.4) and (3.5), for all $z \in \mathbb{D}$ we obtain

$$\left|\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) - \frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}\right| < \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} - \frac{2(1-e)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}.$$

Now, using (1.3) and the triangle inequality $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, we have

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}\right| &\geq 1 - \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)z^k}{\Gamma(a+k\mu)\Gamma(b+k\nu)}\right| \\ &\geq 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu+k\mu)\Gamma(b+\nu+k\nu)} \\ &= 1 - \Gamma(a)\Gamma(b)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(a+\mu+k\mu)\Gamma(b+\nu+k\nu)k!} \\ &= 1 - \Gamma(a)\Gamma(b)_1\Psi_2\Big[\begin{array}{c} (1,1) \\ (a+\mu,\mu),(b+\nu,\nu) \end{array} \Big| 1 \Big]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

In this case, $\psi_0 = \frac{1}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)}$, $\psi_1 = \frac{1}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}$ and $\psi_2 = \frac{2}{\Gamma(a+3\mu)\Gamma(b+3\nu)}$. Clearly, the inequalities $\psi_2 < \psi_1$ and $\psi_1^2 < \psi_0\psi_2$ are satisfied under the given hypothesis. Using (3.2), we have

$${}_1\Psi_2\Big[\begin{array}{c} (1,1) \\ (a+\mu,\mu),(b+\nu,\nu) \end{array} \Big| 1 \Big] \leq \frac{1}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} + \frac{(e-1)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)} \tag{3.7}$$

Combining (3.6) and (3.7), we have

$$\left|\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}\right| \geq 1 - \left[\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} + \frac{(e-1)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}\right] > 0, \tag{3.8}$$

under the given hypothesis ($H_1 : (iii)$). Now, using (3.4) and (3.8), we obtain

$$\begin{aligned}
|q(z)-1| = \left|\frac{z\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)} - 1\right| &= \left|\frac{\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) - \frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}}{\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}}\right| \\
&< \left[\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} + \frac{2(e-1)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}\right] \\
&\times \left[1 - \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} - \frac{(e-1)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}\right]^{-1} < 1,
\end{aligned}$$

This proves the theorem. □

Theorem 3.2. *Let a, b, μ and ν be positive real numbers. Also suppose that the following conditions hold:*

$$(H_2) : \begin{cases} (i) & \frac{\Gamma(a+2\mu)}{\Gamma(a+3\mu)} < \frac{3\Gamma(b+3\nu)}{8\Gamma(b+2\nu)}, \\ (ii) & \frac{\Gamma(a+\mu)\Gamma(a+3\mu)}{\Gamma^2(a+2\mu)} < \frac{16\Gamma^2(b+2\nu)}{9\Gamma(b+\nu)\Gamma(b+3\nu)}, \\ (iii) & \frac{2\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} - \frac{3(1-e)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)} < 1. \end{cases}$$

Then the function $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is convex in $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$.

Proof. Let $z \in \mathbb{D}$, then we get

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) - 1\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu k)\Gamma(b+k\nu)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)k!\Gamma(a)\Gamma(b)}{k!\Gamma(a+\mu+\mu k)\Gamma(b+\nu+k\nu)} \\
&= \Gamma(a)\Gamma(b) {}_2\Psi_3\left[\begin{matrix} (1,1),(3,1) \\ (2,1),(a+\mu,\mu),(b+\nu,\nu) \end{matrix}\,\middle|\, 1\right].
\end{aligned} \tag{3.9}$$

In this case,

$$\psi_0 = \frac{2}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)}, \psi_1 = \frac{3}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}, \text{ and } \psi_2 = \frac{8}{\Gamma(a+3\mu)\Gamma(b+3\nu)}.$$

Hence, the conditions "$(H_2) : (i), (ii)$" imply that

$$ {}_2\Psi_3\left[\begin{matrix} (1,1),(3,1) \\ (2,1),(a+\mu,\mu),(b+\nu,\nu) \end{matrix}\,\middle|\, 1\right] \leq \frac{2}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} - \frac{3(1-e)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}. \tag{3.10}$$

Hence, combining the hypotheses "$(H_2) : (iii)$", (3.9) and (3.10), we have

$$\left|\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) - 1\right| < 1.$$

Therefore, the function $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is convex on $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$, by means of Lemma 2.5. □

Corollary 3.1. *Let $a > \frac{2}{7}$. If $b > \frac{2a+20}{7a-2}$, then the function $\mathbb{W}_{(1,a),(1,b)}(z)$ is convex on $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$.*

Proof. Setting $\mu = \nu = 1$ in Theorem 3.2, we observe that the condition "$(H_2) : (i)$" holds true for all $a, b > 0$. Moreover, it is clear that the condition "$(H_2) : (ii)$" is equivalent to the following inequality

$$b > \frac{2a+20}{7a-2} := f_1(a), \text{ when } a > \frac{2}{7}.$$

Straightforward calculation yields that the assumption "$(H_2) : (iii)$" is equivalent to

$$b > \frac{-(a^2-a-2) + \sqrt{(a^2-a-1)^2 + 4a(a+1)(2a-1+3e)}}{2a(a+1)} := g_1(a).$$

By using that fact that the functions $f_1(a)$ and $g_1(a)$ are decreasing on $(2/7, \infty)$ such that

$$\lim_{a \to (\frac{2}{7})^+} f_1(a) = \infty, \ \lim_{a\to\infty} f_1(a) = \frac{2}{7}, \ \lim_{a \to (\frac{2}{7})^+} g_1(a) \approx 9.63 \ \text{ and } \ \lim_{a\to\infty} g_1(a) = 0.$$

Therefore

$$b > \max_{a > \frac{2}{7}} (f_1(a), g_1(a)) = f_1(a).$$

□

Putting $a = 14$ in Corollary 3.1, we obtain the following example.

Example 3.1. If $b > \frac{1}{2}$, then the function $\mathbb{W}_{(1,14),(1,b)}(z)$ is convex on $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$.

Theorem 3.3. *Assume that the conditions of the above Theorem $(H_2) : (i), (ii)$ hold true. Also, suppose that*

$$\frac{2\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} - \frac{3(1-e)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)} < \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Then the function $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}$.

Proof. The proof is similar to the proof of Theorem 3.2. □

Theorem 3.4. *Suppose that a, b, μ and ν are positive real numbers. Assume that the following conditions hold:*

$$(H_3) : \begin{cases} (i) & \frac{\Gamma(a+2\mu)}{\Gamma(a+3\mu)} < \frac{\Gamma(b+3\nu)}{2\Gamma(b+2\nu)}, \\ (ii) & \frac{\Gamma(a+\mu)\Gamma(a+3\mu)}{\Gamma^2(a+2\mu)} < \frac{2\Gamma^2(b+2\nu)}{\Gamma(b+\nu)\Gamma(b+3\nu)}, \\ (iii) & \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} - \frac{(1-e)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)} < 1. \end{cases}$$

Then the function $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$.

Proof. It can be verified that

$$\left|\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}-1\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu+k\mu)\Gamma(b+\nu+k\nu)} = \Gamma(a)\Gamma(b)\,{}_1\Psi_2\left[\begin{array}{c}(1,1)\\(a+\mu,\mu),(b+\nu,\nu)\end{array}\middle|1\right]. \tag{3.11}$$

In this case,

$$\psi_0=\frac{1}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)},\psi_1=\frac{1}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)},\text{ and }\psi_2=\frac{2}{\Gamma(a+3\mu)\Gamma(b+3\nu)},$$

which is equivalent to "$(H_3):(i),(ii)$". This implies that

$${}_1\Psi_2\left[\begin{array}{c}(1,1)\\(a+\mu,\mu),(b+\nu,\nu)\end{array}\middle|1\right] \leq \frac{1}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)}-\frac{(1-e)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}.$$

Using the above inequality (3.11) and hypothesis "$(H_3):(iii)$", we obtain

$$\left|\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}-1\right|<1,$$

for all $z\in\mathbb{D}$, which implies that the function $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$, by Lemma 2.4. $\square$

Corollary 3.2. *Let $a,b>0$. If $ab>2$, then $\mathbb{W}_{(1,a),(1,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$.*

Proof. Set $\mu=\nu=1$ in Theorem 3.4. Then the condition "$(H_3):(i)$" is valid for each $a,b>0$ and the assumption "$(H_3):(ii)$" holds true for all $ab>2$. Further, the assumption "$(H_3):(iii)$" is equivalent to the following inequality:

$$b>\frac{1-a^2+\sqrt{(a^2-1)^2+4(a+e)(a^2+a)}}{2a(a+1)}.$$

Consequently,

$$b>\max_{a>0}\left(\frac{2}{a},\frac{1-a^2+\sqrt{(a^2-1)^2+4(a+e)(a^2+a)}}{2a(a+1)}\right)=\frac{2}{a}. \qquad \square$$

Example 3.2. If $b>2$, then the function $\mathbb{W}_{(1,1),(1,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$.

Example 3.3. The function $\mathbb{W}_{(1,\sqrt{2}),(1,\sqrt{3})}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$.

Theorem 3.5. *Let a,b,ν and μ be positive real numbers and $z\in\mathbb{D}$. If the following conditions hold*

$$(H_4):\begin{cases}(i) & \frac{\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(a+2\mu)}<\frac{\Gamma(b+2\nu)}{4\Gamma(b+\nu)},\\ (ii) & \frac{\Gamma(a)\Gamma(a+2\mu)}{\Gamma^2(a+\mu)}<\frac{4\Gamma^2(b+2\nu)}{3\Gamma(b+\nu)\Gamma(b+3\nu)},\\ (iii) & \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)}-\frac{3(1-e)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}<\frac{1}{4},\end{cases}$$

then the function $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)\in UCV$.

Let $z \in \mathbb{D}$. It is easy to see that

$$\begin{aligned}\left|z\mathbb{W}''_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)\right| &= \Gamma(a)\Gamma(b)\left|{}_1\Psi_2\left[{}^{(3,1)}_{(a+\mu,\mu),\ (b+\nu,\nu)}\Big|z\right]\right|\\ &\leq \Gamma(a)\Gamma(b)\ {}_1\Psi_2\left[{}^{(3,1)}_{(a+\mu,\mu),\ (b+\nu,\nu)}\Big|1\right].\end{aligned}$$

Taking into consideration (3.2) and under the following assumptions

$$(H_4^{'}) : \frac{\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(a+2\mu)} < \frac{\Gamma(b+2\nu)}{4\Gamma(b+\nu)} \text{ and } \frac{\Gamma(a+\mu)\Gamma(a+3\mu)}{\Gamma^2(a+2\mu)} < \frac{4\Gamma^2(b+2\nu)}{3\Gamma(b+\nu)\Gamma(b+3\nu)},$$

we get

$$\left|z\mathbb{W}''_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)\right| \leq \frac{2\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} - \frac{6(1-e)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}. \tag{3.12}$$

However, for all $z \in \mathbb{D}$, we have

(3.13)

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)\right| &= \left|1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)\Gamma(a)\Gamma(b)z^k}{\Gamma(a+k\mu)\Gamma(b+k\nu)}\right| \geq 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)\Gamma(a)\Gamma(b)z^k}{\Gamma(a+k\mu)\Gamma(b+k\nu)}\\ &= 1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu+k\mu)\Gamma(b+\nu+k\nu)} = 1-\Gamma(a)\Gamma(b){}_2\Psi_3\left[{}^{(1,1),(3,1)}_{(2,1),(a+\mu,\mu),\ (b+\nu,\nu)}\Big|1\right].\end{aligned}$$

Using (3.2), under the following assumptions

$$(H_4^{''}) : \frac{\Gamma(a+2\mu)}{\Gamma(a+3\mu)} < \frac{3\Gamma(b+3\nu)}{8\Gamma(b+2\nu)} \text{ and } \frac{\Gamma(a+\mu)\Gamma(a+3\mu)}{\Gamma^2(a+2\mu)} < \frac{16\Gamma^2(b+2\nu)}{9\Gamma(b+\nu)\Gamma(b+3\nu)},$$

we obtain

$${}_2\Psi_3\left[{}^{(1,1),(3,1)}_{(2,1),(a+\mu,\mu),\ (b+\nu,\nu)}\Big|1\right] \leq \frac{2}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} + \frac{3(e-1)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}.$$

In view of the above inequality and (3.13), we have

$$\left|\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)\right| \geq 1-\frac{2\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\mu)\Gamma(b+\nu)} + \frac{3(e-1)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+2\mu)\Gamma(b+2\nu)}. \tag{3.14}$$

We note that the right hand side of the above inequality is positive under the assumption $(H_4) : (iii)$. Now, combining (3.12), (3.14) and "$(H_4) : (iii)$", we get

$$\left|\frac{\mathbb{W}''_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}\right| < 1 \text{ for all } z \in \mathbb{D}.$$

Hence, the first assertions of Lemma 2.6 completes the proof of Theorem 3.5. □

Corollary 3.3. *Let $a > 3$. If $b > \frac{2a+6}{a-3}$, then the function $\mathbb{W}_{(1,a),(1,b)}(z) \in UCV$.*

Proof. Let $\mu = \nu = 1$ in the above Theorem. Then the condition $(H_4) : (i)$" is valid for all $ab+a+b > 3$. The second condition of (H_4) is equivalent to $b(a-3) > 6+2a$. Finally, the condition "$(H_4) : (iii)$" holds true for all

$$b > \frac{-(a^2-3a-4)+\sqrt{(a^2-3a-4)^2+4(4a+12e-8)}}{2a(a+1)}.$$

Consequently,

$$b > \max_{a>3}\left(\frac{2a+6}{a-3}, \frac{-(a^2-3a-4)+\sqrt{(a^2-3a-4)^2+4(4a+12e-8)}}{2a(a+1)}\right) = \frac{2a+6}{a-3}.$$

4. Further results on starlikeness, convexity and close-to-convexity

In this section, we provide some alternative conditions for starlikeness, convexity and uniform convexity of $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$, which will be useful to discuss close-to-convexity (univalency) of $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ in $\mathbb{D}$.

