ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2020

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 4, 2020, стр. 3 – 14

SUFFICIENT CONDITION FOR P-VALENT STRONGLY STARLIKE FUNCTIONS

E. A. ADEGANI, T. BULBOACĂ, A. MOTAMEDNEZHAD

Dedicated to the memory of Professor Raimo Tapani Näkki (1946-2019)

Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania
Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
E-mails: *analoey.ebrahim@gmail.com; bulboaca@math.ubbcluj.ro; a.motamedne@gmail.com*

Abstract. In this work we obtain a sufficient condition for analytic functions to belong to certain subclasses of p-valently starlike functions of order β and p-valently close-to-convex functions of order β. Further, we get a generalization of some of the well-known results.

MSC2010 numbers: 30C45; 30C80.

Keywords: analytic function; p-valently starlike; convex and close-to-convex functions of order β; differential subordination.

1. Introduction and preliminaries

Let $\mathcal{A}_p$ $(p \in \mathbb{N})$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} z^{n+p},$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, and write $A \equiv \mathcal{A}_1$.

A function $f \in \mathcal{A}_p$ is said to be *p-valently starlike of order* β $(0 \le \beta < p)$ if and only if

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \beta,\ z \in \mathbb{U},$$

and we denote by $\mathcal{S}_p^*(\beta)$ the well-known class of p-valent starlike functions (see Owa [14] and Aouf [1, 2]).

A function $f \in \mathcal{A}_p$ is said to be *p-valently convex of order* β $(0 \le \beta < p)$ if and only if

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta,\ z \in \mathbb{U},$$

and we denote by $\mathcal{C}_p(\beta)$ the class of all such functions (see Owa [14] and Aouf [2]).

A function $f \in \mathcal{A}_p$ is said to be *p-valently close-to-convex of order* β $(0 \le \beta < p)$ if and only if there exists a function $g \in \mathcal{S}_p^*(\beta)$ such that

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{g(z)} > \beta,\ z \in \mathbb{U}.$$

and we denote by $\mathcal{K}_p(\beta)$ this class of functions (see Aouf [1] and Owa [15]).

Since $g(z) = z^p \in \mathcal{S}_p^*(\beta)$, it follows that a function $f \in \mathcal{A}_p$ satisfying

$$\operatorname{Re} \frac{f'(z)}{z^{p-1}} > \beta, \ z \in \mathbb{U}, \tag{1.1}$$

is a member of the class $\mathcal{K}_p(\beta)$, and we denote the class of all the function $f \in \mathcal{A}_p$ satisfying (1.1) by $\mathcal{K}_p^*(\beta)$.

Note that $\mathcal{S}^*(\beta) := \mathcal{S}_1^*(\beta)$, $\mathcal{C}(\beta) := \mathcal{C}_1(\beta)$ and $\mathcal{K}(\beta) := \mathcal{K}_1(\beta)$ are, respectively, the usual classes of starlike, convex and close-to-convex functions of order β $(0 \leq \beta < 1)$ in $\mathbb{U}$, while $\mathcal{K}_p(\beta) \subset \mathcal{C}_p(\beta)$.

A function $f \in \mathcal{A}_p$ is said to be *k-uniformly starlike of order* β, $(-1 \leq \beta < p, \ k \geq 0)$ denoted by $\mathcal{US}_p(\beta, k)$, if and only if

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \beta\right) > k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right|, \ z \in \mathbb{U}.$$

A function $f \in \mathcal{A}_p$ is said to be *k-uniformly convex of order* β, $(-1 \leq \beta < p, \ k \geq 0)$ denoted by $\mathcal{UC}_p(\beta, k)$, if and only if

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \beta\right) > k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - (p-1)\right|, \ z \in \mathbb{U}.$$

The above two classes have been introduced by Frasin in [4].

For two functions f and F which are analytic in $\mathbb{U}$, we say that the function f *is subordinate to* F, and write $f(z) \prec F(z)$, if there exists a *Schwarz function* ω, which is analytic in $\mathbb{U}$ with $\omega(0) = 0$ and $|\omega(z)| < 1$, $z \in \mathbb{U}$, such that $f(z) = F(\omega(z))$ for all $z \in \mathbb{U}$.

By *Schwarz lemma* we have $|\omega(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{U}$, which concludes that, if $f(z) \prec F(z)$, then $f(0) = F(0)$ and $f(\mathbb{U}) \subset F(\mathbb{U})$. In particular, if the function F is univalent in $\mathbb{U}$, then we have the following equivalence

$$f(z) \prec F(z) \Leftrightarrow f(0) = F(0) \quad \text{and} \quad f(\mathbb{U}) \subset F(\mathbb{U}).$$

In [1] Aouf introduced the class $\mathcal{S}_p(A, B, \beta)$ consisting of functions $f \in \mathcal{A}_p$ and satisfying

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{p + [pB + (A-B)(p-\beta)]z}{1 + Bz}, \ z \in \mathbb{U}, \quad (0 \leq \beta < p)$$

where $-1 \leq B < A \leq 1$. In particular, $\mathcal{S}_p(1, -1, \beta) = \mathcal{S}_p^*(\beta)$.

The following lemma is required for proving our main results of this paper, and it is a special case of a more general theorem (see [8, Theorem 5], see also [9, Theorem 1] and [10, Theorem 1]).

Lemma 1.1. [11, Theorem 2.3i.] *Let $\psi : D \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ be a complex-valued function satisfying the conditions:*

(i) $\psi(r,s)$ *is continuous in a domain* $D \subset \mathbb{C}^2$,

(ii) $(1,0) \in D$ *and* $\operatorname{Re}\psi(1,0) > 0$,

(iii) $\operatorname{Re}\psi(ir_2, s_1) \le 0$ *whenever* $(r_1 + ir_2, s_1 + is_2) \in D$ *and* $s_1 \le -\dfrac{1+r_2^2}{2}$.

If $P(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ *is a function that is analytic in* $\mathbb{U}$ *such that* $(P(z), zP'(z)) \in D$ *and* $\operatorname{Re}\psi(P(z), zP'(z)) > 0$ *for* $z \in \mathbb{U}$, *then* $\operatorname{Re} P(z) > 0$, $z \in \mathbb{U}$.

The aim of this work is to obtain simple sufficient conditions for analytic functions to belong to certain subclasses of p-valently starlike functions of order β, in order to generalize some earlier corresponding results.

2. Main results

To obtain our main result, first we will prove the next theorem:

Theorem 2.1. *For* $p \in \mathbb{N}$, $0 \le \delta < p$ *and* $\omega > 0$, *let define*

$$\gamma := \gamma(p,\delta,\omega) = \begin{cases} \delta - \dfrac{\delta}{2\omega(p-\delta)}, & \text{if} \quad 0 \le \delta \le \dfrac{p}{2}, \\[2ex] \delta - \dfrac{p-\delta}{2\omega\delta}, & \text{if} \quad \dfrac{p}{2} \le \delta < p. \end{cases} \tag{2.1}$$

If $p(z) = p + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ *is an analytic function in* $\mathbb{U}$ *that satisfies the differential subordination*

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\omega p(z)} \prec \frac{p + (p-2\gamma)z}{1-z}, \tag{2.2}$$

then

$$p(z) \prec \frac{p + (p-2\delta)z}{1-z}.$$

Proof. If we define the function $P : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ by

$$P(z) := \frac{p(z) - \delta}{p - \delta},\ z \in \mathbb{U},$$

then P is analytic on $\mathbb{U}$ with $P(0) = 1$, and satisfies

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\omega p(z)} = (p-\delta)P(z) + \delta + \frac{(p-\delta)zP'(z)}{\omega[(p-\delta)P(z)+\delta]},\ z \in \mathbb{U}.$$

From the definition formula (2.1) it follows that $\gamma \le \delta$, then the above relation combined with the assumption (2.2) shows that

$$\operatorname{Re}\left[(p-\delta)P(z) + \delta + \frac{(p-\delta)zP'(z)}{\omega[(p-\delta)P(z)+\delta]}\right] > \gamma,\ z \in \mathbb{U}. \tag{2.3}$$

Let define function $\psi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ by

$$\psi(r,s) := (p-\delta)r + \delta + \frac{(p-\delta)s}{\omega[(p-\delta)r+\delta]} - \gamma.$$

Then, the function ψ is continuous in the domain $D := \mathbb{C}\setminus\left\{\dfrac{-\delta}{p-\delta}\right\}\times\mathbb{C}$, $(1,0)\in D$, and from the definition (2.1) we have $\operatorname{Re}\psi(1,0) = p-\gamma > 0$.

For $\rho\in\mathbb{R}$ and $\sigma \le -\dfrac{1+\rho^2}{2}$ it is easy to check that

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\psi(i\rho,\sigma) &= \operatorname{Re}\left\{(p-\delta)i\rho+\delta+\frac{(p-\delta)\sigma}{\omega[(p-\delta)i\rho+\delta]}-\gamma\right\}\\ &= \delta-\gamma+\frac{(p-\delta)\sigma\delta}{\omega[(p-\delta)^2\rho^2+\delta^2]} \le \delta-\gamma-\frac{(p-\delta)\delta}{2\omega}\frac{1+\rho^2}{(p-\delta)^2\rho^2+\delta^2}.\end{aligned}$$

According to the definition formula of γ given by (2.1), for $0\le\delta\le\dfrac{p}{2}$ we have

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\psi(i\rho,\sigma) &\le \delta-\gamma-\frac{(p-\delta)\delta}{2\omega}\frac{1+\rho^2}{(p-\delta)^2\rho^2+\delta^2}\\ &\le \delta-\gamma-\frac{(p-\delta)\delta}{2\omega}\frac{1+\rho^2}{(p-\delta)^2\rho^2+(p-\delta)^2} = \delta-\gamma-\frac{\delta}{2\omega(p-\delta)} = 0,\end{aligned}$$

and, for $\dfrac{p}{2}\le\delta<p$ we get

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\psi(i\rho,\sigma) &\le \delta-\gamma-\frac{(p-\delta)\delta}{2\omega}\frac{1+\rho^2}{(p-\delta)^2\rho^2+\delta^2}\\ &\le \delta-\gamma-\frac{(p-\delta)\delta}{2\omega}\frac{1+\rho^2}{\delta^2\rho^2+\delta^2} = \delta-\gamma-\frac{p-\delta}{2\omega\delta} = 0.\end{aligned}$$

Since $(P(z), zP'(z))\in D$ and from (2.3) is equivalent to $\operatorname{Re}\psi(P(z), zP'(z)) > 0$ for $z\in\mathbb{U}$, thus, by applying Lemma 1.1 we conclude that $\operatorname{Re} p(z) > \delta$, $z\in\mathbb{U}$, that is equivalent to the conclusion of our result. □

We can rewrite the above theorem in the following equivalent form:

Corollary 2.1. *Let $p\in\mathbb{N}$, $\omega>0$, and let $\gamma\ge 0$ such that*

$$0\le\gamma\le\frac{p-1/\omega}{2},\quad \textit{if}\quad \omega\ge\frac{2}{p},\qquad \textit{and}\quad \frac{p-1/\omega}{2}\le\gamma<p,\quad \textit{if}\quad \omega\ge\frac{1}{p}.$$

If $p(z) = p+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ is an analytic function in $\mathbb{U}$ that satisfies the differential subordination

$$p(z)+\frac{zp'(z)}{\omega p(z)} \prec \frac{p+(p-2\gamma)z}{1-z},$$

then

$$p(z)\prec\frac{p+(p-2\delta)z}{1-z},$$

where $\delta = \delta(p,\gamma,\omega) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{2(\gamma+p) - \dfrac{1}{\omega} - \sqrt{\left[2(\gamma+p) - \dfrac{1}{\omega}\right]^2 - 16p\gamma}}{4}, & \textit{if} \quad 0 \le \gamma \le \dfrac{p - 1/\omega}{2},\ \omega \ge \dfrac{2}{p}, \\ \dfrac{\left(2\gamma - \dfrac{1}{\omega}\right) + \sqrt{\left(2\gamma - \dfrac{1}{\omega}\right)^2 + \dfrac{8p}{\omega}}}{4}, & \textit{if} \quad \dfrac{p - 1/\omega}{2} \le \gamma < p,\ \omega \ge \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Proof. For the proof of first case, according to the relation (2.1), let define first $\gamma = \varphi(\delta)$, where

$$\varphi(\delta) := \delta - \frac{\delta}{2\omega(p-\delta)},\ 0 \le \delta \le \frac{p}{2}.$$

We have $\varphi(0) = 0$, $\varphi(p/2) = \dfrac{p - 1/\omega}{2}$, and

$$\varphi'(\delta) = 1 - \frac{p}{2\omega(p-\delta)^2} = 0 \ \Leftrightarrow \delta = p \pm \sqrt{\frac{p}{2\omega}}.$$

For any $\omega > 0$, it is clear that $\delta_1 := p + \sqrt{\dfrac{p}{2\omega}} > p > \dfrac{p}{2}$. Also, a simple computation shows that $\delta_2 := p - \sqrt{\dfrac{p}{2\omega}} \ge \dfrac{p}{2}$ if and only if $\omega \ge \dfrac{2}{p}$. So, assuming this last assumption, the function φ is an increasing function on $\left[0, \dfrac{p}{2}\right]$, hence $\varphi\left(\left[0, \dfrac{p}{2}\right]\right) = \left[0, \dfrac{p - 1/\omega}{2}\right]$.

Therefore, assuming that $\omega \ge \dfrac{2}{p}$, the equation $\gamma = \varphi(\delta)$, $0 \le \gamma \le \dfrac{p - 1/\omega}{2}$, has a unique solution that will be one of the roots of the equation

$$\psi(\delta) = 0,$$

where

$$\psi(\delta) := 2\delta^2 - \left[2(\gamma+p) - \frac{1}{\omega}\right]\delta + 2p\gamma,$$

more exactly that root which belongs to $\left[0, \dfrac{p}{2}\right]$. A such a root exists, since φ is a bijection between the intervals $\left[0, \dfrac{p}{2}\right]$ and $\left[0, \dfrac{p - 1/\omega}{2}\right]$.

