ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2020

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал "Известия НАН Армении, Математика" публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата А4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
   - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
   - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
   - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы , место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала "Известия НАН Армении, Математика", пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
   E-mail: sart@ysu.am, URL: http://www.maik.ru
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале "Journal of Contemporary Mathematical Analysis". URL: http://www.springer.com.

****

Заказ N993. Тираж 150. Подписано к печати 22.01.20.
Печ. л. 5,75. Бумага офсетная. Цена договорная.
Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 5, 2020, стр. 3 – 12

GENERALIZED COMPOSITION OPERATORS FROM THE LIPSCHITZ SPACE INTO THE ZYGMUND SPACE

S. MAHMOUDFAKHEH, H. VAEZI

University of Tabriz, Tabriz, Iran
E-mails: *s.mahmod@tabrizu.ac.ir; hvaezi@tabrizu.ac.ir*

Abstract. In this paper, at first we study boundedness and compactness criterions for generalized composition operator from the Lipschitz space into the Zygmund space. Then we estimate the essential norm of this operator.

MSC2010 numbers: 47B33, 30H99, 30H05.
Keywords: composition operator; Lipschitz space; Zygmund space; Essential norm.

1. Introduction

Let X and Y be Banach spaces. The essential norm of a bounded linear operator $T : X \to Y$ is its distance to the set of compact operators K mapping X into Y, that is,

$$\|T\|_{e,X\to Y} = \inf\{\|T - K\|_{X\to Y} : \text{K is compact}\}$$

Let $\mathbb{D}$ be the open unit disc in the complex plane $\mathbb{C}$, $H(\mathbb{D})$ the space of analytic functions on $\mathbb{D}$ and H^∞ be the space of bounded analytic functions on $\mathbb{D}$ with norm $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$.

Let $u \in H(\mathbb{D})$ and $\varphi \in S(\mathbb{D})$, the set of self-maps of $\mathbb{D}$. The weighted composition operator with symbols u and φ, denoted by uC_φ, is defined as follows

$$uC_\varphi f = M_u C_\varphi f = u(f \circ \varphi), \quad f \in H(\mathbb{D}),$$

where M_u is the multiplication operator with symbol u and C_φ is the composition operator. We refer the interested reader to [4] and [12] for the theory of the composition operators and to [2, 3, 6, 10, 14, 16, 20, 21, 22] for (weighted) composition on various spaces of analytic functions.

Let $\mathcal{Z}$ denote the set of all functions $f \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ such that

$$\|f\| = \sup \frac{|f(e^{i(\theta+h)}) + f(e^{i(\theta-h)}) - 2f(e^{i\theta})|}{h} < \infty,$$

where the supremum is taken over all $\theta \in \mathbb{R}$ and $h > 0$. By Theorem 5.3 of [12] and the Closed Graph Theorem, we see that an analytic function f on $\mathbb{D}$ belongs to $\mathcal{Z}$

if and only if $\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f''(z)| < \infty$. Furthermore,

$$\|f\| \approx \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f''(z)|.$$

The preceding quantity is seminorm for the space $\mathcal{Z}$. The norm defined by

$$\|f\|_{\mathcal{Z}} = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f''(z)|$$

yields a Banach space structure on $\mathcal{Z}$, which is called the Zygmund space.

Let $0 < \alpha < \infty$. A function $f \in H(\mathbb{D})$ is said to belong to the Bloch type space $\mathcal{B}^\alpha$, if

$$\beta_f = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|f'(z)| < \infty.$$

Under the seminorm $f \to \beta_f$, $\mathcal{B}^\alpha$ is conformally invariant, and the norm defined by $\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha} = |f(0)| + \beta_f$ yields a Banach space structure on $\mathcal{B}^\alpha$. It is well known that for $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{B}^\alpha$ is a subspace of H^∞. When $\alpha = 1$, we get the classical Bloch space $\mathcal{B}$.

The Lipschitz space Lip_α (with $0 < \alpha < 1$) is the space of functions $f \in H(\mathbb{D})$ satisfying the Lipschitz condition of order α, i.e, there exists a constant $C > 0$ such that

$$|f(z) - f(w)| \le C|z-w|^\alpha \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Such functions f extend continuously to the closure of the disc.

The quantity

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} = |f(0)| + \sup\left\{\frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|^\alpha}, \quad z, w \in \mathbb{D}, z \ne w\right\}$$

defines a norm on Lip_α. Let $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$ and set

$$C = \sup\{\frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|^\alpha}, \quad z, w \in \mathbb{D}, z \ne w\}.$$

Then, for $z \in \mathbb{D}$, we have

$$|f(z)| \le |f(0)| + C|z|^\alpha \le C|z-w|^\alpha \le \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}.$$

Thus, taking the supremum over $\mathbb{D}$, we obtain $\|f\|_\infty \le \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}$. By a theorem of Hardy and Littlewood [5], the elements of Lip_α are characterized by the following Bloch-type condition: A function $f \in H(\mathbb{D})$ belongs to Lip_α if and only if

$$\alpha(f) = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{1-\alpha}|f'(z)| < \infty.$$

Moreover,

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} \approx |f(0)| + \alpha(f). \tag{1.1}$$

Composition operators, weighted composition operators, and related operators between the Zygmund space and some various spaces of analytic functions have been studied in [7, 8, 9, 13, 19].

In [8], Li and Stević defined the generalization composition operator C_φ^g as follows

$$(C_\varphi^g f)(z) = \int_0^z f'(\varphi(\xi))g(\xi)d\xi. \tag{1.2}$$

Li and Stević studied the boundedness and compactness of the generalized composition operator on the Zygmund space and the Bloch type space and the little Bloch type space in [8]. In this paper, we study boundedness and compactness of the generalization composition operator C_φ^g from Lip_α to $\mathcal{Z}$. Also we give some estimates for the essential norm of this operator. Weighted composition operators uC_φ between Lip_α and $\mathcal{Z}$ spaces were studied by Colonna and Li in [2]. Some characterizations of the boundedness and compactness of the composition operator, as well as Volterra type operator, on the Bloch type space and the Zygmund space can be found in [1, 15, 17].

The notation $a \preceq b$ means that there is a positive constant C such that $a \leq Cb$. We say that $a \approx b$ if both $a \preceq b$ and $b \preceq a$ hold

2. Boundedness of the operator $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$

In this section, we give necessary and sufficient conditions for the boundedness of the operator $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$.

Theorem 2.1. *Let $0 < \alpha < 1$, $g \in H(\mathbb{D})$ and $\varphi \in S(\mathbb{D})$. Then the operator $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ is bounded if only if the following quantities are finite:*

$$M_1 = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)|g'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1-\alpha}}$$

and

$$M_2 = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)|g(z)\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2-\alpha}}.$$

Proof. For any $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$,

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|(C_\varphi^g f)''(z)| &= (1-|z|^2)|(f'(\varphi(z))g(z))'| \\ &\leq (1-|z|^2)|f'(\varphi(z)||g'(z))| \\ &+ (1-|z|^2)|(\varphi'(z))||g(z)||(f''(\varphi(z))| \\ &\leq C\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}\Big(\frac{(1-|z|^2)|g(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1-\alpha}} + \frac{(1-|z|^2)|g'(z)||\varphi(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2-\alpha}}\Big),\end{aligned}$$

where in the last inequality we have used (1.1) and the following well known characterization of Bloch type functions (see [18]):

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{1-\alpha}|f'(z)| \approx |f'(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{2-\alpha}|f''(z)|.$$

Conversely, assume that $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ is bounded. For a fixed $a \in \mathbb{D}$ and for $z \in \mathbb{D}$ and $1 \le j \le 3$, set

$$f_{a,j}(z) = \frac{(1-|a|^2)^j}{(1-\overline{a}z)^{j-\alpha}}.$$

A direct calculation shows that

$$f_{a,j}(a) = (1-|a|^2)^\alpha, \quad f'_{a,j}(a) = \frac{(j-\alpha)\overline{a}}{(1-|a|^2)^{1-\alpha}}, \quad f''_{a,j}(a) = \frac{(j-\alpha)(j+1-\alpha)\overline{a}^2}{(1-|a|^2)^{2-\alpha}}.$$

Then, for $w \in \mathbb{D}$, we get,

$$(C_\varphi^g f_{\varphi(w),1})''(w) = \frac{(1-\alpha)g(w)\overline{\varphi(w)}}{(1-|\varphi(w)|^2)^{1-\alpha}} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)g(w)\varphi'(w)\overline{\varphi(w)}^2}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}}, \tag{2.1}$$

$$(C_\varphi^g f_{\varphi(w),2})''(w) = \frac{(2-\alpha)g(w)\overline{\varphi(w)}}{(1-|\varphi(w)|^2)^{1-\alpha}} + \frac{(2-\alpha)(3-\alpha)g(w)\varphi'(w)\overline{\varphi(w)}^2}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}} \tag{2.2}$$

and

$$(C_\varphi^g f_{\varphi(w),3})''(w) = \frac{(3-\alpha)g(w)\overline{\varphi(w)}}{(1-|\varphi(w)|^2)^{1-\alpha}} + \frac{(3-\alpha)(4-\alpha)g(w)\varphi'(w)\overline{\varphi(w)}^2}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}}. \tag{2.3}$$

Subtracting (2.1) from (2.2), we get

$$\begin{aligned}(C_\varphi^g f_{\varphi(w),2})''(w) - (C_\varphi^g f_{\varphi(w),1})''(w) &= \frac{g(w)\overline{\varphi(w)}}{(1-|\varphi(w)|^2)^{1-\alpha}} \\ &+ \frac{(4-2\alpha)g(w)\varphi(w)^2\overline{\varphi(w)}^2}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

On the other hand, subtracting (2.1) from (2.3), we obtain

$$\begin{aligned}(C_\varphi^g f_{\varphi(w),3})''(w) - (C_\varphi^g f_{\varphi(w),1})''(w) &= \frac{2g(w)\overline{\varphi(w)}}{(1-|\varphi(w)|^2)^{1-\alpha}} \\ &+ \frac{(10-4\alpha)g(w)\varphi(w)^2\overline{\varphi(w)}^2}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}}.\end{aligned}$$

Subtracting (2.3) from (2.4), we get

$$\frac{2g(w)\varphi'(w)\overline{\varphi(w)}^2}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}} = (C_\varphi^g f_{\varphi(w),1})''(w) - 2(C_\varphi^g f_{\varphi(w),2})''(w) + (C_\varphi^g f_{\varphi(w),3})''(w)$$

which implies that

$$\begin{aligned}&\frac{(1-|w|^2)|g(w)\varphi'(w)||\varphi(w)|^2}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}} \\ &= \frac{1}{2}|(C_\varphi^g f_{\varphi(w),1})''(w)| + |(C_\varphi^g f_{\varphi(w),2})''(w)| + \frac{1}{2}|(C_\varphi^g f_{\varphi(w),3})''(w)| \\ &\le \frac{1}{2}\|(C_\varphi^g f_{\varphi(w),1})(w)\|_{\mathcal{Z}} + \|(C_\varphi^g f_{\varphi(w),2})(w)\|_{\mathcal{Z}} + \frac{1}{2}\|(C_\varphi^g f_{\varphi(w),3})(w)\|_{\mathcal{Z}} \\ &\le C.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Fix $r \in (0,1)$. If $|\varphi(w)| > r$, then by (2.5), we have

$$\frac{(1-|w|^2)|g'(w)|\varphi(w)|}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}} \le \frac{C}{r}.$$

Taking the functions $f(z) = z$ and $f(z) = z^2$ respectively, we obtain

$$N_1 = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)| < \infty \tag{2.6}$$

and

$$N_2 = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)\varphi(z) + g(z)\varphi'(z)| < \infty.$$

If $|\varphi(w)| < r$, then by (2.6) we get

$$M_1 = \frac{(1-|w|^2)|g'(w)|}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}} \leq \frac{N_1}{(1-r^2)^{1-\alpha}} \tag{2.7}$$

which, combined with (2.7), implies that $M_1 < \infty$. Arguing similarly, we get

$$\frac{(1-|w|^2)|g'(w)|}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}} \leq C$$

and

$$M_2 = \frac{(1-|w|^2)|g(w)\varphi'(w)|}{(1-|\varphi(w)|^2)^{2-\alpha}} \leq \frac{N_2}{(1-r^2)^{2-\alpha}} < \infty.$$

This is mean $M_2 < \infty$. $\square$

3. Compactness of the operator $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$

In this section, we study the compactness of the operator $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$. We begin with the following lemma.

Lemma 3.1 ([11], Lemma 3.7)**.** *Let $0 < \alpha < 1$ and T be a bounded linear operator from Lip_α into a normed linear space Y. Then T is compact if and only if $\|Tf_n\|_Y \to 0$ whenever $\{f_n\}$ is a norm-bounded sequence in Lip_α that converges to 0 uniformly on $\bar{\mathbb{D}}$.*

Theorem 3.2. *Let $0 < \alpha < 1$, $\varphi \in S(\mathbb{D})$ and $g \in H(\mathbb{D})$. Then $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ is compact if and only if bounded,*

$$\lim_{|\varphi(z_k)|\to 1} \frac{(1-|z_k|^2)|g'(z_k)|}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{1-\alpha}} = 0 \tag{3.1}$$

and

$$\lim_{|\varphi(z_k)|\to 1} \frac{(1-|z_k|^2)|\varphi'(z_k)||g(z_k)|}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{2-\alpha}} = 0.$$

Proof. Let $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{D}$ such that $|\varphi(z_k)| \to 1$ as $k \to \infty$. Let $f_{k,j} = \frac{(1-|\varphi(z_k)|^2)^j}{(1-\overline{\varphi(z_k)}z)^{j-\alpha}}, k \in \mathbb{N}$. Then $f_{k,j} \in \mathrm{Lip}_\alpha$, $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_{k,j}\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} < \infty$ and $f_{k,j} \to 0$ uniformly on $\overline{\mathbb{D}}$ as $k \to \infty$. Let $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ be compact. By Lemma 3.1 it gives $\lim_{k\to\infty} \|C_\varphi^g f_{k,j}\|_{\mathcal{Z}} = 0$. Note that

$$f'_{k,j}(\varphi(z_k)) = \frac{(j-\alpha)\overline{\varphi(z_k)}}{(1-|\varphi(z_k|^2)^{1-\alpha}}, \quad f''_{a,j}(\varphi(z_k)) = \frac{(j-\alpha)(j+1-\alpha)\overline{\varphi^2(z_k)}}{(1-|\varphi(z_k|^2)^{2-\alpha}}.$$

We have

$$\|C_\varphi^g f_{k,j}\|_{\mathcal{Z}} \geq \Big|\frac{(j-\alpha)(1-|z_k|^2)|g'(z_k)||\varphi(z_k)|}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{1-\alpha}}\Big| - \Big|\frac{(j-\alpha)(j+1-\alpha)(1-|z_k|^2)|\varphi'(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)|^2}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{2-\alpha}}\Big|.$$

Consequently

$$\lim_{|\varphi(z_k)|\to 1} \frac{(j-\alpha)(1-|z_k|^2)|g'(z_k)||\varphi(z_k)|}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{1-\alpha}} = \lim_{|\varphi(z_k)|\to 1} \frac{(j-\alpha)(j+1-\alpha)(1-|z_k|^2)|\varphi'(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)|^2}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{2-\alpha}} \tag{3.2}$$

if one of these two limits exists. Next, set

$$h_{k,j} = \frac{(1-|\varphi(z_k)|^2)^j}{(1-\overline{\varphi(z_k)}z)^{j-\alpha}} - \frac{j-\alpha}{j+1-\alpha}\frac{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{j+1}}{(1-\overline{\varphi(z_k)}z)^{j+1-\alpha}}.$$

Then $h'_{k,j}(\varphi(z_k)) = 0$, $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|h_{k,j}\|_{\mathcal{Z}} < \infty$ and $h_{k,j}$ converges to 0 uniformly on $\overline{\mathbb{D}}$ as $k \to \infty$. Since $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ is compact, we have $\lim_{k\to\infty} \|C_\varphi^g h_{k,j}\|_{\mathcal{Z}} = 0$. On the other hand,

$$\|C_\varphi^g h_{k,j}\|_{\mathcal{Z}} \geq \frac{(j-\alpha)(j+1-\alpha)(1-|z_k|^2)|\varphi'(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)|^2}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{2-\alpha}}.$$

Hence,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(j-\alpha)(j+1-\alpha)(1-|z_k|^2)|\varphi'(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)|^2}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{2-\alpha}} = 0.$$

Therefore,

$$\lim_{|\varphi(z_k)|\to 1} \frac{(1-|z_k|^2)|\varphi'(z_k)|g(z_k)|}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{2-\alpha}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(j-\alpha)(j+1-\alpha)(1-|z_k|^2)|\varphi'(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)|^2}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{2-\alpha}} = 0.$$

This together with (3.2) imply that

$$\lim_{|\varphi(z_k)|\to 1} \frac{(j-\alpha)(1-|z_k|^2)|g'(z_k)|}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{1-\alpha}} = 0.$$

Conversely, assume that $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ is bounded and (3.1) holds. Since $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ is bounded we have $\|C_\varphi^g f\|_{\mathcal{Z}} \leq C\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}$ for all $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$. Taking the functions $f(z) = z$ and $f(z) = z^2$ respectively, we obtain

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)| < \infty \tag{3.3}$$

and

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)\varphi(z) + g(z)\varphi'(z)| < \infty. \tag{3.4}$$

Using these facts and the boundedness of the function $\varphi(z)$, we get

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)| < \infty.$$

Then,

$$C_1 = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g(z)||\varphi'(z)| < \infty, \tag{3.5}$$

and

$$C_2 = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g(z)||\varphi'(z)| < \infty.$$

On the other hand, from (3.1), for every $\epsilon > 0$, there is a $\delta \in (0,1)$, such that

$$\frac{(1-|z_k|^2)|g'(z_k)||\varphi(z_k)|}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{1-\alpha}} < \epsilon \quad \text{and} \quad \frac{(1-|z_k|^2)|\varphi'(z_k)|g(z_k)|}{(1-|\varphi(z_k)|^2)^{2-\alpha}} < \epsilon \tag{3.6}$$

whenever $\delta < |\varphi(z)| < 1$. Assume that $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is a sequence in Lip_α such that $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} < \infty$ and (f_k) converges to 0 uniformly on $\overline{\mathbb{D}}$ as $k \to \infty$. Let $U = \{z \in \mathbb{D} : |\varphi(z)| \le \delta\}$. Then by (3.5) and (3.6), it follows that

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|(C_\varphi^g f_k)''(z)| &\le \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f_k'(\varphi(z))||g'(z)| \\
&\quad + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|(\varphi'(z))||g(z)||f_k''(\varphi(z))| + \sup_{z\in\mathbb{D}\setminus U}(1-|z|^2)|f_k'(\varphi(z))||g'(z)| \\
&\quad\quad + \sup_{z\in\mathbb{D}\setminus U}(1-|z|^2)|(\varphi'(z))||g(z)||f_k''(\varphi(z))| \\
&\le C_1 \sup_{z\in\mathbb{D}}|f_k'(\varphi(z))| + \sup_{z\in\mathbb{D}\setminus U}\frac{(1-|z|^2)|g(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1-\alpha}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} \\
&\quad\quad + C_2 \sup_{z\in\mathbb{D}}|f_k''(\varphi(z))| + \sup_{z\in\mathbb{D}\setminus U}\frac{(1-|z|^2)|g'(z)||\varphi(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2-\alpha}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} \\
&\le C_1 \sup_{|\lambda|\le\delta}|f_k'(\lambda)| + C_2 \sup_{|\lambda|\le\delta}|f_k''(\lambda)| + 2C_\epsilon\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}.
\end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi^g f_k\|_{\mathcal{Z}} &= |f_k'(\varphi(0))||g(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|(C_\varphi^g f_k)''(z)| \\
&\le C_1 \sup_{|\lambda|\le\delta}|f_k'(\lambda)| + C_2 \sup_{|\lambda|\le\delta}|f_k''(\lambda)| + 2C_\epsilon\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} + |f_k'(\varphi(0))||g(0)|.
\end{aligned}$$

The proof is complete. □

4. Essential norm of $C_\varphi^g f : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$

In this section, we give some estimates for the essential norm of operator $C_\varphi^g f : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$.