Theorem 4.1. *Let $a, b, \mu, \nu \geq 1$ be such that $b \geq \phi(a) = \dfrac{3a+2}{a(a+1)}$. Then*

(i) *$\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}$.*

(ii) *$\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is close-to-convex with respect to the starlike function $\mathbb{W}_{(\mu,a),(1,b)}(z)$ in $\mathbb{D}$.*

Proof. (i) Let $p(z) = \dfrac{z\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}$, $z \in \mathbb{D}$. Then $p(z)$ is analytic in $\mathbb{D}$ and $p(0) = 1$. To prove that $\Re(p(z)) > 0$, it is enough to show that $|p(z) - 1| < 1$. It is well-known that

$$\Gamma(a+k) \leq \Gamma(a+k\mu), \quad k \in \mathbb{N},\ a, \mu > 1.$$

Therefore,

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+k\mu)} \leq \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+k)} = \frac{1}{a(a+1)\cdots(a+k-1)}. \tag{4.1}$$

Similarly, we have

$$\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+k\nu)} \leq \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+k)} = \frac{1}{b(b+1)\cdots(b+k-1)}. \tag{4.2}$$

Using Lemma 2.7 and the above inequalities (4.1) and (4.2), we obtain

$$\left|\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) - \frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\Gamma(a)\Gamma(b)z^k}{\Gamma(a+k\mu)\Gamma(b+k\nu)}\right|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{ab(a+1)(b+1)\cdots(a+k-1)(b+k-1)} < \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(a+1)^{k-2}(b+1)^{k-1}}$$
$$= \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab(b+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(a+1)(b+1)}\right\}^k = \frac{(a+1)(b+1)+a}{ab\{(a+1)(b+1)-1\}}.$$

Again, we have

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}\right| &\geq 1-\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)z^k}{\Gamma(a+k\mu)(b+k\nu)}\right|\\
&\geq 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{ab(a+1)(b+1)\cdots(a+k-1)(b+k-1)}\\
&> 1-\frac{1}{ab}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(a+1)(b+1)}\right\}^k = 1-\frac{(a+1)(b+1)}{ab(ab+a+b)}\\
&= \frac{ab(a+b+ab)-(a+1)(b+1)}{ab(a+b+ab)}.
\end{aligned}$$

Therefore, under the given condition,

$$\begin{aligned}
|p(z)-1| = \left|\frac{z\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}-1\right| &= \left|\frac{\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)-\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}}{\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}}\right|\\
&< \frac{(a+1)(b+1)+a}{ab(a+b+ab)-(a+1)(b+1)} \leq 1.
\end{aligned}$$

This shows that $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}$ and consequently the part (i) of this theorem is proved.

Now, we proceed to prove the part (ii). For this, we have to show that there exists a function $h \in \mathcal{S}^*$ such that

$$\Re\left(\frac{z\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{h(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

which can be proved by showing that

$$\left|\frac{z\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{h(z)}-1\right| < 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Using part (i) of this Theorem 4.1, we can observe that $\mathbb{W}_{(\mu,a),(1,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}$ under the given hypothesis. Again using (2.1) and (2.2), we obtain

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)-\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(1,b)}(z)}{z}\right| &< \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(k+1)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+k\mu)\Gamma(b+k\nu)}-\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}\right|\\
\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{ab(a+1)(b+1)\cdots(a+k-1)(b+k-1)}\\
< \frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(a+1)^{k-2}(b+1)^{k-1}} &= \frac{(a+1)(b+1)+a}{ab\{(a+1)(b+1)-1\}}.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(1,b)}(z)}{z}\right| &\geq 1-\left|\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)z^k}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}\right| \\
&\geq 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{ab(a+1)(b+1)\cdots(a+k-1)(b+k-1)} \\
&> 1-\frac{1}{ab}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(a+1)(b+1)}\right\}^k = 1-\frac{(a+1)(b+1)}{ab(ab+a+b)} \\
&= \frac{ab(a+b+ab)-(a+1)(b+1)}{ab(a+b+ab)}.
\end{aligned}$$

Using the above inequalities and given conditions, we have

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{\mathbb{W}_{(\mu,a),(1,b)}(z)}-1\right| &= \left|\frac{\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)-\dfrac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(1,b)}(z)}{z}}{\dfrac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(1,b)}(z)}{z}}\right| \\
&< \frac{(a+1)(b+1)+a}{ab(a+b+ab)-(a+1)(b+1)} \leq 1,
\end{aligned}$$

which implies that $\Re\left(\frac{z\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\mu,b)}(z)}{\mathbb{W}_{(\mu,a),(1,b)}(z)}\right) > 0$. Consequently, $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\mu,b)}(z)$ is close-to-convex with respect to the starlike function $\mathbb{W}_{(\mu,a),(1,b)}(z)$ in $\mathbb{D}$, under the given hypothesis. $\square$

Theorem 4.2. *Let $a, b, \mu, \nu \geq 1$ and $0 \leq \eta < 1$ be such that $b \geq \psi(a, \eta)$, where*

$$\begin{aligned}
\psi(a,\eta) = &\frac{(a+1)+(1-\eta)(a+1-a^2)}{2a(1-\eta)(a+1)} \\
&+ \frac{\sqrt{\{(a+1)+(1-\eta)(a+1-a^2)\}^2-4a(1-\eta)(a+1)\{(1-\eta)(a+1)+2a+1\}}}{2a(1-\eta)(a+1)}.
\end{aligned}$$

Then $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) \in \mathcal{S}^*(\eta)$ for each $z \in \mathbb{D}$.

Proof. From the proof of Theorem 4.1, it can be observed that $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is starlike function of order η, if $\frac{(a+1)(b+1)+a}{ab(a+b+ab)-(a+1)(b+1)} \leq 1-\eta$, which is a consequence of the given condition. $\square$

Using Lemma 2.6 and the similar technique as in Theorem 4.1, the following theorem can be obtained.

Theorem 4.3. *Let $a, b, \mu, \nu \geq 1$ be such that $b \geq \tau(a)$, where*

$$\tau(a) = \frac{3(a+1)-a^2+\sqrt{a^4+14a^3+35a^2+30a+9}}{2a(a+1)}.$$

Then $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) \in \mathcal{S}_p$ for each $z \in \mathbb{D}$.

Theorem 4.4. *Let $a, b, \mu, \nu \geq 1$. If $b \geq \phi_1(a)$, where*

$$\phi_1(a) = \frac{(a+1-a^2)+\sqrt{a^4+2a^3+7a^2+6a+1}}{2a(a+1)},$$

then $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ *is starlike in* $\mathbb{D}_{1/2}$.

Proof. Using Lemma 2.7 and the inequalities (4.1) and (4.2), we obtain

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)}{z}-1\right| &< \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{ab(a+1)(b+1)\cdots(a+k-1)(b+k-1)}\\ &\leq \frac{1}{ab}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(a+1)(b+1)}\right\}^k=\frac{(a+1)(b+1)}{ab(ab+a+b)}.\end{aligned}$$

Using the given condition and Lemma 2.4, we conclude that $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}_{1/2}$, under the given hypothesis. □

Theorem 4.5. *Let* $a, b, \mu, \nu \geq 1$.

(i) *If* $b \geq \psi_1(a)$, *where* $\psi_1(a)=\dfrac{(3-a)+\sqrt{a^2+2a+9}}{2a}$, *then* $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ *is convex in* $\mathbb{D}_{1/2}$.

(ii) *If* $b \geq \psi_2(a)$, *where*

$$\psi_2(a)=\frac{\sqrt{5}(2a+3)-2a^2+\sqrt{4a^4+8\sqrt{5}a^3+20(1+\sqrt{5})a^2+4(15+4\sqrt{5})a+45}}{4a(a+1)},$$

then $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ *is starlike in* $\mathbb{D}$.

Proof. Using inequalities (4.1) and 4.2 and Lemma 2.7, we have

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{W}'_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)-1\right| &< \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+k\mu)\Gamma(b+k\nu)}\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{ab(a+1)(b+1)\cdots(a+k-1)(b+k-1)}\\ &= \frac{1}{ab}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{ab(a+1)(b+1)\cdots(a+k-1)(b+k-1)}\\ &\qquad +\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{ab(a+1)(b+1)\cdots(a+k-1)(b+k-1)}\\ &\leq \frac{1}{ab}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{ab(a+1)^{k-1}(b+1)^{k-2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{ab(a+1)^{k-1}(b+1)^{k-1}}\\ &= \frac{1}{ab}+\frac{(a+2)}{ab(a+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(a+1)(b+1)}\right\}^k=\frac{2a(b+1)+3b+2}{ab\{(a+1)(b+1)-1\}}.\end{aligned}$$

Using Lemma 2.5 and given condition (i), we can conclude that $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is convex in $\mathbb{D}_{1/2}$. Further using the given condition (ii) and with the help of Lemma 2.3, it is easy to show that $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}$. □

If we set $a=\mu=\nu=1$ in the normalized four parameters Wright function (1.3), then we obtain the normalized form of a class of functions involving the confluent hypergeometric function as follows:

$$\mathbb{F}(b,z) = z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+k)}\frac{z^k}{k!} = z \times {}_0F_1(-;b;z),$$

where ${}_0F_1(-;b;z)$ is the confluent hypergeometric function [1,2]. Following corollary provides a set of sufficient conditions for $\mathbb{F}(b,z)$ to be starlike and convex in the open unit disk $\mathbb{D}$ and in $\mathbb{D}_{1/2}$.