The roots of the above equations are

$$\delta_\pm = \frac{2(\gamma+p) - \dfrac{1}{\omega} \pm \sqrt{\left[2(\gamma+p) - \dfrac{1}{\omega}\right]^2 - 16p\gamma}}{4},$$

and $\delta_- \le \delta_+$.

Now, we will determine which of these two roots belongs to $\left[0, \dfrac{p}{2}\right]$. Since $\delta_- \cdot \delta_+ = p\gamma \ge 0$ and at least one of the roots belongs to $\left[0, \dfrac{p}{2}\right]$, it follows that both roots are nonnegative. Using the fact that $\gamma \leq \dfrac{p-1/\omega}{2}$, we have

$$\psi\left(\frac{p}{2}\right)=p\left(\gamma+\frac{1}{2\omega}-\frac{p}{2}\right)\leq p\left(\frac{p}{2}-\frac{1}{2\omega}+\frac{1}{2\omega}-\frac{p}{2}\right)=0,$$

it follows that $\delta_{-}\in\left[0,\dfrac{p}{2}\right]$, while $\delta_{+}\geq\dfrac{p}{2}$.

Similarly, for the proof of the second case let define $\gamma=\chi(\delta)$ by

$$\chi(\delta):=\delta-\frac{p-\delta}{2\omega\delta},\ \frac{p}{2}\leq\delta\leq p.$$

We have $\chi(p/2)=\dfrac{p-1/\omega}{2}$, $\chi(p)=p$, and using the fact that $\omega>0$ we get

$$\chi'(\delta)=1+\frac{p}{2\omega\delta^2}>0,\ \delta\in\left[\frac{p}{2},p\right].$$

Hence, the function χ is an increasing function on $\left[\dfrac{p}{2},p\right]$, and thus $\chi\left(\left[\dfrac{p}{2},p\right]\right)=\left[\dfrac{p-1/\omega}{2},p\right]$. In this case assuming that $\omega>0$ we need to have

$$0\leq\frac{p-1/\omega}{2}\leq p\Leftrightarrow\omega\geq\frac{1}{p}.$$

Therefore, assuming that $\omega\geq\dfrac{1}{p}$, the equation $\gamma=\chi(\delta)$, $\dfrac{p-1/\omega}{2}\leq\gamma\leq p$, has a unique solution that will be one of the roots of the equation

$$\kappa(\delta)=0,$$

where

$$\kappa(\delta):=2\delta^2-\left(2\gamma-\frac{1}{\omega}\right)\delta-\frac{p}{\omega},$$

more exactly that root which belongs to $\left[\dfrac{p}{2},p\right]$. A such a root exists, since κ is a bijection between the intervals $\left[\dfrac{p}{2},p\right]$ and $\left[\dfrac{p-1/\omega}{2},p\right]$.

The roots of the above equations are

$$\delta_{\pm}=\frac{\left(2\gamma-\dfrac{1}{\omega}\right)\pm\sqrt{\left(2\gamma-\dfrac{1}{\omega}\right)^2+\dfrac{8p}{\omega}}}{4},$$

and $\delta_{-}\leq\delta_{+}$.

We will determine which of these two roots belongs to $\left[\dfrac{p}{2},p\right]$. Since $\delta_{-}\cdot\delta_{+}=-\dfrac{p}{2\omega}<0$ and at least one of the roots belongs to $\left[\dfrac{p}{2},p\right]$, it follows that $\delta_{-}<0$ and $\delta_{+}>0$. Hence, $\delta_{+}\in\left[\dfrac{p}{2},p\right]$ and the proof is complete in this second case. $\square$

Remark 2.1. 1. *Setting* $p=1$, $\omega=\dfrac{1}{\beta}$ *in Corollary 2.1, we get the result obtained by Darus et al. in* [3, Lemma 1.3].

2. *For* $w = 1$ *and* $p(z) := \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$, *Corollary 2.1 reduces to the result of Nunokawa et al. in* [13, Theorem 2].

Theorem 2.2. *Let* $\omega > 0$ *and* $0 \leq \gamma < p$. *If* $p(z) = p + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ *is an analytic function in* $\mathbb{U}$ *that satisfies the differential subordination*

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\omega p(z)} \prec \frac{p + (p - 2\gamma)z}{1 - z}, \tag{2.4}$$

then

$$p(z) \prec \frac{p}{{}_2F_1\left(2\omega(p-\gamma), 1, \omega p + 1; \dfrac{z}{z-1}\right)} := q(z),$$

where ${}_2F_1(a, b, c; z)$ *is the* Gaussian hypergeometric function, *and* q *is the best dominant of the subordination.*

Moreover, if $\max\left\{0; \dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{2\omega}\right\} \leq \gamma < p$, *then*

$$\operatorname{Re} p(z) > \delta,\ z \in \mathbb{U},$$

where $\delta := \delta(p, \gamma, \omega) = q(-1)$, *and this inequality is sharp.*

Proof. If we define the function $P : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ by

$$P(z) := \frac{p(z)}{p},\ z \in \mathbb{U},$$

then P is analytic on $\mathbb{U}$ with $P(0) = 1$ and satisfies

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\omega p(z)} = pP(z) + \frac{zP'(z)}{\omega P(z)},\ z \in \mathbb{U}.$$

According to (2.4) the above inequality is equivalent to the next subordination

$$P(z) + \frac{zP'(z)}{\omega p\, P(z)} \prec \frac{1 + \left(1 - 2\dfrac{\gamma}{p}\right) z}{1 - z}.$$

Now to obtain a delimitation for the function P with $P(0) = 1$, we will use Theorem 3.3d. of [11, page 109] by taking in the subordination (3.3-11) of [11, page 109] the values

$$\beta := \omega p, \quad \gamma := 0, \quad A := 1 - 2\frac{\gamma}{p}, \quad B := -1.$$

Thus, the assumptions of Theorem 3.3d., i.e. $\operatorname{Re}[\beta + \gamma] = \omega p > 0$ and (3.3-10) of [11, page 108] are satisfied. According to this theorem, combined with the relations (3.3-13) and (3.3-15) of [11, page 110], we conclude that

$$P(z) \prec \frac{1}{\omega p} \cdot \frac{\omega p}{{}_2F_1\left(2\omega(p-\gamma), 1, \omega p + 1; \dfrac{z}{z-1}\right)} := q_1(z) \prec \frac{1 + \left(1 - 2\dfrac{\gamma}{p}\right) z}{1 - z},$$

and q_1 is the best dominant of the subordination. Consequently,

$$p(z) \prec \frac{p}{{}_2F_1\left(2\omega(p-\gamma), 1, \omega p+1; \dfrac{z}{z-1}\right)} := q(z) \prec \frac{p+(p-2\gamma)z}{1-z}.$$

and q is the best dominant of the subordination.

On the other hand, to determine the best lower-bound of $\operatorname{Re} q(\mathbb{U})$, i.e.

$$\operatorname{Re} p(z) > \inf\left\{\operatorname{Re} q(z) : z \in \mathbb{U}\right\} =: \delta(p, \gamma, \omega),$$

we will use Theorem 1 of [12] (see also [11, Theorem 3.3e]). Therefore, by choosing in this theorem

$$\beta := \omega p > 0, \quad \beta+\gamma := \omega p > 0, \quad \alpha := \frac{\gamma}{p},$$

and assuming $p > \gamma \geq \max\left\{0; \dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{2\omega}\right\}$, which is equivalent to

$$\alpha_0 = \max\left\{\frac{\omega p - 1}{2\omega p}; 0\right\} \leq \frac{\gamma}{p} < 1,$$

we obtain that the best lower-bound of $\operatorname{Re} q_1(\mathbb{U})$ will be

$$q_1(-1) = \frac{1}{{}_2F_1\left(2\omega(p-\gamma), 1, \omega p+1; \frac{1}{2}\right)}.$$

It follows that

$$\operatorname{Re} P(z) > q_1(-1),\ z \in \mathbb{U},$$

hence

$$\operatorname{Re} p(z) > p\, q_1(-1) = \frac{p}{{}_2F_1\left(2\omega(p-\gamma), 1, \omega p+1; \frac{1}{2}\right)} := q(-1) = \delta,\ z \in \mathbb{U},$$

and this result is the best possible. □

Theorem 2.3. *Let $p \in \mathbb{N}$, and let α, β, k and λ be real numbers satisfying the inequalities*

$$-1 \leq \beta < p, \quad k \geq 0, \quad 1+k\lambda > 0, \quad kp|1-\alpha| < p-\beta, \tag{2.5}$$

and

$$\begin{cases} 0 \leq \beta + kp\alpha \leq \dfrac{p(1+k)-(1+k\lambda)}{2}, & \text{if} \quad p \geq \dfrac{2(1+k\lambda)}{1+k}, \\ \dfrac{p(1+k)-(1+k\lambda)}{2} \leq \beta + kp\alpha < p(1+k), & \text{if} \quad p \geq \dfrac{1+k\lambda}{1+k}. \end{cases} \tag{2.6}$$

If the function $p(z) = p + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ is analytic in $\mathbb{U}$ and satisfies

$$\operatorname{Re}\left(p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)} - \beta\right) > k\left|(1-\lambda)p(z) + \lambda\left(p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}\right) - p\alpha\right|,\ z \in \mathbb{U}, \tag{2.7}$$

then

$$p(z) \prec \frac{p+(p-2\delta)z}{1-z},$$

where

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{2\left(\dfrac{\beta+kp\alpha}{1+k}+p\right)-\dfrac{1+k\lambda}{1+k}-\sqrt{\left[2\left(\dfrac{\beta+kp\alpha}{1+k}+p\right)-\dfrac{1+k\lambda}{1+k}\right]^2-\dfrac{16p(\beta+kp\alpha)}{1+k}}}{4}, \\ \qquad \text{if} \quad 0 \le \beta+kp\alpha \le \dfrac{p(1+k)-(1+k\lambda)}{2}, \quad \dfrac{1+k}{1+k\lambda} \ge \dfrac{2}{p}, \\ \dfrac{\left(\dfrac{2(\beta+kp\alpha)}{1+k}-\dfrac{1+k\lambda}{1+k}\right)+\sqrt{\left(\dfrac{2(\beta+kp\alpha)}{1+k}-\dfrac{1+k\lambda}{1+k}\right)^2+\dfrac{8p(1+k\lambda)}{1+k}}}{4}, \\ \qquad \text{if} \quad \dfrac{p(1+k)-(1+k\lambda)}{2} \le \beta+kp\alpha < p(1+k), \quad \dfrac{1+k}{1+k\lambda} \ge \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Proof. From (2.7) we obtain

$$\operatorname{Re}\left(p(z)+\frac{zp'(z)}{p(z)}-\beta\right) > k\left|(1-\lambda)p(z)+\lambda\left(p(z)+\frac{zp'(z)}{p(z)}\right)-p\alpha\right|$$

$$= k\left|p(z)+\lambda\frac{zp'(z)}{p(z)}-p\alpha\right| = k\left|p\alpha-p(z)-\lambda\frac{zp'(z)}{p(z)}\right| \ge k\operatorname{Re}\left(p\alpha-p(z)-\lambda\frac{zp'(z)}{p(z)}\right),\ z\in\mathbb{U},$$

and therefore

$$\operatorname{Re}\left(p(z)+\frac{1+k\lambda}{1+k}\frac{zp'(z)}{p(z)}\right) > \frac{\beta+kp\alpha}{1+k},\ z\in\mathbb{U}.$$

Since the above inequality is equivalent to the differential subordination

$$p(z)+\frac{1+k\lambda}{1+k}\frac{zp'(z)}{p(z)} \prec \frac{p+\left(p-\dfrac{2(\beta+kp\alpha)}{1+k}\right)z}{1-z},$$

using Corollary 2.1 for $\omega := \dfrac{1+k}{1+k\lambda}$ and $\gamma := \dfrac{\beta+kp\alpha}{1+k}$, and according to our assumptions we get the desired result. □

Remark 2.2. *We will emphasize some special cases of the inequality* (2.7)*:*

1. *For* $\alpha=\lambda=1$ *and* $p(z) := \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *we obtain the class of* $\mathcal{UC}_p(\beta,k)$.
2. *For* $k=0$ *and* $p(z) := \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *we get the class of* $\mathcal{C}_p(\beta)$.
3. *For* $p=\alpha=\beta+1=1,\ 0\le\lambda\le1$ *and* $p(z) := \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *we obtain the class introduced by Darus et al. in* [3].
4. *For* $p=\alpha=\lambda+1=\beta+1=1$ *and* $p(z) := \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *we obtain the class defined and studied by Sivasubramanian et al. in* [17].
5. *For* $p=k=\alpha=\lambda+1=\beta+1=1$ *and* $p(z) := \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *get the class introduced by Sokół and Nunokawa in* [18].

6. *For* $p=\alpha=\lambda=\beta+1=1$ *and* $p(z):=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *we obtain the class defined and widely studied by Kanas and Wiśniowska in* [7].
7. *For* $p=\alpha=k=\lambda=\beta+1=1$ *and* $p(z):=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *we obtain the class introduced and studied by Goodman in* [5, 6].
8. *For* $p=\lambda=1,\ 0\le\beta<\alpha\le 1,$ *and* $p(z):=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *we get the class introduced by Sim et al. in* [16].

Remark 2.3. *Letting* $p=\alpha=\lambda+1=\beta+1=1$ *in Theorem 2.3 we get the obtained result by Sivasubramanian et al. in* [17, Theorem 2.4].