Theorem 4.1. *Let $\varphi \in S(\mathbb{D})$ and $g \in H(\mathbb{D})$ such that $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ is bounded. Then*

$$\|C_\varphi^g f\|_{e,\mathrm{Lip}_\alpha\to\mathcal{Z}} \approx \max\{A_1, A_2\},$$

where

$$A_j := \limsup_{|a|\to 1} \|C_\varphi^g\Big(\frac{(1-|a|^2)^j}{(1-\overline{a}z)^{j-\alpha}}\Big)\|_{\mathcal{Z}}, \quad j = 1, 2.$$

Proof. First we prove that $\max\{A_1, A_2\} \leq \|C_\varphi^g\|_{e,\mathrm{Lip}_\alpha\to\mathcal{Z}}$. Let $a \in \mathbb{D}$. Define

$$f_{a,j}(z) = \frac{(1-|a|^2)^j}{(1-\overline{a}z)^{j-\alpha}}.$$

It is easy to check that $f_{a,j} \in \mathrm{Lip}_\alpha$ for all $a \in \mathbb{D}$ and $f_{a,j}$ converges uniformly to 0 on compact subset of Lip_α as $|a| \to 1$ Thus, for any compact operator $T : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$, we have $\lim_{|a|\to 1} \|Tf_{a,j}\|_{\mathcal{Z}} = 0, \quad j = 1, 2$. Hence,

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi^g - T\|_{\mathrm{Lip}_\alpha\to\mathcal{Z}} &\gtrsim \limsup_{|a|\to 1} \|C_\varphi^g - Tf_{a,j}\|_{\mathcal{Z}} \\
&\gtrsim \limsup_{|a|\to 1} \|C_\varphi^g f_{a,j}\|_{\mathcal{Z}} - \limsup_{|a|\to 1} \|Tf_{a,j}\|_{\mathcal{Z}} = A_j.
\end{aligned}$$

Therefore, based on the definition of the essential norm, we obtain

$$\|C_\varphi^g\|_{e,\mathrm{Lip}_\alpha\to\mathcal{Z}} = \inf_k \|C_\varphi^g - T\|_{\mathrm{Lip}_\alpha\to\mathcal{Z}} \gtrsim A_j, \quad j = 1, 2.$$

Now, we prove that $\|C_\varphi^g f\|_{e,\mathrm{Lip}_\alpha\to\mathcal{Z}} \lesssim \max\{A_1, A_2\}$. For $r \in [0, 1)$, set $K_r : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ by $(K_r f)(z) = f_r(z) = f(rz)$. It is obvious that $f_r - f \to 0$ uniformly on compact subsets of $\mathbb{D}$ as $r \to 1$. Moreover, the operator K_r is compact on $\mathcal{B}$ and $\|K_r\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \leq 1$(see[10]). By a similar argument can be proved that the operator K_r is compact on Lip_α and $\|K_r\|_{\mathrm{Lip}_\alpha\to\mathrm{Lip}_\alpha} \leq 1$. Let $\{r_j\} \subset (0, 1)$ be a sequence such that $r_j \to 1$ as $j \to \infty$. Then for all positive integer j, the operator $C_\varphi^g K_{r_j} : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ is compact. By the definition of the essential norm, we get

$$\|C_\varphi^g\|_{e,\mathrm{Lip}_\alpha\to\mathcal{Z}} \leq \limsup_{j\to\infty} \|C_\varphi^g - C_\varphi^g K_{r_j}\|_{\mathrm{Lip}_\alpha\to\mathcal{Z}}.$$

For any $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$ such that $\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\|(C_\varphi^g - C_\varphi^g K_{r_j})f\|_{\mathcal{Z}} \leq{}& |(C_\varphi^g f(0)| + |(f - f_{r_j})'(\varphi(0))g(0)| \\
&+ \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)|(f - f_{r_j})'(\varphi(z))| \\
&+ \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g(z)\varphi'(z)|(f - f_{r_j})''(\varphi(z))| \\
\leq{}& \underbrace{\limsup_{j\to\infty} \sup_{|\varphi(z)|\leq r_N} (1-|z|^2)|g'(z)|(f - f_{r_j})'(\varphi(z))|}_{M_1} \\
&+ \underbrace{\limsup_{j\to\infty} \sup_{|\varphi(z)|> r_N} (1-|z|^2)|g'(z)|(f - f_{r_j})'(\varphi(z))|}_{M_2} \\
&+ \underbrace{\limsup_{j\to\infty} \sup_{|\varphi(z)|\leq r_N} (1-|z|^2)|g(z)\varphi'(z)|(f - f_{r_j})''(\varphi(z))|}_{M_3} \\
&+ \underbrace{\limsup_{j\to\infty} \sup_{|\varphi(z)|> r_N} (1-|z|^2)|g(z)\varphi'(z)|(f - f_{r_j})''(\varphi(z))|}_{M_4},
\end{aligned}$$

where $N \in \mathbb{N}$ is large enough such that $r_j \geq \frac{1}{2}$ for all $j \in \mathbb{N}$. Since $C_\varphi^g : \mathrm{Lip}_\alpha \to \mathcal{Z}$ is bounded, by (3.3) and (3.4), we have

$$\widetilde{F_1} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)| < \infty$$

$$\widetilde{F_2} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)\varphi(z) + g(z)\varphi'(z)| < \infty.$$

Since $r_j f'_{r_j} \to f'$ uniformly on compact subsets of $\mathbb{D}$ as $j \to \infty$, so

$$M_1 \leq \widetilde{F_1} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)| = 0,$$

$$M_3 \leq \widetilde{F_2} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)\varphi(z) + g(z)\varphi'(z)| = 0.$$

Next we consider M_2. We have $M_2 \leq \limsup_{j\to\infty}(Q_1 + Q_2)$, where

$$Q_1 = \sup_{|\varphi(z)|>r_N}(1-|z|^2)|(f'(\varphi(z))||g(z)\varphi'(z)|,$$

$$Q_2 = \sup_{|\varphi(z)|>r_N}(1-|z|^2)r_j|(f'(\varphi(z))||g(z)\varphi'(z)|.$$

Using the fact that $\|f\|_{\mathrm{Lip}\alpha} \leq 1$ and (1.1), we obtain

$$\begin{aligned}
Q_1 = & \sup_{|\varphi(z)|>r_N}(1-|z|^2)|(f'(\varphi(z))||g(z)\varphi'(z)| \\
& \times \frac{(1-|\varphi(z)|^2)^{1-\alpha}}{(j-\alpha)\overline{\varphi(z)}} \frac{(j-\alpha)\overline{\varphi(z)}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1-\alpha}} \\
& \preceq \frac{(j-\alpha)\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}}{r_N} \sup_{|\varphi(z)|>r_N}(1-|z|^2)|g(z)\varphi'(z)| \frac{(j-\alpha)\overline{\varphi(z)}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1-\alpha}} \\
& \preceq \sup_{|\varphi(z)|>r_N}(1-|z|^2)|g(z)\varphi'(z)| \frac{(j-\alpha)\overline{\varphi(z)}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1-\alpha}} \\
& \preceq \sup_{|a|>r_N}\|C_\varphi^g(f_{a,j})\| \qquad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Taking the limit as $N \to \infty$, we obtain

$$\limsup_{j\to\infty} Q_1 \leq \limsup_{|a|\to\infty}\|C_\varphi^g(f_{a,j})\|_{\mathcal{Z}}.$$

Similarly,

$$\limsup_{j\to\infty} Q_2 \leq \limsup_{|a|\to\infty}\|C_\varphi^g(f_{a,j})\|_{\mathcal{Z}}.$$

Hence, we get $M_2 \preceq \max\{A_1, A_2\}$. Similarly, it can be shown that $M_4 \preceq \max\{A_1, A_2\}$. This completes the proof of the theorem. □

Acknowledgment

The authors would like to express their sincere gratitude to the referee for a very careful reading of the paper and for all the valuable suggestions, which led to improvement in this paper.

Список литературы

[1] B. Choe, H. Koo and W. Smith, "Composition operators on small spaces", Integral Equations Operator Theory, **56**, 357 — 380 (2006).

[2] F. Colonna and S. Li, "Weighted composition operators from the Lipschitz space into the Zygmund space", Mathematical Inequalities and Applications, **17**(3), 963 – 975 (2014).

[3] F. Colonna and S. Li, "Weighted composition operators from Hardy spaces into logarithmic Bloch spaces", J. Funct. Spaces Appl. 2012, **20**, Article ID 454820, 20 pages (2012).

[4] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, Fl (1995).

[5] G. H. Hardy and J. E. Littlwood, "Some properties of fractional integrals", *II, Math. Z.* **34**, 403 – 439 (1932).

[6] M. Hassanlou, H. Vaezi and M. Wang, "Weighted composition operators on weak valued Bergman spaces and Hardy spaces", Banach Journal of Mathematical Analysis, **9**(2), 35 – 43 (2015).

[7] S. Li, "Weighted composition operators from minimal Möbius invariant spaces to Zygmund spaces", Filomat, **27**(2), 267 – 275 (2013).

[8] S. Li and S. Stević, "Generalized composition operators on Zygmund spaces and Bloch type spaces", J. Math. Anal. Appl., **338**, 1282 – 295 (2008).

[9] S. Li and S. Stević, "Weighted composition operators from Zygmund spaces into Bloch spaces", *Appl. Math. Comput.* **206**, 825 – 831 (2008).

[10] B. D. MacCluer and R. Zhao, "Essential norm of weighted composition operators between Bloch-type spaces", Rocky M. J. Math., **33**(4), 1437 – 1458 (2003).

[11] S. Ohno, K. Stroethoff and R. Zhao, "Weighted composition operators between Bloch-type spaces", Rocky M. J. Math., **33**(1), 191 – 215 (2003).

[12] J. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York (1993).

[13] S. Stević, "Composition followed by differentiation from H^∞ and the Bloch space to n-th weightedtype spaces on the unit disk", Appl. Math. Comput., **216**, 3450 – 3458 (2010).

[14] S. Stević, A. K. Sharma and A. Bhat, "Products of multiplication, composition and differentiation operators on weighted Bergman space", Appl. Math. Comput., **217**(20), 8115 – 8125 (2011).

[15] S. Stević, "On an integral operator on the unit ball in $\mathbb{C}^n$", J. Inequal. Appl., **1**, 81 – 88 (2005).

[16] M. Tjani, "Compact composition operators on some Möbius invariant Banach spaces", Ph.D. thesis. Michigan State University (1996).

[17] J. Xiao, "Riemann Stieltjes operators on weighted Bloch and Bergman spaces of the unit ball", J. London Math. Soc., **70**(2), 199 – 214 (2004).

[18] K. Zhu, Bloch type spaces of analytic functions, *Rocky M. J. Math.* **23**(3) (1993), 1143–1177.

[19] X. Zhu, "Volterra type operators from logarithmic Bloch spaces to Zygmund type spaces", Inter. J. Modern Math., **3**, 327 – 336 (2008).

[20] X. Zhu, "Generalized weighted composition operators from Bloch spaces into Bers-types", Filomat, **26**(6), 1163 – 1169 (2012).

[21] X. Zhu, "Generalized weighted composition operators on Bloch-type spaces", J. Inequal. Appl., **59**, DOI 10.1186/s13660-015-0580-0 (2015).

[22] X. Zhu, "Essential norm of generalized weighted composition operators on Bloch-type spaces", Appl. Math. Comput., **274**, 133 – 142 (2016).

Поступила 04 августа 2019

После доработки 27 декабря 2019

Принята к публикации 06 февраля 2020

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 5, 2020, стр. 13 – 26

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE FOURTH ORDER NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AT RESONANCE

S. MUKHIGULASHVILI, M. MANJIKASHVILI

Institute of mathematics, of the Czech Academy of Sciences, Brno, Czech Republic
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic
Ilia State University, Tbilisi, Georgia
E-mails: *smukhig@gmail.com; manjikashvilimary@gmail.com*

Abstract. Landesman-Lazer's type efficient sufficient conditions are established for the solvability of the two-point boundary value problem $u^{(4)}(t) = p(t)u(t) + f(t, u(t)) + h(t)$ for $a \leq t \leq b$, $u^{(i)}(a) = 0$, $u^{(i)}(b) = 0$, $(i = 0, 1)$, where $h, p \in L([a, b]; R)$ and $f \in K([a, b] \times R; R)$, in the case where the linear problem $w^{(4)}(t) = p(t)w(t)$, $w^{(i)}(a) = 0$, $w^{(i)}(b) = 0$, $(i = 0, 1)$ has nontrivial solutions. The results obtained in the paper are optimal in the sense that if $f \equiv 0$, i.e. when nonlinear equation turns to the linear equation, from our results follows the first part of Fredholm's theorem.

MSC2010 numbers: 34B05, 34B15, 34C10.
Keywords: fourth order nonlinear ordinary differential equation; resonance.

1. Introduction

In the paper we study the fourth order nonlinear ordinary differential equation

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) + f(t, u(t)) + h(t) \quad \text{for} \quad t \in I = [a, b], \tag{1.1}$$

with the boundary conditions

$$u^{(i)}(a) = 0, \quad u^{(i)}(b) = 0 \;\; (i = 0, 1), \tag{1.2}$$

under the assumption that the homogeneous problem

$$w^{(4)}(t) = p(t)w(t) \quad \text{for} \quad t \in I, \tag{1.3}$$

$$w^{(i)}(a) = 0, \quad w^{(i)}(b) = 0 \;\; (i = 0, 1) \tag{1.4}$$

has the nonzero solution, i.e., at the resonance case, when $h, p \in L(I; R)$ and $f \in K(I \times R; R)$.

We will say that a function $u : I \to R$ is a solution of problem(1.1), (1.2), if $u \in \widetilde{C}^3(I, R)$, and satisfies equation (1.1) almost everywhere on I and satisfies conditions (1.2).

At present, two-point boundary value problems for the fourth order ordinary and functional differential equations are studied by many authors and investigated in detail, on the other hand these problems are studied mainly for the non resonance case (See [2], [3], [5],[7], [12], [13] and the references therein.)

Even for the second order ordinary differential equations boundary value problems at resonance case are still little investigated, literature is poor on this subject and in the majority of articles, the authors study Dirichlet problems for the equations of the following type $u''(t) = -u(t) + f(t, u(t)) + h(t) \quad \text{for} \quad t \in [0, \pi]$, i.e., when the linear part of studied equation has the constant coefficient, moreover, when this constant is the first eigenvalue of corresponding homogeneous linear problem (See [1], [4], [6], [17],[18] and the references therein). The boundary value problems for the fourth order ordinary differential equation at resonance are even less investigated than boundary problems for the second order equations, and again authors study mainly the problem

$$u^{(4)}(t) = \mu_n^4 u(t) + f(t, u(t)) + h(t) \quad \text{for} \quad t \in [0, 1], \tag{1.5}$$

$$u^{(i)}(0) = 0, \quad u^{(i)}(1) = 0, \quad (i = 0, 1), \tag{1.6}$$

where μ_n^4 is the nth eigenvalue of problem

$$w^{(4)}(t) = \mu_n^4 w(t) \quad \text{for} \quad t \in [0, 1], \tag{1.7}$$

$$w^{(i)}(0) = 0, \quad w^{(i)}(1) = 0, \quad (i = 0, 1), \tag{1.8}$$

mainly for the first eigenvalue μ_1^4 (See for instance [8], [9]). An exception is the paper [19] of L. Sanchez, where the author studies general problem $(1.1), (1.2)$, when λ is the first eigenvalue (i.e., when corresponding eigenfunction is the constant sign function on $]0, \pi[$) of the problem

$$w^{(4)}(t) = \lambda p(t) w(t), \quad w^{(i)}(0) = 0, \quad w^{(i)}(\pi) = 0 \ \ (i = 0, 1), \tag{1.9}$$

and proves that under some restrictions on the function $F(t, x) = \int_0^x f(t, s) ds$ problem $(1.1), (1.2)$ (with $a = 0$, $b = \pi$) is solvable if $\int_0^\pi h(s) w(s) ds = 0$, where w is a solution of problem (1.9). As we can see from our results the class of such functions h and f for which problem $(1.1), (1.2)$ is solvable can be extended to the class characterized by the inequality (2.3_j) which is in some sense optimal (See Remark 2.4) for an arbitrary eigenvalue λ of problem (1.9), i.e., when problem $(1.3), (1.4)$ has nonzero solution with arbitrary number of zeros.

The following notations are used throughout the paper:

N is the set of all natural numbers; R is the set of all real numbers; $R_+ = [0, +\infty[$;

$C(I; R)$ is the Banach space of continuous functions $u : I \to R$ with the norm $\|u\|_C = \max\{|u(t)| : t \in I\}$;

$\widetilde{C}^n(I;R)$ is the set of functions $u : I \to R$ which are absolutely continuous together with their nth derivatives;

$L(I;R)$ is the Banach space of Lebesgue integrable functions $p : I \to R$ with the norm $\|p\|_L = \int_a^b |p(s)|ds$;

$L_\infty(I;\, R)$ is the Banach space of essentially bounded functions $p : I \to R$ with the norm $||p||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in I} |p(t)|$;

$K(I \times R; R)$ is the set of functions $f : I \times R \to R$ satisfying the Carathéodory conditions, i.e., $f(\cdot, x) : I \to R$ is a measurable function for all $x \in R$, $f(t, \cdot) : R \to R$ is a continuous function for almost all $t \in I$, and for arbitrary $r > 0$ $f^*(t,\, r) = \sup\{|f(t, x)| : |x| \le r\} \in L(I,\, R_+)$;

Also having the function $x : I \to R$, we put:

$$[x(t)]_+ = (|x(t)| + x(t))/2, \;\; [x(t)]_- = (|x(t)| - x(t))/2.$$

S_p is the space of the solutions of problem (1.3), (1.4).

In this article we study problem (1.1), (1.2) under the assumption that $\dim S_p = 1$. In Theorems 1.1 and 1.2 of our paper [16] are proved efficient sufficient conditions which guarantee the validity of the inequality $\dim S_p \le 1$, which we present in the following proposition:

Proposition 1.1. *Let* $p \in L([a,\, b]; R)$, *and*

$$\int_a^b |p(s)|ds \le \frac{110}{(b-a)^3} \quad or \quad p(t) \ge 0 \quad for \quad t \in [a,\, b].$$

Than $\dim S_p \le 1$.

Now notice that for an arbitrary nonzero solution w_1 of problem (1.3), (1.4), the inequality

$$\int_a^b p(s)w_1^2(s)ds = \int_a^b w_1^{(4)}(s)w_1(s)ds = \int_a^b w_1''^2(s)ds > 0, \tag{1.10}$$

holds, from which it follows that if $p \le 0$, than problem (1.3), (1.4) has only the zero solution. Therefore problem (1.1), (1.2) can be at resonance only if $p \ge 0$, $p \not\equiv 0$, or when p changes its sign on I.

Definition 1.1. Let $f \in K(I \times R; R)$ and $A = \{t_1, \cdots, t_k\}$ be a finite subset of I. Then we say $f \in E(A)$ if for an arbitrary neighbourhood $U(A)$ of the set A, and positive constant r, there exists $\alpha_1 > 0$ such that

$$\int_{U'(A)\setminus U_\alpha} |f(s, x)|ds - \int_{U_\alpha} |f(s, x)|ds \ge 0 \quad \text{for} \quad |x| \ge r, \; \alpha \le \alpha_1,$$

where $U'(A) = I \cap U(A)$, and $U_\alpha = I \cap \Big(\cup_{j=1}^k [t_j - \alpha,\; t_j + \alpha] \Big)$.

Remark 1.1. a. In example 0.1 of [14], for given set $A \subset I$ the function $f \in K(I \times R; R)$ is constructed so, that $f \notin E(A)$.

b. It is clear that if $f(t,x) := f_0(t)g_0(x)$, where $f_0 \in L(I;R)$ and $g_0 \in C(I;R)$, then $f \in E(A)$ for arbitrary finite $A \subset I$.

Remark 1.2. If $\dim S_p = 1$, and w_1, w are arbitrary nonzero solutions of problem (1.3), (1.4), then

$$w_1(t) = \beta w(t) \quad \text{for} \quad t \in I, \tag{1.11}$$

where $\beta = -||w_1||_C/||w||_C$ or $\beta = ||w_1||_C/||w||_C$.

2. Main results

First we remind that in this article we study problem (1.1), (1.2) under the assumption that $\dim S_p = 1$, and therefore if w is an arbitrary nonzero solution of problem (1.3), (1.4), then from Remark 1.2 follows that the notation

$$N_p := \{t \in [a,b] : w(t) = 0\}$$

is correct. Now consider the following existence theorems

Theorem 2.1. *Let $j \in \{0,1\}$, $r > 0$, and the functions $f \in E(N_p)$, $f^+, f^- \in L(I;R_+)$ be such that the inequalities*

$$\begin{aligned} (-1)^j f(t,x) \le -f^-(t) \quad &\text{for} \quad x \le -r, \quad t \in I, \\ f^+(t) \le (-1)^j f(t,x) \quad &\text{for} \quad x \ge r, \quad t \in I, \end{aligned} \tag{2.1$_j$}$$

hold, and

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{1}{\rho} \int_a^b f^*(s,\rho)ds = 0. \tag{2.2}$$

Let moreover there exist $\varepsilon > 0$ such that for an arbitrary nonzero solution w of problem (1.3), (1.4) *the inequality*

$$\begin{aligned} -\int_a^b \Big(f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+\Big)ds + \varepsilon\gamma_r||w||_C \le \\ \le (-1)^{j+1}\int_a^b h(s)w(s)ds \le \int_a^b \Big(f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+\Big)ds - \varepsilon\gamma_r||w||_C, \end{aligned} \tag{2.3$_j$}$$

holds, where $\gamma_r = \int_a^b f^*(s,\, r)ds$. Then problem (1.1), (1.2) *has at least one solution.*

Remark 2.1. If $f \equiv 0$, then $f^+ \equiv f^- \equiv \gamma_r \equiv 0$, and from inequality (2.3$_j$) it is evident that Theorem 2.1 turns to the first part of Fredholm's Theorem.