Corollary 4.1. *The following assertions hold true:*

(i) *If* $b \geq \frac{5}{4}$*, then* $\mathbb{F}(b,z)$ *is starlike in the open unit disk* $\mathbb{D}$*.*

(ii) *If* $b \geq \frac{(5+\sqrt{89})}{4}$*, then* $\mathbb{F}(b,z) \in \mathcal{S}_p$*.*

(iii) *If* $b \geq \frac{(1+\sqrt{17})}{4}$*, then* $\mathbb{F}(b,z)$ *is starlike in* $\mathbb{D}_{1/2}$*.*

(iv) *If* $b \geq 1+\sqrt{3}$*, then* $\mathbb{F}(b,z)$ *is convex on* $\mathbb{D}_{1/2}$*.*

Proof. Part (i) can be proved using Theorem 4.1. Part (ii) is a consequence of Theorem 4.3. Using part (i) of Theorem 4.4, part (iii) of this corollary can be obtained. Finally using Theorem 4.5, part (iv) can be proved. □

5. Results related to $\mathcal{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$

Theorem 5.1. *For any* $a, b, \mu, \nu \geq 1$ *and* $z \in \mathbb{D}$*, the following inequality holds:*

$$\left|\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)\right| \leq |z| \times {}_1F_2(1;a,b;|z|),$$

where ${}_1F_2(c;a,b;|z|) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_k}{(a)_k(b)_k}\frac{|z|^k}{k!}$ *is hypergeometric function with* $(\alpha)_k$ *as pochhammer symbol defined as* $(\alpha)_0 = 1, (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$*.*

Proof. Using (2.1) and (2.2), we obtain

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)z^{k+1}}{\Gamma(k\mu+a)\Gamma(k\nu+b)}\right| \leq |z|\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)z^{k}}{\Gamma(k\mu+a)\Gamma(k\nu+b)}\right| \\ &\leq |z|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{ab(a+1)(b+1)\cdots(a+k-1)(b+k-1)} \\ &= |z|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k}{(a)_k(b)_k}\frac{|z|^k}{k!} = |z| \times {}_1F_2(1;a,b;|z|). \qquad \square\end{aligned}$$

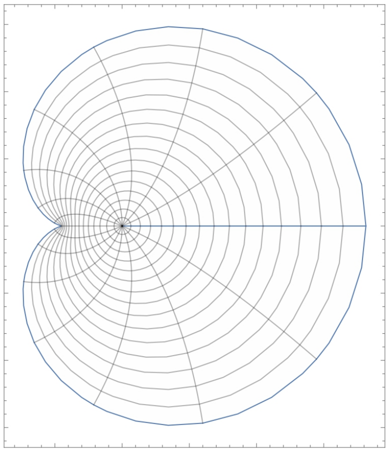
Using (1.1) and Theorem 5.1, following corollary can be obtained.

Corollary 5.1. *For any* $a, b, \mu, \nu \geq 1$ *and* $z \in \mathbb{D}$ *the following inequality holds:*

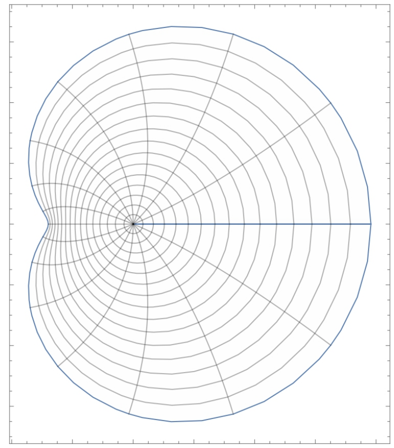
$$\left|\mathcal{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)\right| \leq \frac{|z|}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times {}_1F_2(1;a,b;|z|),$$

where ${}_1F_2(1;a,b;|z|)$ *is a hypergeometric function.*

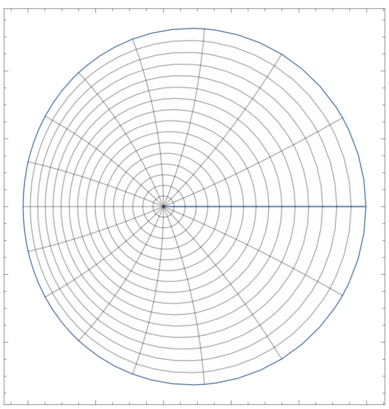
Figure 1. Mapping of $\mathbb{F}(b,z)$ and $\mathbb{W}_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ over $\mathbb{D}$ and $\mathbb{D}_{1/2}$.



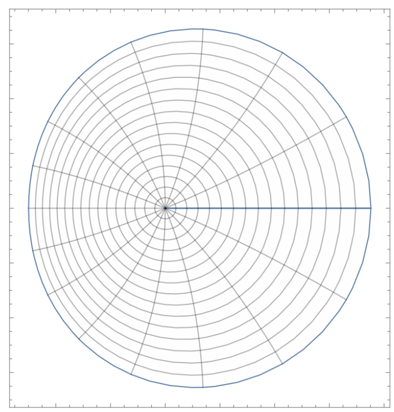
(A) $\mathbb{F}(3/2, z)$ for $z \in \mathbb{D}$.



(B) $\mathbb{F}(1, z)$ for $z \in \mathbb{D}_{1/2}$.



(C) $\mathbb{F}(1+\sqrt{3}, z)$ for $z \in \mathbb{D}_{1/2}$.



(D) $\mathbb{W}_{(1,\sqrt{2}),(1,\sqrt{3})}(z)$ for $z \in \mathbb{D}_{1/2}$.

6. Conclusion

Our research discusses about some geometric properties (such as starlikeness, convexity, uniform convexity and close-to-convexity) of four parameters Wright function. In addition, geometric properties of the partial sums of this function are studied. As applications, we obtain certain geometric properties of normalized Bessel function of the first kind and two parameters Wright function as given below.

It can be noted that for $a = \mu = \nu = 1$, $b = \beta + 1$ and $z = -z (z \in \mathbb{D})$, we have a normalization of the Bessel function of first kind [4] $\mathcal{J}_\beta(z)$ defined as [24]:

$$\mathbb{J}_\beta(z) = \mathbb{W}_{(1,\beta+1),(1,1)}(-z) = \Gamma(\beta+1) z^{1-\beta/2} \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{z}).$$

(i) Using Theorem 4.1, we claim that $\mathbb{J}_\beta(z)$ is starlike in $\mathbb{D}$ if $\beta \geq 3/2$, which is a sharper than the lower bound ($\sqrt{3}$) available in [24].

(ii) Using Theorem 4.5, we obtain $\mathbb{J}_\beta(z)$ is convex in $\mathbb{D}_{1/2}$ if $\beta \geq \sqrt{3}$, which is the same condition available in [24].

(iii) Theorem 4.3 helps us to conclude that $\mathbb{J}_\beta(z) \in \mathcal{S}_p$ if $\beta \geq \frac{(1+\sqrt{89})}{4}$.

(iv) For $a = \mu = 1$, the four parameters Wright function reduces to two parameters Wright function

$$W_{b,\nu}(z) = \mathcal{W}_{(1,1),(\nu,b)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(b+k\nu)},$$

and the corresponding normalized two parameters Wright function can be defined as

$$\mathbb{W}_{b,\nu}(z) = \mathbb{W}_{(1,1),(\nu,b)}(z) = \Gamma(b) W_{b,\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b) z^k}{k!\Gamma(b+k\nu)}.$$

(i) Using Theorem 4.1, we claim that if $\nu \geq 1$ and $b \geq 5/2$, then $\mathbb{W}_{b,\nu}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}$. This lower bound of b is sharper than the lower bound ($b \geq 1 + \sqrt{3}$) available in [24].

(ii) From Theorem 4.5, we have if $\nu \geq 1$ and $b \geq (1 + \sqrt{3})$, then $\mathbb{W}_{b,\nu}(z)$ is convex in $\mathbb{D}_{1/2}$, which is the same condition available in [24].

(iii) From Theorem 4.1, we obtain, if $\nu \geq 1$ and $b \geq 5/2$, then $\mathbb{W}_{b,\nu}(z)$ is close-to-convex with respect to $\mathbb{W}_{1,\nu}(z)$ in $\mathbb{D}$.

(iv) Using Theorem 4.3, we conclude that $\mathbb{W}_{b,\nu}(z) \in \mathcal{S}_p$ if $b \geq \frac{(5+\sqrt{89})}{4}$.

(v) Setting $a = \mu = 1$ and $b = 4$ in Theorem 3.2, we obtain that $\mathbb{W}_{4,\nu}(z)$ is convex in $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$ if $\nu \in [0.76, 0.95]$. Putting $a = \mu = 1$ and $b = 2$ in Theorem 3.4, we have $\mathbb{W}_{2,\nu}(z)$ is starlike in $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$ if $\nu \in [0.645, 0.999]$. Similarly, we can verify that the other results obtained in Section 3 will be useful to discuss the geometric properties of $\mathbb{W}_{b,\nu}(z)$ when $0 < \nu < 1$. In literature, various results involving geometric properties of $\mathbb{W}_{b,\nu}(z)$ are available [24] with the condition that $b, \nu \geq 1$. But the results obtained in Section 3 discuss the case $0 < \nu < 1$. On the other hand, the results obtained in Section 4, will be helpful to discuss the geometric properties of $\mathbb{W}_{b,\nu}(z)$ when $b, \nu \geq 1$.

Acknowledgements. The authors would like to thank the reviewers for the comments and suggestions that helped to improve the paper.

Список литературы

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, **55**, For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, DC (1964).

[2] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **71**, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[3] D. Bansal and J. K. Prajapat, "Certain geometric properties of the Mittag-Leffler functions", Complex Var. Elliptic Equ. **61**, no. 3, 338 – 350 (2016).

[4] Á. Baricz, Generalized Bessel Functions of the First Kind, Lecture Notes in Mathematics, **1994**, Springer-Verlag, Berlin (2010).

[5] J. Bustoz, M.E.H. Ismail, "On gamma function inequalities", Math. Comp. **47**, 659 – 667 (1986).

[6] P. L. Duren, Univalent Functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **259**, Springer-Verlag, New York (1983).

[7] L. Féjer, "Untersuchungen ber Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge", Acta iterarum Sci. **8**, 89 – 115 (1936).

[8] A. W. Goodman, Univalent Functions, Vol. I, Mariner Publishing Co., Inc., Tampa, FL (1983).

[9] A. W. Goodman, Univalent Functions, Vol. II, Mariner Publishing Co., Inc., Tampa, FL (1983).

[10] A. W. Goodman, "On uniformly starlike functions", J. Math. Anal. Appl. **155**, no. 2, 364 – 370 (1991).

[11] A. W. Goodman, "On uniformly convex functions", Ann. Polon. Math. **56**, no. 1, 87 – 92 (1991).

[12] S. Kakeya, "On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients", Thoku Math. J. **2**, 140 – 142 (1912).

[13] Y. Luchko and R. Gorenflo, "Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order", Fract. Calc. Appl. Anal. **1**, no. 1, 63 – 78 (1998).

[14] T. H. MacGregor, "The radius of univalence of certain analytic functions. II", Proc Amer. Math. Soc. **14**, 521 – 524 (1963).

[15] T. H. MacGregor, "A class of univalent functions", Proc. Amer. Math. Soc. **15**, 311 – 317 (1964).

[16] K. Mehrez, "New integral representations for the Fox-Wright functions and its applications", J. Math. Anal. Appl. **468**, no. 2, 650 – 673 (2018).

[17] P. T. Mocanu, "Some starlike conditions for analytic functions", Rev. Roumaine. Math. Pures. Appl. **33**, 117 – 124 (1988).

[18] P. T. Mocanu, "Some simple criteria for starlikeness and convexity", Libertas Math. **13**, 27 – 40 (1993).

[19] S. Noreen, M. Raza, J. -L. Liu 2, M. Arif, Geometric Properties of Normalized Mittag-Leffler Functions, Symmetry 11, 45 (2019).

[20] S. Ozaki, "On the theory of multivalent functions", Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A, **2**, 167 – 188 (1935).

[21] F. Mainardi, Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity, Imperial College Press, London (2010).

[22] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, **198**, Academic Press, Inc., San Diego, CA (1999).

[23] T. K. Pogány and H. M. Srivastava, "Some Mathieu-type series associated with the Fox-Wright function", Comput. Math. Appl. **57**, no. 1, 127 – 140 (2009).

[24] J. K. Prajapat, "Certain geometric properties of the Wright function", Integral Transforms Spec. Funct. **26**, no. 3, 203 – 212 (2015).

[25] R. K. Raina, "On univalent and starlike Wright's hypergeometric functions", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **95**, 11 – 22 (1996).

[26] V. Ravichandran, "On uniformly convex functions", Ganita **53**, no. 2, 117 – 124 (2002).

[27] F. Rønning, "Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions", Proc. Amer. Math. Soc. **118**, no. 1, 189 – 196 (1993).

[28] A. Swaminathan, "Sufficient conditions for hypergeometric functions to be in a certain class of analytic functions", Comput. Math. Appl. **59**, no. 4, 1578 – 1583 (2010).

[29] H. S. Wilf, "Subordinating factor sequences for convex maps of the unit circle", Proc. Amer. Math. Soc. **12**, 689 – 693 (1961).

[30] E. M. Wright, "On the coefficients of power series having exponential singularities", J. London Math. Soc. **8**, no. 1, 71 – 79 (1933).