Theorem 2.4. *Let* $p\in\mathbb{N}$, *and let* α, β, k *and* λ *be real numbers satisfying the inequalities*

$$-1\le\beta<p,\quad k\ge 0,\quad 1+k\lambda>0,\quad \text{and}\quad 0\le\beta+kp\alpha<p(1+k).$$

If the function $p(z)=p+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ *is analytic in* $\mathbb{U}$ *and satisfies* (2.7), *then*

$$p(z)\prec\frac{p}{{}_2F_1\left(2\dfrac{1+k}{1+k\lambda}\left(p-\dfrac{\beta+kp\alpha}{1+k}\right),1,p\dfrac{1+k}{1+k\lambda}+1;\dfrac{z}{z-1}\right)}:=q(z),$$

where ${}_2F_1(a,b,c;z)$ *is the* Gaussian hypergeometric function, *and* q *is the best dominant of the subordination. Moreover, assuming that*

$$\max\left\{0;\frac{p(1+k)}{2}-\frac{1+k\lambda}{2}\right\}\le\beta+kp\alpha<p(1+k),$$

then

$$\operatorname{Re}p(z)>\delta,\ z\in\mathbb{U},$$

where $\delta:=q(-1)$ *is given in Theorem* 2.2, *and this inequality is sharp.*

Proof. According to the proof of Theorem 2.3 we have

$$p(z)+\frac{1+k\lambda}{1+k}\frac{zp'(z)}{p(z)}\prec\frac{p+\left(p-\dfrac{2(\beta+kp\alpha)}{1+k}\right)z}{1-z}.$$

If we set in Theorem 2.3 $\omega:=\dfrac{1+k}{1+k\lambda}$ and $\gamma:=\dfrac{\beta+kp\alpha}{1+k}$, from the assumptions we obtain $\omega>0$ and $0\le\gamma<p$, and using Theorem 2.2 we obtain our result. □

Remark 2.4.

1. *By setting* $p=\alpha=\beta+1=1$, $0\le\lambda\le 1$ *and* $p(z):=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *in Theorem 2.4 we get the result of Darus et al.* [3, Theorem 2.4] *and* [3, Theorem 2.5].

2. *Taking* $p = k = \alpha = \lambda + 1 = \beta + 1 = 1$ *and* $p(z) := \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ *in Theorem 2.4 we get the result obtained by Sokół and Nunokawa* [18, Theorem 2.2] *and* [18, Corollary 2.3].

For $f \in \mathcal{A}_p$ and $p(z) := \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$, Theorem 2.3 leads to the following result which gives a sufficient condition for p-valently starlikeness of order β:

Corollary 2.2. *Let* $p \in \mathbb{N}$, *and let* α, β, k *and* λ *be real numbers satisfying the inequalities* (2.5) *and* (2.6). *If* $f \in \mathcal{A}_p$ *and satisfies*

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \beta\right) > k\left|(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \lambda\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) - p\alpha\right|, \ z \in \mathbb{U},$$

then

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{p + (p-2\delta)z}{1-z},$$

where δ *is given in Theorem* 2.3.

Remark 2.5.

1. *By setting* $p = \alpha = \beta + 1 = 1$, $0 \le \lambda \le 1$ *in Corollary 2.2 we get the result obtained by Darus et al.* [3, Theorem 2.1].
2. *For* $p = \alpha = \lambda + 1 = \beta + 1 = 1$, *Corollary 2.2 reduces to the result of Sivasubramanian et al. in* [17, Theorem 2.5].

For $f \in \mathcal{A}_p$, setting $p(z) := \dfrac{pf(z)}{z^p}$ and $p(z) := \dfrac{f'(z)}{z^{p-1}}$, Theorem 2.3 reduces to the following corollaries, respectively:

Corollary 2.3. *Let* $p \in \mathbb{N}$, *and let* α, β, k *and* λ *be real numbers satisfying the inequalities* (2.5) *and* (2.6).

If $f \in \mathcal{A}_p$ *and satisfies*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{pf(z)}{z^p} - p - \beta\right) > k\left|(1-\lambda)\frac{f(z)}{z^p} + \lambda\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{pf(z)}{z^p} - p\right) - p\alpha\right|, \ z \in \mathbb{U},$$

then

$$\frac{pf(z)}{z^p} \prec \frac{p + (p-2\delta)z}{1-z},$$

where δ *is given in Theorem* 2.3.

Corollary 2.4. *Let* $p \in \mathbb{N}$, *and let* α, β, k *and* λ *be real numbers satisfying the inequalities* (2.5) *and* (2.6).

If $f \in \mathcal{A}_p$ *and satisfies*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{f'(z)}{z^{p-1}} - (p-1) - \beta\right) >$$

$$k\left|(1-\lambda)\frac{f'(z)}{z^{p-1}} + \lambda\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{f'(z)}{z^{p-1}} - (p-1)\right) - p\alpha\right|, \ z \in \mathbb{U},$$

then

$$\frac{f'(z)}{z^{p-1}} \prec \frac{p+(p-2\delta)z}{1-z},$$

where δ *is given in Theorem* 2.3.

Remark 2.6. 1. *By setting* $p=\alpha=\lambda+1=\beta+1=1$ *in Corollary 2.3 we get the result obtained by Sivasubramanian et al.* [17, Corollary 2.3].

2. *Letting* $p=\alpha=\lambda+1=\beta+1=1$ *in Corollary 2.4 we get the result due to Sivasubramanian et al.* [17, Corollary 2.4].

Список литературы

[1] M. K. Aouf, "On a class of p-valent starlike functions of order α", Int. J. Math. Math. Sci., **10**, no. 4, 733 – 744 (1987).

[2] M. K. Aouf, "A generalization of multivalent functions with negative coefficients II", J. Korean Math. Soc., **25**, no. 2, 221 – 232 (1988).

[3] M. Darus, S. Hussain, M. Raza, J. Sokół, "On a subclass of starlike functions", Results Math., **73** (2018) 22. DOI:10.1007/s00025-018-0771-3

[4] B. A. Frasin, "Convexity of integral operators of p-valent functions", Math. Comput. Model., **51**, 601 – 605 (2010).

[5] A. W. Goodman, "On uniformly convex functions", Ann. Polon. Math., **56**, 87 – 92 (1991).

[6] A. W. Goodman, "On uniformly starlike functions", Ann. Polon. Math., **155**, 364 – 370 (1991).

[7] S. Kanas and A. Wiśniowska, "Conic regions and k-uniform convexity", J. Comput. Appl. Math., **105**, 327 – 336 (1999).

[8] S. S. Miller, P. T. Mocanu, "Second order differential inequalities in the complex plane", J. Math. Anal. Appl., **65**, 289 – 305 (1978).

[9] S. S. Miller, P. T. Mocanu, "Differential subordinations and univalent functions", Michigan Math. J., **28**, 151 – 171 (1981).

[10] S. S. Miller, P. T. Mocanu, "Differential subordinations and inequalities in the complex plane", J. Differential Equations, **67**, 199 – 211 (1987).

[11] S. S. Miller, P. T. Mocanu, Differential Subordinations. Theory and Applications, Marcel Dekker Inc., New York (2000).

[12] P. T. Mocanu, D. Ripeanu, I. Şerb, "The order of starlikeness of certain integral operators", Mathematica (Cluj), **23** (46), 225 – 230 (1981).

[13] M. Nunokawa, H. M. Srivastava, N. Tuneski, B. Jolevska-Tuneska, "Some Marx-Strohhäcker type results for a class of multivalent functions", Miskolc Math. Notes, **18**, 353 – 364 (2017).

[14] S. Owa, "On certain classes of p-valent functions with negative coefficients", Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **59**, 385 – 402 (1985).

[15] S. Owa, "On p-valently close-to-convex functions", Math. Nachr., **147**, 65 – 73 (1990).

[16] Y. J. Sim, O. S. Kwon, N. E. Cho, H. M. Srivastava, "Some classes of analytic functions associated with conic regions", Taiwanese J. Math., **16**, 387 – 408 (2012).

[17] S. Sivasubramanian, M. Govindaraj, K. Piejko, "On certain class of univalent functions with conic domains involving Sokół-Nunokawa class", U.P.B. Sci. Bull. Series A, **80**, 123 – 134 (2018).

[18] J. Sokół, M. Nunokawa, "On some class of convex functions", C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **353**, 427 – 431 (2015).

Поступила 22 апреля 2019

После доработки 16 декабря 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 4, 2020, стр. 15 – 30

ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ПОСРЕДСТВОМ ЯДЕР ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Ф. В. АЙРАПЕТЯН

Институт математики Национальная Академия Наук Армении
E-mail: *feliks.hayrapetyan1995@gmail.com*

Аннотация. Для весовых L^p−классов голоморфных функций в единичном круге получено семейство весовых интегральных представлений с весовой функцией типа $|w|^{2\varphi}\cdot(1-|w|^{2\rho})^{\beta}$ и с воспроизводящими ядрами типа Миттаг-Леффлера.

MSC2010 number: 30H20; 30E20; 30J99; 30C40; 30H10.

Ключевые слова: голоморфные функции в единичном круге; весовые пространства функций; весовые интегральные представления.

1. Введение

Хорошо известно, что **интегральная формула Коши (1831)** имеет множество применений в комплексном анализе. Эта знаменитая формула (а также ее дальнейшие обобщения) позволяют воспроизводить значения голоморфных функций внутри области **путем интегрирования граничных значений функций**. Работы [1], [2] содержат первые результаты, в которых значения голоморфных функций внутри области получаются **путем интегрирования функций по всей области**. В [3,4] для весовых пространств $H^p(\alpha)(1 \le p < \infty, \alpha > -1)$ функций f голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ и удовлетворяющих условию

$$M_{\alpha}^{p}(f) \equiv \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1-|\zeta|^2)^{\alpha} dudv < +\infty \quad (\zeta = u+iv), \tag{1.1}$$

был установлен следующий результат:

Теорема 1.1. *Для произвольной функции $f \in H^p(\alpha)$ справедливы интегральные представления*

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{\alpha}}{(1-z\cdot\overline{\zeta})^{2+\alpha}} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.2}$$

$$\overline{f(0)} = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{f(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\cdot\bar{\zeta})^{2+\alpha}} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.3}$$

где $\zeta = u + iv$, $dm(\zeta) = dudv$ (двумерная мера Лебега в комплексной плоскости). Эти представления получили многочисленные приложения в теории факторизации мероморфных функций в единичном круге (см. [3,4]), а также в других задачах комплексного анализа (см. [5]).

В [6] для весовых L^p- классов (с весовой функцией типа $|w|^\gamma \cdot (1-|w|^\rho)^\alpha$) голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D}$ были установлены весовые интегральные представления с воспроизводящими ядрами типа Миттаг-Леффлера.

В настоящей статье доказаны новые свойства пространств, введенных в [6]. Кроме того, для этих пространств установлено **целое семейство** весовых интегральных представлений.

2. Необходимые факты и результаты

В этом разделе мы приводим некоторые хорошо известные формулы и факты комплексного анализа. Всюду в дальнейшем Γ обозначает известную функцию Эйлера.

Мы будем использовать известную асимптотическую формулу

$$|\Gamma(\mu+R)| \asymp e^{-R} R^{R+\mu_1-\frac{1}{2}}, \tag{2.1}$$

где $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu_1 = Re(\mu), R \geq 0$ и $R \to +\infty$. Здесь и всюду далее символ $\asymp$ используется в следующем смысле:
$A(R) \asymp B(R)$ при $R \to \infty$, если отношение $\left|\frac{A(R)}{B(R)}\right|$ заключено между фиксированными положительными числами при $R \geq R_0 > 0$.

Для $z \in \mathbb{C}$ и $\mu \in \mathbb{C}, \rho > 0$

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{2.2}$$

известна как функция типа Миттаг-Леффлера. $E_\rho(z;\mu)$ является целой функцией порядка ρ и типа 1, т.е. для $\forall \varepsilon > 0$:

$$|E_\rho(z;\mu)| \leq e^{(1+\varepsilon)|z|^\rho}, \qquad |z| \geq R(\varepsilon) > 0. \tag{2.3}$$

Более того,

$$\left|E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\mu)\right| \le e^{\sigma(1+\varepsilon)|z|^\rho}, \tag{2.4}$$

где $\sigma > 0$ и $|z| \ge R(\varepsilon) > 0$.

В дальнейшем мы будем использовать известный факт, что если функция f голоморфна в круге $\{\zeta : |\zeta| < R\}$, то для $\forall p > 0$ функция $\int\limits_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta$, $r \in [0, R)$, является неубывающей по r. В частности,

$$|f(0)|^p \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta, \tag{2.5}$$

где $0 \le r < R$.

Кроме того, если $f \in H(\Omega)$, то есть f голоморфна в Ω, где $\Omega \subset \mathbb{C}$ - произвольное открытое множество, содержащее круг $\{\zeta : |\zeta - a| < r\}$, и $p > 0$, тогда

$$|f(a)|^p \le \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{|\zeta - a| < r} |f(\zeta)|^p\, dm(\zeta). \tag{2.6}$$

3. Основные классы голоморфных функций

Предложение 3.1. *Пусть $\rho > 0$ и $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, тогда*

$$I(\alpha;\rho;\gamma) \equiv \iint\limits_{\mathbb{D}} \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) < +\infty$$

только если $\alpha > -1$ и $\gamma > -1$. Более того, в этом случае

$$I(\alpha;\rho;\gamma) = \frac{\pi}{\rho}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{\rho}\right)\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{\rho} + \alpha + 1\right)}. \tag{3.1}$$

Доказательство.

$$I(\alpha;\rho;\gamma) = \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \left|re^{i\theta}\right|^{2\rho}\right)^\alpha \left|re^{i\theta}\right|^{2\gamma} r d\theta dr$$

$$= 2\pi\int\limits_0^1 \left(1 - r^{2\rho}\right)^\alpha r^{2\gamma+1} dr = \frac{\pi}{\rho}\cdot\int\limits_0^1 r^{\frac{\gamma+1}{\rho}-1}(1-r)^\alpha dr = \frac{\pi}{\rho}\cdot B\left(\frac{1+\gamma}{\rho}, \alpha+1\right).$$

Всюду ниже предполагается, что $\rho > 0, \alpha > -1, \gamma > -1$ и $\mu = \frac{\gamma+1}{\rho}$. □

Определение 3.1. *Обозначим через* $L^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$ $(p > 0)$ *множество всех комплекснозначных измеримых функций* $f(\zeta), \zeta \in \mathbb{D}$, *для которых*

$$M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f) \equiv \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) < +\infty. \tag{3.2}$$

Определение 3.2. *Обозначим*

$$H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f) < +\infty \right\}.$$

Из предложения 3.1 непосредственно следует

Предложение 3.2. $\zeta^k \in H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$ *для любого* $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Предложение 3.3. *Если* $1 \le p < q < +\infty$, *то* $L^q_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D}) \subset L^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$.