Remark 2.2. If $\widetilde{f}(t) = \min\{f^+(t), f^-(t)\}$ then condition (2.3_j) can be replaced by the condition

$$\left|\int_a^b h(s)w(s)ds\right| \le \int_a^b \widetilde{f}(s)|w(s)|ds - \varepsilon\gamma_r||w||_C.$$

The following Remark immediately follows from the Lemma 3.4

Remark 2.3. If in Theorem 2.1 additionally the condition $N_p = \{a,\, b\}$ is required, then (2.3_j) can be replaced by the condition

$$-\int_a^b f^-(s)\widetilde{w}(s)ds + \varepsilon\gamma_r||\widetilde{w}||_C \le (-1)^{j+1}\int_a^b h(s)\widetilde{w}(s)ds \le \int_a^b f^+(s)\widetilde{w}(s)ds - \varepsilon\gamma_r||\widetilde{w}||_C,$$

where $\widetilde{w}$ is a solution of problem $(1.3), (1.4)$ positive on $]a,\, b[$.

Example 2.1. From Remark 2.2 it follows that the equation

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) + f_0(t)\frac{|u(t)|^\alpha}{1+|u(t)|^\alpha}\operatorname{sgn} u(t) + h(t) \quad \text{for} \quad t \in I,$$

under boundary conditions (1.2), where $\alpha \in]0,\, +\infty[$, for an arbitrary $p \in L(I,\, R)$ and constant sign $f_0 \in L(I,\, R)$ has at least one solution if $|h(t)| < |f_0(t)|$ on I. Indeed, if p is such that problem $(1.3), (1.4)$ has only the zero solution then solvability of our nonlinear problem follows from Corollary 2.1, of [11]. If p is such that problem $(1.3), (1.4)$ has also the nonzero solution then due to Remark 2.2 it is clear that all the assumptions of Theorem 2.1 hold, from which follows the solvability of our nonlinear problem.

Theorem 2.2. *Let $j \in \{0,\, 1\}$, $r > 0$, and the function $f \in E(N_p)$ be such that the conditions*

$$(-1)^j f(t,x)\operatorname{sgn} x \ge 0 \quad \textit{for} \quad |x| \ge r, \;\; t \in I,$$

and (2.2) are satisfied. Let moreover there exist such sets I^+, $I^- \subset I$ that

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(t,\, x)| = +\infty \quad \textit{uniformly on} \;\; I^\pm,$$

and for an arbitrary nonzero solution w of problem (1.3), (1.4) inequalities

$$\int_{I^+}[w(s)]_+ds + \int_{I^-}[w(s)]_-ds \neq 0, \;\; \int_{I^+}[w(s)]_-ds + \int_{I^-}[w(s)]_+ds \neq 0, \tag{2.4}$$

hold. Then for an arbitrary $h \in L(I;R)$ problem (1.1), (1.2) has at least one solution.

Let $I^\pm$ be the sets defined in Theorem 2.2, and $I_0 := \{t \in I : f_0(t) > 0\}$. Then under the conditions of Corollary 2.1 we have

$$I^+ = I^- = I_0, \;\; \operatorname{mes} I_0 \neq 0,$$

and then from Theorem 2.2 by Remark 1.1 immediately follows

Corollary 2.1. *Let* $j \in \{0, 1\}$, $f(t,x) \overset{def}{\equiv} f_0(t)g_0(x)$ *where the functions* $f_0 \in L(I;R_+)$, *and* $g_0 \in C(R;R)$, *be such that*

$$\int_a^b f_0(s)ds \neq 0, \quad \lim_{|x|\to+\infty} \frac{g_0(x)}{x} = 0,$$

and

$$(-1)^j \lim_{x\to+\infty} g_0(x) = +\infty, \quad (-1)^j \lim_{x\to-\infty} g_0(x) = -\infty.$$

Then for an arbitrary $h \in L(I;R)$ *problem* (1.1), (1.2) *has at least one solution.*

Example 2.2. From Corollary 2.1 it follows that the equation

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) + f_0(t)|u(t)|^\alpha \mathrm{sgn} u(t) + h(t) \quad \text{for} \quad t \in I,$$

under boundary conditions (1.2), where $\alpha \in]0,\, 1[$, for an arbitrary $p,\ f_0,\ h \in L([0,\, 1],\, R)$ has at least one solution if f_0 is constant sign function and $\int_a^b f_0(s)ds \neq 0$.

Remark 2.4. If we assume that $p(t) \equiv \mu_n^4$ and $I = [0,\, 1]$, i. e. when problem (1.1), (1.2) transforms to problem (1.5), (1.6), then in Theorems 2.1 and 2.2, we can assume that

$$w(t) = \sin\mu_n t - \sinh\mu_n t + \frac{\sin\mu_n - \sinh\mu_n}{\cos\mu_n t - \cosh\mu_n}(\cos\mu_n t - \cosh\mu_n t)$$

for $t \in [0,\, 1]$ (See Lemma 2 in [9]), and $N_p = N_{\mu_n^4}$.

3. Auxiliary propositions

Let w be an arbitrary nonzero solution of problem (1.3), (1.4), $k \geq 2$, $N_p = \{t_1, \cdots, t_k\}$ with $t_1 = a$, $t_k = b$, $t_j < t_{j+1}$ $(j = \overline{1,\, k-1})$, and assume that

$$U_\alpha := [t_1,\, t_1 + \alpha[\cup]t_k - \alpha,\, t_k] \cup \Big(\cup_{j=2}^{k-1} \big]t_j - \alpha,\ t_j + \alpha\big[\Big) \quad \text{if} \quad k > 2,$$

$$U_\alpha := [t_1,\, t_1 + \alpha[\cup]t_k - \alpha,\, t_k] \quad \text{if} \quad k = 2,$$

for arbitrary $\alpha > 0$. Also for arbitrary measurable sets $A, B \subset I$, $x \in R$, $w \in C(I,\ R)$, and $f_1 \in K(I \times R; R)$, assume that

$$\mathbb{I}(A, B, x, w) := \int\limits_{A\setminus B} |f_1(s,x)w(s)|ds - \int\limits_{B} |f_1(s,x)w(s)|ds.$$

Then the following lemma is true

Lemma 3.1. *Let* w *be an arbitrary nonzero solution of problem* (1.3), (1.4), *and* $f_1 \in E(N_p)$. *Then for an arbitrary* $\delta \in]0,\, \frac{1}{2}\min\{t_{j+1} - t_j : j = \overline{1, k-1}\}[$ *and positive constant* r, *there exists* $\gamma \in]0,\, \delta[$ *such, that*

$$\mathbb{I}(I, U_\gamma, x, w) \geq \int_{I\setminus U_\delta} |f_1(s,x)w(s)|ds \quad \textit{for} \quad |x| \geq r. \tag{3.1}$$

Proof: From definition 1.1 follows the existence of such positive $\gamma_1 < \delta$, that

$$\mathbb{I}(U_\delta, U_{\gamma_1}, x, 1) \geq 0 \quad \text{for} \quad |x| \geq r. \tag{3.2}$$

Let now w_0 be such a solution of problem (1.3), (1.4) that $||w_0||_C = 1$. Then from the inclusion $N_p \subset U_{\gamma_1} \subset I$, and Remark 1.2, it is evident that there exist such positive numbers γ, β_0, that

$$U_\gamma \subset H_{\beta_0} := \Big\{ t \in I : |w_0(t)| < \beta_0 \Big\} \subset U_{\gamma_1}. \tag{3.3}$$

But the inequality $\gamma_1 < \delta$ and (3.3) implies inclusion $H_{\beta_0} \subset U_\delta$, and then the relations

$$\begin{gathered} |w_0(t)| \geq \beta_0 \quad \text{for} \quad t \in U_\delta \setminus H_{\beta_0}, \\ I \setminus H_{\beta_0} = (I \setminus U_\delta) \cup (U_\delta \setminus H_{\beta_0}), \quad (I \setminus U_\delta) \cap (U_\delta \setminus H_{\beta_0}) = \emptyset \end{gathered} \tag{3.4}$$

hold. Therefore from Remark 1.2, and (3.3), (3.4), we have

$$\frac{1}{||w||_C} \mathbb{I}(I, U_\gamma, x, w) = \mathbb{I}(I, U_\gamma, x, w_0) \geq \mathbb{I}(I, H_{\beta_0}, x, w_0) \geq$$
$$\geq \int_{I \setminus U_\delta} |f_1(s,x) w_0(s)| ds + \beta_0 \mathbb{I}(U_\delta, H_{\beta_0}, x, 1) \geq$$
$$\geq \int_{I \setminus U_\delta} |f_1(s,x) w_0(s)| ds + \beta_0 \mathbb{I}(U_\delta, U_{\gamma_1}, x, 1) \quad \text{for} \quad |x| \geq r.$$

From the last inequality by (3.2) immediately follows (3.1). □

Let $u_n \in \widetilde{C}^1(I; R)$, $\|u_n\|_C \neq 0$ $(n \in N)$, w_1 be an arbitrary nonzero solution of problem (1.3), (1.4), and $r > 0$. Then we define:

$$\Omega^+_{w_1} := \{t \in I : w_1(t) > 0\}, \quad \Omega^-_{w_1} := \{t \in I : w_1(t) < 0\},$$
$$A_{n,1} := \{t \in I : |u_n(t)| > r\}, \quad A_{n,2} := \{t \in I : |u_n(t)| \leq r\},$$
$$B_{n,\ell} := \{t \in A_{n,1} : \mathrm{sgn} u_n(t) = (-1)^{\ell - 1} \mathrm{sgn} w_1(t)\} \ \ (\ell = 1, 2).$$

From these definitions it is clear that for all $n \in N$, we have

$$A_{n,2} \cap A_{n,1} = \emptyset, \ \ A_{n,2} \cup A_{n,1} = I, \ \ B_{n,1} \cap B_{n,2} = \emptyset, \ \ B_{n,1} \cup B_{n,2} = A_{n,1} \subset I. \tag{3.5}$$

Lemma 3.2. *Let $r > 0$, w_1 be a nonzero solution of problem* (1.3), (1.4), *and functions $u_n \in \widetilde{C}^1(I; R)$ $(n \in N)$ admits to the conditions*

$$u_n^{(i)}(a) = 0, \quad u_n^{(i)}(b) = 0 \ (i = 0, 1), \tag{3.6}$$

$$||u_n||_C \geq 2rn \quad \textit{for} \quad n \in N, \tag{3.7}$$

and

$$||v_n^{(i)} - w_1^{(i)}||_C \leq 1/2n \quad \textit{for} \quad n \in N \ (i = 0, 1), \tag{3.8}$$

where $v_n(t) = u_n(t)||u_n||_C^{-1}$. *Then if* $N_p = \{t_1, \cdots, t_k\}$, *for arbitrary* $\delta \in]0,\ \frac{1}{2}\min\{t_{j+1} - t_j : j = \overline{1, k-1}\}[$, *and* $\gamma \in]0,\ \delta[$ *there exists* $n_0 \in N$ *such that*

$$I \setminus U_\gamma \subset \cap_{n=n_0}^{+\infty} B_{n,1}, \tag{3.9}$$

$$B_{n,2} \subset U_\gamma \quad \textit{for} \quad n > n_0, \tag{3.10}$$

$$\pm u_n(t) \geq r \quad \textit{for} \quad t \in \Omega_{w_1}^{\pm} \cap (I \setminus U_\delta), \quad n > n_0. \tag{3.11}$$

Moreover

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{mes} A_{n,2} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{mes} A_{n,1} = \operatorname{mes} I, \tag{3.12}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{mes} B_{n,2} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{mes} B_{n,1} = \operatorname{mes} I, \tag{3.13}$$

and

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{mes} \Big(\Omega_{w_1}^{\pm} \setminus [\Omega_{w_1}^{\pm} \cap (I \setminus U_\delta)]\Big) = 0. \tag{3.14}$$

Proof. First fix $\gamma \in]0,\ \delta[$, and note that $\min\{|w_1(t)| : t \in I \setminus U_\gamma\} > 0$. Then we can choose $n_0 \in N$ such that the inequality

$$|w_1(t)| > 1/n_0 \qquad \text{for} \quad t \in I \setminus U_\gamma$$

holds, from which by (3.8) we obtain

$$|v_n(t)| > 1/2n_0 \qquad \text{for} \quad n \geq n_0,\ t \in I \setminus U_\gamma, \tag{3.15}$$

$$\operatorname{sgn} u_n(t) = \operatorname{sgn} w_1(t) \qquad \text{for} \quad n \geq n_0,\ t \in I \setminus U_\gamma. \tag{3.16}$$

Also from (3.15) by (3.7) we get

$$|u_n(t)| > nr/n_0 \geq r \qquad \text{for} \quad n \geq n_0,\ t \in I \setminus U_\gamma. \tag{3.17}$$

From the last two relations it follows that if $t \in I \setminus U_\gamma$ then $t \in B_{n,1}$ for $n \geq n_0$, i.e. (3.9) holds. Now assume that there exists such an increasing sequence $\{n_j\}_{j=1}^{+\infty}$that $t'_{n_j} \in B_{n_j,2}$ and $t'_{n_j} \notin U_\gamma$. Then taking into account (3.9) we get $t'_{n_j} \in I \setminus U_\gamma \subset B_{n_j,1}$ if $n > n_0$, which contradicts (3.5), i.e. (3.10) is valid. For an arbitrary $t^* \notin N_p$ in view of condition (3.8) the inequalities $|w_1(t^*) - v_n(t^*)| \leq \frac{1}{2}|w_1(t^*)|$ hold if $n \geq 1/|w_1(t^*)|$. Therefore $\operatorname{sgn} v_n(t^*) = \operatorname{sgn} w(t^*)$ and $|v_n(t^*)| > \frac{1}{2}|w_1(t^*)|$ if $n \geq 1/|w_1(t^*)|$, and then due to (3.7) we get that $t^* \in B_{n,1}$ if $n \geq 1/|w_1(t^*)|$. Then the second equality of (3.13) holds, from which by (3.5) follows the validity of first relation of (3.13) and validity of the second equality of (3.12). Consequently by (3.5) it is evident that the first equality of (3.12) also holds. Inequality (3.11) immediately follows from (3.16) and (3.17). From the trivial fact $\lim_{\delta\to 0} \operatorname{mes} U_\delta = 0$ follows (3.14). $\square$

Now introduce the notation

$$\mathbb{M}_n(w_1) := \int_a^b \Big(h_1(s) + f_1(s, u_n(s))\Big) w_1(s)ds.$$

Then the following lemma is true

Lemma 3.3. *Let the functions u_n, w_1 be such that all the assumptions of Lemma 3.2 are fulfilled, $r > 0$, $f_1 \in E(N_p)$, and there exist functions $f^-, f^+ \in L(I, R_+)$ such that*

$$f_1(t,x) \le -f^-(t) \quad \textit{for} \quad x \le -r, \;\; t \in I, \qquad f^+(t) \le f_1(t,x) \quad \textit{for} \quad x \ge r, \;\; t \in I. \tag{3.18}$$

Let moreover there exists $\varepsilon > 0$ such that for an arbitrary solution w of problem (1.3), (1.4) *the condition*

$$\begin{aligned} -\int_a^b \Big(f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+\Big)ds + \varepsilon\gamma_r\|w\|_C \le -\int_a^b h_1(s)w(s)ds \le \\ \le \int_a^b \Big(f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+\Big)ds - \varepsilon\gamma_r\|w\|_C \end{aligned} \tag{3.19}$$

holds, where $\gamma_r = \int_a^b f_1^*(t, r)ds$. Then there exists $n_0 \in N$ such that

$$\mathbb{M}_n(w_1) \ge 0 \quad \textit{for} \quad n \ge n_0. \tag{3.20}$$

Proof. First note that in view of conditions (3.12) and (3.14) for an arbitrary $\varepsilon > 0$ there exist $\delta \in]0,\, 1/2\min\{t_{j+1} - t_j : j = \overline{1, k-1}\}[$ and $n_1 \in N$, such that

$$\begin{gathered} \int_{A_{n,2}} f^*(s,\, r)ds \le \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_r \quad \text{for} \;\; n > n_1, \\ \frac{1}{\|w_1\|_C}\int_{\Omega^\pm_{w_1}} f^\pm(s)|w_1(s)|ds - \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_r \le \frac{1}{\|w_1\|_C}\int_{\Omega^\pm_{w_1}\cap(I\setminus U_\delta)} f^\pm(s)|w_1(s)|ds, \end{gathered} \tag{3.21}$$

where if $f_1 \equiv 0$, then it can be assumed that $\gamma_r \equiv f^- \equiv f^+ \equiv 0$. Also, by the definition of sets $A_{n,\ell}$, $B_{n,\ell}$ ($\ell = 1, 2$), and conditions (3.5) and (3.18), we obtain estimates

$$(-1)^{\ell-1} f_1(s,\, u_n(s))w_1(s) \ge 0 \quad \text{for} \quad s \in B_{n,\ell} \;(\ell = 1,\, 2), \tag{3.22}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n(w_1) \ge -\int_{A_{n,2}} f^*(s,\, r)|w_1(s)|ds + \int_a^b h_1(s)w_1(s)ds + \\ + \int_{B_{n,1}} f_1(s, u_n(s))w_1(s)ds - \int_{B_{n,2}} |f_1(s, u_n(s))w_1(s)|ds, \end{aligned} \tag{3.23}$$

for $n \in N$. On the other hand by Lemma 3.1 for chosen δ there exists $\gamma \in]0,\, \delta[$ such, that the inequality (3.1) holds, and now for chosen δ, and γ, by Lemma 3.2

we can find $n_0 > n_1$ such, that (3.9)–(3.11) hold. Then by virtue of (3.9), (3.10), (3.22) and (3.1), from (3.23) we get

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n(w_1) \geq -\int_{A_{n,2}} f^*(s,\, r)ds||w_1||_C + \int_a^b h_1(s)w_1(s)ds + \\ + \int_{I\setminus U_\delta} f_1(s, u_n(s))w_1(s)ds \quad \text{for} \quad n \geq n_0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Now if we take into account that $I \setminus U_\delta \subset I \setminus N_{w_1} = \Omega^-_{w_1} \cup \Omega^+_{w_1}$, then from (3.11), and conditions (3.18) we get

$$\begin{aligned} \int\limits_{I\setminus U_\delta} f_1(s, u_n(s))w_1(s)ds = \int\limits_{\Omega^+_{w_1}\cap(I\setminus U_\delta)} f_1(s, u_n(s))|w_1(s)|ds - \\ - \int_{\Omega^-_{w_1}\cap(I\setminus U_\delta)} f_1(s, u_n(s))|w_1(s)|ds \geq \\ \geq \int_{\Omega^+_{w_1}\cap(I\setminus U_\delta)} f^+(s)|w_1(s)|ds + \int_{\Omega^-_{w_1}\cap(I\setminus U_\delta)} f^-(s)|w_1(s)|ds, \end{aligned} \tag{3.25}$$

for $n > n_0$. Also it is clear that under the conditions of our Lemma equality (1.11) holds, and then

$$\int_{\Omega^\pm_{w_1}} f^\pm(s)|w_1(s)|ds = \beta \int_{\Omega^\pm_{w_1}} f^\pm(s)[w(s)]_\pm ds = \beta \int_a^b f^\pm(s)[w(s)]_\pm ds,$$

if $\beta = ||w_1||_C/||w||_C$, and

$$\int_{\Omega^\pm_{w_1}} f^\pm(s)|w_1(s)|ds = |\beta| \int_{\Omega^\pm_{w_1}} f^\pm(s)[w(s)]_\mp ds = |\beta| \int_a^b f^\pm(s)[w(s)]_\mp ds,$$

if $\beta = -||w_1||_C/||w||_C$. Consequently from (3.24) by virtue of (3.21), (3.25), and the last equalities we get

$$\frac{\mathbb{M}_n(w_1)}{|\beta|} \geq -\varepsilon\gamma_r||w||_C + \int_a^b \Big(f^+(s)[w(s)]_+ + f^-(s)[w(s)]_-\Big)ds + \int_a^b h_1(s)w(s)ds,$$

for $n \geq n_0,\ \beta > 0$, and

$$\frac{\mathbb{M}_n(w_1)}{|\beta|} \geq -\varepsilon\gamma_r||w||_C + \int_a^b \Big(f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+\Big)ds - \int_a^b h_1(s)w(s)ds,$$

for $n \geq n_0,\ \beta < 0$, from which by condition (3.19) we immediately obtain (3.20). □

Lemma 3.4. *Let in Lemma 3.3 additionally the condition $N_p = \{a, b\}$ holds, and $\widetilde{w}$ be a given positive solution of problem* (1.3), (1.4). *Then condition* (3.19) *is equivalent to the condition*

$$-\int_a^b f^-(s)\widetilde{w}(s)ds + \varepsilon\gamma_r||\widetilde{w}||_C \leq -\int_a^b h_1(s)\widetilde{w}(s)ds \leq \int_a^b f^+(s)\widetilde{w}(s)ds - \varepsilon\gamma_r||\widetilde{w}||_C. \tag{3.26}$$

Proof. If $N_p = \{a, b\}$, than from Remark 1.2 it follows that $w = \beta\widetilde{w}$ where $\beta \neq 0$. Therefor if in condition (3.19) ((3.26)) instead of w $(\widetilde{w})$ we substitute the function $\beta\widetilde{w}$ (w/β), due to equalities $[\beta\widetilde{w}]_- \equiv 0$ if $\beta > 0$ and $[\beta\widetilde{w}]_+ \equiv 0$ if $\beta < 0$, we get that condition (3.26) ((3.19)) holds. □

Lemma 3.5. *Let the functions u_n, w_1 be such that all the assumptions of Lemma 3.2 are fulfilled, $r_0 > 0$, $f \in E(N_p)$, and*

$$f_1(t,x)\operatorname{sgn} x \geq 0 \quad \text{for} \quad |x| \geq r_0, \ \ t \in I. \tag{3.27}$$

Let moreover there exist such sets $I^+, I^- \subset I$ that

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f_1(t,\, x)| = +\infty \qquad \text{uniformly on } I^{\pm}, \tag{3.28}$$

and for an arbitrary solution w of problem (1.3), (1.4) *the inequalities* (2.4) *are satisfied. Then inequality* (3.20) *holds.*

Proof. Let $h_1 \in L(I,\, R)$ be arbitrarily chosen function, $c \in R$, and

$$f^{\pm}(t) := \begin{cases} c & \text{for } \ t \in I^{\pm} \\ 0 & \text{for } \ t \in I \setminus I^{\pm} \end{cases}.$$

In view of Remark 1.2, and conditions (2.4) we can find such $c > 0$ that the inequality

$$\begin{aligned} -\int_a^b \Big(f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+\Big)ds < -\int_a^b h_1(s)w(s)ds < \\ < \int_a^b \Big(f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+\Big)ds \end{aligned} \tag{3.29}$$

will hold. On the other hand for chosen c in view of conditions (3.27) and (3.28) we can find such $r > 0$, that inequalities (3.18) will be fulfilled. Also in view of Remark 1.2 and (3.29) it is clear that for given $r > 0$ we can find such $\varepsilon > 0$ that inequality (3.19) will be satisfied. Therefore for arbitrarily chosen h_1 all the conditions of Lemma 3.3 are fulfilled and then inequality (3.20) holds. □

Lemma 3.6. *Let problem* (1.3), (1.4) *has a nontrivial solution. Than there exists $\varepsilon > 0$ such that the problem*

$$w^{(4)}(t) = \lambda p(t)w(t) \quad t \in I, \ \ w^{(i)}(a) = 0, \ \ w^{(i)}(b) = 0 \ (i = 0, 1), \tag{3.30}$$

has only the trivial solution if $\lambda \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \setminus \{1\}$.