[31] E. M. Wright, "The asymptotic expansion of the generalized Bessel function", Proc. London Math. Soc. (2) **38**, 257 – 270 (1935).

[32] E. M. Wright, "The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function", J. London Math. Soc. **10**, 287 – 293 (1935).
[33] E. M. Wright, "On the coefficients of power series having exponential singularities", Journal London Math. Soc. **8**, 71 – 79 (1933).
[34] E. M. Wright, "The generalized Bessel function of order greater than one", Quart. J. Math., Oxford Ser. **11**, 36 – 48 (1940).

Поступила 13 ноября 2020

После доработки 22 мая 2021

Принята к публикации 26 мая 2021

Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 1, 2022, стр. 64 – 76.

INFINITELY MANY SOLUTIONS FOR NEUMANN PROBLEMS ASSOCIATED TO NON-HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL OPERATORS THROUGH ORLICZ-SOBOLEV SPACES

A. KASHIRI, G. A. AFROUZI

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.1-64-76

University of Mazandaran, Babolsar, Iran
E-mails: *a.kashiri@umz.ac.ir; afrouzi@umz.ac.ir*

Abstract. The goal of this paper is to establish the existence of an unbounded sequence of weak solutions for the following non-homogeneous Neumann problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(a(x,|\nabla u(x)|)\nabla u(x)\big) + a(x,|u(x)|)u(x) = \lambda f\big(x,u(x)\big) & \text{for } x \in \Omega, \\ a\big(x,|\nabla u(x)|\big)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \mu g\big(\gamma(u(x))\big) & \text{for } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

To deal with the existence of the mention solutions, we use the variational methods and critical point theory, in an appropriate Orlicz-Sobolev space.

MSC2010 numbers: 35J60; 35J20; 46N20; 58E05.

Keywords: multiple solution; Neumann problem; non-homogeneous differential operator; Orlicz-Sobolev space; variational methods.

1. Introduction

In this paper, we study the non-homogeneous Neumann problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(a(x,|\nabla u(x)|)\nabla u(x)\big) + a(x,|u(x)|)u(x) = \lambda f\big(x,u(x)\big) & \text{for } x \in \Omega, \\ a\big(x,|\nabla u(x)|\big)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \mu g\big(\gamma(u(x))\big) & \text{for } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ with smooth boundary $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ is the outer unit normal derivative, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function, λ and μ are real parameters with $\lambda > 0$ and $\mu \geq 0$, and the functions $a(x,t) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and γ will be specified later.

In recent years, quasilinear elliptic partial differential equations involving non-homogeneous differential operators are becoming increasingly important in applications in many fields of mathematics, such as approximation theory, mathematical physics (electrorheological fluids, nonlinear elasticity and plasticity), calculus of ariations, nonlinear potential theory, the theory of quasi-conformal mappings, differential geometry, geometric function theory, probability theory (for instance see [9, 16]). Another recent application which uses non-homogeneous differential operators can be found in the framework of image processing (see [5]). The study of nonlinear elliptic equations involving quasilinear homogeneous type operators is based on the theory of Sobolev spaces $W^{m,p}(\Omega)$ in order to find weak solutions. In the case of non-homogeneous differential operators, the natural setting for this approach is the use of Orlicz-Sobolev spaces. These spaces consist of functions that have weak derivatives and satisfy certain integrability conditions. Many properties of Orlicz-Sobolev spaces come in [1, 7, 8], [17]-[21]. The importance of Orlicz-Sobolev spaces arises from its applications to many different fields of mathematics, such as approximation theory, partial differential equations, calculus of variations, nonlinear potential theory, quasiconformal mappings, differential geometry, geometric function theory, and probability theory, for instance see [9, 16]. Due to these, in recent years, the existence of solutions for the eigenvalue problems involving non-homogeneous operators in the divergence form, have been widely studied by many authors. They have studied the existence of solutions by means of variational methods and critical point theory, monotone operator methods, fixed point theory and degree theory, for instance see [2, 15, 17, 23]. For example, in [3] the author establish some new sufficient conditions under which the problem (1.1) possesses three weak solutions in the Orlicz-Sobolev space. In [2] employing variational methods and critical point theory, in an appropriate Orlicz-Sobolev setting, the existence of infinitely many solutions for Steklov problems associated to non-homogeneous differential operators was established. In [23] the authors establish the existence of infinitely many non-negative weak solutions to the non-homogeneous Neumann problem:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u(x)|)\nabla u(x))u(x) + a(|u(x)|)u(x) = \lambda h(x)f(u(x)) & \text{for } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{for } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ with smooth boundary $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ is the outer unit normal derivative, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $h : \bar{\Omega} \to [0, +\infty)$ are continuous functions, λ is positive parameter, and the functions $a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ is such that the mapping $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$\phi(t) = \begin{cases} a(|t|)t & \text{for} \quad t \neq 0, \\ 0 & \text{for} \quad t = 0 \end{cases}$$

is an odd and increasing homeomorphism $\mathbb{R}$ onto $\mathbb{R}$.

In the present paper, motivated by the above facts and the papers [6, 13], under an appropriate oscillating behavior of the primitive of the nonlinearity and a suitable growth of the primitive of g at infinity, when $p^- := \inf_{x\in\Omega} p(x) > N$, the existence of infinitely many weak solutions for the problem (1.1) in the Orlicz-Sobolev space, is obtained, for all λ belonging to a precise interval and provided μ small enough (Theorem 3.1).

A special case of Theorem 3.1 is the following theorem, when $g(t) = 0$ for all $t \in \mathbb{R}$.

Theorem 1.1. *Let $p \in C(\overline{\Omega})$ with $p^- > N$ for all $x \in \overline{\Omega}$ and let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a non-negative continuous function. Put $F(\xi) = \int_0^\xi f(t)dt$ for all $\xi \in \mathbb{R}$ and assume that*

$$\liminf_{\xi \to +\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^{\phi_0}} = 0 \qquad \text{and} \qquad \limsup_{\xi \to +\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^{\phi^0}} = +\infty.$$

Then, the problem

$$\begin{cases} -div\big(\alpha(x, |\nabla u(x)|)\nabla u(x)\big) + \alpha(x, |u(x)|)u(x) = f(u(x)) & \text{for } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{for } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

admits infinitely many weak solutions in $W^1L_\Phi(\Omega)$.

This paper is organized as follows. In section 2, the abstract critical point theorem (Theorem 2.1) is recalled. Moreover, some preliminaries and the abstract Orlicz-Sobolev spaces setting are presented. In Section 3, our main result is established, then some particular case and some example are presented.

2. Preliminaries

Our main tool is the following critical points theorem obtained in [4]. This result is a refinement of the variational principle of Ricceri [22].

Theorem 2.1. *Let X be a reflexive real Banach space, let $J, I : X \to \mathbb{R}$ be two Gâteaux differentiable functionals such that J is strongly continuous, sequentially weakly lower semicontinuous and coercive and I is sequentially weakly upper semicontinuous. For every $r > \inf_X J$, put*

$$\varphi(r) := \inf_{u \in J^{-1}(]-\infty, r[)} \frac{\left(\sup_{v \in J^{-1}(]-\infty,r[)} I(v)\right) - I(u)}{r - J(u)},$$

and

$$\overline{\gamma} := \liminf_{r \to +\infty} \varphi(r), \qquad \delta := \liminf_{r \to (\inf_X J)^+} \varphi(r).$$

Then we have the following.

(*a*) *For every $r > \inf_X J$ and every $\lambda \in]0, \frac{1}{J(r)}[$, the restriction of the functional $T_\lambda := J - \lambda I$ to $J^{-1}(]-\infty, r[)$ admits a global minimum, which is a critical point (local minimum) of T_λ in X.*

(*b*) *If $\overline{\gamma} < +\infty$, then, for each $\lambda \in]0, \frac{1}{\overline{\gamma}}[$, the following alternative holds: either the functional $T_\lambda := J - \lambda I$ has a global minimum, or there exists a sequence $\{u_n\}$ of critical points (local minima) of T_λ such that $\lim_{n \to +\infty} J(u_n) = +\infty$.*

(c) *If $\delta < +\infty$ then, for each $\lambda \in]0, \frac{1}{\delta}[$, the following alternative holds: either there exists a global minimum of J which is a local minimum of $T_\lambda := J - \lambda I$, or there exists a sequence $\{u_n\}$ of pairwise distinct critical points (local minima) of T_λ, with $\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \inf_X J$, which weakly converges to a global minimum of J.*

We begin by recalling some facts from the theory of Orlicz-Sobolev spaces that will be used in the present paper; for more details we refer the reader to Adams [1], Diening [8], Musielak [18], Rao and Ren [21], Rădulescu [19], Rădulescu and Repovš [20]. Suppose that the function $\alpha(x,t) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is such that the mapping $\varphi(x,t) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defined by

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} a(x,|t|)t & \text{for} \quad t \neq 0, \\ 0 & \text{for} \quad t = 0 \end{cases}$$

satisfies the condition(φ) for all $x \in \Omega, \varphi(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an odd, increasing homeomorphism from $\mathbb{R}$ onto $\mathbb{R}$, and

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \varphi(x,s)ds, \qquad \forall\, x \in \bar{\Omega},\, t \geq 0$$

belongs to class Φ (see [18], p. 33), i.e., the function Φ satisfies the following conditions:

(Φ_1) for all $x \in \Omega$, $\phi(x,\cdot) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ is a non-decreasing continuous function, with $\Phi(x,0) = 0$ and $\Phi(x,t) > 0$ whenever $t > 0$, $\lim_{t\to\infty} \Phi(x,t) = \infty$,

(Φ_2) for every $t \geq 0$, $\Phi(x,\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ is a measurable function.

Since $\phi(x,\cdot)$ satisfies condition (ϕ), we deduce that $\Phi(x,\cdot)$ is convex and increasing from $\mathbb{R}^+$ to $\mathbb{R}^+$.

For the function Φ, we define the *generalized Orlicz class*,

$$K_\Phi(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ measurable; } \int_\Omega \Phi(x,|u(x)|)\,dx < \infty\}$$

and the *generalized Orlicz class*,

$$L^\Phi(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ measurable; } \lim_{\lambda\to 0^+} \int_\Omega \Phi(x,\lambda|u(x)|)\,dx = 0\}$$

The space $L^\Phi(\Omega)$ is a Banach space endowed with the *Luxemburg norm*

$$|u|_\Phi = \inf\left\{\mu > 0;\ \int_\Omega \Phi\left(x, \frac{|u(x)|}{\mu}\right) dx \leq 1\right\}$$

or the equivalent norm (the *Orlicz norm*)

$$|u|_{(\Phi)} = \sup\left\{\left|\int_\Omega u\,v\,dx\right|;\ v \in L^{\overline{\Phi}}(\Omega),\ \int_\Omega \overline{\Phi}(x,|v(x)|)\,dx \leq 1\right\}.$$

where $\overline{\Phi}$ denotes the *conjugate Young* function of Φ, that is,

$$\overline{\Phi}(x,t) = \sup_{s>0}\left\{t\,s - \Phi(x,s);\ s \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega},\, t \geq 0.$$

Furthermore, for Φ and $\overline{\Phi}$ conjugate Young functions, the Hölder type inequality holds true

$$\left| \int_{\Omega} u\, v\, dx \right| \leq B \times |u|_{\Phi} \times |v|_{\overline{\Phi}}, \qquad \forall\, u \in L^{\Phi}(\Omega),\, v \in L^{\overline{\Phi}}(\Omega), \tag{2.1}$$

where B is a positive constant (see [18, Theorem 13.13]). In this paper we assume that there exist two positive constants φ_0 and φ^0 such that

$$1 < \varphi_0 \leq \frac{t\, \varphi(x,t)}{\Phi(x,t)} \leq \varphi^0 < \infty, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega},\, t \geq 0. \tag{2.2}$$

The above relation implies that Φ satisfies the $\triangle_2$-*condition*, i.e.

$$\Phi(x, 2t) \leq K \times \Phi(x,t), \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega},\, t \geq 0. \tag{2.3}$$

where K is a positive constant (see [17, Proposition 2.3]). Relation (2.3) and Theorem 8.13 in [18] imply that $L^{\Phi}(\Omega) = K_{\Phi}(\Omega)$. Furthermore, we assume that Φ satisfies the following condition:

$$\text{for each}\, x \in \overline{\Omega}, \text{ the function}\, [0, \infty) \ni t \to \Phi(x, \sqrt{t}) \text{ is convex.} \tag{2.4}$$

Relation (2.4) assures that $L^{\Phi}(\Omega)$ is an uniformly convex space and thus, a reflexive space (see [17], Proposition 2.2).