Доказательство. Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f) = \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta)$$
$$\le \left(\iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^{p \cdot \frac{q}{p}} \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\iint\limits_{\mathbb{D}} \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) \right)^{1-\frac{p}{q}}$$
$$= const(\alpha;\rho;\gamma;p;q) \cdot \left(M^q_{\alpha,\rho,\gamma}(f)\right)^{\frac{p}{q}}$$

для произвольной комплекснозначной измеримой функции $f(\zeta), \zeta \in \mathbb{D}$. Следовательно, $L^q_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D}) \subset L^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$. □

Следствие 3.1. *Если* $1 \le p < q < +\infty$, *то* $H^q_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D}) \subset H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$.

Заметим, что при $\rho = 1$ и $\gamma = 0$ введённые пространства голоморфных функций совпадают с отмеченными во введении классами $H^p(\alpha)$. Более того, оказывается что при произвольных $\rho > 0$ и $\gamma > -1$ "нормы" $M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f)$ и $M^p_{\alpha}(f)$ эквивалентны в классе голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. Иными словами, справедливо следующее утверждение, доказательство которого любезно предоставил нам рецензент настоящей статьи.

Предложение 3.4. *Существуют константы $c_1(\alpha,\rho,\gamma)>0$ и $c_2(\alpha,\rho,\gamma)>0$, такие что $M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f)\le c_1\cdot M^p_\alpha(f)$ и $M^p_\alpha(f)<c_2\cdot M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f)$ для произвольной функции $f\in H(\mathbb{D})$. В частности, пространства $H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$ и $H^p(\alpha)$ идентичны.*

Доказательство. Сперва заметим, что $1-t^\rho\asymp 1-t$. Это значит, что существуют $C'_\rho, C''_\rho>0$ так что $0<C'_\rho\le\frac{1-t^\rho}{1-t}\le C''_\rho,\quad 0<t<1$. Следовательно

$$M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f)\asymp M^p_{\alpha,\gamma}(f)\equiv\iint\limits_{\mathbb{D}}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha|z|^{2\gamma}dm(z).$$

Теперь докажем, что $|z|^{2\gamma}$ не меняет класс и возникают эквивалентные нормы.

Случай 1. $\gamma\ge 0$. По скольку $|z|^{2\gamma}\le 1$, имеем $M^p_{\alpha,\gamma}(f)\le M^p_\alpha(f)$. С другой стороны, используя тот факт, что интегральные средние $\int\limits_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta$ не убывают по r, имеем:

$$\begin{aligned}
M^p_\alpha(f)&=\iint\limits_{|z|\le 1/2}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha dm(z)+\iint\limits_{1/2<|z|<1}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha dm(z)\\
&=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1/2}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\left(1-r^2\right)^\alpha r dr d\theta+\iint\limits_{1/2<|z|<1}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha\frac{|z|^{2\gamma}}{|z|^{2\gamma}}dm(z)\\
&\le\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1/2}\left(1-r^2\right)^\alpha r dr d\theta+2^{2\gamma}\iint\limits_{1/2<|z|<1}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha|z|^{2\gamma}dm(z)\\
&=C(\alpha)\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta+4^\gamma\iint\limits_{1/2<|z|<1}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha|z|^{2\gamma}dm(z)\\
&\le C(\alpha,\gamma)\iint\limits_{1/2<|z|<1}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha|z|^{2\gamma}dm(z)\le C(\alpha,\gamma)M^p_{\alpha,\gamma}(f).
\end{aligned}$$

И так, $M^p_{\alpha,\gamma}(f)\asymp M^p_\alpha(f)$ в случии $\gamma\ge 0$.

Случай 2. $-1<\gamma<0$. Очевидно, что $|z|^{2\gamma}\ge 1$. В таком случае $M^p_\alpha(f)\le M^p_{\alpha,\gamma}(f)$. В то же время имеем:

$$M^p_{\alpha,\gamma}(f)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1/2}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\left(1-r^2\right)^\alpha r^{2\gamma}rdrd\theta+\iint\limits_{1/2<|z|<1}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha|z|^{2\gamma}dm(z)$$
$$\le\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1/2}\left(1-r^2\right)^\alpha r^{2\gamma}rdrd\theta$$
$$+2^{-2\gamma}\iint\limits_{1/2<|z|<1}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha dm(z)$$
$$=C(\alpha,\gamma)\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta+2^{-2\gamma}\iint\limits_{1/2<|z|<1}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha dm(z)$$
$$\le C_1(\alpha,\gamma)\iint\limits_{1/2<|z|<1}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^\alpha dm(z)\le C_1(\alpha,\gamma)M^p_\alpha(f),$$

откуда вытекает, что $M^p_{\alpha,\gamma}(f)\asymp M^p_\alpha(f)$. □

Определение 3.3. *Для произвольной $f\in H(\mathbb{D})$ положим $f_r(\zeta)\equiv f(r\cdot\zeta)$, $\zeta\in\mathbb{D}$, $0\le r<1$.*

Предложение 3.5. *Пусть $f\in H(\mathbb{D})$ и $r\in[0,1)$, тогда $M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f_r)\le M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f)$.*

Доказательство.

$$M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f_r)=\iint\limits_{\mathbb{D}}|f(r\cdot\zeta)|^p\left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha|\zeta|^{2\gamma}dm(\zeta)$$
$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\left|f(r\cdot te^{i\theta})\right|^p\left(1-t^{2\rho}\right)^\alpha t^{2\gamma+1}d\theta dt=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|f(r\cdot te^{i\theta})\right|^p d\theta\right)\left(1-t^{2\rho}\right)^\alpha t^{2\gamma+1}dt$$
$$\le\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|f(te^{i\theta})\right|^p d\theta\right)\left(1-t^{2\rho}\right)^\alpha t^{2\gamma+1}dt=M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f).$$

□

Следствие 3.2. *Если $f\in H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$, то $f_r\in H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$ для $r\in[0,1)$.*

Следующее утверждение приводится также в [6, Лемма 1.1].

Предложение 3.6. *Пусть* $f \in H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$, *тогда* $f_r \to f$ *(когда* $r \uparrow 1$*) в пространстве* $H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$, *т.е.* $M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f - f_r) \to 0$ *(когда* $r \uparrow 1$*).*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 3.4 ввиду того, что аналогичный факт для пространств $H^p(\alpha)$ хорошо известен (см. [4]). $\square$

Предложение 3.7. *Пусть* $p > 0$ *и* $f \in H(\mathbb{D})$. *Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$|f(0)|^p \le const(\alpha;\rho;\gamma) \cdot M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f), \tag{3.3}$$

где $const(\alpha;\rho;\gamma) = \frac{1}{I(\alpha;\rho;\gamma)}$.

Доказательство. Ввиду (2.5) имеем

$$|f(0)|^p \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta, \qquad 0 \le r < 1.$$

Умножая обе части неравенства на $\left(1 - r^{2\rho}\right)^\alpha r^{2\gamma+1}$ и интегрируя по r от 0 до 1, получим:

$$\int\limits_0^1 |f(0)|^p \left(1 - r^{2\rho}\right)^\alpha r^{2\gamma+1} dr \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p \left(1 - r^{2\rho}\right)^\alpha r^{2\gamma+1} d\theta dr.$$

Тогда

$$|f(0)|^p \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \cdot \frac{1}{2\rho} \le \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^{2\rho})^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta),$$

или, ввиду (3.1),

$$|f(0)|^p \le \frac{1}{I(\alpha;\rho;\gamma)} \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^{2\rho})^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta).$$

$\square$

Предложение 3.8. *Пусть* $p > 0$, $\rho > 0$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$,

$$0 < c_\rho = \inf_{[0,1)} \frac{1 - x^\rho}{1 - x} \le 1,$$

$$l = \begin{cases} \alpha, & \alpha \ge 0 \\ 0, & -1 < \alpha \le 0 \end{cases}, \qquad m = \begin{cases} \gamma, & \gamma \ge 0 \\ 0, & -1 < \gamma \le 0 \end{cases}.$$

Если $f \in H(\mathbb{D})$ *и* $\frac{1}{2} < |z| < 1$, *то*

$$|f(z)|^p \leq const(\alpha,\rho,\gamma) \cdot \frac{M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f)}{(1-|z|)^{2+l}}, \tag{3.4}$$

где $const(\alpha,\rho,\gamma) = \dfrac{4^{2m+1} \cdot 2^l}{\pi \cdot (c_\rho)^l}$.

Доказательство. Положим $t = \dfrac{1-|z|}{2}$, тогда для любого ζ, где $|\zeta - z| \leq t$, будем иметь

$$|\zeta| \leq |z| + t = |z| + \frac{1-|z|}{2} = \frac{1+|z|}{2},$$

$$|\zeta| \geq |z| - |\zeta - z| \geq |z| - t = |z| - \frac{1-|z|}{2} = \frac{3|z|-1}{2} > \frac{1}{4}$$

и

$$1 - |\zeta| \geq 1 - \frac{1+|z|}{2} = \frac{1-|z|}{2} = t.$$

Далее,

$$1 - |\zeta|^{2\rho} = \frac{1-|\zeta|^{2\rho}}{1-|\zeta|^2} \cdot \left(1 - |\zeta|^2\right) \geq c_\rho \cdot (1-|\zeta|) \cdot (1+|\zeta|) \geq c_\rho \cdot (1-|\zeta|) \geq c_\rho \cdot t.$$

Пусть $G = \{\zeta : |\zeta - z| \leq t\}$. Согласно (2.6) имеем:

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\pi t^2} \iint\limits_G |f(\zeta)|^p \, dm(\zeta) = \frac{1}{\pi t^2} \iint\limits_G \frac{|f(\zeta)|^p \left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma}}{\left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma}} dm(\zeta).$$

В силу вышеприведенных неравенств

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\pi t^2} \iint\limits_G \frac{|f(\zeta)|^p \left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma}}{c_\rho^l \cdot t^l \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2m}} dm(\zeta) \leq \frac{4^{2m}}{\pi \cdot t^{2+l} \cdot c_\rho^l} \cdot M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f)$$

$$= \frac{4^{2m} \cdot 2^{2+l}}{\pi \cdot (1-|z|)^{2+l} \cdot c_\rho^l} \cdot M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f).$$

□

Замечание 3.1. *В работах [7] и [8, доказательство леммы 1.19] аналогичная оценка установлена для нормы* $M^p_\alpha(f)$ *и при всех* $z \in \mathbb{D}$. *Поэтому в силу предложения 3.4 оценка (3.4) остается в силе для всех* $z \in \mathbb{D}$ *и для* $l = \alpha$, *но при этом точная константа изменится.*

Следствие 3.3. *Для произвольной функции $f \in H(\mathbb{D})$ и для любого компакта $K \subset \mathbb{D}$ имеет место следующая оценка:*

$$|f(z)|^p \leq const(\alpha, \rho, \gamma, K) \cdot M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f), \qquad z \in K. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{D}$ - произвольное компактное множество. Выберем r_0 так, что $K \subset \overline{\mathbb{D}(0; r_0)}$ и положим $r_1 = max\left(r_0, \frac{1}{2}\right)$. Из предложения 3.8 следует, что для каждого $z_0 \in S(0; r_1) \equiv \partial\mathbb{D}(0; r_1)$

$$|f(z_0)|^p \leq const(\alpha, \rho, \gamma, K) \cdot M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f).$$

В силу принципа максимума модуля существует $z_1 \in S(0; r_1)$, так что

$$|f(z)| \leq |f(z_1)|, \qquad z \in \overline{\mathbb{D}(0; r_1)}.$$

Поэтому для каждого $z \in K$

$$|f(z)|^p \leq |f(z_1)|^p \leq const(\alpha, \rho, \gamma, K) \cdot M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f).$$

□

Следствие 3.4. *$H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$ является замкнутым подпространством в $L^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$, т.е. если $\{f_k\} \in H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D}) \subset L^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$, $f \in L^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$ и $M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f_k - f) \to 0$, когда $k \to 0$, то $f \in H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$.*

Предложение 3.9. *Пусть $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, тогда*

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} \zeta^k \cdot \overline{\zeta}^l \cdot (1 - |\zeta|^{2\rho})^\alpha \cdot |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \dfrac{\pi}{\rho} \cdot \dfrac{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\mu + \alpha + 1 + \frac{k}{\rho}\right)}, & k = l. \end{cases} \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $k \neq l$, тогда

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathbb{D}} \zeta^k \overline{\zeta}^l \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r^{k+l+2\gamma+1} e^{i(k-l)\theta} \left(1 - r^{2\rho}\right)^\alpha d\theta dr \\ &= \int\limits_0^1 r^{k+l+2\gamma+1} \left(1 - r^{2\rho}\right)^\alpha \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta} d\theta dr = 0. \end{aligned}$$

Если же $k=l$, то

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} \zeta^k \overline{\zeta}^k \left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r^{2k+2\gamma+1}\left(1-r^{2\rho}\right)^\alpha d\theta dr$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 r^{2k+2\gamma+1}\left(1-r^{2\rho}\right)^\alpha dr = \frac{\pi}{\rho}\int\limits_0^1 t^{\frac{k+\gamma-\rho+1}{\rho}}(1-t)^\alpha dt = \frac{\pi}{\rho} B\left(\frac{k}{\rho}+\mu, \alpha+1\right).$$

□

Замечание 3.2. *Аналогичным образом можно доказать, что формула (3.6) справедлива для комплексных значений* α *и* γ *с* $Re\alpha > -1, Re\gamma > -1$.