Proof. Let G be the Green's function of the boundary value problem $u^{(4)}(t) = 0$, $u^{(i)}(a) = 0$, $u^{(i)}(b) = 0$ $(i = 0, 1)$, then problem (3.30), is equivalent to the equation

$$w(t) = \lambda\Gamma(w)(t), \tag{3.31}$$

where the operator $\Gamma : C(I;R) \to C(I;R)$ is defined by the equality $\Gamma(x)(t) = \int_a^b G(t,s)p(s)x(s)ds$. As it is well-known $\Gamma : C(I;R) \to C(I;R)$ is the compact operator, and then for arbitrary $r > 0$ the disc $|\lambda| \leq r$, contains at most finite number of characteristic values [See [10], Capitol XIII, §3, Theorem 1]. From this fact follows the existence of $\varepsilon > 0$ such that the set $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \setminus \{1\}$ does not contain the characteristic values of equation (3.31), i.e., problem (3.30) has only the trivial solution if $\lambda \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \setminus \{1\}$. □

4. Proof of the main results

Proof Let $j \in \{0, 1\}$, $p_n(t) = (1 + \frac{(-1)^j}{n})p(t)$ $(n \in N)$, and $n_1 \in N$ be such that $1/n_1 \leq \varepsilon$ where ε is the number defined in Lemma 3.6. Now consider the problems

$$u_n^{(4)}(t) = p_n(t)u_n(t) + f(t, u_n(t)) + h(t) \quad \text{for} \quad t \in I, \tag{4.1}$$

$$u_n^{(i)}(a) = 0, \quad u_n^{(i)}(b) = 0 \ (i = 0, 1), \tag{4.2}$$

and

$$w^{(4)}(t) = p_n(t)w(t), \quad w^{(i)}(a) = 0, \ w^{(i)}(b) = 0 \ (i = 0, 1). \tag{4.3}$$

In view of Lemma 3.6, problem (4.3) has only the zero solution for every $n \geq n_1$. Therefore, as it is well-known (See [11], Corollary 2.1, p. 2271]), from conditions (2.2) it follows that problem (4.1), (4.2) has at least one solution, suppose u_n. Assume that

$$\lim_{n \to +\infty} ||u_n||_C = +\infty, \tag{4.4}$$

and $v_n(t) = u_n(t)||u_n||_C^{-1}$, then

$$v_n^{(4)}(t) = p_n(t)v_n(t) + \frac{1}{||u_n||_C}\Big(f(t, u_n(t)) + h(t)\Big), \tag{4.5}$$

$$v_n^{(i)}(a) = 0, \quad v_n^{(i)}(b) = 0 \ (i = 0, 1), \tag{4.6}$$

and

$$||v_n||_C = 1, \tag{4.7}$$

for $n \in N$. Now note that from conditions (4.6) follows the existence of such points $c_{n,k} \in I$ $(k = 2, 3)$ that

$$v_n^{(k)}(c_{n,k}) = 0 \ (k = 2, 3) \quad \text{for} \quad n \in N. \tag{4.8}$$

Also, from (4.5) by (4.4),(4.7) and condition (2.2) we conclude that there exists $r_0 > 0$ such that $\int_a^b |v_n^{(4)}(s)|ds \leq r_0$ for $n \in N$, and therefore in view of (4.6), and (4.8) we get $||v_n^{(m)}||_C \leq (b-a)^{3-m}r_0$ $(m = 1, 2, 3)$ for $n \in N$. In view of the last inequalities and (4.7), by Arzela-Ascoli lemma, without loss of generality we can assume that there exists a nonzero function $w_1 \in \widetilde{C}^{(3)}(I,R)$ such that $\lim_{n\to+\infty} v_n^{(m)}(t) = w_1^{(m)}(t) \quad (m=\overline{0,3})$ uniformly on I. From the last equality and (4.4) it follows the existence of an increasing sequence $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ of natural numbers, such that $||u_{\alpha_k}||_C \geq 2rk$ and $||v_{\alpha_k}^{(m)} - w_1^{(m)}||_C \leq 1/2k \quad (m=\overline{0,3})$ for $k \in N$. Without loss of generality we can suppose that $u_n \equiv u_{\alpha_n}$, and then u_n and v_n are the solutions of problems (4.1), (4.2) and (4.5), (4.6) respectively, with $p_n(t) = (1 + \frac{(-1)^j}{\alpha_n})p(t)$, and the inequalities

$$||u_n||_C \geq 2rn, \quad ||v_n^{(m)} - w_1^{(m)}||_C \leq 1/2n \; (m=\overline{0,3}) \tag{4.9}$$

hold for $n \in N$. Now note that from (4.5) and (4.6) by (2.2), and (4.9) we get that w_1 is the solution of problem (1.3),(1.4) and then admits to the inequality (1.10). Also if we multiply the equations (4.1) and (1.3) (with $w = w_1$) respectively by w_1 and $-u_n$, and integrate their sum from a to b, in view of conditions (4.2) and (1.4) (with $w = w_1$), by the integration by parts we obtain

$$\frac{||u_n||_C}{\alpha_n}\int_a^b p(s)w_1(s)v_n(s)ds = (-1)^{j+1}\int_a^b \Big(h(s) + f(s,u_n(s))\Big)w_1(s)ds \tag{4.10}$$

for $n \geq n_1$. Therefore from (4.10) by virtue of (1.10) and (4.9) follows the existence of such constant $n_2 \geq n_1$, that

$$(-1)^{j+1}\int_a^b \Big(h(s) + f(s,u_n(s))\Big)w_1(s)ds > 0 \quad \text{for} \quad n > n_2. \tag{4.11}$$

On the other hand, in view of conditions (4.2), (4.9), and (2.1_j), all the assumptions of Lemma 3.3 with $f_1(t,x) = (-1)^j f(t,x),\ h_1(t) = (-1)^j h(t)$ are fulfilled. Therefore, inequality (3.20) is true, which contradicts (4.11) when $n \geq \max\{n_0,\, n_2\}$. This contradiction proves that (4.4) does not hold and thus there exists $r_1 > 0$ such that $||u_n||_C \leq r_1$ for $n \in N$, and consequently, from (4.1) we get

$$\int_a^b |u_n^{(4)}(s)|ds \leq r' := \int_a^b \Big(2|p(s)|r_1 + |h(s)| + \gamma_{r_1}(s)\Big)ds \quad \text{for} \quad n \in N,$$

and than by virtue of (4.2) we have $||u_n^{(m)}||_C \leq (b-a)^{3-m}r' \; (m=1,2,3)$. Hence, by Arzela-Ascoli lemma, without loss of generality we can assume that there exists a function $u_0 \in \widetilde{C}^{(3)}(I;R)$ such that $\lim_{n\to+\infty} u_n^{(m)}(t) = u_0^{(m)}(t) \; (m=\overline{0,3})$ uniformly on I. Therefore, it follows from (4.1) and (4.2) that u_0 is a solution of problem (1.1), (1.2). □

Proof. The proof is the same as the proof of Theorem 2.1. The only difference is that we use Lemma 3.5 instead of Lemma 3.3. □

Acknowledgement

For S. Mukhigulashvili the research was supported by institutional grant RVO: 67985840.

Список литературы

[1] S. Ahmad, "A resonance problem in which the nonlinearity may grow linearly", Proc. Amer. Math. Soc., **92**(3), 381 – 384 (1984).
[2] A. Cabada, R. Enguica, "Positive solutions of fourth orderproblems with clamped beam boundary conditions", Nonlinear Anal., **74**(10), 3112 – 3122 (2011).
[3] J. Chu, D. O'Regan, "Positive solutions for regular and singular fourth order boundary value problems", Commun. Appl. Anal., **10**(2-3), 185–199 (2006).
[4] C. W. Ha, C. C. Kuo, "On the solvability of a two point boundary value problem at resonance II", Topol. Methods Nonlinear Anal., **11**(1), 159 – 168 (1998).
[5] C. De Coster, C. Fabry, F. Munyamarere, "Nonresonance conditions for fourth order nonlinear boundary value problems", Internat. J. Math. Math. Sci., **17**(4), 725 – 740 (1994).
[6] P. Drabek, "On the resonance problem with nonlinearity which has arbitrary linear growth", J. Math. Anal. Appl., **127**(2), 435 – 442 (1987).
[7] P. Drabek, G. Holubova, "Positive and negative solutions of one-dimensional beam equation", Appl. Math. Lett., **51**, 1 – 7 (2016).
[8] C. Gupta, "Existence and uniqueness results for the bending of an elastic beam equation at resonance", J. Math. Anal. Appl., **135**(1), 208 – 225 (1988).
[9] M. Xu, R. Ma, "On fourth-order boundary value problem at resonance", Journal of funct. Spac., **2017**, 1 – 7 (2017).
[10] R. Kantorovich, G. Akilov, Functional Analysis, Pergamon Press, Oxford, New York (1982).
[11] I. Kiguradze, "Boundary value problems for systems of ordinary differential equations", J. Sov. Math., **43**(2), 2259 – 2339, (1988).
[12] I. Kiguradze, B. Puza, "On some boundary value problems for fourth order functional differential equations", Mem. Differential Equations Math. Phys., **35**, 55 – 64, (2005).
[13] P. Korman, "Uniqueness and exact multiplicity of solutions fora class of fourthorder semilinear problems", Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **134**(1), 179 – 190, (2004).
[14] S. Mukhigulashvili, "The Dirichlet BVP The second Order Nonlinear Ordinary Differential Equation At Resonance", Italian J. Of Pure and Appl. Math., **28**, 177 – 204 (2011).
[15] S. Mukhigulashvili, "The mixed BVP for second order nonlinear ordinary differential equation at resonance", Math. Nachr., **290**(2-3), 393 – 400 (2017).
[16] S. Mukhigulashvili, M. Manjikashvili, "On one two point BVP for the forth order linear ordinary differential equation", Georgian Math. J., **24**(2), 265 – 275 (2017).
[17] R. Iannacci, M. Nkashama, "Nonlinear two point boundary value problems at resonance without Landesman-Lazer condition", Proc. Amer. Math. Soc., **106**(4), 943 – 952 (1989).
[18] R. Iannacci, M. Nkashama, "Nonlinear boundary value problems at resonance", Nonlinear Anal., **11**(4), 455 – 473 (1987).
[19] L. Sanchez, "Boundary value problems for some forth order ordinary differential equation", Appl. Anal., **38**(3), 161 – 177 (1990).

Поступила 30 июля 2019

После доработки 30 июля 2019

Принята к публикации 06 февраля 2020

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 5, 2020, стр. 27 – 33

О ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ В ПОЛИДИСКЕ

А. И. ПЕТРОСЯН

Институт математики Национальная Академия Наук Армении
E-mail: *apetrosyan@ysu.am*

Аннотация. В статье даны формулы для производных интеграла типа Коши $K[u]$ гладких на остове полидиска функций u. Эти формулы выражают производные порядка m от $K[u]$ через производные более низкого порядка (Теорема 2.1). Они используются для оценки гладкости производных интеграла типа Коши в терминах порядковой шкалы Гельдера (Теорема 3.1).

MSC2010 number: 30H05, 46E15.

Ключевые слова: Полидиск, полиэдр Вейля, интеграл типа Коши, шкала Гельдера.

1. Введение

В работе Б. Ёрикке [1] получен следующий результат: *если функция, заданная на остове полидиска или невырожденного полиэдра Вейля в пространстве* $\mathbb{C}^n$ *удовлетворяет условию Гельдера порядка* α, $\alpha \in (0,1)$, *то модуль непрерывности ее интеграла типа Коши или Вейля оценивается сверху через* $\text{const} \cdot \delta^\alpha (\log 1/\delta)^{n-1}$. О функциях, удовлетворяющих условию Гельдера порядка α, см. например в [2].

Приведен соответствующий пример, из которого следует, что этот результат точный, т.е. его нельзя улучшить. Напомним определение невырожденного полиэдра Вейля.

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$ — точка n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Область D в $\mathbb{C}^n$ называется аналитическим полиэдром, если существуют N функций $\chi_n(z),\ n = 1, \dots, N$, голоморфных в некоторой окрестности $U(\overline{D})$ замыкания D и таких, что

$$D = \{z \in U(\overline{D})\colon\ |\chi_\alpha(z)| < 1,\ \ \alpha = 1, \dots, N\}.$$

Очевидно, полидиск является частным случаем полиэдра, если $N = n$ и $\chi_\alpha(z)| = z_\alpha$.

Аналитический полиэдр называется полиэдром Вейля, если $N \geqslant n$ и пересечение любых k, $1 \leqslant k \leqslant n$, гиперповерхностей $|\chi_{\alpha_i}(z)| = 1$, $i = 1, \dots, k$, имеет размерность не выше $2n - k$. В этом случае совокупность n-мерных "ребер"

$$\sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \{z\colon\ z \in \overline{D},\ \ |\chi_{\alpha_i}(z)| = 1,\ \ i = 1, \dots, n\},$$

ориентированных естественным образом, называется остовом полиэдра D и обозначается через $\Delta(D)$:

$$\Delta(D) = \bigcup_{\alpha_1 < \dots < \alpha_n} \sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

(см., например [3]).

Еще один результат, доказанный в [1], заключается в следующем: *если функция, заданная на остове, непрерывно продолжается до плюригармонической в полидиске, то логарифмический сомножитель не возникает, т.е. этом случае верен полный аналог теоремы Привалова.*

Возникает естественный вопрос о производных интеграла типа Коши, если производные заданной на остове функции удовлетворяют условию Гельдера. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Нами получена формула, выражающая производные интеграла типа Коши на остове полидиска через производные более низкого порядка (Лемма 2.1). Благодаря этому свойству формулы, с помощью индуктивных рассуждений теорема Ёрикке распространяется на случай производных (Теорема 2.1).

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon\ \ |z_k| < 1,\ \ k = 1, \dots, n\}$ — единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^n$;

$T^n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ \ |z_k| = 1,\ \ k = 1, \dots, n\}$ — его остов.

Для функции u, заданной на остове T^n через $K[u](z)$ обозначается ее n-кратный интеграл типа Коши:

$$K[u](z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\prod_{k=1}^n (\zeta_k - z_k)},$$

где $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in T^n$, $\quad z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$, $\quad d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$.

Далее, для множества X (у нас в качестве X будет либо $\overline{U^n}$, либо T^n) обозначим

$C^m(X)$ — множество функций, которые на X m раз непрерывно дифференцируемы;

$C^{m,\alpha}(X)$ — подмножество тех функций из $C^m(X)$, у которых все производные порядка m удовлетворяют условию Гельдера с показателем α.

$C^{m,\alpha}_{\log}(X)$ — множество тех функций из $C^m(X)$, у которых модуль непрерывности производных порядка m ограничен сверху $\mathrm{const}\cdot\delta^\alpha\left(\log\dfrac{1}{\delta}\right)^{\mathrm{n}-1}$.

Всюду ниже мы применяем операторы дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial\zeta_k}$ и $\dfrac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k}$ к функциям из класса $C^m(T^n)$. Согласно теореме Уитни (см., например, [4]) эти функции можно продолжить в окрестность остова T^n с сохранением класса гладкости. Упомянутые операции дифференцирования применяются именно к продолжениям, причем эти продолжения мы будем обозначать той же буквой, что и исходную функцию.

2. Формулы для производных

Начнем с предварительной леммы:

Лемма 2.1. *Пусть* $g\in C^1(T^n)$, $\quad 1\leqslant k\leqslant n$. *Тогда*

$$K\left[\frac{\partial g(\zeta)}{\partial\zeta_k}\right](z)=K\left[\overline{\zeta}_k^2\frac{\partial g(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}_k}\right](z)+\frac{\partial}{\partial z_k}K\left[g\right](z). \tag{2.1}$$

Доказательство. При фиксированном $z\in\mathbb{D}^n$ рассмотрим следующую форму

$$\omega=\frac{(-1)^{k-1}g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)}\underset{i\neq k}{\wedge}d\zeta_i.$$

Имеем

$$0=\int\limits_{T^n}d_\zeta\omega=\int\limits_{T^n}\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\frac{g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)}d\zeta+ \tag{2.2}$$
$$+\sum_{j=1}^n\int\limits_{T^n}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_j}\frac{(-1)^{k-1}g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)}d\overline{\zeta}_j\wedge\Big(\underset{i\neq k}{\wedge}d\zeta_i\Big).$$

Здесь первое равенство следует из формулы Стокса. Далее, поскольку на T^n имеем $\zeta_j\overline{\zeta}_j=1$ $(j=1,\dots,n)$, то $\zeta_j d\overline{\zeta}_j=-\overline{\zeta}_j d\zeta_j$. Поэтому

$$(-1)^{k-1}d\overline{\zeta}_j\wedge\Big(\underset{i\neq k}{\wedge}d\zeta_i\Big)=\begin{cases}-\overline{\zeta}_k^2d\zeta, & \text{если } j=k,\\ 0, & \text{если } j\neq k.\end{cases} \tag{2.3}$$

С учетом (2.3) из (2.2) получаем

$$\int\limits_{T^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k} \frac{d\zeta}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} - \int\limits_{T^n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{(\zeta_k - z_k)^2 \prod_{i\neq k}(\zeta_i - z_i)} - \int\limits_{T^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k} \frac{\bar{\zeta}_k^2 d\zeta}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} = 0 \tag{2.4}$$

С учетом того, что

$$\frac{1}{(\zeta_k - z_k)^2} = \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{1}{\zeta_k - z_k},$$

из (2.4) получим

$$\int\limits_{T^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k} \frac{d\zeta}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} = \int\limits_{T^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k} \frac{\bar{\zeta}_k^2 d\zeta}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} + \frac{\partial}{\partial z_k} \int\limits_{T^n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)}.$$

В наших обозначениях это и есть (2.1). □

В следующей теореме дается формула, которая выражает производные порядка m функции $K[f]$ через производные более низкого порядка.

Теорема 2.1. *Пусть $u \in C^m(T^n)$ и мультииндекс $r = (r_1, \dots, r_n)$ удовлетворяет условию $r_1 + \dots + r_n = m$. Тогда имеет место формула*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{r_1+\dots+r_n}}{\partial z_1^{r_1} \dots \partial z_n^{r_n}} K[u](z) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{r_j} \frac{\partial^{r_1+\dots+r_j-k_j}}{\partial z_1^{r_1} \dots \partial z_{j-1}^{r_{j-1}} \partial z_j^{r_j-k_j}} K\left[\bar{\zeta}_j^2 \frac{\partial^{k_j+r_{j+1}+\dots+r_n} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_j \partial \zeta_j^{k_j-1} \partial \zeta_{j+1}^{r_{j+1}} \dots \partial \zeta_n^{r_n}}\right](z) - \\ - K\left[\frac{\partial^{r_1+\dots+r_n} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r_1} \dots \partial \zeta_n^{r_n}}\right](z). \end{aligned} \tag{2.5}$$

В формуле (2.5), естественно, оператор дифференцирования под знаком двойной суммы считается тождественным оператором в случае, если его порядок $r_1 + \dots + r_j - k_j$ равен нулю.