On the other hand, we point out that assuming that Φ and Ψ belong to class Φ and

$$\Psi(x,t) \leq K_1 \cdot \Phi(x, K_2.t) + h(x), \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega},\, t \geq 0, \tag{2.5}$$

where $h \in L^1(\Omega)$, $h(x) \geq 0$ a.e. $x \in \Omega$ and K_1, K_2 are positive constants, then by Theorem 8.5 in [18] we have that there exists the continuous embedding $L^{\Phi}(\Omega) \subset L^{\Psi}(\Omega)$. Next, we define the *generalized Orlicz-Sobolev space*

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \left\{ u \in L^{\Phi}(\Omega);\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{\Phi}(\Omega),\, i = 1, \ldots, N \right\}.$$

On $W^{1,\Phi}(\Omega)$ we define the equivalent norms

$$\|u\|_{1,\Phi} = |\,|\nabla u|\,|_{\Phi} + |u|_{\Phi},$$

$$\|u\|_{2,\Phi} = \max\{|\,|\nabla u|\,|_{\Phi}, |u|_{\Phi}\},$$

$$\|u\| = \inf \left\{ \mu > 0; \int_{\Omega} \left[\Phi\left(x, \frac{|u(x)|}{\mu}\right) + \Phi\left(x, \frac{|\nabla u(x)|}{\mu}\right) \right] dx \leq 1 \right\}.$$

More precisely, for every $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$, we have

$$\|u\| \leq 2\|u\|_{2,\Phi} \leq 2\|u\|_{1,\Phi} \leq 4\|u\| \tag{2.6}$$

(see [17, Proposition 2.4]). The generalized Orlicz-Sobolev space $W^{1,\Phi}(\Omega)$ endowed with one of the above norms is a reflexive Banach space.

In the following, we will use the norm $\|\cdot\|$ on $E := W^{1,\Phi}(\Omega)$ and we suppose that $\gamma : E \to L^{\Phi}(\Omega)$ is the trace operator.

The following lemma is useful in the proof of our results (see, for instance, Lemma 2.3 of [15]).

Lemma 2.1. *Let $u \in E$. Then*

$$\int_\Omega \Big(\Phi(x, |\nabla u(x)|) + \Phi(x, |u(x)|)\Big)\, dx \geq \|u\|^{\phi_0} \qquad \text{if} \quad \|u\| > 1; \tag{2.7}$$

$$\int_\Omega \Big(\Phi(x, |\nabla u(x)|) + \Phi(x, |u(x)|)\Big)\, dx \geq \|u\|^{\phi^0} \qquad \text{if} \quad \|u\| < 1. \tag{2.8}$$

We point out that assuming that Φ and Ψ belong to class Φ, satisfying relation (2.5) and $\inf_{x\in\Omega} \Phi(x, 1) > 0$, $\inf_{x\in\Omega} \Psi(x, 1) > 0$ then there exists the continuous embedding $W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\Psi}(\Omega)$.

In this paper we study the problem (1.1) in the particular case when Φ satisfies

$$M \times |t|^{p(x)} \leq \Phi(x, t), \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega},\ t \geq 0, \tag{2.9}$$

where $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ with $p^- > N$ for all $x \in \overline{\Omega}$, and $M > 0$ is a constant.

By the relation (2.9) we deduce that E is continuously embedded in $W^{1,p(x)}(\Omega)$ (see relation (2.5) with $\Psi(x, t) = |t|^{p(x)}$).

Moreover, as pointed out in [11] and [14], $W^{1,p(x)}(\Omega)$ is continuously embedded in $W^{1,p^-}(\Omega)$ and since $p^- > N$, we deduce that $W^{1,p^-}(\Omega)$ is compactly embedded in $C^0(\overline{\Omega})$. Thus, E is compactly embedded in $C^0(\overline{\Omega})$, and there exists a constant $m > 0$ such that

$$\|u\|_\infty \leq m\, \|u\|, \quad \forall\, u \in E, \tag{2.10}$$

where $\|u\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$.

Throughout the sequel, $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an L^1-Carathéodory function, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a nonnegative continuous function, and λ and μ are real parameters. Put

$$F(x, t) := \int_0^t f(x, \xi) d\xi \qquad \text{for all}\, (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

and

$$G(t) := \int_0^t g(\xi) d\xi \qquad \text{for all}\, t \in \mathbb{R}.$$

We say that $u \in E$ is a weak solution of the problem (1.1) if

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \alpha(x, |\nabla u(x)|)\nabla u(x) \times \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega \alpha(x, |u(x)|)\, u(x)\, v(x)\, dx \\ &= \lambda \int_\Omega f(x, u(x))\, v(x)\, dx + \mu \int_{\partial\Omega} g\Big(\gamma(u(x))\Big)\gamma(v(x))\, d\sigma \end{aligned}$$

for every $v \in E$.

3. Main results

We formulate our main result as follows. Let

$$A := \liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\int_\Omega \max\limits_{|t|<\xi} F(x,t)dx}{\xi^{\phi_0}}, \qquad B := \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_\Omega F(x,\xi)dx}{\xi^{\phi^0}},$$

and

$$\lambda_1 := \frac{\int_\Omega \Phi(x,1)dx}{B}, \qquad \lambda_2 := \frac{1}{c^{\phi_0} A}, \tag{3.1}$$

where c is given by (2.10).

Theorem 3.1. *Let $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be an L^1-Carathéodory function. Assume that*

$$\liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\int_\Omega \max_{|t|<\xi} F(x,t)dx}{\xi^{\phi_0}} < \frac{1}{c^{\phi_0}\int_\Omega \Phi(x,1)dx} \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_\Omega F(x,\xi)dx}{\xi^{\phi^0}}.$$

Then, for each $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$, for each nonnegative continuous function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$G_\infty = \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{G(\xi)}{\xi^{\phi_0}} < +\infty,$$

and for each $\mu \in [0, \delta[$, with

$$\delta = \frac{1 - c^{\phi_0}\lambda A}{c^{\phi_0} G_\infty a(\partial\,\Omega)},$$

when $a(\partial\,\Omega) = \int_{\partial\,\Omega} d\sigma$, problem (1.1) admits a sequence of weak solutions which is unbounded in $E = W^1L_\Phi(\Omega)$.

Proof. Our aim is to apply Theorem 2.1 to problem (1.1). To this end, fix λ, μ and g satisfying our assumptions. For each $u \in E$, let the functionals $J, I : E \to \mathbb{R}$ be defined by

$$J(u) := \int_\Omega \Big(\Phi(x, |\nabla u(x)|) + \Phi(x, |u(x)|)\Big)dx,$$

$$I(u) := \int_\Omega F(x, u(x))dx + \frac{\mu}{\lambda}\int_{\partial\,\Omega} G(\gamma(u(x)))\, d\sigma,$$

and put $T_{\lambda,\mu}(u) := J(u) - \lambda I(u)$. Similar arguments as those used in [17, Lemma 4.2] imply that $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ with the derivative given by

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \alpha(x, |\nabla u(x)|)\nabla u(x) \times \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega \alpha(x, |u(x)|)u(x)\, v(x)\, dx$$

for every $v \in E$. Also J is bounded from below. Moreover, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ and

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\, dx + \frac{\mu}{\lambda}\int_{\partial\,\Omega} g\big(\gamma(u(x))\big)\gamma(v(x))\, d\sigma$$

for every $v \in E$.

So, with standard arguments, we deduce that the critical points of the functional T_λ are the weak solutions of problem (1.1). Let $\{\xi_n\}$ be a real sequence of positive numbers such that $\lim_{n\to+\infty}\xi_n = +\infty$, and

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_\Omega \max\limits_{|t|<\xi_n} F(x,t)dx}{\xi_n^{\phi_0}} = A.$$

Put $r_n := \left(\frac{\xi_n}{c}\right)^{\phi_0}$, for all $n\in\mathbb{N}$. By Lemma 2.1 and this fact that $\max\{r_n^{1/\phi_0}, r_n^{1/\phi^0}\} = r_n^{1/\phi_0}$, we deduce

$$\{v\in E : J(v) < r_n\} \subseteq \left\{v\in E : \|v\| < r_n^{1/\phi_0}\right\} = \left\{v\in E : \|v\| < \frac{\xi_n}{c}\right\}.$$

Moreover, due to (2.10), we have $|v(x)| \le \|v\|_\infty \le c\|v\| \le \xi_n,\ x\in\Omega$. Hence,

$$\left\{v\in E : \|v\| < \frac{\xi_n}{c}\right\} \subseteq \{v\in E : \|v\|_\infty \le \xi_n\}.$$

Therefore, one has

$$\begin{aligned}\varphi(r_n) &\le \frac{\sup\limits_{v\in J^{-1}(]-\infty,r_n[)} I(v)}{r_n} \le \frac{\int_\Omega \max\limits_{|t|\le\xi_n} F(x,t)dx + \frac{\mu}{\lambda}\int_{\partial\Omega}\max\limits_{|t|\le\xi_n} G(t)d\sigma}{\left(\frac{\xi_n}{c}\right)^{\phi_0}}\\ &\le c^{\phi_0}\frac{\int_\Omega \max\limits_{|t|\le\xi_n} F(x,t)dx + \frac{\mu}{\lambda}\,a(\partial\Omega)\,G(\xi_n)}{\xi_n^{\phi_0}}, \qquad \text{for all } n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Then,

$$\overline{\gamma} \le \liminf_{n\to+\infty}\varphi(r_n) \le c^{\phi_0}A + \frac{\mu}{\lambda}c^{\phi_0}\,a(\partial\Omega)G_\infty < +\infty.$$

Now, let $\{\eta_n\}$ be a real sequence of positive numbers such that $\lim_{n\to+\infty}\eta_n = +\infty$, and

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_\Omega F(x,\eta_n)dx}{\eta_n^{\phi^0}} = B, \tag{3.2}$$

for each $n\in\mathbb{N}$ large enough. For all $n\in\mathbb{N}$, define $w_n\in E$ by

$$w_n(x) = \eta_n, \qquad x\in\overline{\Omega}.$$

For any fixed $n\in\mathbb{N}$ large enough, due to the inequality

$$\Phi(x,\sigma\cdot t) \le \sigma^{\phi^0}\cdot\Phi(x,t), \qquad \forall\, x\in\overline{\Omega},\ t>0,\ \sigma>1$$

(see [17]), we have definitively,

$$J(w_n) = \int_\Omega \Phi(x,\eta_n)dx \le \eta_n^{\phi^0}\int_\Omega \Phi(x,1)dx.$$

On the other hand, from the definition of I, we infer

$$\begin{aligned} I(w_n) &= \int_\Omega F(x, w_n(x))dx + \frac{\mu}{\lambda}\int_{\partial\,\Omega} G(\gamma(w_n))\,d\sigma \\ &= \int_\Omega F(x,\eta_n)dx + \frac{\mu}{\lambda}\int_{\partial\,\Omega} G(\eta_n)\,d\sigma = \int_\Omega F(x,\eta_n)dx + \frac{\mu}{\lambda}\,a(\partial\,\Omega)G(\eta_n) \end{aligned}$$

and so

$$T_\lambda(w_n) = J(w_n) - \lambda I(w_n) \leq \eta_n^{\phi^0}\int_\Omega \Phi(x,1)dx - \lambda\left[\int_\Omega F(x,\eta_n)dx + \frac{\mu}{\lambda}\,a(\partial\,\Omega)G(\eta_n)\right].$$

Now, consider the following cases.