Предложение 3.10. *Пусть* $1 \le p < +\infty$. *Система* $\{\zeta^k\}_{k=0}^\infty$ *полна в* $H^p_{\alpha,\rho\gamma}(\mathbb{D})$. *Другими словами, если* $f \in H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$ *и* $\iint\limits_{\mathbb{D}} f(\zeta)\overline{\zeta}^k \left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) = 0$ *для всех* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *то* $f \equiv 0$ *в* $\mathbb{D}$.

Доказательство. Пусть функция f представима рядом $f(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^\infty a_k \zeta^k$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Тогда для $r \in [0,1)$ $f(r\cdot\zeta) = \sum\limits_{k=0}^\infty r^k a_k \zeta^k$, $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$, причем последний ряд мажорируется положительным сходящимся рядом равномерно по $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$. Далее,

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} f(r\cdot\zeta)\cdot\overline{\zeta}^k \left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta)$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{D}} \left(\sum_{m=0}^\infty a_m r^m \zeta^m\right)\cdot\overline{\zeta}^k \left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta)$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \iint\limits_{\mathbb{D}} a_m r^m \zeta^m \overline{\zeta}^k \left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) = \iint\limits_{\mathbb{D}} a_k r^k |\zeta|^{2k+2\gamma}\left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha dm(\zeta)$$

$$= a_k \cdot r^k \cdot \iint\limits_{\mathbb{D}} |\zeta|^{2k+2\gamma}\cdot\left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha dm(\zeta).$$

Мы намерены устремить $r \to 1$ в обеих частях последнего соотношения.

$$\left|\iint\limits_{\mathbb{D}} (f(\zeta)-f(r\cdot\zeta))\cdot\overline{\zeta}^k \left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta)\right|$$

$$\le \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta)-f(r\cdot\zeta)|\cdot\left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^\alpha |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta).$$

Поскольку $f \in H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$, то в силу следствия 3.3.1 имеем так же $f \in H^1_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$. Поэтому ввиду предложения 3.6

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta) - f(r \cdot \zeta)| \cdot \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) \to 0.$$

В итоге получаем

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} f(\zeta) \cdot \overline{\zeta}^k \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) = a_k \cdot \iint\limits_{\mathbb{D}} |\zeta|^{2k+2\gamma} \cdot \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} dm(\zeta),$$

откуда и следует, что $a_k = 0$ для каждого $k = 0, 1, 2, ...$, т.е. $f \equiv 0$. $\square$

4. Основные интегральные представления

Из предложений 3.9 и 3.10 следует, что система $\{\zeta_k\}_0^\infty$ является ортогональным базисом в гильбертовом пространстве $H^2_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$ и , как следствие, система

$$\{\varphi_k(\zeta)\}_0^\infty \equiv \left\{ \frac{\zeta^k}{\sqrt{\frac{\pi}{\rho} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}{\Gamma(\mu+\alpha+1+\frac{k}{\rho})}}} \right\}_{k=0}^\infty \tag{4.1}$$

является ортонормальным базисом в гильбертовом пространстве $H^2_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$.

Хорошо известно, что исходя из заданного ортонормального базиса $\{\varphi_k(\zeta)\}_{k=1}^\infty$ в гильбертовом пространстве $A^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ голоморфных функций в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, посредством суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \cdot \overline{\varphi_k(\zeta)}$$

строится воспроизводящее ядро для $A^2(\Omega)$. Следовательно (см. [6, (1.9)])

$$S_{\alpha,\rho,\gamma}(z,\zeta) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\mu+\alpha+1+\frac{k}{\rho})}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})} \cdot z^k \cdot \overline{\zeta}^k \tag{4.2}$$

будет воспроизводящим ядром для $H^2_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$. Последнее обстоятельство инициирует следующее обобщение формулы (4.2).

Определение 4.1. *Пусть* $\rho > 0, Re(\beta) > -1, Re(\varphi) > -1$ *и* $\mu = \dfrac{1+\varphi}{\rho}$. *Тогда положим*

$$S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta) = \frac{\rho}{\pi\cdot\Gamma(\beta+1)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+\beta+1+\frac{k}{\rho})}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})} \cdot z^k \cdot \overline{\zeta}^k, \tag{4.3}$$

где $z \in \mathbb{D}$ *и* $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$.

Основные свойства введённого ядра $S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)$ содержатся в следующей теореме.

Теорема 4.1. (1) *Для любого* $z \in \mathbb{D}$ *и для любого* $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ *ряд (4.3) абсолютно сходится.*

(2) *Для любого* $z \in \mathbb{D}$ *и для любого* $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$

$$|S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)| \leq \frac{const(\Gamma;\beta,\rho,\varphi)}{(1-|z|)^{2+Re(\beta)}}. \tag{4.4}$$

(3) *Ряд (4.3) мажорируется положительным сходящимся рядом равномерно по* $z \in K \subset \mathbb{D}$ *и* $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$, *где* K *- компактное множество.*

(4) *Для фиксированного* $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$, $S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)$ *голоморфно по* $z \in \mathbb{D}$.

Для фиксированного $z \in \mathbb{D}$, $S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)$ *антиголоморфно по* $\zeta \in \mathbb{D}$ *и непрерывно по* $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$.

(5) *Для любого* $z \in \mathbb{D}$ *и для любого* $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$

$$S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta) = \frac{\rho}{\pi \cdot \Gamma(\beta+1)} \cdot \int\limits_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\mu+\beta} \cdot E_\rho\left(t^{\frac{1}{\rho}} z\overline{\zeta};\mu\right) dt. \tag{4.5}$$

Более того, функция под знаком интеграла мажорируется положительной интегрируемой функцией равномерно по $z \in K \subset \mathbb{D}$ *и* $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$, *где* K *- компактное множество.*

Доказательство. Сперва заметим, что согласно (2.1)

$$\left|\frac{\Gamma(\mu+\beta+1+\frac{k}{\rho})}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})} \cdot z^k \cdot \overline{\zeta}^k\right| \asymp \frac{e^{-\frac{k}{\rho}}\left(\frac{k}{\rho}\right)^{\frac{k}{\rho}+\mu_1+Re(\beta)+1-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{k}{\rho}}\left(\frac{k}{\rho}\right)^{\frac{k}{\rho}+\mu_1-\frac{1}{2}}} \cdot |z|^k = \left(\frac{k}{\rho}\right)^{Re(\beta)+1}|z|^k$$

$$\asymp k^{Re(\beta)+1}|z|^k = \frac{e^{-k}k^{k+Re(\beta)+2-\frac{1}{2}}}{e^{-k}k^{k+1-\frac{1}{2}}}|z|^k \asymp \frac{\Gamma(k+Re(\beta)+2)}{\Gamma(k+1)}|z|^k.$$

Тогда

$$|S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)| \leq const \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+Re(\beta)+2)}{\Gamma(k+1)}|z|^k$$

$$\asymp const \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+Re(\beta)+2)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(Re(\beta)+2)}|z|^k = \frac{const}{(1-|z|)^{Re(\beta)+2}}.$$

Если $z \in K \subset \mathbb{D}$, то существует $\lambda \in (0,1)$, так что $|z| \leq \lambda$ для любого $z \in K$. Тогда

$$\frac{\Gamma(k+Re(\beta)+2)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(Re(\beta)+2)}|z|^k \leq \frac{\Gamma(k+Re(\beta)+2)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(Re(\beta)+2)}\lambda^k.$$

Последнее означает, что ряд (4.3) может быть мажорирован положительным сходящимся рядом

$$const\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+Re(\beta)+2)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(Re(\beta)+2)}\lambda^k = const\cdot\frac{1}{(1-\lambda)^{Re\beta+2}} < +\infty$$

равномерно по $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}, z \in \mathbb{D}$.

Таким образом, (а), (б), (в) доказаны и (г) следует из (в). Далее,

$$\begin{aligned}
S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta) &= \frac{\rho}{\pi\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+\beta+1+\frac{k}{\rho})}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}\cdot z^k\cdot\overline{\zeta}^k \\
&= \frac{\rho}{\pi\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{\mu+\beta+\frac{k}{\rho}}dt}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}\cdot z^k\cdot\overline{\zeta}^k \\
&= \frac{\rho}{\pi\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{\mu+\beta}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(t^{\frac{1}{\rho}}\cdot z\cdot\overline{\zeta}\right)^k}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}dt \\
&= \frac{\rho}{\pi\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{\mu+\beta}\cdot E_\rho(t^{\frac{1}{\rho}}z\overline{\zeta};\mu)dt,
\end{aligned}$$

и (д) доказано с учётом (2.4). □

Теорема 4.2. *Пусть* $1 \leq p < +\infty, \rho > 0, \alpha > -1, \gamma > -1$, *комплексные числа* β *и* φ *удовлетворяют условиям*

$$\begin{cases} Re(\beta) \geq \alpha, Re(\varphi) \geq \gamma, & p=1 \\ \begin{cases} Re(\beta) > \frac{\alpha+1}{p}-1 \\ Re(\varphi) > \frac{\gamma+1}{p}-1 \end{cases}, & 1 < p < \infty \end{cases} \tag{4.6}$$

и $\mu = \frac{\varphi+1}{\rho}$.

Тогда для каждой функции $f \in H^p_{\alpha,\rho,\gamma}(\mathbb{D})$ *справедливы следующие представления:*

$$f(z) = \iint\limits_{\mathbb{D}} f(\zeta)\cdot S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)\cdot(1-|\zeta|^{2\rho})^{\beta}\cdot|\zeta|^{2\varphi}dm(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{4.7}$$

и

$$\overline{f(0)} = \iint\limits_{\mathbb{D}} \overline{f(\zeta)} \cdot S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta) \cdot \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\beta} \cdot |\zeta|^{2\varphi} dm(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Достаточно доказать только (4.7), так как (4.8) может быть установлено дословным повторением соответствующих шагов. Сначала докажем (4.7) для функции f_r в предположении, что f имеет разложение

$$f(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Для фиксированного $z \in D$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\mathbb{D}} f(r\cdot\zeta)\cdot S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)\left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^{\beta}|\zeta|^{2\varphi}dm(\zeta)\\
&\quad= \iint\limits_{\mathbb{D}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m \zeta^m\right)\cdot\frac{\rho}{\pi\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+\beta+1+\frac{k}{\rho})}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}\cdot z^k\cdot\overline{\zeta}^k\right)\\
&\qquad\qquad\cdot\left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^{\beta}|\zeta|^{2\varphi}dm(\zeta)\\
&= \frac{\rho}{\pi\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\iint\limits_{\mathbb{D}}\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k z^k |\zeta|^{2k}\frac{\Gamma(\mu+\beta+1+\frac{k}{\rho})}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}\cdot\left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^{\beta}|\zeta|^{2\varphi}dm(\zeta)\\
&= \frac{\rho}{\pi\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k z^k\frac{\Gamma(\mu+\beta+1+\frac{k}{\rho})}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}\cdot\iint\limits_{\mathbb{D}}\left(1-|\zeta|^{2\rho}\right)^{\beta}|\zeta|^{2k+2\varphi}dm(\zeta)\\
&\quad= \frac{\rho}{\pi\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k z^k\frac{\Gamma(\mu+\beta+1+\frac{k}{\rho})}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}\cdot\frac{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})\cdot\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+\beta+1+\frac{k}{\rho})}\cdot\frac{\pi}{\rho}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k z^k = f(r\cdot z).
\end{aligned}$$

Мы намерены устремить $r \to 1$ в обеих частях последнего соотношения. Очевидно, основная сложность заключается в осуществлении этого предельного перехода в левой части. Пусть $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тогда

$$\left| \iint\limits_{\mathbb{D}} (f(\zeta) - f(r \cdot \zeta)) \cdot S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta) \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\beta} |\zeta|^{2\varphi} dm(\zeta) \right|$$
$$\leq \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta) - f(r \cdot \zeta)| \cdot |S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)| \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{Re\beta} |\zeta|^{2Re\varphi} dm(\zeta)$$
$$\leq \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta) - f(r \cdot \zeta)| \cdot \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\frac{\alpha}{p}} |\zeta|^{\frac{2\gamma}{p}} |S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)| \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{Re\beta - \frac{\alpha}{p}} |\zeta|^{2Re\varphi - \frac{2\gamma}{p}} dm(\zeta)$$
$$\leq \left(\iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta) - f(r \cdot \zeta)|^p \cdot \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\cdot \left(\iint\limits_{\mathbb{D}} |S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)|^q \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{q(Re\beta - \frac{\alpha}{p})} |\zeta|^{q(2Re\varphi - \frac{2\gamma}{p})} dm(\zeta) \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\equiv \left(M^p_{\alpha,\rho,\gamma}(f - f_r)\right)^{\frac{1}{p}} \cdot J^{\frac{1}{q}}. \tag{4.9}$$

Ввиду (4.6), $q\left(Re\beta - \frac{\alpha}{p}\right) > -1$ и $q\left(Re\varphi - \frac{\gamma}{p}\right) > -1$. Следовательно, на основании (4.4), предложений 3.1 и 3.6 мы заключаем, что $J < +\infty$ и что правая часть (4.9) стремится к 0 при $r \to 1$.

Если p=1, в силу (4.6), (4.4) и предложения 3.6 имеем:

$$\left| \iint\limits_{\mathbb{D}} (f(\zeta) - f(r \cdot \zeta)) \cdot S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta) \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\beta} |\zeta|^{2\varphi} dm(\zeta) \right|$$
$$\leq \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta) - f(r \cdot \zeta)| \cdot |S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)| \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{Re\beta} |\zeta|^{2Re\varphi} dm(\zeta)$$
$$\leq \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta) - f(r \cdot \zeta)| \cdot \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} |\zeta|^{2\gamma} |S_{\beta,\rho,\varphi}(z,\zeta)| \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{Re\beta - \alpha} |\zeta|^{2Re\varphi - 2\gamma} dm(\zeta)$$
$$\leq \frac{const}{(1 - |z|)^{2 + Re\beta}} \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(\zeta) - f(r \cdot \zeta)| \cdot \left(1 - |\zeta|^{2\rho}\right)^{\alpha} |\zeta|^{2\gamma} dm(\zeta)$$
$$= \frac{const}{(1 - |z|)^{2 + Re\beta}} \cdot M^1_{\alpha,\rho,\gamma}(f - f_r) \to 0, \qquad r \to 1.$$

$\square$

Замечание 4.1. *Если $\beta = \alpha$ и $\varphi = \gamma$ формула (4.7) доказана в [6, теорема 1.1].*

Abstract. For weighted L^p-classes of holomorphic functions in the unite circle, a family of weighted integral representations with a weight function of type $|w|^{2\varphi} \cdot (1 - |w|^{2\rho})^{\beta}$ and with reproducing kernels of the Mittag-Leffler type are obtained.