Доказательство. Взяв в Лемме 2.1 $k = 1$ и

$$g(z) = \frac{\partial^{r_1-1+r_2+\dots+r_n} u(z)}{\partial z_1^{r_1-1} \partial \zeta_2^{r_2} \cdots \partial z_n^{r_n}},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} K\left[\frac{\partial^{r_1+\dots+r_n} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r_1} \dots \partial \zeta_n^{r_n}}\right](z) = K\left[\bar{\zeta}_1^2 \frac{\partial^{r_1+\dots+r_n} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r_1-1} \partial \zeta_2^{r_2} \dots \partial \zeta_n^{r_n}}\right](z) + \\ + \frac{\partial}{\partial z_1} K\left[\frac{\partial^{r_1-1+r_2+\dots+r_n} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r_1-1} \partial \zeta_2^{r_2} \cdots \partial \zeta_n^{r_n}}\right](z). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Обратим внимание на то, что подынтегральное выражение во втором слагаемом в правой части (2.6) имеет порядок дифференцирования по ζ_1 на единицу меньше, чем слева, т.е. формула (2.6) имеет рекуррентный характер. Применяя ее последовательно r_1 раз, получим

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad & K\left[\frac{\partial^{r_1+\dots+r_n}u(\zeta)}{\partial\zeta_1^{r_1}\dots\partial\zeta_n^{r_n}}\right](z) = \\
&= K\left[\bar{\zeta}_1^2\frac{\partial^{r_1+\dots+r_n}u(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}_1\partial\zeta_1^{r_1-1}\partial\zeta_2^{r_2}\dots\partial\zeta_n^{r_n}}\right](z)+ \\
&+\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{K\left[\bar{\zeta}_1^2\frac{\partial^{r_1-1+r_2+\dots+r_n}u(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}_1\partial\zeta_1^{r_1-2}\partial\zeta_2^{r_2}\dots\partial\zeta_n^{r_n}}\right](z)+\right. \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial z_1}K\left[\frac{\partial^{r_1-2+r_2+\dots+r_n}u(\zeta)}{\partial\zeta_1^{r_1-2}\partial\zeta_2^{r_2}\dots\partial\zeta_n^{r_n}}\right](z)\right\} = \cdots \\
&= \sum_{k_1=1}^{r_1}\frac{\partial^{r_1-k_1}}{\partial z_1^{r_1-k_1}}K\left[\bar{\zeta}_1^2\frac{\partial^{k_1+r_2+\dots+r_n}u(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}_1\partial\zeta_1^{k_1-1}\partial\zeta_2^{r_2}\dots\partial\zeta_n^{r_n}}\right](z) \\
&+\frac{\partial^{r_1}}{\partial z_1^{r_1}}K\left[\frac{\partial^{r_2+\dots+r_n}u(\zeta)}{\partial\zeta_2^{r_2}\dots\partial\zeta_n^{r_n}}\right](z).
\end{aligned}
$$

Заметим, что в последнем слагаемом в правой части (2.7) производные по ζ_1 исчезли. Чтобы избавиться и от остальных производных, применяем, как и выше, формулу (2.1) последовательно по переменным $\zeta_2,\dots,\zeta_n$, выбирая каждый раз соответствующим образом k и функцию $g(z)$. Это приведет к (2.5). $\square$

Замечание 2.1. Сомножители $\bar{\zeta}_j^2$ в интегралах Коши $K[\bar{\zeta}_j^2\dots]$ в правой части (2.5) появляются по чисто техническим причинам и для приложений (в Теореме 3.1) не мешают.

3. Гельдеровские оценки для производных

Для некоторого α, $0<\alpha<1$ введем следующие обозначения:

$A^m(U^n)$ означает пространство всех голоморфных в U^n функций, которые m раз непрерывно дифференцируемы на $\overline{U}^n$;

$A^{m,\alpha}(U^n)$ означает подмножество тех функций из $A^m(U^n)$, у которых производные порядка m принадлежат α-классу Гельдера на $\overline{U}^n$;

$A^{m,\alpha}_{(\log)}(U^n)$ означает подмножество тех функций из $A^m(U^n)$, у которых модуль непрерывности всех производных m-го порядка ограничены сверху $\mathrm{const}\cdot\delta^\alpha\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\mathrm{n}-1}$ на $\overline{U}^n$. В этих обозначениях мы опускаем m, если $m=0$. Заметим, что $A^0(U^n)=A(U^n)$ является обычной полидиск-алгеброй.

Теорема 3.1. *Пусть* $u \in C^{m,\alpha}(T^n)$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда* $K[u] \in A^{m,\alpha}_{(\log)}(U^n)$.

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по m. При $m = 0$ утверждение теоремы является следствием теоремы Ёрикке [1].

Сделаем индуктивное предположение: пусть утверждение теоремы справедливо для всех порядков гладкости, меньших m. Воспользуемся тождеством (2.5) из леммы 2.1. Из условия теоремы следует, что функции

$$\overline{\zeta}_j^2 \frac{\partial^{k_j + r_{j+1} + \cdots + r_n} u(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_j \partial \zeta_j^{k_j - 1} \partial \zeta_{j+1}^{r_{j+1}} \ldots \partial \zeta_n^{r_n}}$$

принадлежат классу $C^{r_1 + \cdots + r_j - k_j + \alpha}(T^n)$. Так как $r_1 + \cdots + r_j - k_j < m$, то согласно индуктивному предположению

$$K \left[\overline{\zeta}_j^2 \frac{\partial^{k_j + r_{j+1} + \cdots + r_n} u(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_j \partial \zeta_j^{k_j - 1} \partial \zeta_{j+1}^{r_{j+1}} \ldots \partial \zeta_n^{r_n}} \right] (z) \in C^{r_1 + \cdots + r_j - k_j + \alpha}_{(\log)}(\overline{U^n}).$$

Поэтому слагаемые под знаком двойной суммы в правой части (2.5) принадлежат $C^{\alpha}_{(\log)}(\overline{U^n})$, т.е.

$$\frac{\partial^{r_1 + \cdots + r_j - k_j}}{\partial z_1^{r_1} \ldots \partial z_{j-1}^{r_{j-1}} \partial z_j^{r_j - k_j}} K \left[\overline{\zeta}_j^2 \frac{\partial^{k_j + r_{j+1} + \cdots + r_n} u(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_j \partial \zeta_j^{k_j - 1} \partial \zeta_{j+1}^{r_{j+1}} \ldots \partial \zeta_n^{r_n}} \right] (z) \quad \in \quad C^{\alpha}_{(\log)}(\overline{U^n}). \tag{3.1}$$

Далее, т.к. по условию

$$\frac{\partial^{r_1 + \cdots + r_n} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r_1} \ldots \partial \zeta_n^{r_n}} \in C^{\alpha}(T^n),$$

то для последнего слагаемого в (2.5) имеем

$$K \left[\frac{\partial^{r_1 + \cdots + r_n} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r_1} \ldots \partial \zeta_n^{r_n}} \right] (z) \in C^{\alpha}_{(\log)}(\overline{U^n}). \tag{3.2}$$

Из (3.1), (3.2) и (2.5) следует, что

$$\frac{\partial^{r_1 + \cdots + r_n}}{\partial z_1 \ldots \partial z_n} K[u](z) \in C^{\alpha}_{(\log)}(\overline{U^n}),$$

а это и означает, что $K[u] \in C^{m,\alpha}_{(\log)}(\overline{U^n})$. Поскольку $K[u]$ голоморфна в (U^n), то отсюда следует, что $K[u] \in A^{m,\alpha}_{(\log)}(U^n)$. Теорема доказана. □

Abstract. The paper gives formulas for the derivatives of the Cauchy-type integral $K[u]$ of functions u smooth on the distinguished boundary of polidisk. These formulas express derivatives of order m of $K[u]$ in terms of derivatives of lower order (Theorem 2.1). They are used to estimate the smoothness of the derivatives of a Cauchy-type integral in terms of the Holder order scale (Theorem 3.1)

Список литературы

[1] B. Joricke, "On a miltidimensional analogon of Privalov's theorem", Math. Nach., **107**, 221– 233 (1982).

[2] S. M. Nikol'ski, Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems [in Russian], 1969, Nauka, Moscow.

[3] В. С. Владимиров, Методы Теории Функций Многих Комплексных Переменных, М., Физматгиз (1964).

[4] B. Malgrange, Ideals of Differentiable Functions, Oxford Univ. Press (1966).

Поступила 17 февраля 2020

После доработки 19 июня 2020

Принята к публикации 02 июля 2020

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 5, 2020, стр. 34 – 50

КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ ОБРАТИМОСТИ В ВЕСОВЫХ L^p ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА ФОКА

Ф. А. ШАМОЯН

Саратовский национальный научно-исследовательский университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: *shamoyanfa@yandex.ru*

Посвящается 100-летию академика Мхитара Джрбашьяна

Abstract. В статье получено полное описание слабо обратимых элементов в весовых L^p пространствах целых функций типа Фока.

MSC2010 number: 30H05; 46E15; 30D15; 47B35.

Ключевые слова: целые функции; пространство Фока; линейные непрерывные функционалы; проблема Ватсона; весовая полиномиальная аппроксимация.

1. Введение

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, $H(\mathbb{C})$ - множество всех целых функций и пусть $R_+ = \{x \in R : x \geq 0\}$. Для любых σ, $\alpha \in R_+$, $p > 0$, введём в рассмотрение следующее весовое пространство целых функций:

$$F^p_{\sigma,\alpha} = \left\{ f \in H\left(C\right) : \|f\|_{F^p_{\sigma,\alpha}} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^\theta\right)\right|^p d\theta dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

при $p = 2$, $\alpha = 2, \sigma = \frac{1}{2}$ пространство $F^2_{1,\frac{1}{2}}$ совпадает с классическим пространством Фока (см.[1]), а при $p = 2$, σ, $\alpha > 0$ эти пространства были введены и изучены М.М. Джрбашяном в работах [2], [3](см. также [4,5]).

Для изложения основных результатов статьи нам потребуется ещё некоторые определения и обозначения. Пусть P - множество всех алгебраических многочленов от z, X - некоторое пространство целых функций $P \subset X$, причем P составляет всюду плотное множество в X.

Предположим, что $f \in X$, при этом для произвольного многочлена $p \in P$, $pf \in X$. Скажем, что функция f слабо обратима в пространстве X, если существует последовательность многочленов p_n, $n = 1, 2, ...$, таких что $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n f = 1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X. В классических работах

В. И. Смирнова, М. В. Келдыша, С. Н. Мергеляна такие функции назывались "максимальными" (см.[6] стр. 237)

Описание слабо обратимых элементов в конкретных функциональных пространствах тесно связано с широким кругом задач нескольких дисциплин: от теории дифференциальных операторов и их обобщений до абстрактного гармонического анализа (см. [7,8]).

В работе устанавливается, что функция $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$ слабо обратима в $F^p_{\sigma,\alpha}$ тогда и только тогда, когда $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, при этом получено полное описание таких функций. Также в статье строится пространство типа Фока, в котором существуют сильно обратимые функции, не обладающие слабой обратимостью.

Основными результатами статьи являются следующие утверждения:

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $0 < \alpha, \sigma < +\infty$, $f \in H(\mathbb{C})$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. *Тогда*
1) если $\alpha \overline{\in} N$, *то следующие условия равносильны*

i)$f \in F^p_{\sigma,\alpha}$,

$$(*) \qquad ii) \qquad f(z) = \exp(h(z)),\ h(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ z \in \mathbb{C},\ n < \alpha.$$

2) Пусть $\alpha = n \in N$, $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, *тогда* f *имеет вид (*), где* $n \leq \alpha$, *причем, если* $\alpha = n$, $n \leq 2$, *то функция вида* $f(z) = \exp(az^n)$ *принадлежит* $F^p_{\sigma,\alpha}$, *тогда и только тогда, когда* $|a| < \frac{\sigma}{p}$, *если же* $n > 2$, *то возможен и случай* $|a| = \frac{\sigma}{p}$. *Если функция вида (*) принадлежит классу* $F^p_{\sigma,\alpha}$, *то* $|a_n| \leq \frac{\sigma}{p}$. *Обратно, если* $|a_n| < \frac{\sigma}{p}$, *то* $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$.

3) Пусть функция f имеет вид (*), при этом, либо $n < \alpha$, *либо* $\alpha = n$, *но* $|a_n| < \frac{\sigma}{p}$, *тогда* $pf \in F^p_{\sigma,\alpha}$ *для произвольного алгебраического многочлена* p, *при этом* f *слабо обратима в* $F^p_{\sigma,\alpha}$.

Следующая теорема уточняет последнее утверждение теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Пусть* $p, \sigma, \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, f *- целая функция, представимая в виде* $(*)$, *где* $|a_n| < \frac{\sigma}{p}$. *Пусть далее*

$$\psi(x) = (\sigma - p|a_n|)\, x - b_{n-1} x^{\frac{n-1}{n}} p - \varepsilon(x),\ x \in \mathbb{R}_+,$$

где $b_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$, *и* $\varepsilon(x)$ *- положительная функция из* $C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$, *причем*

$\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon^{(1)}(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\,\varepsilon^{(2)}(x)=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varepsilon(x)}{\ln x}=+\infty.$

$$F^p_{\sigma,\alpha,\psi}=$$

$$=\left\{f\in H(\mathbb{C}):\|f\|_{F^p_{\sigma,\alpha,\psi}}=\left(\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-\sigma r^\alpha+\psi(r^\alpha)\right)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta dr\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.\right\}$$

При этом $\alpha=n\in\mathbb{N}$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) произвольная функция f *вида* $(*)$*, принадлежащая* $F^p_{\sigma,\,\alpha}$*, слабо обратима в* $F^p_{\sigma,\,\alpha,\,\psi}$.

б) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sigma/p-|a_n|-\frac{b_{n-1}}{x^{1/n}}-\frac{\psi(x)}{px}}{x^{1/2}}dx=+\infty.$

Теорема 1.3. *Пусть* $0<p,\ \sigma<+\infty,\ n\in\mathbb{N}$*. Тогда существует* $\varphi\in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$, $f\in H(\mathbb{C})$ *такие, что* $Pf\subset F^p_{\sigma,n,\varphi}$, $\frac{1}{f}\in F^p_{\sigma,n,\varphi}$*, в тоже время*

$$\inf\left\{\|Qf-1\|_{F^p_{\sigma,\,n,\,\varphi}}=Cf>0,\ Q\in P\right\}.$$

Замечание 1.1. *Аналоги теорем 1.1 и 1.2 при* $p=+\infty$*, при более общих весовых функциях ранее были установлены в работах автора [9], [10]. Метод, применяемый здесь, по идее близок к этим работам.*

Замечание 1.2. *В том частном случае, когда* $\alpha=2$, $\sigma=\frac{1}{2}$, $p=2$*, в работе [11] совершенно другим способом доказана теорема 1 (по-видимому, автор не был знаком с работами [9],[10]), причем существенно использована гильбертовость* $F^2_{\frac{1}{2},2}$ *и свойство воспроизводящего ядра* $\exp(z\overline{w})$ *этого пространства, при остальных значениях параметров* σ, α, p *указанный метод не проходит.*

Замечание 1.3. *Отметим, что аналог теоремы 1.3 в случае весовых пространств аналитических в круге функций был установлен в работах [9], [10], а в случае весовых пространств Бергмана в единичном круге — в работе [12].*

2. Формулировка и доказательство вспомогательных утверждений

В дальнейшем нам потребуется еще несколько обозначений и определений: через $c=c(...)$ будем обозначать абсолютную константу, зависящую только от $(...)$. Если две вещественнозначные функции f и g определены на множестве E, то оценка $f(\zeta)\lesssim g(\zeta),\zeta\in E$ означает, что существует положительное число A, такое что $f(\zeta)\le Ag(\zeta),\forall\zeta\in E$, а соотношение $f(\zeta)\approx g(\zeta),\zeta\in E$ означает, что

$f(\zeta) \lesssim g(\zeta), g(\zeta) \lesssim f(\zeta), \zeta \in E$. Множество всех субгармонических функций на $\mathbb{C}$ обозначим через $SH(\mathbb{C})$.

Следующая лемма устанавливается точно таким же образом, как лемма 8 из [10].

Лемма 2.1. *Пусть* $0 < \rho < 1$, $0 < p < +\infty$, $\alpha, \sigma \in R$, $\alpha, \sigma \neq 0, f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $f_\rho(z) = f(\rho z)$. *Тогда*

i) $||f_\rho - f||_{F^p_{\sigma,\alpha}} \to 0$ *при* $\rho \to 1 - 0$.

ii) Если $\Phi \in (F^p_{\sigma,\alpha})^*$, *то*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k \phi(\delta_k), \tag{2.1}$$

где $\delta_k(z) = z^k, k \in Z_+$.

Лемма 2.2. *Пусть* $h \in SH(\mathbb{C})$, *причём*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} \int\limits_{-\pi}^{\pi} exp(h(re^{i\phi}))d\phi dr \leq M. \tag{2.2}$$

Тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\theta})| d\theta \lesssim R^\alpha. \tag{2.3}$$

Доказательство. По неравенству Йенсена (см. [13] стр. 45)

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(re^{i\theta}) d\theta \leq \ln \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} exph(re^{i\theta}) d\theta \right),$$

умножая указанное неравенство на $e^{-\sigma r^\alpha}$ и проинтегрируя по полуоси $(0, +\infty)$, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} exp \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(re^{i\theta}) d\theta dr \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\sigma r^\alpha} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} exp(h(re^{i\theta})) d\theta dr \leq M. \tag{2.4}$$

Положим $\psi(r) = exp \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(re^{i\theta}) d\theta$. Используя субгармоничность фукции h, заметим, что функция ψ не убывает на полуоси $(0, +\infty)$, следовательно, из оценки (2.4) получаем

$$\psi(R) \cdot \int\limits_R^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} dr \leq M.$$

Нетрудно установить асимптотику

$$\int_R^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} dr \approx \frac{e^{-\sigma R^\alpha}}{\alpha\sigma R^{\alpha-1}}. \tag{2.5}$$

Из оценок (2.4),(2.5) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta})d\theta \lesssim R^\alpha. \tag{2.6}$$

Положим

$$h^+(Re^{i\theta}) = max(h(Re^{i\theta}),0)$$

$$h^-(Re^{i\theta}) = max(-h(Re^{i\theta}),0).$$

Тогда

$$h(Re^{i\theta}) = h^+(Re^{i\theta}) - h^-(Re^{i\theta}). \tag{2.7}$$

Приступим к оценке интеграла от функции $h^+(Re^{i\theta})$. Используя равенство (2.7), имеем:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} exp(h(Re^{i\theta}))dr = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} exp(h^+(Re^{i\theta}) - h^-(Re^{i\theta}))d\theta \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E(\theta:h^+(Re^{i\theta})>0)} exp(h^+(Re^{i\theta})) - h^-(Re^{i\theta})d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E(\theta:h^+(Re^{i\theta})=0)} exp(h^+(Re^{i\theta})) - h^-(Re^{i\theta})d\theta \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E(\theta:h(Re^{i\theta})>0)} exp(h^+(Re^{i\theta})) - h^-(Re^{i\theta})d\theta.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} exp(h^+(Re^{i\theta}))d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E(\theta:h^+(Re^{i\theta})>0)} exp(h^+(Re^{i\theta}))d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E(\theta:h^+(Re^{i\theta})=0)} exp(h^+(Re^{i\theta}))d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E(\theta:h^+(Re^{i\theta})>0)} exp(h^+(Re^{i\theta}))d\theta +$$

$$+\frac{2\pi - m(E(h^+(Re^{i\theta}))=0)}{2\pi} \leq I+1.$$

Снова используя (2.6) и (2.7), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^+(Re^{i\theta})d\theta \lesssim R^\alpha, \quad R>0. \tag{2.8}$$

Чтобы вывести из последней оценки доказательство леммы, используем снова субгармоничность функции h. Имеем

$$h(0) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta})d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h^{+}(Re^{i\theta})d\theta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h^{-}(Re^{i\theta})d\theta.$$

Т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h^{-}(Re^{i\theta})d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h^{+}(Re^{i\theta})d\theta - h(0).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(Re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (h^{+}(Re^{i\theta}) + h^{-}(Re^{i\theta})d\theta \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h^{+}(Re^{i\theta})d\theta - h(0) \lesssim R^{\alpha}, \quad R > 0.$$

Лемма 2.3. *Пусть h - целая функция, такая, что*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sigma r^{\alpha}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} exp(pReh(re^{i\theta}))dr < +\infty.$$

Тогда

$$h(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, z \in \mathbb{C}.$$

При этом либо $n < \alpha$, либо $n = \alpha$, но $|a_n| \le \frac{\sigma}{p}$, если $n > 2$, то возможен также случай $|a_n| = \frac{\sigma}{p}$.

Доказательство. Доказательство первой части непосредственно следует из Леммы 2.2 и хорошо известных оценок типа Коши коэффициентов разложения целой функции через действительную часть самой функции (см. [14] стр. 265).

Действительно, если $h(z) = u(z) + iv(z), z \in C$, то из леммы 2.2 следует, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(Re^{i\theta})|d\theta \lesssim R^{\alpha}, \quad \forall R \ge 1.$$

Остается применять рассуждения используемые в [14] (см. [14] стр. 264-265.).