If $B < +\infty$, let

$$\epsilon \in \left]0, B - \frac{\int_\Omega \Phi(x,1)dx}{\lambda}\right[.$$

From (3.2), there exists ν_ϵ such that

$$\int_\Omega F(x,\eta_n)dx > (B-\epsilon)\,\eta_n^{\phi^0}, \qquad \text{for all}\, n > \nu_\epsilon,$$

and so

$$\begin{aligned} T_\lambda(w_n) &< \eta_n^{\phi^0}\int_\Omega \Phi(x,1)dx - \lambda\left[(B-\epsilon)\,\eta_n^{\phi^0} + \frac{\mu}{\lambda}\,G(\eta_n)a(\partial\,\Omega)\right] \\ &= \eta_n^{\phi^0}\left[\int_\Omega \Phi(x,1)dx - \lambda(B-\epsilon)\right] - \mu\,G(\eta_n)a(\partial\,\Omega). \end{aligned}$$

Since $\int_\Omega \Phi(x,1)dx - \lambda(B-\epsilon) < 0$, one has $\lim_{n\to+\infty} T_\lambda(w_n) = -\infty$.

If $B = +\infty$, fix

$$M > \frac{\int_\Omega \Phi(x,1)dx}{\lambda}.$$

From (3.2), there exists ν_M such that

$$\int_\Omega F(x,\eta_n)dx > M\,\eta_n^{\phi^0}, \qquad \text{for all}\, n > \nu_M,$$

and moreover

$$\begin{aligned} T_\lambda(w_n) &< \eta_n^{\phi^0}\int_\Omega \Phi(x,1)dx - \lambda\left[M\,\eta_n^{\phi^0} + \frac{\mu}{\lambda}\,G(\eta_n)a(\partial\,\Omega)\right] \\ &= \eta_n^{\phi^0}\left[\int_\Omega \Phi(x,1)dx - \lambda M\right] - \mu\,G(\eta_n)a(\partial\,\Omega). \end{aligned}$$

Since $\int_\Omega \Phi(x,1)dx - \lambda M < 0$, this leads to $\lim_{n\to+\infty} T_\lambda(w_n) = -\infty$.

Taking into account that

$$\left]\frac{\int_\Omega \Phi(x,1)dx}{B}, \frac{1}{c^{\phi_0}A}\right[\subseteq \left]0, \frac{1}{\bar{\gamma}}\right[,$$

and that T_λ does not possess a global minimum, from part (b) of Theorem 2.1, there exists an unbounded sequence $\{u_n\}$ of critical points, and our conclusion is achieved. □

Remark 3.1. *If in Theorem 3.1, we assume $f(x,0)=0$ for a.e. $x\in\Omega$, then the weak solutions obtained are nonnegative.*

Indeed, define

$$f_+(x,t)=\begin{cases} f(x,t) & \text{if} \quad t\geq 0,\\ 0 & \text{if} \quad t<0,\end{cases}$$

and consider the following problem

(3.3)
$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(\alpha(x,|\nabla u(x)|)\nabla u(x)\big)+\alpha(x,|u(x)|)u(x)=\lambda f_+\big(x,u(x)\big) & \text{for a.e. } x\in\Omega,\\ \alpha\big(x,|\nabla u(x)|\big)\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x)=\mu g\big(\gamma(u(x))\big) & \text{for a.e. } x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

If $\bar u$ is weak solution of problem (3.3), then one has

$$\begin{aligned}\int_\Omega \alpha(x,|\nabla\bar u(x)|)\nabla\bar u(x)\,\nabla v(x)\,dx+\int_\Omega \alpha(x,|\bar u(x)|)\,\bar u(x)\,v(x)\,dx\\ =\lambda\int_\Omega f_+(x,\bar u(x))\,v(x)\,dx+\mu\int_{\partial\Omega} g\Big(\gamma(\bar u(x))\Big)\gamma(v(x))\,d\sigma\end{aligned}$$

for every $v\in E$. Arguing by a contradiction and setting $A=\{x\in\Omega:\bar u(x)<0\}$ one has $A\neq\emptyset$. Put $\bar u^-=\min\{\bar u,0\}$. One has $\bar u^-\in E$, in fact from, [12, Lemma 7.6] one has

$$\nabla\bar u^-=\begin{cases} 0 & u\geq 0;\\ \nabla\bar u & u<0.\end{cases}$$

So, taking into account that $\bar u$ is a weak solution and by choosing $v=\bar u^-$ one has

$$\begin{aligned}\int_A \alpha(x,|\nabla\bar u(x)|)\nabla\bar u(x)\,\nabla\bar u(x)\,dx+\int_A \alpha(x,|\bar u(x)|)\,\bar u(x)\,\bar u(x)\,dx\\ =\lambda\int_A f_+(x,\bar u(x))\,\bar u(x)\,dx+\mu\int_{\partial\Omega} g\Big(\gamma(\bar u(x))\Big)\gamma(\bar u^-(x))\,d\sigma\leq 0,\end{aligned}$$

that is, $\|\bar u\|_{W^{1,\Phi}(A)}=0$ which is an absurd. Hence, our claim is proved.

We also observe that, when $f(x,t)\geq 0$ for a.e. $x\in\Omega$ and for all $t\in\mathbb{R}$, the same conclusion holds (see [10, Lemma 1.1]).

Theorem 3.2. *Let $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be an L^1-Carathéodory function. Assume that*

$$\liminf_{\xi\to+\infty}\frac{\int_\Omega \max_{|t|<\xi}F(x,t)dx}{\xi^{\phi_0}}<\frac{1}{c^{\phi_0}\int_\Omega\Phi(x,1)dx}\limsup_{\xi\to+\infty}\frac{\int_\Omega F(x,\xi)dx}{\xi^{\phi^0}}.$$

Then, for each $\lambda\in]\lambda_1,\lambda_2[$, where λ_1 and λ_2 are given in (3.1), problem

$$\begin{cases} -div\big(\alpha(x,|\nabla u(x)|)\nabla u(x)\big)+\alpha(x,|u(x)|)u(x)=\lambda f\big(x,u(x)\big) & \text{for } x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x)=0 & \text{for } x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

admits a sequence of weak solutions which is unbounded in $W^1L_\Phi(\Omega)$.

Remark 3.2. *We observe that the role of functions f and g can be reversed. For instance, we can study the following problem*

$$\begin{cases} -div\big(\alpha(x,|\nabla u(x)|)\nabla u(x)\big)+\alpha(x,|u(x)|)u(x)=\mu g(u(x)) & \text{for } x\in\Omega,\\ \alpha\big(x,|\nabla u(x)|\big)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x)=\lambda f\big(x,u(x)\big) & \text{for } x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

and obtain a sequence of weak solutions providing an oscillating behavior of f for a suitable interval of parameters λ. It is enough to substitute in the proof of Theorem 3.1 the functional I with the following

$$\tilde{I}(u):=\int_{\partial\Omega}F(x,\gamma(u(x)))\,d\sigma+\frac{\mu}{\lambda}\int_\Omega G(u(x))dx.$$

In particular, the case $\mu=0$ can be investigated.

Example 3.1. Let $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2<3\}$. Define

$$\varphi(x,y,t)=p(x,y)\frac{|t|^{p(x,y)-2}}{\log(1+|t|)}t \qquad \text{for} \quad t\neq 0 \quad \text{and} \quad \varphi(x,y,0)=0,$$

where $p(x,y)=x^2+y^2+3$ for all $(x,y)\in\Omega$. Some simple computations imply

$$\Phi(x,y,t)=\frac{|t|^{p(x,y)}}{\log(1+|t|)}+\int_0^{|t|}\frac{s^{p(x,y)}}{(1+s)(\log(1+s))^2}\,ds,$$

and the relations (φ), (Φ_1), and (Φ_2) are verified. For each $x\in\overline{\Omega}$ fixed, by Example 3 on p. 243 in [7], we have

$$p(x,y)-1\le\frac{t\varphi(x,y,t)}{\Phi(x,y,t)}\le p(x,y), \qquad \forall\, t\ge 0.$$

Thus, the relation (2.2) holds true with $\varphi_0=p^- -1=2$ and $\varphi^0=p^+:=\sup_{(x,y)\in\Omega}p(x,y)=6$. Next, Φ satisfies the condition (2.9) since

$$\Phi(x,y,t)\ge t^{p(x,y)-1}, \qquad \forall\,(x,y)\in\overline{\Omega},\ t\ge 0.$$

Finally, we point out that trivial computations imply that $\dfrac{d^2(\Phi(x,y,\sqrt{t}))}{dt^2}\ge 0$ for all $(x,y)\in\overline{\Omega}$ and $t\ge 0$. Thus, the relation (2.4) is satisfied. Consider

(3.4)
$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(p(x,y)\dfrac{|\nabla u|^{p(x,y)-2}}{\log(1+|\nabla u|)}\nabla u\right)+p(x,y)\dfrac{|u|^{p(x,y)-2}}{\log(1+|u|)}u=f(x,y,u) & \text{for } (x,y)\in\Omega,\\ p(x,y)\dfrac{|\nabla u|^{p(x,y)-2}}{\log(1+|\nabla u|)}\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{1}{1+(\gamma(u(x,y)))^2} & \text{for } (x,y)\in\partial\Omega. \end{cases}$$

where

$$f(x,y,t)=\begin{cases} f^*(x,y)t^6\Big(7+\sin(\ln(|t|))-7\cos(\ln(|t|))\Big) & \text{if}\,(x,y,t)\in\partial\Omega\times(\mathbb{R}-\{0\}),\\ 0 & \text{if}\,(x,y,t)\in\partial\Omega\times\{0\}, \end{cases}$$

where $f^* : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ is a non-negative continuous function and $t \in \mathbb{R}$. A direct calculation shows

$$F(x,y,t) = \begin{cases} f^*(x,y)t^7\Big(1-\cos(\ln(|t|))\Big) & \text{if} \quad (x,y,t) \in \partial\Omega \times (\mathbb{R}-\{0\}), \\ 0 & \text{if} \quad (x,y,t) \in \partial\Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

So,

$$\liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega} \max_{|t|<\xi} F(x,y,t)\, d\sigma}{\xi^2} = 0$$

and

$$\limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega} F(x,y,\xi)\, d\sigma}{\xi^6} = +\infty.$$

Hence, using Theorem 3.1, the problem (3.4) admits infinitely many weak solutions in E.

Список литературы

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).

[2] G. A. Afrouzi, S. Heidarkhani, S. Shokooh, “Infinitely many solutions for Steklov problems associated to non-homogeneous differential operators through Orlicz-Sobolev spaces”, Complex Var. Elliptic Eqs. **60**, 1505 – 1521 (2015).

[3] G. A. Afrouzi, V. Rădulescu, S. Shokooh, “Multiple solutions of Neumann problems: an Orlicz-Sobolev spaces setting”, Bull. Malay. Math. Sci. Soc., **40**, 1591 – 1611 (2017).

[4] G. Bonanno, G. Molica Bisci, “Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities”, Bound. Value Probl. **2009**, 1 -– 20 (2009).

[5] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, “Variable exponent linear growth functionals in image processing”, SIAM J. Appl. Math. **66**, 1383 – 1406 (2006).

[6] G. D’Aguì , A. Sciammetta, “Infinitely many solutions to elliptic problems with variable exponent and non-homogeneous Neumann conditions”, Nonlinear Analysis, **75**, 5612 -– 5619 (2012).

[7] S. G. Deng, “Eigenvalues of the $p(x)$-Laplacian Steklov problem”, J. Math. Anal. Appl. **339**, 925 – 937 (2008).

[8] L. Diening, “Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces”, Bull. Sci. Math., **129**, 657 -– 700 (2005).

[9] L. Diening, Theorical and Numerical Results for Electrorheological Fluids, Ph.D. thesis, University of Freiburg, Germany (2002).

[10] X. L. Fan, Q. H. Zhang, Y. Z. Zhao, “A strong maximum principle for $p(x)$-Laplace equations”, Chinese J. Contemp. Math. **24**, 277 -– 282 (2003).

[11] X. Fan, D. Zhao, “On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$”, J. Math. Anal. Appl., **263**, 424 – 446 (2001).

[12] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[13] S. Heidarkhani, G. A. Afrouzi, A. Hadjian, “Multiplicity results for elliptic problems with variable exponent and non-homogeneous Neumann conditions”, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **38**, 2589 – 2599 (2015).

[14] O. Kováčik, J. Rákosnĺk, “On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$”, Czechoslovak Math. J. **41**, 592 – 618 (1991).

[15] A. Kristály, M. Mihăilescu, V. Rădulescu, “Two non-trivial solutions for a non-homogeneous Neumann problem: an Orlicz-Sobolev space setting”, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **139**, 367 – 379 (2009).