Список литературы

[1] W. Wirtinger, "Uber eine Minimumaufgabe im Gebiet der analytischen Functionen", Monatshefte fur Math. und Phys. **39**, 377 – 384 (1932).

[2] S. Bergman, "Uber unendliche Hermitische Formen, die zu einem Bereiche geh oren, nebst Anwendungenauf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Ver anderlichen", Math. Zeit. **29**, 641 -– 677 (1929).

[3] М. М. Джрбашян, "О представимости некоторых классов функций мероморфных в единичном круге", ДАН Арм.ССР **3**, no. 1, 3 – 9 (1945).

[4] М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Мат. Мех. АН Арм.ССР **2**, 3 – 40 (1948).

[5] A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, "Topics in the theory of A^p_α spaces", Teubner-Texte zur Math. **105**, Leipzig (1988).

[6] М. М. Джрбашян, "Весовые интегральные предстовления гладких или голоморфных функций в единичном круге и в комплексной плоскости", Изв. АН Армении **28**, no.4, 3 – 33 (1993).

[7] D. Vukotic, "A sharp estimate for A^p_α functions in $\mathbb{C}^n$", Proc. Amer. Math. Soc. **117**, 753 – 756 (1993).

[8] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Graduate Texts in Mathematics, Springer (2000).

Поступила 10 декабря 2019

После доработки 21 марта 2020

Принята к публикации 06 апреля 2020

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 4, 2020, стр. 31 – 46

A CHARACTERIZATION OF MULTI-MIXED ADDITIVE-QUADRATIC MAPPINGS AND A FIXED POINT APPLICATION

S. FALIHI, A. BODAGHI, B. SHOJAEE

Karaj Branch, Islamic Azad University, Karaj, Iran
Garmsar Branch, Islamic Azad University, Garmsar, Iran
E-mails: *sanam_falihi@yahoo.com; abasalt.bodaghi@gmail.com; shoujaei@kiau.ac.ir*

Abstract. In this paper, we introduce n-variables mappings which are mixed additive-quadratic in each variable. We show that such mappings can be described by a equation, namely, by a multi-mixed additive-quadratic functional equation. The main goal is to extend the applications of a fixed point method to establish the Hyers-Ulam stability for the multi-mixed additive-quadratic mappings.

MSC2010 numbers: 39B82; 39B52; 47H10.

Keywords: Banach space; generalized Hyers-Ulam stability; multi-mixed additive-quadratic mapping; fixed point method.

1. Introduction

Throughout the paper we use the following notation. By $\mathbb{N}$ we denote the set of all positive integers, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, and $n \in \mathbb{N}$. For any $l \in \mathbb{N}_0$, $m, s \in \mathbb{N}$ with $s \geq 3$, $t = (t_1, \cdots, t_m) \in \{-s, -1, 1, s\}^m$ and $x = (x_1, \cdots, x_m) \in V^m$ we write $lx := (lx_1, \cdots, lx_m)$ and $tx := (t_1 x_1, \cdots, t_m x_m)$, where ra stands for the rth power of an element a of the commutative group V.

The additive (Cauchy) equation $A(x + y) = A(x) + A(y)$ and the quadratic (Jordan-von Neumann) equation $Q(x + y) + Q(x - y) = 2Q(x) + 2Q(y)$ are the well-known equations in mathematics which play a remarkable role in the algebra and analysis. Some information about the solutions, stability and applications of these equations can be found in [26] and [36].

Let V be a commutative group, W be a linear space, and $n \geq 2$ be an integer. Recall that a mapping $f : V^n \longrightarrow W$ is called *multi-additive* if it is additive (that is, satisfies Cauchy functional equation) in each variable (see [22]). Some facts on such mappings can be found, for instance, in [28]. Furthermore, f is said to be *multi-quadratic* if it is quadratic in each variable (see [21]). In Zhao et al. [40] it was proved that a mapping $f : V^n \longrightarrow W$ is multi-quadratic if and only if the following relation holds:

$$\sum_{t\in\{-1,1\}^n} f(x_1+tx_2)=2^n\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n\in\{1,2\}} f(x_{1j_1},x_{2j_2},\cdots,x_{nj_n}) \tag{1.1}$$

where $x_j=(x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{nj})\in V^n$ with $j\in\{1,2\}$.

In 1940, Ulam [37] raised the first stability problem for functional equations. Specifically, he proposed a question whether there exists an exact homomorphism near an approximate homomorphism. One year later, an answer to this problem was given by Hyers [25] in the setting of Banach spaces. Later on, the stability problems have been extensively investigated for a variety of functional equations and spaces. For instance, various generalizations and extensions of Ulam's problem and Hyers' result were ascertained by Th. M. Rassias [34], Gajda [24], Aoki [1], J. M. Rassias [33] and Skof [35] (see also [6, 8, 13, 20, 27], and the references therein).

Recall that a mapping $f:V^n\longrightarrow W$ is said to be k-additive and $(n-k)$-quadratic (multi-additive-quadratic, in short) if f is additive in each of some k variables and is quadratic in each of the remaining $(n-k)$ variables (see [17]). Bahyrycz et al. [4] characterized the multi-additive-quadratic mappings, and showed that a mapping f is multi-additive-quadratic if and only if it satisfies the following relation:

$$\sum_{q\in\{-1,1\}^{n-k}} f(x_1^k+x_2^k,x_1^{n-k}+qx_2^{n-k})=2^{n-k}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in\{1,2\}} f(x_{1i_1},x_{2i_2},\cdots,x_{ni_n}) \tag{1.2}$$

where $x_i^k=(x_{1i},\cdots,x_{ki})\in V^k, x_i^{n-k}=(x_{k+1i},\cdots,x_{ni})\in V^{n-k}$, $i\in\{1,2\}$. The generalized Hyers-Ulam stability of multi-additive and multi-quadratic mappings in Banach spaces have been investigated by Ciepliński in [22] and [21], respectively (see also [2] and [40]).

In Zamani et al. [39] it was introduced the following mixed additive-quadratic functional equation:

$$f(x+2y)+f(x-2y)+8f(y)=2f(x)+4f(2y). \tag{1.3}$$

They found the general solution of equation (1.3) and established its Hyers-Ulam stability in non-Archimedean Banach modules over a unital Banach algebra. Najati and Moghimi [30] considered the following mixed type additive-quadratic equation:

$$f(2x+y)+f(2x-y)=f(x+y)+f(x-y)+2f(2x)-2f(x), \tag{1.4}$$

which is somewhat different from (1.3) and obtained its general solution. After that, the general form of the equation (1.3) was introduced by Bodaghi and Kim in [10] as follows:

$$f(x+sy)+f(x-sy)=2f(x)+s^2f(2y)-2s^2f(y), \tag{1.5}$$

where s is an integer with $s \neq 0, \pm 1$. It can easily be verified that the function $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = ax^2 + bx$ is a solution of the functional equations (1.3), (1.4) and (1.5). Notice that some results on the stability of mixed type mappings can be found in [5], [7], [9], [19], [23], [29], [31], [32] and [38].

In this paper, we define the multi-mixed additive-quadratic mappings and present a characterization of such mappings. In other words, we reduce the system of n equations defining the multi-mixed additive-quadratic mappings to obtain a single functional equation. We also prove the generalized Hyers-Ulam stability for multi-mixed additive-quadratic mappings by applying the fixed point method, which was introduced and used for the first time by Brzdęk [15] (see also [14]). More applications of this approach for the stability of multi-Cauchy-Jensen, multi-additive-quadratic, multi-cubic and multi-quartic mappings in Banach spaces can be found in [3], [4], [11] and [12], respectively.

2. A characterization of multi-mixed additive-quadratic mappings

Let V and W be vector spaces over the rational numbers, $n \in \mathbb{N}$ and $x_i^n = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}) \in V^n$, where $i \in \{1, 2\}$. We shall denote x_i^n by x_i if there is no ambiguity. Let $s \in \mathbb{N}$ with $s \geq 3$. For $x_1, x_2 \in V^n$ and $p, q \in \mathbb{N}_0$ with $0 \leq p, q \leq n$, we set

$$\mathcal{M} := \{\mathfrak{M}_n = (M_1, \cdots, M_n) |\ M_j \in \{x_{1j}, x_{2j}, 2x_{2j}\}\},$$

where $j \in \{1, \cdots, n\}$, and consider the subsets $\mathcal{M}^n_{(p,q)}$ of $\mathcal{M}$ defined as follows:

$$\mathcal{M}^n_{(p,q)} := \{\mathfrak{M}_n \in \mathcal{M} |\ \mathrm{Card}\{M_j : M_j = x_{1j}\} = p \text{ and } \mathrm{Card}\{M_j : M_j = x_{2j}\} = q\}.$$

We say that a mapping $f : V^n \longrightarrow W$ is *n-multi-mixed additive-quadratic* or *multi-mixed additive-quadratic* if f is mixed additive-quadratic in each variable (see (1.5)). From now on, for such mappings, we use the following notation:

$$f\left(\mathcal{M}^n_{(p,q)}\right) := \sum_{\mathfrak{M}_n \in \mathcal{M}^n_{(p,q)}} f(\mathfrak{M}_n), \tag{2.1}$$

$$f\left(\mathcal{M}^n_{(p,q)}, z\right) := \sum_{\mathfrak{M}_n \in \mathcal{M}^n_{(p,q)}} f(\mathfrak{M}_n, z) \qquad (z \in V).$$

For each $x_1, x_2 \in V^n$ and $s \in \mathbb{N}$ with $s \geq 3$, we consider the following functional equation:

$$\sum_{t \in \{-s, s\}^n} f(x_1 + tx_2) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-p} 2^p (-2s^2)^q (s^2)^{n-p-q} f\left(\mathcal{M}^n_{(p,q)}\right). \tag{2.2}$$

It can easily be verified that the function $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(z_1, z_2 \cdots, z_n) = \prod_{j=1}^{n} (a_j z_j^2 + b_j z_j)$ satisfies the equation (2.2). We note that the left- and right-hand sides of (2.2) have 2^n and 3^n terms, respectively. We first prove that a multi-mixed additive-quadratic mapping satisfies equation (2.2).

Proposition 2.1. *If $f : V^n \longrightarrow W$ is a multi-mixed additive-quadratic mapping, then it satisfies the equation* (2.2).

Proof. The proof is by induction on n. For $n = 1$, it is trivial that f satisfies equation (1.5). Assume that f satisfies equation (2.2) for $n = m$. Then, for $n = m + 1$, we have

$$
\begin{aligned}
\sum_{t\in\{-s,s\}^{m+1}} f(x_1^{m+1} + tx_2^{m+1}) &= 2 \sum_{t\in\{-s,s\}^{m}} f(x_1^{m} + tx_2^{m}, x_{1m+1}) \\
&\quad + s^2 \sum_{t\in\{-s,s\}^{m}} f(x_1^{m} + tx_2^{m}, 2x_{2m+1}) - 2s^2 \sum_{t\in\{-s,s\}^{m}} f(x_1^{m} + tx_2^{m}, x_{2m+1}) \\
&= 2\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{m-p} 2^p(-2s^2)^q(s^2)^{m-p-q} f\left(\mathcal{M}^m_{(p,q)}, x_{1m+1}\right) \\
&\quad + s^2\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{m-p} 2^p(-2s^2)^q(s^2)^{m-p-q} f\left(\mathcal{M}^m_{(p,q)}, 2x_{2m+1}\right) \\
&\quad - 2s^2\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{m-p} 2^p(-2s^2)^q(s^2)^{m-p-q} f\left(\mathcal{M}^m_{(p,q)}, x_{2m+1}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{m+1}\sum_{q=0}^{m+1-p} 2^p(-2s^2)^q(s^2)^{m+1-p-q} f\left(\mathcal{M}^{m+1}_{(p,q)}\right) \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

for all $x_1^{m+1}, x_2^{m+1} \in V^{m+1}$, and the result follows. □

In what follows, by $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ we denote the binomial coefficients defined for all $n, k \in \mathbb{N}_0$ with $n \geq k$ by $n!/(k!(n-k)!)$. Let $0 \leq k \leq n-1$. We put

$$\mathcal{K}_k := \{{}_kx := (0, \cdots, 0, x_{j_1}, 0, \cdots, 0, x_{j_k}, 0, \cdots, 0) \in V^n\},$$

where $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$. In other words, $\mathcal{K}_k$ is the set of all vectors in V^n for which exactly k components are non-zero.

We are going to show that if a mapping $f : V^n \longrightarrow W$ satisfies equation (2.2), then it is multi-mixed additive-quadratic. In order to do this, we need the next lemma.