Итак, $h(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_n z^k$, где $n\le\alpha$. Перейдем к доказательству второй части:

$$f\in F^p_{\sigma,\alpha}, f(z)\neq 0, f(z)=exp(\sum_{k=0}^{n} a_n z^k), 1\le n\le\alpha. \tag{2.9}$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $arga_n=0$, т.к. из принадлежности $f\in F^p_{\sigma,\alpha}$ следует, что $f(e^{\frac{-i\theta n}{n}}z)$ так же принадлежит $F^p_{\sigma,\alpha}$, где $\theta n=arga_n$. Положим

$$\chi_n(z)=exp(\frac{p}{s}|a_n|z^n),\quad \chi_{n-1}(z)=exp(\frac{p}{s}\sum_{k=0}^{n-1} a_n z^k),\quad z\in C,$$

где s - sl действительное число, $s>1$.

Докажем сначала, что если $f\in F^p_{\sigma,\alpha}$, при этом f имеет вид (2.9), $n=\alpha$, из принадлежности f классу $F^p_{\sigma,\alpha}$ следует, что $\chi_n\in F^1_{\sigma,\alpha}$. Действительно

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\chi_n(re^{i\theta}|d\theta dr=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\chi_n(re^{i\theta})\chi_{n-1}(re^{i\theta})||\chi^{-1}_{n-1}(re^{i\theta})|d\theta dr.$$

Применим в последнем интеграле неравенство Гельдера с показателем s, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\chi_n(re^{i\theta})|d\theta\le$$

$$\le(\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\sigma r^\alpha}|f(re^{i\theta})|^\rho d\theta dr)^{\frac{1}{s}}\cdot(\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\sigma r^\alpha}|\chi^{-1}_{n-1}(re^{i\theta})|^{s'}d\theta dr)^{\frac{1}{s'}}, \tag{2.10}$$

где $s'=\frac{s}{s-1}$.

Докажем ограниченность последних интегралов. Первый интеграл конечен, поскольку $f\in F^p_{\sigma,\alpha}$. Докажем ограниченность второго интеграла. Ясно, что

$$|\chi^{-1}_n(re^{i\theta})|\le exp\frac{p}{s}(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|r^k),\quad r\in(0,+\infty),\quad \theta\in(-\pi,\pi).$$

Поэтому последний интеграл в неравенстве (2.10) оценивается очевидным образом:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\chi^{-1}_{n-1}(re^{i\theta})|^{s'}d\theta dr\lesssim\int\limits_0^{+\infty} exp(-\sigma r^\alpha+\frac{p}{s-1}(\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|r^j))dr<+\infty,$$

Таким образом, из принадлежности функции f классу $F^p_{\sigma,\alpha}$ вытекает $\chi_n\in F^1_{\sigma,\alpha}\quad\forall s>1$, т.е.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha}\int\limits_{-\pi}^{\pi} exp(\frac{p}{s}r^n|a_n|\cos n\theta)d\theta dr\lesssim M(s). \tag{2.11}$$

Причем M зависит только от s. Докажем, что из сходимости последнего интеграла следует утверждение Леммы. Найдем сначала оценки интеграла сверху и снизу.

$$I = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} exp(\frac{p}{s}|a_n|r^n \cos n\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} exp(\frac{p}{s}|a_n|r^n \cos n\theta)d\theta.$$

Произведем замену переменной

$$I = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{n\pi} exp(p|a_n|r^n \cos\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} exp(\frac{p}{s}|a_n|r^n \cos\theta)d\theta.$$

Положив $v = \theta - k\pi$, получим

$$I = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{0}^{\pi} exp(\frac{p}{s}|a_n|r^n \cos(v+k\pi))dv = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(\int\limits_{0}^{pi} exp(\frac{p}{s}|a_n|r^n(-1)^k \cos v)dv).$$

Из последнего равенства непосредственно следует следующая оценка

$$\int\limits_{0}^{\pi} exp(\frac{p}{s}|a_n|r^n \cos v)dv \le I \le \frac{n}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} exp(\frac{p}{s}r^n|a_n| \cos v)dv. \tag{2.12}$$

Теперь получим ассимптотику полученного интеграла. С этой целью разложим подинтегральную функцию в ряд Маклорена

$$\int_0^{\pi} exp(\frac{p}{s}|a_n|r^n \cos v)dv = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\frac{p}{s}|a_n|)^k r^{nk}}{k!}\int\limits_{0}^{\pi}(\cos v)^k dv$$

Используя хорошо известные значения последнего интеграла (см. [15] стр. 387) асимптотические формулы (см. [16] стр. 294), получаем

$$\int\limits_{0}^{\pi} exp(\frac{p}{s}|a_n|r^n \cos v)dv \approx \frac{exp(\frac{p}{s}|a_n|pr^n)}{r^{\frac{n}{2}}}. \tag{2.13}$$

Следовательно, из сходимости интеграла (2.11) следует

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{exp(-\sigma r^{\alpha} + |a_n|\frac{p}{s}r^n)}{r^{\frac{n}{2}}}dr < +\infty. \tag{2.13`}$$

Из этой оценки следует, что либо $n < \alpha$, либо $n = \alpha$, но $|a_n| < \frac{s\sigma}{p}$, при всех $s > 1$, т.е. $|a_n| \le \frac{\sigma}{p}$. Если же $|a_n|\frac{p}{s} = \sigma$, при некотором s, то необходимо чтобы $n > 2$.

Следствие 2.1. *Пусть f имеет вид (*), при этом $n < \alpha$, или $n = \alpha$, но $|a_n| < \frac{\sigma}{p}$. Тогда $Q_m f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, для произвольного многочлена $Q_m(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k z^k$.*

Лемма 2.4. *Пусть f принадлежит $H(C)$, $f(z) \neq 0$, при этом $\delta_m(z)f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, где $\delta_m(z) = z^m, z \in \mathbb{C}$, $m \in N$. Тогда, $D^m f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, где $D(f)(z) := zf(z), z \in \mathbb{C}, D^m f = D(D^{m-1}f)$, $m = 1, 2, 3, ...$*

Доказательство непосредственно следует из Леммы 2.3 и ее следствия.

Пусть далее $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, при этом $Qf \in F^p_{\sigma,\alpha}$ для произвольного многочлена Q. Обозначим через $E(f)$ замыкание в пространстве $F^p_{\sigma,\alpha}$ множества $P{\cdot}f$. Напомним, что P - множество всех многочленов.

Лемма 2.5. *Пусть $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. При этом выполняются все условия леммы 2.4, тогда $D^m f \in E(f)$ $\forall m \in N$.*

Доказательство непосредственно следует из леммы 2.3, ее следствия и леммы 2.4.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.1. Доказательство первого пункта следует из первой части леммы 2.2 и первой части леммы 2.3 (см. (2.9)). Перейдем к доказательству второго пункта. Ясно, что если $f(z) = exp(az^n), 1 \leq n \leq 2$, то f принадлежит $F^p_{\sigma,\alpha}$ тогда и только тогда, когда $|a| < \frac{\sigma}{p}$, (см. (2.13) и (2.13`)), где $a = \frac{a_n}{s}$. Если же $n > 2$, то возможен и случай $|a| = \frac{\sigma}{p}$ (см.(2.13)).

Перейдём к доказательству 3-ого пункта. Первая часть этого пункта следует из лемм 2.3 и 2.4, докажем вторую часть. Используя лемму 2.3, имеем:

$$f(z) = exp(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k), \quad z \in C \tag{3.1}$$

При этом либо $n < \alpha$, либо $n = \alpha$, но

$$|a_n| < \frac{\sigma}{p}. \tag{3.2}$$

Сначала предположим, что $1 \leq p < +\infty$. Пусть Ф-произвольный линейный непрерывный функционал на пространстве $F^p_{\sigma,\alpha}$, такой, что $\Phi \perp E(f)$, т.е. $\Phi(g) = 0$, для произвольного $g \in E(f)$.

Докажем, что $\Phi(1) = 0$, из теоремы Хана-Банаха следует, что $1 \in E(f)$. По леммам 2.2, 2.3 и 2.5

$$\Phi(D^n f) = \lim_{\rho \to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} k^m c_k \Phi(\delta_k) \rho^k = 0, \tag{3.3}$$

где

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kz^k, \quad z\in\mathbb{C}, \quad m=0,1,2,...$$

Докажем, что последний ряд сходится абсолютно. С этой целью оценим выражение

$$|c_k||\Phi(\delta_k)|\le|c_k|\|\Phi\|\|\delta_k\|$$

Используя оценки (2.11), (2.13) и неравенство Коши, получаем

$$|c_k|^pr^{kp}\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\phi})|^pd\phi\lesssim exp((|a_n|p+\epsilon)r^n), \tag{3.4}$$

где ϵ - произвольное положительное число. Теперь оценим норму

$$||\delta_k||^p_{F^p_{\sigma,\alpha}}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\sigma r^\alpha}r^{kp}dr\lesssim$$

$$\lesssim\max_{r\in R_+}(exp(\sigma r^\alpha)r^{kp+2}).$$

Итак,

$$|c_k|^p|\Phi(\delta_k)|^p\lesssim\frac{1}{r^{kp}}exp((|a_n|p+\epsilon)r^n)\max_{r\in R_+}\{exp(-\sigma r^\alpha)r^{kp+2}\}.$$

Пусть теперь

$$\max_{r\in R_+}\{exp(-\sigma r^\alpha)r^{kp+2}\}=exp(-\sigma r_k^\alpha)r_k^{kp+2} \tag{3.5}$$

при некотором $r=r_k\in R_+$. Тогда получаем

$$|c_k||\Phi(\delta_k)|\lesssim exp\{\frac{1}{p}(|a_k|p+\epsilon)r_k^n-\sigma r_k^\alpha\}r_k^{\frac{2}{p}}.$$

Или

$$|c_k||\Phi(\delta_k)|k^m\lesssim exp\{(|a_n|+\frac{\epsilon}{p})r_k^n-\frac{\sigma}{p}r_k^\alpha\}r_k^{\frac{2}{p}}k^m, \quad m=0,1,2,... \tag{3.6}$$

Теперь заметим, что r_k является решением уравнения

$$-e^{\sigma r_k^\alpha}\sigma\alpha r^k(\alpha+kp+1)+e^{-\sigma r_k^\alpha}(kp+2)r_k^(kp+1)=0$$

т.е. $r_k=(\frac{kp+2}{\sigma\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$. Следовательно из (3.6) получаем

$$|c_k||\Phi(\delta_k)|k^m\lesssim exp\{(|a_k|+\frac{\epsilon}{p})(\frac{kp+2}{\sigma\alpha})^{\frac{n}{\alpha}}-\frac{\sigma}{p}(\frac{kp+2}{\sigma\alpha})\}k^m, \tag{3.7}$$

Но по первому пункту теоремы либо $n<\alpha$, либо $n=\alpha$, при этом $|a_n|<\frac{\sigma}{p}$. Учитывая эти условия из оценку (3.7), окончательно получаем

$$|c_k||\Phi(\delta_k)|k^m\lesssim exp(-\delta\cdot k)k^m, \tag{3.8}$$

где

$$0<\epsilon<\sigma-p|a_k|, \quad \delta=\frac{\sigma}{p}-|a_n|-\frac{\epsilon}{p}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k||\phi(\delta_k)|k^m < +\infty$$

при любом $m = 0, 1, 2, ...$ Следовательно, из (3.3) получаем

$$\Phi(D^m F) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \Phi(\delta_k) k^m = 0, \tag{3.9}$$

для всех $m = 0, 1, 2, ...$

Остается копировать рассуждение применяемое при доказательстве теоремы 2 из [10] и установить $f(0)\phi(1) = 0$, т.е. $\phi(1) = 0$. Теорема доказана при $1 \le p < +\infty$.

Перейдем к случаю $0 < p < 1$. Пусть $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, $\quad f(z) \ne 0, \quad z \in C$, тогда, используя леммы 2.3, 2.4, 2.5, получим

$$f(z) = exp(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k), \quad z \in \mathbb{C}, \quad D^m f \in F^p_{\sigma,\alpha} \tag{3.10}$$

При этом, либо $n < \alpha$, либо $n = \alpha$, но

$$|a_n| < \frac{\sigma}{p} \tag{3.11}$$

Положим, $g(z) = [f(z)]^{\frac{1}{2}}, \quad z \in \mathbb{C}$, где выбрана главная ветвь степенной функции. Ясно, что $g \in F^2_{\sigma,\alpha}$. Согласно первой части теоремы, существует последовательность многочленов $\{Q_m\}_1^{+\infty}$ таких, что $||Q_m g - 1||_{F^2_{\sigma,\alpha}} \to 0$ при $m \to +\infty$. Отсюда следует, что (см. [3]) равномерно на компактных подмножествах комплексной плоскости

$$\lim_{m\to+\infty} Q_m(z)g(z) = \lim_{m\to+\infty} Q^2_m(z)f(z) = 1.$$

Докажем, что указанная сходимость имеет место и в пространстве $F^p_{\sigma,\alpha}$. Сначала заметим, что

$$I_m = ||Q^2_m g^2 - 1||^p_{F^p_{\sigma,\alpha}} = ||(Q_m g - 1)(Q_m g + 1)||^p_{F^p_{\sigma,\alpha}}$$

Применим к этому интегралу неравенство Коши - Буняковского, получим

$$I_m \le \left(\int_0^{+\infty} exp(-\sigma r^\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} |Q_m(re^{i\phi})g(re^{i\phi}) - 1|^{2p} d\phi dr \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^{+\infty} exp(-\sigma r^\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} |Q_m(re^{i\phi})g(re^{i\phi}) + 1|^{2p} d\phi dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателем $\frac{1}{p}$ приходим к оценке

$$I_m \le \left(\int_0^{+\infty} exp(-\sigma r^\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} |Q_m(re^{i\phi})g(re^{i\phi}) - 1|^2 d\phi dr \right)^{\frac{p}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^{+\infty} exp(-\sigma r^\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} |Q_m(re^{i\phi})g(re^{i\phi}) + 1|^2 d\phi dr \right)^{\frac{p}{2}}$$

Ввиду сходимости последовательности $\{Q_m g\}_1^\infty$ в пространстве $F^2_{\sigma,\alpha}$, получаем

$$\lim_{m\to+\infty} I_m = 0. \qquad \square$$

Перейдем к доказательству теоремы 1.1. Сначала докажем, что из б) следует а). По условии теоремы, f допускает представление $(*)$ при этом $n = \alpha$, но $|a_n| < \frac{\sigma}{p}$. Следуя рассуждениям применяемым при доказательстве теоремы 1.1, получим

$$|\Phi(\delta_k)| \lesssim \sup_{r>0}[exp\{-\frac{\sigma}{p}r^\alpha + \frac{\psi(r^\alpha)}{p}\}r^{k+\frac{2}{p}}]$$

Положив $x = r^\alpha$, получим

$$|\Phi(\delta_k)| \lesssim \sup_{x>0}\left\{exp\left(-\frac{\sigma}{p}x + \frac{\psi(x)}{p} + (k+\frac{2}{p})\frac{\ln x}{\alpha}\right)\right\} \tag{3.12}$$

Пусть

$$\omega(x) := \sigma x - x\psi'(x)$$

По условиям теоремы 1.2 $\omega(x) \uparrow^{+\infty}$ $(x \to +\infty)$, тогда экстремум в (3.12) достигается в точке:

$$-\sigma + \psi'(x_k) + \frac{kp+2}{\alpha x_k} = 0$$

Т.е.

$$\sigma x_k - x_k\psi'(x_k) = \frac{kp+2}{\alpha} \tag{3.13}$$

Пусть $v(x)$ является обратной к функции $\omega(x)$ на $(x_0, +\infty)$ при достаточно большом x_0.

Тогда из равенства (3.13) имеем $x_k = v(\frac{kp+2}{\alpha})$. Следовательно, из (3.13) получаем

$$|\Phi(\delta_k)| \lesssim exp\left\{-\frac{\sigma}{p}x_k + \frac{\psi(x_k)}{p} + \frac{2}{p}\frac{\ln x_k}{\alpha}\right\} \cdot x_k^{\frac{k}{\alpha}} \tag{3.14}$$

Напомним, что $r_k = x_k^{\frac{1}{\alpha}}$. Из оценки Коши для коэффициентов разложения функции f и по равенству (3.13), аналогично как при доказательстве теоремы 1.1, окончательно получаем,

$$|c_k||\Phi(\delta_k)| \lesssim$$

$$\lesssim exp\left[-\left(\frac{\sigma}{p}-\frac{\psi(v(\frac{kp+2}{\alpha}))}{pv(\frac{kp+2}{\alpha})}-|a_n|v(\frac{kp+2}{\alpha})^{\frac{n-\alpha}{\alpha}}-b_{n-1}v(\frac{kp+2}{\alpha})^{\frac{n-1-\alpha}{\alpha}}\right)v(\frac{kp+2}{\alpha})\right]$$

Теперь, учитывая, что $n\le\alpha$, из последней оценки выводим

$$|c_k||\Phi(\delta_k)|\lesssim exp\left[-\left(\frac{\sigma}{p}-|a_n|-\frac{\psi(v(\frac{kp+2}{\alpha}))}{pv(\frac{kp+2}{\alpha})})-\frac{b_{n-1}}{v(\frac{kp+2}{\alpha})}\right)v(\frac{kp+2}{\alpha})\right]$$

Снова используем оценку $|a_n|p<\sigma$, соотношение $v(x)\sim|a_n|px$ и условие теоремы, заметим,что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sigma}{p}-|a_n|-\frac{b_{n-1}}{v(\frac{kp+2}{\alpha})}-\frac{\psi(v(\frac{kp+2}{\alpha}))}{pv(\frac{kp+2}{\alpha})}\right)\frac{v(\frac{kp+2}{\alpha})}{\ln k}=+\infty$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{+\infty}k^m|c_k||\Phi(\delta_k)|<+\infty,\ m=0,1,\ldots.$$

При этом выполняется равенство (3.3) в случае $\rho=1$ снова, копируя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2 из [10], достаточно установить, что функция

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{c_k\Phi(\delta_k)}{k-z},\ z\notin Z_+$$

тождественно равна нулю при всех таких z. Положив $g(z)=F(-z^2)$, как и в [10] (см. оценки (68), (69)) получим

$$|g(z)|\lesssim\frac{m_p}{|z|^{2(p-1)}},\ p\ge2,\ Re\,z\ge1,$$

где

$$m_p=\sup_{k\ge1}\left\{k^p\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{p}-\frac{b_{n-1}}{v(\frac{kp+2}{\alpha})}-|a_n|-\frac{\psi(v(\frac{kp+2}{\alpha}))}{pv(\frac{kp+2}{\alpha})}\right)v(\frac{kp+2}{\alpha})\right]\right\}$$

Теперь,применяя решение хорошо известной проблемы Ватсона (см.[17]), точно таким же образом как при доказательстве теоремы 2 из [10], получим

$$F(z)=0,\forall z\in\mathbb{C}\setminus Z_+$$

Поэтому $c_0\Phi(1)=f(0)\Phi(1)=0$, т.е. $\Phi(1)=0$. Первая часть теоремы установлена. Перейдём к доказательству второй части. Докажем, что если интеграл,отмечанный в теореме 1.2 сходится, то существует функция f из $F^p_{\sigma,n}, f(z)\ne0, z\in\mathbb{C}$ слабо необратимая в пространстве $F_{\sigma,n,\psi}$. Здесь мы применим метод доказательства теоремы 3 из [10]. Положим $f_a(z)=exp(az^n), z\in\mathbb{C}$, будем предполагать, что $a=|a|>0$. Докажем, что функция f_a слабо необратима в пространстве $F_{\sigma,n,\psi}$. Докажем от противного. Предположим f_a слабо обратима. Фиксируем

$z \in \mathbb{C}, |z| = r$ и $R > r$, учитывая субгармоничность функции $|\Phi(z)|^p$, где $\Phi(z) = Q_m(z) \cdot f_a(z) - 1$, имеем

$$|\Phi(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - r^2)|\Phi(Re^{i\theta})|^p}{R^2 - 2rRcos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

Поэтому

$$|\Phi(z)|^p \leq \frac{R+r}{R-r} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Phi(Re^{i\theta}|^p d\theta, o < p < \infty \tag{3.15}$$

Положим $\rho_n = r + r^{-n}$. Умножим последнее неравенство на $exp(-\sigma R^n + \psi(R^n))$ и проинтегрируем неравенство (3.15) по полуоси $(\rho_n, +\infty)$. Получим

$$|\Phi(z)|^p \int\limits_{\rho_n}^{+\infty} exp - (\sigma R^n + \psi(R^n)) dR \leq \frac{(2r + \frac{1}{r^n})r^n}{2\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{\rho_n}^{+\infty} e^{-\sigma R^n + \psi(R^n)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(Re^{i\theta})|^p d\theta dR < \frac{r^{n+1}+1}{2\pi} \times$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} exp(-\sigma R^n + \psi(R^n)) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |Q_m(Re^{i\theta}) f_a(Re^{i\theta}) - 1|^p d\theta dR.$$

По предположению функция f_a слабо обратима в пространстве $F_{\sigma,n,\psi}$. Тогда можно подобрать многочлен Q_m, такой что $||Q_m f_a - 1||^p_{F^p_{\sigma,n,\psi}} < \frac{1}{2}$. Следовательно, неравенство (3.15) можно записать в виде

$$|\Phi(z)|^p \int\limits_{\rho_n}^{+\infty} \exp(-\sigma \cdot R^n + \psi(R^n)) dr < \frac{2r^{n+1}+1}{2\pi}.$$

Используя асимптотику последнего интеграла получаем

$$|\Phi(z)|^p \frac{e^{-\sigma\rho_n^n + \psi(\rho_n^n)}}{n\rho_n^{n-1}} < \frac{2r^{n+1}+1}{4\pi},$$

т.е.

$$|\Phi(z)|^p < \rho_n^{n-1} \exp(\sigma\rho_n^n - \psi(\rho_n^n)) \times$$

$$\times \frac{2r^{n+1}+1}{2\pi} \leq \frac{(2r^{n+1}+1)^n}{2\pi r^{(n-1)n}} - \exp(\sigma\rho_n^n - \psi(\rho_n^n)).$$

Теперь заметим, что

$$\rho_n^n = (r + \frac{1}{r^n})^n = \sum_{j=0}^{n} c_n^j r^{n-j-nj} = r^n + \sum_{j=1}^{n} c_n^j r^{-j(n-1)} \leq r^n + \sum_{j=0}^{n} c_n^j = r^n + 2^n,$$

если $r \geq 1$, где c_n^j - биномиальные коэффициенты. Поэтому

$$|\Phi(z)|^p \lesssim \frac{(2r^{n+1}+1)^n}{2\pi r^{(n-1)n}} - \exp(\sigma r^n - \psi(r^n)) \tag{3.16}$$

Учитывая эту оценку и следующее элементарное неравенство,

$$|Q_m(z)f_a(z)|^p \leq (|Q_m(z)f_a(z)-1|^p+1)\cdot 2^p,\ 0<p<+\infty.$$

Из (3.16) выводим

$$|Q_m(z)f_a(z)|^p \lesssim \frac{(2|z|^{n+1}+1)^n}{|z|^{n(n-1)}}\exp(\sigma|z|^n - \psi(|z|^n)) - Repaz^n) =$$

$$(3.17). \qquad = \frac{(2|z|^{n+1}+1)^n}{|z|^{n(n-1)}}\exp(\sigma|z|^n - \psi(|z|^n) - apRez^n), |z| \geq 1,$$

Из этой оценки следует, что последовательность $\sigma|Q_m(z)| \lesssim 1, m = 1, 2, \ldots$ для всех $|z| = 1$. По принципу максимума такая же оценка справедлива всюду в единичном круге. Положим в (3.17) $z = \zeta^{\frac{2}{n}}$, где выбрана главная ветвь этой функции в верхней полуплоскости.