[16] M. Mihăilescu, V. Rădulescu, "A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids", Proc. R. Soc., Lond., Ser. A, |462, no. 2073, 2625 – 2641 (2006).
[17] M. Mihăilescu, V. Rădulescu, "Neumann problems associated to non-homogeneous differential operators in Orlicz-Sobolev space", Ann. Inst. Fourier Grenoble. **6**, 2087 – 2111 (2008).
[18] J. Musielak, "Orlicz Spaces and Modular Spaces Lecture Notes in Mathematics", **1034**, Springer, Berlin (1983).
[19] V. Rădulescu, "Nonlinear elliptic equations with variable exponent: old and new", Nonlinear Anal. **121**, 336 -– 369 (2015).
[20] V. Rădulescu, D. Repovš, Partial Differential Equations with Variable Exponents: Variational Methods and Qualitative Analysis, Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton (2015).
[21] M. M. Rao and Z. D. Ren, Theory of Orlicz-Spaces, Dekker, New York (1991).
[22] B. Ricceri, "A general variational principle and some of its applications", J. Comput. Appl. Math. **113**, 401 -– 410 (2000).
[23] S. Shokooh, G. A. Afrouzi, J. R. Graef, "Infinitely many solutions for non-homogeneous Neumann problems in Orlicz-Sobolev spaces", Math. Slovaca **68** (4), 867 – 880 (2018).

Поступила 1 ноября 2020

После доработки 1 февраля 2021

Принята к публикации 14 февраля 2021

Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 1, 2022, стр. 77 – 84.

ALGORITHM OF CALCULATION OF COMBINED COMMODITY OPTIONS VALUE

H. KECHEJIAN, V. K. OHANYAN AND V. G. BARDAKHCHYAN

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.1-77-84

Freepoint Commodities, Stamford, CT, USA
Yerevan State University, Yerevan, Armenia[1]
E-mails: *hkechejian@hotmail.com; victoohanyan@ysu.am*
vardanbardakchyan@gmail.com

Abstract. General exotic commodity options involving more than one price process are modeled by an ordinary stochastic differential equation and mostly priced by either closed formula if one is derived or via Monte Carlo simulation. In this paper we derive some helpful simplification for general class of exotic switch options, with more than two commodity products, for less costly Monte Carlo simulation.

MSC2010 numbers: 97M30; 91B25; 65C30.

Keywords: commodity options; switch options; multivariate Gaussian distribution.

1. Introduction

The present paper continues the investigations begun in [1]-[6]. Commodity derivatives combined with other assets or containing several commodities generally require numerical techniques for pricing. For most cases with difference of two assets one uses Margrabe's formula (see [7]). Though this formula describes pricing for assets with predetermined dividend rate, one can derive analogous formula for case of two commodities (without any prescribed rate, but in complete market). The inspiration for this paper comes from market executed physical commodity sale/purchase contracts embedded with options. In one such case the physical commodity purchaser has the option of buying the commodity at the minimum of 2 future contracts. Denote these two future contracts prices by $F(t, T_1)$ and $G(t, T_2)$ at time t, where T_1 and T_2 are maturities of two contracts. Hereafter we always take risk free rate to be 0.

Note that the negative sign denotes cash out during the purchase we can write down the following equation dropping T_1 and T_2 but keeping in mind that $t_1 \leq T_1 < t_2 \leq T_2$.

$$-\min(G(t_2), F(t_1)) = -G(t_2) + \max(G(t_2) - F(t_1), 0) = -G(t_2) + (G(t_2) - F(t_1))^+$$

To see this explicitly for commodity market, consider the following derivative

$$V = E((G(t_2) - aF(t_1))^+)$$

[1]The research of the second author is partially supported by the Mathematical Studies Center at Yerevan State University.

with $G(t_2)$ and $F(t_1)$ representing different commodities market prices at different time, while E stands for expectation. This is a kind of exchange or switch option.

When working within Black-Scholes framework (with 1 driver for each process), the closed-form formula is the following

$$\begin{aligned} V = {} & x_2\Phi\left(\frac{-\ln a + \ln\frac{x_2}{x_1} + \frac{\sigma_1^2}{2}t_1 + \frac{\sigma_2^2}{2}t_2 - \sigma_1\sigma_2\rho t_1}{\sqrt{\sigma_2^2 t_2 + \sigma_1^2 t_1 - 2\sigma_1\sigma_2\rho t_1}}\right) \\ & - a x_1\Phi\left(\frac{-\ln a + \ln\frac{x_2}{x_1} - \frac{\sigma_1^2}{2}t_1 - \frac{\sigma_2^2}{2}t_2 + \sigma_1\sigma_2\rho t_1}{\sqrt{\sigma_2^2 t_2 + \sigma_1^2 t_1 - 2\sigma_1\sigma_2\rho t_1}}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

With $x_2 = G(0)$ and $x_1 = F(0)$, σ_2^2 and σ_1^2 are respective variances, and ρ is instantaneous correlation of two commodities, thus correlation of two commodities is ρt_1.

Formula (1.1) naturally reduces to two special cases (thus it is generalization of both of them).

1. Whenever we have $G(t) = F(t)$ (meaning dealing with same commodity future but in different times), the formula reduces to forward starting option.

$$V = x\Phi\left(\frac{-\ln a + \frac{\sigma^2}{2}(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}}\right) - ax\Phi\left(\frac{-\ln a - \frac{\sigma^2}{2}(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}}\right)$$

2. Whenever $a = 1$; and $t_2 = t_1 = t$, (1.1) reduces to Margrabe's formula (with 0 dividends).

$$V = x_2\Phi\left(\frac{\ln\frac{x_2}{x_1} + \frac{\sigma_1^2}{2}t + \frac{\sigma_2^2}{2}t - \sigma_1\sigma_2\rho t}{\sqrt{\sigma_2^2 t + \sigma_1^2 t - 2\sigma_1\sigma_2\rho t}}\right) - x_1\Phi\left(\frac{\ln\frac{x_2}{x_1} - \frac{\sigma_1^2}{2}t - \frac{\sigma_2^2}{2}t + \sigma_1\sigma_2\rho t}{\sqrt{\sigma_2^2 t + \sigma_1^2 t - 2\sigma_1\sigma_2\rho t}}\right)$$

It is the case where both commodities have one correlated driver having correlation ρt (all parameters either known, or calibrated). This formula is quite easy to check (see [8], and compare it to Margrabe's formula).

When dealing with more than 2 commodities, we cannot derive closed form formula for general case. Attempts to simplify computation have been made. Some of applied models can be found in ([9, 10]). For mean reverting process model pricing see [8]. For spot price spread options modelling based on given forward curve dynamics see [11]. The simplifications here are done to make numerical analysis faster.

As closed-form formulas are intractable or cannot be explicitly derived by use of elementary functions, Monte Carlo simulation is used for the case of more than 2 commodities (see [12])

$$V_s = E(h(G(t_3), H(t_2), F(t_1))|F_s) \tag{1.2}$$

We consider an exact type of switch option. The aim of the paper is to provide an easier formula to simplify Monte Carlo simulation and make the process faster, as generally Monte Carlo simulation with even 3 commodities require more than 10^{9k} simulations at once, where k is multiplicity (order) of simulations.

If we could somehow reduce the dimension by one, we will make it 10^{5k} times faster. For one exact type of 3 commodity based derivative we give algorithm based on direct computation, and with computation of integral of bivariate normal distribution. We give all necessary formulas as well as order of computation. In this final form only 10^{2k} simulation are needed.

2. Statement of problem with three futures

As we deal with switch (exchange) options, we take exact form of function h(.) in (1.2), namely

$$\begin{aligned} V_s &= E(\max(G(t_3) - \min(F(t_1); H(t_2)), 0)|F_s) \\ &= E((G(t_3) - \min(F(t_1); H(t_2)))^+|F_s) \end{aligned}$$

If all three commodities G, F, H are driven with one Wiener process and can be brought to martingale form, we would like to have some integral formula involving bivariate normal distribution. Hereafter we will take $s = 0$, and use $V = V^0$ notation. Taking the processes to be

$$\begin{aligned} &F(t_1) = F(0)e^{-\sigma_1 Y_1\sqrt{t_1}+t_1\theta_1}, \quad H(t_2) = H(0)e^{-\sigma_2 Y_2\sqrt{t_2}+t_2\theta_2} \\ &G(t_3) = G(0)e^{-\sigma_3 Y_3\sqrt{t_3}+t_3\theta_3}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Without loss of generality we assume $t_3 > t_2 > t_1$ and

$$(F(t_1), H(t_2), G(t_3)) \sim N\left(\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho_{12}\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}} & \frac{\rho_{13}\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}} \\ \frac{\rho_{12}\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}} & 1 & \frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} \\ \frac{\rho_{13}\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}} & \frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} & 1 \end{pmatrix}\right). \tag{2.2}$$

Vector $(F(t_1), H(t_2), G(t_3))$ has 3-dimensional normal distribution with mean vector μ and covariation matrix Σ, with $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$ are correlations (instantaneous) between respective commodities ($1 \to F; 2 \to H; 3 \to G$). In general, making use of Monte Carlo simulation, you will need $3 \times 3 \times k$ simulations, to calculate approximate price.

What we do, is simplification of formula through direct computation, which later yield to only 2 random variables to simulate. The nice part of it is that the derived formula does not need combined simulation of bivariate normal random variables. So there is no need to simulate $2 \times 2 \times k$, but rather $(1 + 1) \times k$, with the cost of other additional computations.

3. The main formula

Having the above framework, we can rewrite

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \max\Big(G(0)e^{-\sigma_3 y_3\sqrt{t_3}+t_3\theta_3} - F(0)e^{-\sigma_1 y_1\sqrt{t_1}+t_1\theta_1}, \\ G(0)e^{-\sigma_3 y_3\sqrt{t_3}+t_3\theta_3} - H(0)e^{-\sigma_2 y_2\sqrt{t_2}+t_2\theta_2}\Big)\, dy_1 dy_2 dy_3. \tag{3.1}$$

We divide the region of integration into three parts.
1. $G(t_3) - F(t_1) \geq \max((G(t_3) - H(t_2), 0))$;
2. $G(t_3) - H(t_2) > \max(G(t_3) - F(t_1), 0)$;
3. $0 > \max(G(t_3) - F(t_1), G(t_3) - H(t_2))$.

These regions do not overlap, their union represent the whole domain of integration, and on the 3rd region the integral yields 0. Now back to the first and 2nd regions. The first region can be understood equivalently $G(t_3) > F(t_1)$ & $H(t_2) > F(t_1)$ The 2nd region can be understood as $G(t_3) > H(t_2)$ & $H(t_2) < F(t_1)$ So we can rewrite $V = V_1 + V_2$. The final formula will have the following complicated form, where Φ_2 stands for bivariate normal distribution function: for V_1

$$\begin{aligned} &P_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{A_{1,I}}\Phi_2(y_2 = f_{A,2}(y_1); y_3 = f_{A,3}(y_1); m_{A,II}, m_{A,III}, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \rho_{II,III})dy_1 \\ &-Q_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{B_{1,I}}\Phi_2(y_2 = f_{B,2}(y_1); y_3 = f_{B,3}(y_1); m_{B,II}, m_{B,III}, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \rho_{II,III})dy_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

with the components

$$P_1 = \frac{G(0)e^{t_3\theta_3}\sigma_{II}\sigma_{III}\sqrt{1-\rho_{II,III}^2}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}, \quad Q_1 = \frac{F(0)e^{t_1\theta_1}\sigma_{II}\sigma_{III}\sqrt{1-\rho_{II,III}^2}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} f_{A,2}(y_1) = f_{B,2}(y_1) &= \frac{t_2\theta_2 - t_1\theta_1}{\sigma_2\sqrt{t_2}} + \frac{\sigma_1\sqrt{t_1}}{\sigma_2\sqrt{t_2}}y_1 + \frac{1}{\sigma_2\sqrt{t_2}}\ln\left(\frac{H(0)}{F(0)}\right) \\ f_{A,3}(y_1) = f_{B,3}(y_1) &= \frac{t_3\theta_3 - t_1\theta_1}{\sigma_3\sqrt{t_3}} + \frac{\sigma_1\sqrt{t_1}}{\sigma_3\sqrt{t_3}}y_1 + \frac{1}{\sigma_3\sqrt{t_3}}\ln\left(\frac{G(0)}{F(0)}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

and

$$\gamma_1 x_2 = \left(\frac{(\rho_{12}\rho_{23} - \rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\sigma_3\sqrt{t_3}|\Sigma|}{y_1}\right)\beta_1 - \left(1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)\alpha_1$$

$$\gamma_1 x_3 = \alpha_1\beta_1 - \left(1 - \frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right)\left(\frac{(\rho_{12}\rho_{23} - \rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\sigma_3\sqrt{t_3}|\Sigma|}{y_1}\right)$$

$$\gamma_1 z_2 = \frac{(\rho_{12}\rho_{23}-\rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}}\beta_1 - \left(1-\frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)\alpha_1$$

$$\gamma_1 z_3 = \alpha_1\beta_1 - \left(1-\frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right)\frac{(\rho_{12}\rho_{23}-\rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}}$$