Lemma 2.2. *If a mapping $f : V^n \longrightarrow W$ satisfies the equation* (2.2)*, then $f(x) = 0$ for any $x \in V^n$ for which at least one component is equal to zero.*

Proof. Putting $x_1 = x_2 = (0, \cdots, 0)$ in (2.2), we can write

$$\begin{aligned}
2^n f(0,\cdots,0) &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\binom{n}{p}\binom{n-p}{q}2^p(-2s^2)^q(s^2)^{n-p-q}f(0,\cdots,0)\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^p\sum_{q=0}^{n-p}\binom{n-p}{q}(-2s^2)^q(s^2)^{n-p-q}f(0,\cdots,0)\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^p(s^2-2s^2)^{n-p}f(0,\cdots,0)\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^p(-s^2)^{n-p}f(0,\cdots,0)\\
&= (2-s^2)^n f(0,\cdots,0). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Since $s \neq 2$, we get $f(0\cdots,0) = 0$. Assume that $f({}_{k-1}x) = 0$ for each ${}_{k-1}x \in \mathcal{K}_{k-1}$. We show that if ${}_kx \in \mathcal{K}_k$, then $f({}_kx) = 0$. By a suitable replacement in (2.2), we get

$$2^n f({}_kx) = 2^k \sum_{p=0}^{n-k}\sum_{q=0}^{n-k-p}\binom{n-k}{p}\binom{n-k-p}{q}2^p(-2s^2)^q(s^2)^{n-k-p-q}f({}_kx).$$

Similar to the above, one can show that $2^n f({}_kx) = 2^k(2-s^2)^{n-k}f({}_kx)$, and hence $f({}_kx)$ should equal to zero. This completes the proof. $\square$

We say that $f : V^n \longrightarrow W$ is odd in the jth variable if

$$f(z_1,\cdots,z_{j-1},-z_j,z_{j+1},\cdots,z_n) = -f(z_1,\cdots,z_{j-1},z_j,z_{j+1},\cdots,z_n).$$

Similarly, a mapping f is said to be even in the jth variable if

$$f(z_1,\cdots,z_{j-1},-z_j,z_{j+1},\cdots,z_n) = f(z_1,\cdots,z_{j-1},z_j,z_{j+1},\cdots,z_n)$$

for all $(z_1,\cdots,z_n) \in V^n$.

Theorem 2.3. *Suppose that a mapping $f : V^n \longrightarrow W$ satisfies equation* (2.2). *Then f is a multi-mixed additive-quadratic mapping. Furthermore, the following assertions hold:*

(i) *if f is odd in the jth variable, then it is additive in the same variable;*
(ii) *if f is even in the jth variable, then it is quadratic in the same variable.*

Proof. Let $j \in \{1,\cdots,n\}$ be an arbitrary fixed number. Put $x_{2k} = 0$ for each $1 \leq k \leq n$ in (2.2) such that $k \neq j$. Then, using Lemma 2.2, for all $x_{1k} \in V$ with

$k \in \{1, \cdots, n\}$, we get

$$\begin{aligned}&2^{n-1} \sum_{t\in\{-s,s\}} f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j} + tx_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\&= 2^{n-1}[2f(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}) + s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\&- 2s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})]. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

So, f is mixed additive-quadratic in the jth variable.

(i) Let f be odd in the jth variable. Then, it follows from (2.5) that

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in\{-s,s\}} f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j} + tx_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\&= 2f(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}) + s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\&- 2s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}). \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Taking $x_{1j} = 0$ in (2.6) and using the oddness of f in the jth variable, we obtain

$$\begin{aligned}&f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\&\qquad = 2f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}). \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Substituting (2.6) into (2.7), we get

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in\{-s,s\}} f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j} + tx_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\&\qquad = 2f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}). \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Replacing x_{2j} by $\frac{x_{2j}}{s}$ in (2.8), we find

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in\{-1,1\}} f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j} + tx_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\&\qquad = 2f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}). \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Replacing (x_{1j}, x_{2j}) by (x_{2j}, x_{1j}) in (2.9), we arrive at

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in\{-1,1\}} f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{2j} + tx_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\&\qquad = 2f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}). \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Now, it follows from (2.9), (2.10) and the assumption, that

$$\begin{aligned}f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j} + x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) &= f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\&+ f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}), \qquad (2.11)\end{aligned}$$

showing that f is additive in the jth variable.

(ii) Similar to the proof of part (i), we have

$$\sum_{t\in\{-s,s\}} f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{1j}+tx_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$= 2f(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n}) + s^2 f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},2x_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$- 2s^2 f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}). \tag{2.12}$$

Taking $x_{1j}=0$ in (2.12), then applying Lemma 2.2 and using the evenness of f in the jth variable, we get

$$2f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},sx_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}) = s^2 f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},2x_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$- 2s^2 f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}). \tag{2.13}$$

Replacing (x_{1j},x_{2j}) by (sx_{1j},x_{1j}) in (2.12), we obtain

$$f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},2sx_{1j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}) = 2f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},sx_{1j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$+ s^2 f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},2x_{1j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$- 2s^2 f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{1j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}). \tag{2.14}$$

It follows from (2.13) and (2.14) that

$$f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},2sx_{1j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$= 4f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},sx_{1j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}), \tag{2.15}$$

implying that

$$f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},2x_{1j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$= 4f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{1j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}). \tag{2.16}$$

Using (2.12) and (2.16), we obtain

$$\sum_{t\in\{-s,s\}} f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{1j}+tx_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$= 2f(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n}) + 2s^2 f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}). \tag{2.17}$$

Letting $x_{1j}=0$ in (2.17), we find that

$$f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},sx_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$= s^2 f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}). \tag{2.18}$$

Replacing x_{1j} by sx_{1j} in (2.16) and applying (2.18), we get

$$\sum_{t\in\{-1,1\}} f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{1j}+tx_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n})$$
$$= 2f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{1j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}) + 2f(x_{11},\cdots,x_{1j-1},x_{2j},x_{1j+1},\cdots,x_{1n}), \tag{2.19}$$

showing that f is quadratic in the jth variable. This completes the proof. □

Corollary 2.4. *Under the hypothesis of* Theorem 2.3*, the following assertions hold:*

(i) *if f is odd in each variable, then it is multi-additive;*
(ii) *if f is even in each variable, then it is multi-quadratic.*

3. Stability Results for equation (2.2)

In this section, we prove the generalized Hyers-Ulam stability of equation (2.2) in Banach spaces by using a fixed point result (Theorem 3.1). In what follows, for two sets A and B, the set of all mappings from A to B is denoted by B^A. We first set up the following hypotheses.

(A1) Y is a Banach space, $\mathcal{S}$ is a nonempty set, $j \in \mathbb{N}$, $g_1, \cdots, g_j : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ and $L_1, \cdots, L_j : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

(A2) $\mathcal{T} : Y^{\mathcal{S}} \longrightarrow Y^{\mathcal{S}}$ is an operator satisfying the inequality:

$$\|\mathcal{T}\lambda(x) - \mathcal{T}\mu(x)\| \leq \sum_{i=1}^{j} L_i(x) \|\lambda(g_i(x)) - \mu(g_i(x))\|, \quad \lambda, \mu \in Y^{\mathcal{S}}, x \in \mathcal{S},$$

(A3) $\Lambda : \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ is an operator defined by

$$\Lambda\delta(x) := \sum_{i=1}^{j} L_i(x)\delta(g_i(x)) \qquad \delta \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}, x \in \mathcal{S}.$$

The following theorem, which is a fundamental result in the fixed point theory (see [18, Theorem 1]), will play a key role to obtain the main results of this paper.

Theorem 3.1. *Let the hypotheses* (A1)-(A3) *be fulfilled, and let the function $\theta : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ and the mapping $\phi : \mathcal{S} \longrightarrow Y$ satisfy the following two conditions:*

$$\|\mathcal{T}\phi(x) - \phi(x)\| \leq \theta(x), \quad \theta^*(x) := \sum_{l=0}^{\infty} \Lambda^l \theta(x) < \infty \qquad (x \in \mathcal{S}).$$

Then, there exists a unique fixed point ψ of $\mathcal{T}$ such that

$$\|\phi(x) - \psi(x)\| \leq \theta^*(x) \qquad (x \in \mathcal{S}).$$

Moreover, we have $\psi(x) = \lim_{l\to\infty} \mathcal{T}^l\phi(x)$ for all $x \in \mathcal{S}$.

For a number $s \in \mathbb{N}$ with $s \geq 3$ and a mapping $f : V^n \longrightarrow W$, we consider the difference operator $\Gamma_s f : V^n \times V^n \longrightarrow W$ defined by

$$\Gamma_s f(x_1, x_2) = \sum_{t \in \{-s,s\}^n} f(x_1 + tx_2) - \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-p} 2^p(-2s^2)^q(s^2)^{n-p-q} f\left(\mathcal{M}_{(p,q)}^n\right),$$

where $f\left(\mathcal{M}_{(p,q)}^n\right)$ is defined in (2.1). In what follows, all the mappings $f : V^n \longrightarrow W$ are assumed to satisfy $f(x) = 0$ for any $x \in V^n$ with at least one component of which is equal to 0. With this assumption, we have the following stability result.

Theorem 3.2. *Let $\beta \in \{-1,1\}$, V be a linear space over the rationals and W be a Banach space. Suppose that $\phi : V^n \times V^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ is a function satisfying the equality:*

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n\beta}}\right)^l \phi(2^{\beta l}x_1, 2^{\beta l}x_2) = 0 \tag{3.1}$$

for all $x_1, x_2 \in V^n$, and

$$\widetilde{\Phi}(x) = \frac{1}{2^{n\frac{\beta+1}{2}}}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n\beta}}\right)^l \Phi\left(2^{\beta l+\frac{\beta-1}{2}}x\right) < \infty \tag{3.2}$$

for all $x = x_1 \in V^n$, where

$$\Phi(x) = \frac{1}{s^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^{n-j}}\phi_j(x) \tag{3.3}$$

in which

$$\phi_j(x) = \phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 0, 2x_{1j+1}, \cdots, 2x_{1n}), (0, \cdots, 0, x_{1j}, 0, \cdots, 0)). \tag{3.4}$$

Also, assume that $f : V^n \longrightarrow W$ is a mapping satisfying the inequality:

$$\|\Gamma_s f(x_1, x_2)\|_Y \leqslant \phi(x_1, x_2) \tag{3.5}$$

for all $x_1, x_2 \in V^n$. If f is odd in each variable, then there exists a unique multi-additive mapping $\mathcal{A} : V^n \longrightarrow W$ such that for all $x \in V^n$,

$$\|f(x) - \mathcal{A}(x)\| \leq \widetilde{\Phi}(x). \tag{3.6}$$

Proof. Replacing (x_{1j}, x_{2j}) by $(0, x_{1j})$ and putting $x_{2k} = 0$ for $k \in \{1, \cdots, n\}$ with $k \neq j$ in (3.5), and using the oddness of f in each variable, we get

$$\begin{aligned}&\|f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) - 2f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\|\\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}s^2}\phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 0, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}), (0, \cdots, 0, x_{1j}, 0, \cdots, 0))\end{aligned} \tag{3.7}$$

for all $x = x_1 \in V^n$. For $j \in \{1, \cdots, n\}$, we set

$$f_j(x) := f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2x_{1j}, 2x_{1j+1}, \cdots, 2x_{1n}) \tag{3.8}$$

for all $x \in V^n$. It follows from (3.7) that

$$\begin{aligned}\|f(2x) - 2^n f(x)\| &= \|f(2x) \pm 2f_1(x) \pm 2^2 f_2(x) \pm \cdots \pm 2^{n-1}f_{n-1}(x) - 2^n f(x)\|\\ &\leq \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}\|f_j(2x) - 2f_j(x)\| \leq \frac{1}{s^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^{n-j}}\phi_j(x),\end{aligned} \tag{3.9}$$

where $\phi_j(x)$ is defined in (3.4). The relation (3.9) implies that

$$\|f(2x) - 2^n f(x)\| \leq \Phi(x) \tag{3.10}$$

for all $x \in V^n$, where $\Phi(x)$ is defined in (3.3). Define $\xi(x) := \frac{1}{2^{n\frac{\beta+1}{2}}}\Phi\left(2^{\frac{\beta-1}{2}}x\right)$ and $\mathcal{T}\xi(x) := \frac{1}{2^{n\beta}}\xi(2^\beta x)$ for all $x \in V^n$. Then inequality (3.10) can be modified as follows:

$$\|f(x) - \mathcal{T}f(x)\| \leq \xi(x) \tag{3.11}$$

for all $x \in V^n$. Define $\Lambda\eta(x) := \frac{1}{2^{n\beta}}\eta(2^\beta x)$ for all $\eta \in \mathbb{R}_+^{V^n}$ and $x \in V^n$. We now see that Λ has the form described in (A3) with $\mathcal{S} = V^n$, $g_1(x) = 2^\beta x$ and $L_1(x) = \frac{1}{2^{n\beta}}$ for all $x \in V^n$. Moreover, for each $\lambda, \mu \in W^{V^n}$ and $x \in V^n$,

$$\|\mathcal{T}\lambda(x) - \mathcal{T}\mu(x)\| = \left\|\frac{1}{2^{n\beta}}\left[\lambda(2^\beta x) - \mu(2^\beta x)\right]\right\| \leq L_1(x)\left\|\lambda(g_1(x)) - \mu(g_1(x))\right\|.$$

The above equalities show that the hypothesis (A2) holds. By induction on l, one can check that for any $l \in \mathbb{N}_0$ and $x \in V^n$, we have

$$\Lambda^l\xi(x) := \left(\frac{1}{2^{n\beta}}\right)^l \xi(2^{\beta l}x) = \frac{1}{2^{n\frac{\beta+1}{2}}}\left(\frac{1}{2^{n\beta}}\right)^l \Phi\left(2^{\beta l + \frac{\beta-1}{2}}x\right) \tag{3.12}$$

for all $x \in V^n$. The relations (3.2) and (3.12) necessitate that all the assumptions of Theorem 3.1 are satisfied. Hence, there exists a mapping $\mathcal{A} : V^n \longrightarrow W$ such that

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{l\to\infty}(\mathcal{T}^l f)(x) = \frac{1}{2^{n\beta}}\mathcal{A}(2^\beta x) \qquad (x \in V^n),$$

and (3.6) holds. Now we proceed to show that

$$\|\Gamma_s(\mathcal{T}^l f)(x_1, x_2)\| \leq \left(\frac{1}{2^{n\beta}}\right)^l \phi(2^{\beta l}x_1, 2^{\beta l}x_2) \tag{3.13}$$

for all $x_1, x_2 \in V^n$ and $l \in \mathbb{N}_0$. We argue by induction on l. The inequality (3.13) is valid for $l = 0$ by (3.5). Assume that (3.13) is true for $l \in \mathbb{N}_0$. Then, we can write

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_s(\mathcal{T}^{l+1}f)(x_1, x_2)\| \\
&= \left\|\sum_{t\in\{-s,s\}^n}(\mathcal{T}^{l+1}f)(x_1 + tx_2) - \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} 2^p(-2s^2)^q(s^2)^{n-p-q}(\mathcal{T}^{l+1}f)\left(\mathcal{M}^n_{(p,q)}\right)\right\| \\
&= \frac{1}{2^{n\beta}}\left\|\sum_{t\in\{-s,s\}^n}(\mathcal{T}^l f)(2^\beta(x_1 + tx_2)) - \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} 2^p(-2s^2)^q(s^2)^{n-p-q}(\mathcal{T}^l f)\left(2^\beta\mathcal{M}^n_{(p,q)}\right)\right\| \\
&= \frac{1}{2^{n\beta}}\left\|\Gamma_s(\mathcal{T}^l f)(2^\beta x_1, 2^\beta x_2)\right\| \leq \left(\frac{1}{2^{n\beta}}\right)^{l+1} \phi(2^{\beta(l+1)}x_1, 2^{\beta(l+1)}x_2)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

for all $x_1, x_2 \in V^n$. Letting $l \to \infty$ in (3.13) and applying (3.1), we arrive at $\Gamma_s\mathcal{A}(x_1, x_2) = 0$ for all $x_1, x_2 \in V^n$. This means that the mapping f satisfies (2.2). Now, the part (i) of Corollary 2.4 implies that $\mathcal{A}$ is a multi-additive mapping.