Из (3.17) получим следующую оценку

$$|Q_m(x^{\frac{2}{n}})|^p < c_1\frac{(2|x|^{\frac{2(n+1)}{n}}+1)^n}{|x|^{2(n-1)}}\times$$

$$\times\exp(\sigma x^2 - \psi(x^2) - apx^2), x \in (-\infty; +\infty). \tag{3.18}$$

Положим теперь

$$h(x) = c_1\frac{(2|x|^{\frac{2(n+1)}{n}}+1)^n}{|x|^{2(n-1)}}\exp x^2(\sigma - \frac{\psi(x^2)}{x^2} - ap), x \in (-\infty; +\infty). \tag{3.19}$$

Учитывая условие теоремы, докажем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\ln h(x)|}{1+x^2}dx < +\infty.$$

Ясно, что

$$\ln h(x) = \ln c_1 + n\ln(2|x|^{\frac{(n+1)^2}{n}}+1) - 2(n-1)\ln|x| + x^2(\sigma - \frac{\psi(x^2)}{x^2} - ap)$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\ln|h(x)||}{1+x^2}dx < +\infty.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2(\sigma - \frac{\psi(x^2)}{x^2} - ap)}{1+x^2}dx \approx \int\limits_{1}^{+\infty}(\sigma - \frac{\psi(x^2)}{x^2} - ap)dx =$$

$$= 2\int_1^{+\infty}(\sigma - \frac{\psi(x^2)}{x^2} - ap)dx = \int_1^{+\infty}\frac{(\sigma - \frac{\psi(u)}{u} - ap)}{u^{\frac{1}{2}}} < +\infty.$$

Пусть теперь $G(z)$ - внешняя функция на верхней полуплоскости, такая что $|G(x)| = h(x), |x| \geq 1, u|G(x)| = c_0$, если $-1 \leq x \leq 1$. Из (3.13) следует, что $|Q_m(x^{\frac{2}{n}})| \leq |G(x)|, x \in (-\infty; +\infty)$. Следовательно, такая же оценка верна на всей верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, т.е. $|Q_m(z^{\frac{2}{n}})| \leq |G(z)|, z \in \mathbb{C}_+$. Но учитывая, что $Q_m(z) \to f_a^{-1}(z), \forall z \in \mathbb{C}_+$ из последней оценки получаем

$$|e^{-az^2}| \leq |G(z)|, z \in \mathbb{C}_+.$$

Положив $z = iy$ приходим к неравенству $e^{ay^2} \leq |G(iy)|, y \in (0, +\infty)$. Очевидно, что такая оценка не возможна, поэтому функция f_a слабо не обратима в пространстве $F^p_{\sigma,\alpha,\psi}$.

Доказательство теоремы 1.3 непосредственно следует из леммы 2.3 и теоремы 1.2, поскольку из леммы 2.3 следует,что функции $f_a(z), f_{-a}(z)$ одновременно принадлежат или не принадлежат пространству $F_{\sigma,\,\alpha,\,\varphi}$. Подбирая такую α, φ, чтобы интеграл в пункте б) теореме 1.2 сходился, при этом функция $f_a(z)$ принадлежала пространству $F_{\sigma,\,\alpha,\,\varphi}$ мы получим требуемый пример.

Abstract. In this article we obtain a complete description of weakly invertible elements in L^p weighted spaces of entire functions.

References

[1] K. Zhu, Analysis on Fock Spaces, Graduate Texts in Mathematics, **263**, Springer-Verlag, 355p. (2012).

[2] М. М. Джрбашян, "О представимости некоторых классов целых функций", Дан. Арм.ССР, **7**, no. 5, 193 – 197 (1947).

[3] М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщения института математики и механики Арм. ССР, no. 2, 3 – 48 (1948).

[4] М.М. Джрбашян, А.О. Карапетян, "Интегральные представления и теоремы единственности для целых функций многих переменных", Известия АН Арм. ССР, Математика, **26**, no. 1, 3 – 19 (1991).

[5] N. Lindholm, "Sampling in Weighted L^p Spaces of Entire Functions in C^n and Estimates of the Bergman Kernel", Journal of Functional Analysis, textbf182, 390 – 426 (2001).

[6] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, "Конструктивная теория функций комплексного переменного", Изд. Наука, Москва, 440стр. (1964).

[7] N. K. Nikolskii, Operators, Functions and Systems: An Easy Reading, **1**: Hardy, Hankel, and Toplitz, Mathematical Surveys and Monographs,issue 92, Amer. Math. Soc. Providence. RI (2002).

[8] В. П. Хавин, Методы и Структура Коммутативного Гармонического Анализа, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, **15**, (1987).

[9] Ф. А. Шамоян, "Слабая обратимость в некоторых пространствах аналитических функций", Докл.АН Арм.ССР, **74**, 157 – 161 (1982).

[10] Ф. А. Шамоян, “Слабая обратимость в весовых пространствах аналитических функций”, Изв. РАН. Сер. Мат. **60**, no. 5, 191 – 212 (1996).
[11] K. Izuchi, “Cuclic vectors in the Fock space over the complex plane”, Proc. Amer. Math. Soc., **133**, 3627 – 3630 (2005).
[12] A. Borichev, H. Hedenmalm, “Harmonic function of maximal growth: invertibility and ciclicity in Bergman spaces”, J. Amer math. Soc., **10**, 761 – 796 (1997).
[13] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, **1**, М., Мир (1965).
[14] А. И. Маркушевич, Теория Аналитических Функций, **2**, М., Наука (1968).
[15] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы Интегралов, Сумм, Рядов и Произведений, М.:, Физматгиз (1963).
[16] М. А. Евграфов, Асимптотические Оценки и Целые Функции, М., Наука (1979).
[17] С. Мандельбройт, Квазианалитические Классы Функций, М., Онти (1937).

Поступила 12 апреля 2020

После доработки 14 июня 2020

Принята к публикации 02 июля 2020

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 5, 2020, стр. 51 – 61

ON WEIGHTS WHICH ADMIT REPRODUCING KERNEL OF SZEGÖ TYPE

T. ŁUKASZ ŻYNDA

Warsaw University of Technology
E-mail: *t.zynda@mini.pw.edu.pl*

Abstract. In this paper we generalize the concept of the Szegö kernel by putting the weight of integration in the definition of the inner product in the Szegö space. We give some sufficient conditions for the weight in order for the Szegö kernel of the correspoding space to exist. We give examples of weights on unit ball for which there is no Szegö kernel of the corresponding Szegö space. Then using biholomorphisms we prove that there exist such weights for a large class of domains. At the end we show that weighted Szegö kernel depends continuously in some sense on weight of integration.

MSC2010 numbers: 32A25; 46E22.
Keywords: reproducing kernel Hilbert space; Szegö kernel; admissible weight.

1. Preliminaries

Weighted reproducing kernels play a significant role in physics (see e.g. [7]) and informatics (see e.g. [4]). Therefore, it is important to know which weights are 'good enough' to take, i.e. for which weights there exist reproducing kernels of considered weighted spaces. The aim of this paper is to prove some interesting theorems in this topic in case of Szegö kernel.

Let $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ be a bounded domain with the boundary of class C^2. For $\mu : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ measurable and almost everywhere greater than 0 (which we will call a **weight**) by $L^2(\partial\Omega, \mu)$ we will denote a set of classes of functions $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$, square-integrable in the sense

$$\| f \|_\mu^2 := \int_{\partial\Omega} |f(w)|^2 \mu(w) \mathrm{d}S < \infty, \tag{1.1}$$

where the integral is understood as an integral of a scalar field with a surface measure. The set $L^2(\partial\Omega, \mu)$ with an inner product given by

$$\langle f|g\rangle_\mu := \int_{\partial\Omega} \overline{f(w)} g(w)\mu(w)\mathrm{d}S \tag{1.2}$$

is a Hilbert space. Now let us consider the space $A(\Omega)$ of continuous functions $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, such that $f_{|\Omega}$ is holomorphic. Let us denote $B(\Omega, \mu) := \{f_{|\partial\Omega} : f \in A(\Omega)\} \cap L^2(\partial\Omega, \mu)$. By $L^2H(\partial\Omega, \mu)$ we will understand the closure of $B(\Omega, \mu)$ in $L^2(\partial\Omega, \mu)$ topology.

We will name any such space $L^2H(\partial\Omega, \mu)$ a **weighted Szegö space**. For $\mu \equiv 1$ it is a classical Szegö space. Of course $L^2H(\partial\Omega, \mu)$ can change as a set with a change of μ. However, if μ_1, μ_2 are weights and there exist $m, M > 0$, such that

$$m\mu_1(z) \leq \mu_2(z) \leq M\mu_1(z) \tag{1.3}$$

a.e. on $\partial\Omega$, then for any $f \in L^2(\partial\Omega, \mu_j)$ we have $f \in L^2(\partial\Omega, \mu_k)$, $j, k \in \{1, 2\}$, and $m \parallel f \parallel_{\mu_1}^2 \leq \parallel f \parallel_{\mu_2}^2 \leq M \parallel f \parallel_{\mu_1}^2$. Hence $L^2H(\partial\Omega, \mu_1) = L^2H(\partial\Omega, \mu_2)$ as a set and norms $\parallel \cdot \parallel_{\mu_1}$ and $\parallel \cdot \parallel_{\mu_2}$ are equivalent. In particular if $0 < m \leq \mu \leq M < \infty$, then $L^2H(\partial\Omega, \mu) = L^2H(\partial\Omega, 1)$ as a set.

Simple examples show that converse of these implications is not true. If $L^2H(\partial\Omega, \mu_1) = L^2H(\partial\Omega, \mu_2)$ as sets, we will write $\mu_1 \approx \mu_2$. It is easy to show that it is an equivalence relation.

Each element of $L^2H(\partial\Omega, 1)$ has a unique holomorphic prolongation to Ω (see [6] for more details), so it is also true for any element from $B(\Omega, \mu)$, because $B(\Omega, \mu) \subset L^2H(\partial\Omega, 1)$ for any μ. We will denote the set of all such prolongations by $\tilde{B}(\Omega, \mu)$ (where $\tilde{B}(\Omega, \mu) \subset A(\Omega)$). A good question to ask is however how to find a holomorphic prolongation of functions from $L^2H(\partial\Omega, \mu) \setminus B(\Omega, \mu)$ for an arbitrary μ? We will answer this question in a moment.

We will use the same symbol for a function and its prolongation, which should not be misleading.

Let μ be a weight with the following property:

(CB) for any compact set $X \subset \Omega$ there exists $C_X > 0$, such that for any $f \in \tilde{B}(\Omega, \mu)$ and $z \in X$

$$|f(z)| \leq C_X \parallel f \parallel_\mu .$$

Then for functions from $L^2H(\partial\Omega, \mu) \setminus B(\Omega, \mu)$ we can define their prolongation to Ω in the following way:

Let f_n be a sequence of functions from $\tilde{B}(\Omega, \mu)$. Let $f \in L^2H(\partial\Omega, \mu)$ be the limit of this sequence. Since by (CB) the sequence of functions $(f_{n|\Omega})$ fullfils the Cauchy condition locally uniformly on Ω, the function

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), z \in \Omega$$

is well defined and holomorphic on Ω.

From now on, if μ fullfils (CB), we will interpret $L^2H(\partial\Omega, \mu)$ as a set of functions on $\overline{\Omega}$.

Let μ be a weight satisfying (CB). A function (if it exists) $S_\mu : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, such that for any $z \in \Omega$, $\overline{S_\mu(z, \cdot)} \in L^2H(\partial\Omega, \mu)$ and for any $f \in L^2H(\partial\Omega, \mu)$ (reproducing property)

$$f(z) = \langle \overline{S_\mu(z,\cdot)} | f(\cdot) \rangle_\mu, \tag{1.4}$$

will be called **Szegö kernel** of $L^2H(\partial\Omega, \mu)$.

It is true (as for any reproducing kernel Hilbert space) that if S_μ and S'_μ are Szegö kernels of the same space, then $S_\mu = S'_\mu$ and if the Szegö kernel exists, then it is given uniquely by the formula

$$S_\mu(z,w) = \sum_{i \in I} \varphi_i(z)\overline{\varphi_i(w)}, \tag{1.5}$$

where $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ is an arbitrary complete orthonormal system of $L^2H(\partial\Omega, \mu)$. Hence for any $z, w \in \Omega$ we have $S_\mu(w,z) = \overline{S_\mu(z,w)}$ and by Hartogs theorem on separate analyticity the function $\Omega \times \Omega' \ni (z,w) \mapsto S^0(z,w) := S_\mu(z,\overline{w})$ is holomorphic, where $\Omega' = \{w \in \mathbb{C}^N : \overline{w} \in \Omega\}$. So S_μ is real analytic on $\Omega \times \Omega$, holomorphic with respect to first N variables and antiholomorphic with respect to last N variables. Moreover for any $z \in \Omega$ we have $\| \overline{S_\mu(z,\cdot)} \|_\mu^2 = \| S_\mu(\cdot, z) \|_\mu^2 = S_\mu(z,z)$.

It is a natural question to ask, which conditions must μ satisfy in order to $L^2H(\partial\Omega, \mu)$ to be a reproducing kernel Hilbert space.

Definition 1.1. *We will say that a weight μ is* ***Szegö admissible*** *(S-admissible for short) if there exists Szegö kernel of $L^2H(\partial\Omega, \mu)$ space.*

Theorem 1.1. *μ is an S-admissible weight if and only if the condition (CB) is satisfied.*

Proof. $\Rightarrow$ comes directly from the definition. (By reproducing property and Schwarz inequality we can take $C_X = \max_{z\in X} \sqrt{S_\mu(z,z)}$ in (CB)).

$\Leftarrow$ (CB) means that functionals of evaluation i. e. functionals

$$\tilde{E_z} : \tilde{B}(\Omega, \mu) \ni f \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

are continuous. Since $B(\Omega, \mu)$ is dense in $L^2H(\partial\Omega, \mu)$ we can prolong $\tilde{E_z}$ to the functional $E_z \in L^2H(\partial\Omega, \mu)^*$ with the same majoring constant C_X for any $z \in \Omega$. By Riesz representation theorem for E_z it means that for $z \in \Omega$ there exists $e_z \in L^2H(\partial\Omega, \mu)$, such that for any $f \in L^2H(\partial\Omega, \mu)$

$$f(z) = \langle e_z | f \rangle$$

and the function

$$S_\mu(z,w) := \overline{e_z(w)}, (z,w) \in \Omega \times \overline{\Omega}$$

is the Szegö kernel of $L^2H(\partial\Omega, \mu)$. $\square$

2. Sufficient conditions for a weight to be S-admissible

Theorem 2.1. *Let μ be a weight on the boundary $\partial\Omega$ of a bounded domain Ω with $\partial\Omega$ of class C^2, such that*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu(w)} \mathrm{d}S < \infty. \tag{2.1}$$

Then μ is an S-admissible weight.

In order to prove the theorem we are going to use the following lemma:

Lemma 2.1. *Let Ω_1, Ω_2 be bounded domains with C^2-smooth boundaries, such that $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Then there exists $C > 0$, such that for any $f \in L^2H(\partial\Omega_2) = L^2H(\partial\Omega_2, 1)$ we have*

$$\int_{\partial\Omega_1} |f(w)| \mathrm{d}S \leq C \int_{\partial\Omega_2} |f(w)| \mathrm{d}S.$$

It is a particular case of a lemma 2.1 from article [3], which was proven for $p > 1$. It remains true, however, for $p = 1$, since authors of [3] follow the proof of Theorem 1 from [10] and in case of $p = 1$ we just need to change $f(y)\mathrm{d}\sigma(y)$ to a finite Borel measure on $\partial\Omega$.

Moreover, since Ω is a bounded domain of class C^2, $\partial\Omega$ has finite surface measure and $f \in L^2(\partial\Omega, \mu)$ implies that $f \in L^1(\partial\Omega, \mu)$.

Proof of the theorem: Let $z_0 \in \Omega$ and let r be sufficiently small for $K_0 := K(z_0, 2r) := \{w \in \mathbb{C}^N : |z_0 - w| < 2r\}$ to lie with its boundary in Ω. Then by mean value theorem for harmonic functions we have for $f \in \tilde{B}(\Omega, \mu)$, $z \in K(z_0, r)$ and $K := K(z, r)$

$$|f(z)| = C_1 \left| \int_{\partial K} f(w) \mathrm{d}S \right| \leq C_1 \int_{\partial K} |f(w)| \mathrm{d}S,$$

where $\frac{1}{C_1}$ is a measure of ∂K. By lemma 2.1 we have

$$\int_{\partial K} |f(w)| \mathrm{d}S \leq C_0 \int_{\partial K_0} |f(w)| \mathrm{d}S \leq C_0 C_2 \int_{\partial\Omega} |f(w)| \mathrm{d}S.$$

By Schwarz inequality,

$$\int_{\partial\Omega} |f(w)| \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} |f(w)| \frac{\sqrt{\mu(w)}}{\sqrt{\mu(w)}} \mathrm{d}S \leq \sqrt{\int_{\partial\Omega} |f(w)|^2 \mu(w) \mathrm{d}S} \sqrt{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu(w)} \mathrm{d}S},$$

where C_0 can be chosen so it suits for any $K(z, r)$, where $z \in K(z_0, r)$ (see [3] for more details).

Finally,

$$|f(z)| \leq C_0 C_1 C_2 \sqrt{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu(w)} \mathrm{d}S} \sqrt{\int_{\partial\Omega} |f(w)|^2 \mu(w) \mathrm{d}S} \leq C_0 C_1 C_2 C_3 \parallel f \parallel_\mu \leq C \parallel f \parallel_\mu,$$

where C does not depend on $z \in K(z_0, r)$. Hence μ satisfies (CB). $\square$

Corollary 2.1. *If Ω is a bounded domain with a boundary of class C^2, then a weight μ defined on $\partial\Omega$ such that $\mu(z) \geq c > 0$ is an S-admissible weight.*

Theorem 2.2. *Let Ω be a bounded domain with the boundary of class C^2. Let μ_1, μ_2 be weights on $\partial\Omega$, such that μ_1 is S-admissible and $\mu_2 \geq \mu_1$ a.e. Then μ_2 is also S-admissible.*

Proof. If μ_1 is S-admissible, then for any compact set $X \subset \Omega$ there exists $C_X > 0$, such that for any $z \in X$ and any $f \in \tilde{B}(\Omega, \mu_1)$

$$|f(z)| \leq C_X \parallel f \parallel_{\mu_1} .$$

Since

$$\int_{\partial\Omega} |f(w)|^2 \mu_1(w) \mathrm{d}S \leq \int_{\partial\Omega} |f(w)|^2 \mu_2(w) \mathrm{d}S,$$

we have that $\tilde{B}(\Omega, \mu_2) \subset \tilde{B}(\Omega, \mu_1)$ and that for any $f \in \tilde{B}(\Omega, \mu_2)$

$$|f(z)| \leq C_X \parallel f \parallel_{\mu_2} . \qquad \square$$

In particular, if μ is an S-admissible weight, then also e^μ and μ^μ are admissible weights, because $e^x > x$ and $x^x > x$ almost everywhere on the interval $[0, +\infty[$.