(3.5)

$$\alpha_1 := -\frac{\rho_{12}\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}} + \frac{\rho_{13}\rho_{23}\sqrt{t_1 t_2}}{t_3}, \quad \beta_1 := -\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3 t_2}}$$

$$\gamma_1 := \left(-\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3 t_2}}\right)^2 - \left(1-\frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)\left(1-\frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right)$$

(3.6)

$$m_{A,II} = -y_1 x_2; m_{A,III} = -y_1 x_3$$
$$m_{B,II} = -y_1 z_2; m_{B,III} = -y_1 z_3$$

(3.7)

$$\sigma_{II} = \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{1-\frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}}\sqrt{1-\frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3} - \frac{\left(-\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3 t_2}}\right)^2}{\left(1-\frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)}}$$

$$\sigma_{III} = \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{1-\frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}}\sqrt{1-\frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2} - \frac{\left(-\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3 t_2}}\right)^2}{\left(1-\frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right)}}$$

$$\rho_{II,III} = \frac{\rho_{23}t_2 - \rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{(t_3-\rho_{13}^2 t_1)(t_2-\rho_{12}^2 t_1)}}$$

(3.8)

$$A_{1,I} = -\frac{1}{2|\Sigma|}\left(y_1^2\left(1-\frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right) - \right.$$
$$y_1^2\left(\left(1-\frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right)x_2^2 + \left(1-\frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)x_3^2 + \right.$$
$$\left.\left.2\sqrt{\left(1-\frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right)\left(1-\frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)}\left(-\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3 t_2}}\right)x_2 x_3\right)\right)$$

$$B_{1,I} = -\frac{1}{2|\Sigma|}\left(2|\Sigma|\sigma_1 y_1\sqrt{t_1} + y_1^2\left(1-\frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right) - \right.$$
$$y_1^2\left(\left(1-\frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right)z_2^2 + \left(1-\frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)z_3^2 + \right.$$
$$\left.\left.2\sqrt{\left(1-\frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right)\left(1-\frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)}\left(-\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3 t_2}}\right)z_2 z_3\right)\right),$$

where

(3.9)

$$|\Sigma| = 1 + \frac{2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}t_1}{t_3} - \frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3} - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3} - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}$$

Each term (3.3)-(3.9) should be calculated precisely in the following order. First fix some y_1. Then do the calculation like this (3.9) $\to$ (3.7) $\to$ (3.3)(3.5) $\to$ (3.4)(3.6)(3.8). Here (3.6) and (3.7) represents all parameters of both bivariate normal distributions. Note that they change with the change of y_1. Before computing (3.3) one can calculate integrals first. As (3.3) does not depend on y_1. For calculating integral just make y_1 change through some interval (with small steps note also that one cannot say that interval $(-3\sigma, 3\sigma)$, as σ changes with y_1). We obtain

(3.10)
$$V_2 = P_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{C_{2,I}} \Phi_2(y_1 = f_{C,1}(y_2); y_3 = f_{C,3}(y_2); m_{D,I}, m_{D,III}, \sigma_{C,I}, \sigma_{C,III}, \rho_{C,I,III}) dy_2$$
$$-Q_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{D_{2,I}} \Phi_2(y_1 = f_{D,1}(y_2); y_3 = f_{D,3}(y_2); m_{D,II}, m_{D,III}, \sigma_{C,II}, \sigma_{C,III}, \rho_{C,I,III}) dy_2$$

with the components

$$P_2 = \frac{G(0) e^{t_3\theta_3} \sigma_{C,I}\sigma_{C,III}\sqrt{1-\rho^2_{C,I,III}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$
$$Q_2 = \frac{H(0) e^{t_2\theta_2} \sigma_{C,I}\sigma_{C,III}\sqrt{1-\rho^2_{C,I,III}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \tag{3.11}$$

$$f_{C,1}(y_2) = f_{D,3}(y_2) = \frac{t_3\theta_3 - t_2\theta_2}{\sigma_3\sqrt{t_3}} + \frac{\sigma_2\sqrt{t_2}}{\sigma_3\sqrt{t_3}} y_1 + \frac{1}{\sigma_3\sqrt{t_3}} \ln\left(\frac{G(0)}{H(0)}\right)$$
$$f_{C,3}(y_2) = f_{D,1}(y_2) = \frac{t_1\theta_1 - t_2\theta_2}{\sigma_1\sqrt{t_1}} + \frac{\sigma_2\sqrt{t_2}}{\sigma_1\sqrt{t_1}} y_1 + \frac{1}{\sigma_2\sqrt{t_2}} \ln\left(\frac{F(0)}{H(0)}\right) \tag{3.12}$$

and

$$\gamma_2 v_1 = \beta_2\left(-\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3t_2}} + \frac{\sigma_3\sqrt{t_3}|\Sigma|}{y_2}\right) - \left(1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)\alpha_2$$
$$\gamma_2 v_3 = \beta_2\alpha_2 - \left(1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right)\left(-\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3t_2}} + \frac{\sigma_3\sqrt{t_3}|\Sigma|}{y_2}\right)$$
$$\gamma_2 w_1 = \beta_2\left(-\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3t_2}}\right) - \left(1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)\alpha_2$$
$$\gamma_2 w_3 = \beta_2\alpha_2 - \left(1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right)\left(-\frac{\rho_{23}\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_3}} + \frac{\rho_{12}\rho_{13}t_1}{\sqrt{t_3t_2}}\right)$$
$$\alpha_2 = \alpha_1; \beta_2 := \frac{(\rho_{12}\rho_{23} - \rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}}$$
$$\gamma_2 := \left(\frac{(\rho_{12}\rho_{23} - \rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}}\right)^2 - \left(1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)\left(1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right) \tag{3.13}$$

$$m_{C,I} = -y_2 v_1;\ m_{C,III} = -y_2 v_3$$
$$m_{D,I} = -y_2 w_1;\ m_{D,III} = -y_2 w_3 \tag{3.14}$$

$$\sigma_{C,I} = \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}} \sqrt{1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3} - \frac{\left(\frac{(\rho_{12}\rho_{23}-\rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}}\right)^2}{\left(1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)}}$$

$$\sigma_{C,III} = \frac{\sqrt{|\Sigma|}}{1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}} \sqrt{1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2} - \frac{\left(\frac{(\rho_{12}\rho_{23}-\rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}}\right)^2}{\left(1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right)}} \tag{3.15}$$

$$\rho_{C,II,III} = \frac{-(\rho_{12}\rho_{23} - \rho_{13})\sqrt{t_1 t_2}}{\sqrt{(t_3 - \rho_{23}^2 t_2)(t_2 - \rho_{12}^2 t_1)}}$$

$$C_{2,I} = -\frac{1}{2|\Sigma|}\left(y_2^2\left(1 - \frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right) - y_2^2\left(\left(1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right)v_1^2 + \left(1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)v_3^2 + 2\sqrt{\left(1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right)\left(1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)}\frac{(\rho_{12}\rho_{23} - \rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}}v_1 v_3\right)\right)$$

$$D_{2,I} = -\frac{1}{2|\Sigma|}\left(2|\Sigma|\sigma_2 y_2\sqrt{t_1} + y_2^2\left(1 - \frac{\rho_{13}^2 t_1}{t_3}\right) - y_2^2\left(\left(1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right)w_1^2 + \left(1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)w_3^2 + 2\sqrt{\left(1 - \frac{\rho_{23}^2 t_2}{t_3}\right)\left(1 - \frac{\rho_{12}^2 t_1}{t_2}\right)}\frac{(\rho_{12}\rho_{23} - \rho_{13})\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_3}}w_1 w_3\right)\right) \tag{3.16}$$

Generate y_2. Then make the calculation like this (3.9) $\rightarrow$ (3.15)(3.13) $\rightarrow$ (3.11) $\rightarrow$ (3.12)(3.14)(3.16).

Once you take inputs and combine them into formula (3.1), the remaining part is usage general Cholesky decomposition techniques (for 2 variable case it takes extremely simple form, see for example Box-Muller transform [12]), and generate 2 correlated variables in the form given in V_1 and V_2. This is exactly what is done in (3.4) and (3.12). Note, however, that one needs only one standard normal variable in each part. So first generate 2 normal random variables with prescribed bivariate distribution, then use each one in the integral.

Concluding algorithm:

1. Calibrate the parameters of the model parameters in (2.1) (either using least square or other techniques), plus find correlations from (2.2) (with correlation matrices estimation techniques).
2. Calculate (3.9) $\rightarrow$ (3.4) $\rightarrow$ (3.3)(3.5).
3. Generate y_1 running through some interval.
4. Calculate for each y_1 (3.4)(3.6)(3.8).
5. Then calculate normal distrbution values from (3.2) first and second integral. Multiply them by exponents in (3.8), and interval length of each step of change of y_1. Sum up them to compute integrals.

6. Find the value of (3.2).
7. Use (3.9) and further compute. (3.15)(3.13) $\to$ (3.11).
8. Generate y_2 running through some interval.
9. Calculate for each y_2 (3.12)(3.14)(3.16).
10. The same as in step 5, but for the second part (3.10) and using (3.16).
11. Find the value of (3.10).
12. Sum (3.2) and (3.10) to find (3.1).

Note that you need to generate only 1 variable in each case. In given form one needs to generate $\sim 10^{2k}$. However more computation should be carried out at each step. So the general result can be formulated as follows.

Theorem 3.1. *The price of (1.2) with given properties of h(.) function can be found by formula $V = V_1 + V_2$, where V_1 and V_2 can be calculated by (3.2) and (3.10).*

Remark. The described algorithm shows reduction in size of simulations needed for pricing by up to 10^{7k} times.

Список литературы

[1] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, “Tolling contracts”, Proceedings of the 6-th working conference “Reliability and optimization of structural systems”, 231 -– 236 (2012).

[2] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, “Tolling contracts with two driving prices”, Russian Journal of Mathematical Research, Series A, **1**, 14 -– 19 (2015).

[3] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, “Geometric average options for several futures”, Vestnik of Kazan State Power Engineering University, **3** (31), 171 -– 180 (2016).

[4] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, “Monte Carlo method for geometric average options on several futures”, Russian Journal of Mathematical Research, Series A, **1**, 10 -– 15 (2016).

[5] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, “Gas storage valuation based on spot prices”, Modeling of Artificial Intelligence, **5** (1), 22 -— 28 (2018).

[6] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, “On Poisson Mixture of lognormal distributions”, Lobachevski Journal of Mathematics, **41** (3), 340 – 348 (2020).

[7] W. Margrabe, “The value of an option to exchange one asset for another”, Journal of Finance, **33**, n. 1, 177 – 186 (1978).

[8] R. Carmona, V. Durrleman, “Pricing and Hedging Spread Options in a Log-Normal Model”, Working Paper, Department of Operations Research and Financial Engingeering, Princeton University, SIAM Review **45** (4) (2003).

[9] I. Karatzas, S. Shreve, Mathematical Finance, Springer Verlag, New York (2000).

[10] G. Poitras, “Spread options, exchange options, and arithmetic Brownian motion”, The Journal of Futures Markets, **18**, 487 – 517 (1998).

[11] S. Hikspoors, S. Jaimungal, “Energy spot price models and spread options pricing”, International Journal of Theoretical and Applied Finance, **10** (7), 1111 – 1135 (2007).

[12] P. Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer (2004).

Поступила 14 мая 2021

После доработки 6 августа 2021

Принята к публикации 20 сентября 2021

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 57, номер 1, 2022

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 57, No. 1, 2022

Contents