Corollary 2.2. *Let Ω be a bounded domain with the boundary of class C^2. Let Ψ_1, Ψ_2 be weights on $\partial\Omega$ and let Ψ_1 be S-admissible. Then $\Psi_1 + \Psi_2$ is also an S-admissible weight. In particular sum of S-admissible weights on the same boundary is an S-admissible weight.*

Theorem 2.3. *Let Ω be a bounded domain with the boundary of class C^2. Let μ_1, μ_2 be S-admissible weights, such that $\mu_2 \geq C > 0$ a.e. Then $\mu_1 \cdot \mu_2$ is an S-admissible weight.*

Proof. If μ_1 is S-admissible, then for any compact set $X \subset \Omega$ there exists $C_X > 0$, such that for any $z \in X$ and any $f \in \tilde{B}(\Omega, \mu_1)$

$$|f(z)| \leq C_X \parallel f \parallel_{\mu_1} .$$

Since

$$\int_{\partial\Omega} |f(w)|^2 \mu_1(w) \mathrm{d}S = \frac{1}{C} \int_{\partial\Omega} |f(w)|^2 \mu_1(w) C \mathrm{d}S \leq \frac{1}{C} \int_{\partial\Omega} |f(w)|^2 \mu_1(w) \mu_2(w) \mathrm{d}S,$$

we have that $\tilde{B}(\Omega, \mu_1\mu_2) \subset \tilde{B}(\Omega, \mu_1)$ and for any $f \in \tilde{B}(\Omega, \mu_1\mu_2)$

$$|f(z)| \leq C_X \frac{1}{\sqrt{C}} \parallel f \parallel_{\mu_1\mu_2} . \qquad \square$$

Corollary 2.3. *Let μ be an S-admissible weight on the boundary $\partial\Omega$ of class C^2 of a bounded domain Ω and let $\alpha > 0$. Then $\alpha\mu$ is also an S-admissible weight.*

3. Non-admissible weight for a unit circle in $\mathbb{C}^1$

Z. Pasternak-Winiarski in [8] found an example of a weight which is not admissible for the case of the Bergman kernel. As we will see in a moment, a similiar construction allows us to find a weight which is not S-admissible. In this section we are going to use the following theorem (for the proof see [9]):

Theorem 3.1 (Runge). *Let $X \subset \mathbb{C}$ be a compact set, such that $\mathbb{C} \setminus X$ is connected. Let $f : X \to \mathbb{C}$ be continuous on X and holomorphic on $\mathrm{int}X$. Then f is a uniform limit of (holomorphic) polynomials on X.*

Now let us define $\Omega := K(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

$$A_n := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2^{-n}\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}z| < 2^{-n} \wedge 0 < \mathrm{Re}z < 1\}$$

and

$$M_n := (\overline{\Omega} \setminus A_n) \cup \overline{A_{n+1}}.$$

Moreover let $f_n : M_n \to \mathbb{C}$ be defined in the following way

$$f_n(w) := \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{for} \quad w \in \overline{A_{n+1}} \\ 0 & \text{for} \quad w \in \overline{\Omega} \setminus A_n \end{cases}$$

By theorem 3.1 there exist polynomials $g_n : M_n \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ such that $|f_n(w) - g_n(w)| < \frac{1}{n}$ for any $w \in M_n$. It implies that $|g_n(w)| < \frac{1}{n}$ for $w \in \overline{\Omega} \setminus A_n$ and $1 < |g_n(w)| < 1 + \frac{2}{n}$ for $w \in \overline{A_{n+1}}$. Now let us define polynomials

$$h_n(w) := \frac{g_n(w)}{g_n(0)}.$$

Since $|g_n(0)| > 1$, h_n is well defined, $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} < |h_n(w)| < 1 + \frac{2}{n}$ on $\overline{A_{n+1}}$ and $|h_n(w)| < \frac{1}{n}$ on $\overline{\Omega} \setminus A_n$. Now let us denote $D_n := \partial\Omega \cap \overline{A_n}$. Then we may define a weight

$$\mu(w) := \begin{cases} 1 & \text{for} \quad w \in \partial\Omega \setminus D_1; \\ 0 & \text{for} \quad w = 1; \\ \min\{1, \frac{1}{|h_n(w)|^2}\} & \text{for} \quad w \in D_n \setminus D_{n+1} \end{cases} \tag{3.1}$$

Since μ is bounded from above (by 1), $h_n \in \tilde{B}(\Omega, \mu)$ for any $n \in \mathbb{N}$. It is not hard to show that for any $w \in \partial\Omega$

$$|h_n(w)|^2 \mu(w) < 9 \qquad \text{and} \qquad \lim_{\mathrm{n}\to\infty} |\mathrm{h_n(w)}|^2 \mu(\mathrm{w}) = 0.$$

Therefore, by Lebesgue Majorized Convergence Theorem, we have:

$$\int_{\partial\Omega} \lim_{n\to\infty} |h_n(w)|^2 \mu(w) \mathrm{d}S = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} |h_n(w)|^2 \mu(w) \mathrm{d}S = 0.$$

As we can see, $|h_n(0)| = 1$ for any n, but $\| h_n \|_\mu \to 0$, so functional of evaluation $\tilde{E}_0 : \tilde{B}(\Omega, \mu) \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{C}$ is not continuous on $\tilde{B}(\Omega, \mu)$ and therefore μ is not an S-admissible weight.

4. Non-admissible weight for a unit ball in $\mathbb{C}^N$

Let $\Omega := K(0,1) = \{w \in \mathbb{C}^N : |w| < 1\}$ and $U := \{w \in \mathbb{C}^N : |w_1| \leq 1\}$. Let

$$A_n := \left(\{w \in \mathbb{C}^N : |w_1| < 2^{-n}\} \cup \{w \in \mathbb{C}^N : |\mathrm{Im} w_1| < 2^{-n} \wedge 0 < \mathrm{Re} w_1 < 1\}\right) \cap \overline{\Omega}$$

and

$$M_n := (\overline{\Omega} \setminus A_n) \cup \overline{A_{n+1}}.$$

Now we may define $p_n(w_1, w_2, \ldots, w_N) := h_n(w_1)$ on M_n, where $h_n : V \to \mathbb{C}$, $V := \{w \in \mathbb{C}^N : w_2 = \cdots = w_N = 0\}$, has the same properties and is constructed in the same way as in the previous section. Then we can define

$$\Psi(w_1, w_2, \ldots, w_N) := \begin{cases} 1 & \text{for} \quad w \in U \setminus A_1; \\ 0 & \text{for} \quad w_1 \in [0,1] \subset \mathbb{R}; \\ \min\{1, \frac{1}{|p_n(w)|^2}\} & \text{for} \quad w \in A_n \setminus A_{n+1}. \end{cases} \tag{4.1}$$

$\mu := \Psi_{|\partial\Omega}$ is non S-admissible weight on $\partial\Omega$. Indeed, since μ is bounded from above (by 1), $p_n \in \tilde{B}(\Omega, \mu)$ for any $n \in \mathbb{N}$ by Hartogs's theorem on separate analytycity. Moreover for $w \in \partial\Omega$

$$|p_n(w)|^2 \mu(w) < 9 \qquad \text{and} \qquad \lim_{\mathrm{n}\to\infty} |\mathrm{p_n(w)}|^2 \mu(\mathrm{w}) = 0.$$

Therefore, we can use Lebesgue Majorized Convergence Theorem as in the previous section, to show that functional of evaluation $\tilde{E}_0 : \tilde{B}(\Omega, \mu) \ni f \mapsto f(0) = f(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}$ is not continuous on $\tilde{B}(\Omega, \mu)$. (Moreover all functionals of evaluation E_w for $w = (0, w_2, \ldots, w_N)$ are not continuous.)

5. Weights and biholomorphisms

In this section we are going to use the following theorems:

Theorem 5.1. *Let Ω_1, Ω_2 be open domains in $\mathbb{C}^N$ of one of the following types:*

Type 1: *smooth bounded pseudoconvex domain with the real analytic boundary;*

Type 2: *smooth bounded strictly pseudoconvex domain and (more generally);*

Type 3: *smooth bounded domain for which a $\overline{\partial}$-operator exists and satisfies subelliptic estimates.*

Then any biholomorphic mapping between Ω_1 and Ω_2 extends smoothly to the boundary.

This theorem was proved by S. Bell and E. Ligocka in [2]. Note that each (geometrically) convex domain is pseudoconvex and moreover in $\mathbb{C}^1$ each open domain is pseudoconvex. (See [5] or [6] for more details.)

In the following two theorems we are going to use the same symbol for biholomorphism and its smooth prolongation to the boundary, if it exists, which should not cause confusion.

Theorem 5.2. *Let Ω_1, Ω_2 be domains of one of types 1-3 introduced above and $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ be a biholomorphic mapping. Then for any integrable function $f : \partial\Omega_2 \to \mathbb{C}$ we have*

$$\int_{\partial\Omega_2} f \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega_1} (f \circ \Phi) |\det J_{\mathbb{C}}\Phi|^{\frac{2N}{N+1}} \mathrm{d}S,$$

where $J_{\mathbb{C}}\Phi$ is the complex Jacobian matrix of Φ.

It is a simple generalization of theorem included in [1] as Proposition 1. for particular f and for Ω_1, Ω_2 being strongly pseudoconvex domains with C^∞ boundary. It remains true in this version, since proof does not depend on integrated function and the reason for restriction to only strongly pseudoconvex domains was the fact that in that case biholomorphism has smooth prolongation to the boundary, which remains true in this more general case.

Theorem 5.3. *Let Ω_1, Ω_2 be of type 1, 2 or 3. Let $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ be a biholomorphism. Then*

(i) for any g measurable and non-negative almost everywhere we have:

$$\int_{\partial\Omega_2} g\mu \mathrm{d}S < \infty \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega_1} (g \circ \Phi)(\mu \circ \Phi) \mathrm{d}S < \infty$$

In particular, $g \in L^2H(\partial\Omega_2, \mu)$ if and only if $g \circ \Phi \in L^2H(\partial\Omega_1, \mu \circ \Phi)$.

(ii) μ is S-admissible on $\partial\Omega_2$ if and only if $\mu \circ \Phi$ is S-admissible on $\partial\Omega_1$.

Proof. (i) By the fact that $u := |\det J_{\mathbb{C}}\Phi|^{\frac{2N}{N+1}}$ is continuous function on compact set $\overline{\Omega_1}$, we have

$$C_1 \int_{\partial\Omega_1} (g \circ \Phi)(\mu \circ \Phi) \mathrm{d}S \le \int_{\partial\Omega_1} (g \circ \Phi)(\mu \circ \Phi) |\det J_{\mathbb{C}}\Phi|^{\frac{2N}{N+1}} \mathrm{d}S \le C_2 \int_{\partial\Omega_1} (g \circ \Phi)(\mu \circ \Phi) \mathrm{d}S,$$

where $C_1 := \min_{w \in \overline{\Omega}} u(w) > 0$ and $C_2 := \max_{w \in \overline{\Omega}} u(w)$. By theorem 5.2 we can change integral in the middle to get:

$$C_1 \int_{\partial\Omega_1} (g \circ \Phi)(\mu \circ \Phi) \mathrm{d}S \le \int_{\partial\Omega_2} g\mu \mathrm{d}S \le C_2 \int_{\partial\Omega_1} (g \circ \Phi)(\mu \circ \Phi) \mathrm{d}S, \tag{5.1}$$

If the integral on the right hand side is finite, then integral in the middle must be also finite and if integral in the middle is finite, then integral on the left hand side must be also finite.

(ii) Since Φ is biholomorphism, we need only to show implication in one direction.

If μ is S-admissible on $\partial\Omega_2$, then for any compact set $X \subset \Omega_2$, $w \in X$ and any $f \in \tilde{B}(\partial\Omega_2, \mu)$ we have

$$|f(w)| \le C_X \sqrt{\int_{\partial\Omega_2} |f|^2 \mu \mathrm{d}S}. \tag{5.2}$$

By using (5.1) for inequality (5.2) we gain

$$|(f\circ\Phi)(\tilde{w})| \le C_X\sqrt{C_2}\sqrt{\int_{\partial\Omega_1}|f\circ\Phi|^2(\mu\circ\Phi)\mathrm{d}S},$$

for $\Omega_1 \supset Y := \Phi^{-1}(X)$, $\tilde{w} := \Phi^{-1}(w) \in Y$, so (CB) is satisfied for $C_Y := C_X\sqrt{C_2}$. $\square$

Corollary 5.1. *For any simply-connected bounded domain Ω in $\mathbb{C}$ which is of type 1-3 there exists a non S-admissible weight on $\partial\Omega$.*

Proof. By Riemann mapping theorem there exists biholomorphism $\Phi : \Omega \to K(0,1)$. By theorem 5.1 Φ has a smooth prolongation to $\partial\Omega$. By theorem 5.3 weight $\mu\circ\Phi$, where μ is a weight constructed in (3.1), is non S-admissible weight on $\partial\Omega$. $\square$

6. Weights on non-connected boundaries of domains in $\mathbb{C}^N$

In this section we will prove theorem which states that in case of domain U in $\mathbb{C}^N$ such that ∂U is not connected "S-admissibility in some sense, of a weight on one connected component of ∂U is sufficient for this weight to be S-admissible on whole ∂U.

Theorem 6.1. *Let Ω be a bounded domain with the boundary of class C^2. Let $G_1, \dots G_n$ be domains in $\mathbb{C}^N$ for $N \ge 2$, such that $\mathbb{C}^N \setminus G_j$ is connected, $\overline{G_j} \subset \Omega$, $\overline{G_j} \cap \overline{G_k} = \emptyset$ for $j \ne k$ and ∂G_j be of class C^2. Let μ be S-admissible weight on $\partial\Omega$ and let Ψ be a weight on ∂U, where $U := \Omega\backslash(\overline{G_1 \cup \dots \cup G_n})$, such that $\Psi(w) = \mu(w)$ for $w \in \partial\Omega$. Then Ψ is S-admissible weight on U. In addition, if $\Psi_{\partial G_j}$ is integrable on ∂G_j for any j, the map $L^2H(\partial\Omega,\mu) \ni f \mapsto Tf := f_{|U} \in L^2H(\partial U,\Psi)$ is a continuous isomorphism of Hilbert spaces.*

Proof. Let X be a compact subset in U. Then $X \subset \Omega$ and there exists $C_X > 0$, such that for any $f \in \tilde{B}(\Omega,\mu)$ and any $z \in X$

$$|f(z)| \le C_X \parallel f \parallel_\mu \tag{6.1}$$

On the other hand, if $g \in \tilde{B}(U,\Psi)$, then by Hartogs prolongation theorem, there exists $\tilde{g}$ continuous on $\overline{\Omega}$ and holomorphic on Ω, such that $\tilde{g}_{|U} = g$. It is obvious that

$$\int_{\partial\Omega}|\tilde{g}(w)|^2\mu(w)\mathrm{d}S \le \int_{\partial U}|\tilde{g}(w)|^2\Psi(w)\mathrm{d}S = \parallel g \parallel_\Psi^2 < \infty.$$

Then

$$\parallel \tilde{g} \parallel_\mu \le \parallel g \parallel_\Psi \tag{6.2}$$

and $\tilde{g} \in \tilde{B}(\Omega,\mu)$.

For any $z \in X$ we have

$$|g(z)| = |\tilde{g}(z)| \leq C_X \parallel \tilde{g} \parallel_\mu \leq C_X \parallel g \parallel_\Psi . \tag{6.3}$$

Since g is an arbitrary element of $\tilde{B}(U, \Psi)$, we see that Ψ is an S-admissible weight on ∂U.

Moreover, if $\Psi_{|\partial G_j}$ is integrable on any ∂G_j, then for any $f \in \tilde{B}(\Omega, \mu)$ we have that $f_{|\overline{U}} \in \tilde{B}(U, \Psi)$ and the prolongation $\tilde{B}(U, \Psi) \ni g \mapsto \tilde{g} \in \tilde{B}(\Omega, \mu)$ is unicly defined, then it is an inverse of T. By (6.2), T^{-1} is bounded and by Banach inverse theorem, T is continuous. Since condition (CB) is fulfilled, the same considerations can be applied to a function $f \in L^2H(\partial U, \Psi)$. $\square$

In the case $N = 1$, theorem is not true. For example, if $\Omega := K := K(0, 1) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$, $G := K(0, \frac{1}{2})$, $\mu \equiv 1$ and $\Psi \equiv 1$, the function

$$g(w) = \frac{1}{w},\ w \in U, \tag{6.4}$$

is an element of $L^2H(\partial U, \Psi)$, but it has no prolongation to a function $\tilde{g} \in L^2H(\partial\Omega, \mu)$. However, using similar argument as in the proof of the theorem, we can show that if $N = 1$, then the operator of restriction $T : L^2H(\partial\Omega, \mu) \to L^2H(\partial U, \Psi)$ is continuous and one-to-one map onto its image, and that $T(L^2H(\partial\Omega, \mu))$ is a closed subspace of $L^2H(\partial U, \Psi)$.

7. Dependance of weighted Szegö kernel on weight

Weighted Szegö kernel continuously depends on weight in the following sense:

Theorem 7.1. *Let $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ be a bounded domain with the boundary of class C^2. Let μ_n be a sequence of S-admissible weights on $\partial\Omega$ with uniform limit μ, which is also an S-admissible weight. We want μ_n to have following properties: $\mu_n \approx \mu$ for any n and $\mu < C$ and $\mu_n < C$ for any n. Let S_{μ_n} be a reproducing kernel of $L^2H(\partial\Omega, \mu_n)$ and let $S(z, \cdot)$ be for any $z \in \Omega$ an uniform limit of $S_{\mu_n}(z, \cdot)$ on $\partial\Omega$. Then S is a weighted Szegö kernel of $L^2H(\partial\Omega, \mu)$.*

Note that assumption for a limit of μ_n to be S-admissible is necessary, because simple example of $\mu_n \equiv \frac{1}{n}$ shows that even a uniform limit of S-admissible weights does not have to be an S-admissible weight (here it is not a weight at all!).

Proof. Since

$$\left| \int_{\partial\Omega} f(w)\mu(w) \mathrm{d}S \right| \leq M(\partial\Omega) C \sup_{w \in \partial\Omega} (|f(w)|),$$

where $M(\partial\Omega)$ is the surface measure of $\partial\Omega$, uniform limit implies limit in the sense of $L^2H(\partial\Omega, \mu)$. By our choice, each space $L^2H(\partial\Omega, \mu_n)$ and $L^2H(\partial\Omega, \mu)$ are equal as sets, so $\overline{S(z,\cdot)}$ is an element of $L^2H(\partial\Omega,\mu)$ as limit in $L^2H(\partial\Omega,\mu)$ sense. Moreover, for any n and any $f \in L^2H(\partial\Omega,\mu)$ we have

$$\int_{\partial\Omega} S_{\mu_n}(z,w)f(w)\mu_n(w)\mathrm{d}S = f(z),$$

so it remains true also if we put limit in front of the integral on the left hand side of the equation:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega} S_{\mu_n}(z,w)f(w)\mu_n(w)\mathrm{d}S = f(z).$$

Because $S_{\mu_n}(z,\cdot) \to S(z,\cdot)$ uniformly, we can put the limit inside the integral to get

$$\int_{\partial\Omega} S(z,w)f(w)\mu(w)\mathrm{d}S = f(z).$$

So we showed that S has reproducing property. □

Список литературы

[1] D. Barrett, L. Lee, "On the Szegö metric", Journal of Geometric Analysis **24** (1), 104 – 117 (2014).

[2] S. Bell, E. Ligocka, "A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings", Inventiones math. **57**, 283 – 289 (1980).

[3] B.-Y. Chen, S. Fu, Comparison of Bergman and Szegö Kernels, Advances in Mathematics **228** (2011).

[4] M. Drewnik, Z. Pasternak-Winiarski, "SVM Kernel Configuration and Optimization for the Handwritten Digit Recognition", Computer Information Systems and Industrial Management / Saeed Khalid, Homenda Wladyslaw, Chaki Ritupama (eds.), Lecture Notes In Computer Science, **10244**, 87 – 98 (2017).

[5] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, North-Holland (1990).

[6] S. G. Krantz, Function Theory of Several Complex Variables, Providence (2002).

[7] A. Odzijewicz, "On reproducing kernels and quantization of states", Comm. Math. Phys. **114**, no. 4, 577 – 597 (1988).

[8] Z. Pasternak-Winiarski, "On weights which admit reproducing kernel of Bergman type", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, **15**, Issue 1, 1 – 14 (1992).

[9] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill Inc. (1974).

[10] E. M. Stein, Boundary Behavior of Holomorphic Functions of Several Complex Variables, Princeton University Press, Princeton, NJ (1972).

Поступила 03 октября 2019

После доработки 08 марта 2020

Принята к публикации 06 апреля 2020

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 55, номер 5, 2020

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 55, No. 5, 2020

Contents