Finally, assume that $\mathcal{A}' : V^n \longrightarrow W$ is another multi-additive mapping satisfying equation (2.2) and inequality (3.6). Then for fixed $x \in V^n$ and $j \in \mathbb{N}$ we can write

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}'(x)\| \\
&= \left\| \frac{1}{2^{n\beta j}}\mathcal{A}(2^{\beta j}x) - \frac{1}{2^{n\beta j}}\mathcal{A}'(2^{\beta j}x) \right\| \\
&\le \frac{1}{2^{n\beta j}}(\|\mathcal{A}(2^{\beta j}x) - f(2^{\beta j}x)\| + \|\mathcal{A}'(2^{\beta j}x) - f(2^{\beta j}x)\|) \\
&\le 2\frac{1}{2^{n\beta j}}\widetilde{\Phi}(2^{\beta j}x) \le 2\frac{1}{2^{n\frac{\beta+1}{2}}}\sum_{l=j}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n\beta}}\right)^l \Phi\left(2^{\beta l + \frac{\beta-1}{2}}x\right).
\end{aligned}$$

Consequently, letting $j \to \infty$ and using the fact that series in (3.2) is convergent for all $x \in V^n$, we obtain $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}'(x)$ for all $x \in V^n$. This completes the proof. Theorem 3.2 is proved. □

The following corollary, stating the stability of (2.2) for the case $\beta = 1$, is a direct consequence of Theorem 3.2, and so, we state it without proof.

Corollary 3.3. *Let $\delta > 0$. Suppose that V is a linear space over the rationals, W is a Banach space and $f : V^n \longrightarrow W$ is a mapping satisfying the inequality:*

$$\|\Gamma_s f(x_1, x_2)\| \le \delta$$

for all $x_1, x_2 \in V^n$. If f is odd in each variable, then there exists a unique multi-additive mapping $\mathcal{A} : V^n \longrightarrow W$ such that for all $x \in V^n$,

$$\|f(x) - \mathcal{A}(x)\| \le \frac{\delta}{2^{n-1}s^2}.$$

The next result is an analog of Theorem 3.2 for functional equation (2.2) in the even case.

Theorem 3.4. *Let $\beta \in \{-1, 1\}$, V be a linear space over the rationals and W be a Banach space. Suppose that $\phi : V^n \times V^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ is a function satisfying the equality:*

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2n\beta}}\right)^l \phi(2^{\beta l}x_1, 2^{\beta l}x_2) = 0 \tag{3.15}$$

for all $x_1, x_2 \in V^n$, and

$$\widetilde{\Psi}(x) = \frac{1}{2^{n(\beta+1)}}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n\beta}}\right)^l \Psi\left(2^{\beta l + \frac{\beta-1}{2}}x\right) < \infty \tag{3.16}$$

for all $x = x_1 \in V^n$, where

$$\Psi(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{n} 4^{j-1}\psi_j(x) \tag{3.17}$$

for all $x \in V^n$, in which

$$\psi_j(x) = \phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, 2x_{1j+1}, \cdots, 2x_{1n}), (0, \cdots, 0, s^{-1}x_{1j}, 0, \cdots, 0)) + \phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 0, 2x_{1j+1}, \cdots, 2x_{1n}), (0, \cdots, 0, s^{-1}x_{1j}, 0, \cdots, 0)). \tag{3.18}$$

Also, assume that $f : V^n \longrightarrow W$ is a mapping satisfying the inequality:

$$\|\Gamma_s f(x_1, x_2)\|_Y \leqslant \phi(x_1, x_2) \tag{3.19}$$

for all $x_1, x_2 \in V^n$. If f is even in each variable, then there exists a unique multi-quadratic mapping $\mathcal{Q} : V^n \longrightarrow W$ such that for all $x \in V^n$,

$$\|f(x) - \mathcal{Q}(x)\| \leq \widetilde{\Psi}(x). \tag{3.20}$$

Proof. Putting $x_{2k} = 0$ for $k \in \{1, \cdots, n\}$ with $k \neq j$ in (3.19), we obtain

$$\begin{aligned}\| &\sum_{t\in\{-s,s\}} f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j} + tx_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) - 2f(x_1) \\ &- s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) + 2s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{2j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}), (0, \cdots, 0, x_{2j}, 0, \cdots, 0))\end{aligned} \tag{3.21}$$

for all $x = x_1 \in V^n$. Replacing (x_{1j}, x_{2j}) by $(0, x_{1j})$ in (3.21) and using the evenness of f in each variable, we find that

$$\begin{aligned}&\|2f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, sx_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) \\ &- s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) + 2s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 0, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}), (0, \cdots, 0, x_{1j}, 0, \cdots, 0))\end{aligned} \tag{3.22}$$

for all $x \in V^n$. Replacing (x_{1j}, x_{2j}) by (sx_{1j}, x_{1j}) in (3.21), we get

$$\begin{aligned}&\|f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2sx_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) - 2f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, sx_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) \\ &- s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) + 2s^2 f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, sx_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}), (0, \cdots, 0, x_{1j}, 0, \cdots, 0))\end{aligned} \tag{3.23}$$

for all $x \in V^n$. Plugging (3.22) into (3.23), we obtain

$$\begin{aligned}&\|f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2sx_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) - 4f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, sx_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} (\phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, sx_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}), (0, \cdots, 0, x_{1j}, 0, \cdots, 0)) \\ &+ \phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 0, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}), (0, \cdots, 0, x_{1j}, 0, \cdots, 0)))\end{aligned} \tag{3.24}$$

for all $x \in V^n$. Relation (3.24) implies that

$$\begin{aligned}
&\|f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 2x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}) - 4f(x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n})\\
&\leq \frac{1}{2^{n-1}}[\phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, x_{1j}, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}), (0, \cdots, 0, s^{-1}x_{1j}, 0, \cdots, 0))\\
&+ \phi((x_{11}, \cdots, x_{1j-1}, 0, x_{1j+1}, \cdots, x_{1n}), (0, \cdots, 0, s^{-1}x_{1j}, 0, \cdots, 0))]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

for all $x \in V^n$. Similar to (3.9), one can obtain

$$\|f(2x) - 4^n f(x)\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} 4^{j-1}\psi_j(x), \tag{3.26}$$

where $\psi_j(x)$ is defined in (3.18). We rewrite relation (3.26) as follows:

$$\|f(2x) - 4^n f(x)\| \leq \Psi(x) \tag{3.27}$$

for all $x \in V^n$, where $\Psi(x)$ is defined in (3.17). Fix $x \in V^n$ and define $\xi(x) := \frac{1}{2^{n(\beta+1)}}\Psi\left(2^{\frac{\beta-1}{2}}x\right)$, $\mathcal{T}\xi(x) := \frac{1}{2^{2n\beta}}\xi(2^\beta x)$. Inequality (3.27) can be modified as follows:

$$\|f(x) - \mathcal{T}\xi(x)\| \leq \xi(x) \tag{3.28}$$

for all $x \in V^n$. Define $\Lambda\eta(x) := \frac{1}{2^{2n\beta}}\eta(2^\beta x)$ for all $\eta \in \mathbb{R}_+^{V^n}, x \in V^n$. Hence, the hypothesis (A3) holds for Λ, where $\mathcal{S} = V^n$, $g_1(x) = 2^\beta x$ and $L_1(x) = \frac{1}{2^{2n\beta}}$ for all $x \in V^n$. In addition, for each $\lambda, \mu \in W^{V^n}$ and $x \in V^n$, we have

$$\|\mathcal{T}\lambda(x) - \mathcal{T}\mu(x)\| = \left\|\frac{1}{2^{2n\beta}}\left[\lambda(2^\beta x) - \mu(2^\beta x)\right]\right\| \leq L_1(x)\left\|\lambda(g_1(x)) - \mu(g_1(x))\right\|.$$

Now, the hypothesis (A2) is satisfied by the last relation. By induction on l, we can conclude that for any $l \in \mathbb{N}_0$ and for all $x \in V^n$,

$$\Lambda^l\xi(x) := \left(\frac{1}{2^{2n\beta}}\right)^l \xi(2^{\beta l}x) = \frac{1}{2^{n(\beta+1)}}\left(\frac{1}{2^{2n\beta}}\right)^l \Psi\left(2^{\beta l + \frac{(\beta-1)}{2}}x\right). \tag{3.29}$$

It follows from (3.16) and (3.29) that all the assumptions of Theorem 3.1 are satisfied. Hence, there exists a mapping $\mathcal{Q} : V^n \longrightarrow W$ such that

$$\mathcal{Q}(x) = \lim_{l\to\infty}(\mathcal{T}^l f)(x) = \frac{1}{2^{2n\beta}}\mathcal{Q}(2^\beta x) \qquad (x \in V^n).$$

In particular, (3.20) holds. Similar to the proof of Theorem 3.2, we can prove that $\Gamma_s\mathcal{Q}(x_1, x_2) = 0$, and hence $\mathcal{Q}$ satisfies (2.2). Thus, the part (ii) of Corollary 2.4 implies that $\mathcal{Q}$ is a multi-quadratic mapping which is also unique. Theorem 3.4 is proved. □

Corollary 3.5. *Let $\delta > 0$. Suppose that V is a linear space over the rationals, W is a Banach space and $f : V^n \longrightarrow W$ is a mapping satisfying the inequality:*

$$\|\Gamma_s f(x_1, x_2)\| \leq \delta$$

for all $x_1, x_2 \in V^n$. If f is even in each variable, then there exists a unique multi-quadratic mapping $\mathcal{Q} : V^n \longrightarrow W$ such that for all $x \in V^n$,

$$\|f(x) - \mathcal{Q}(x)\| \leq \frac{\delta}{3 \times 2^{n-1}}.$$

The next result shows that under some mild conditions a multi-mixed additive-quadratic mapping can be stable.

Corollary 3.6. *Let $\delta > 0$, V be a linear space over the rationals and W be a Banach space. Suppose that $f : V^n \longrightarrow W$ is a decomposable mapping as $f = f_o + f_e$ such that f_o is odd in each variable and f_e is even in each variable. If the inequalities*

$$\|\Gamma_s f_o(x_1, x_2)\| \leq \delta \text{ and } \|\Gamma_s f_e(x_1, x_2)\| \leq \delta$$

hold for all $x_1, x_2 \in V^n$, then there exist a unique multi-additive mapping $\mathcal{A} : V^n \longrightarrow W$ and a unique multi-quadratic mapping $\mathcal{Q} : V^n \longrightarrow W$ such that for all $x \in V^n$,

$$\|f(x) - \mathcal{A}(x) - \mathcal{Q}(x)\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{3}\right] \delta.$$

Proof. It follows from Corollaries 3.3 and 3.5 that there exists a unique multi-additive mapping $\mathcal{A} : V^n \longrightarrow W$ and a unique multi-quadratic mapping $\mathcal{Q} : V^n \longrightarrow W$ such that

$$\|f_o(x) - \mathcal{A}(x)\| \leq \frac{\delta}{2^{n-1} s^2} \tag{3.30}$$

and

$$\|f_e(x) - \mathcal{Q}(x)\| \leq \frac{\delta}{3 \times 2^{n-1}} \tag{3.31}$$

for all $x \in V^n$. The result now follows from inequalities (3.30) and (3.31). □

Let A be a nonempty set, (X, d) be a metric space, $\psi \in \mathbb{R}_+^{A^n}$, and $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ be operators mapping a nonempty set $D \subset X^A$ into X^{A^n}. We say that the operator equation:

$$\mathcal{F}_1 \varphi(a_1, \cdots, a_n) = \mathcal{F}_2 \varphi(a_1, \cdots, a_n) \tag{3.32}$$

is ψ-hyperstable if every $\varphi_0 \in D$ satisfying the inequality:

$$d(\mathcal{F}_1 \varphi_0(a_1, \cdots, a_n), \mathcal{F}_2 \varphi_0(a_1, \cdots, a_n)) \leq \psi(a_1, \cdots, a_n), \qquad a_1, \cdots, a_n \in A,$$

satisfies equation (3.32) (see [16]). In other words, a functional equation $\mathcal{F}$ is *hyperstable* if any mapping f satisfying the equation $\mathcal{F}$ approximately is a true solution of $\mathcal{F}$.

The next result shows that under some conditions functional equation (2.2) can be hyperstable.

Corollary 3.7. *Suppose that $\alpha_{ij} > 0$ for $i \in \{1,2\}$ and $j \in \{1, \cdots, n\}$ satisfies the condition $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \neq n, 2n$. Let V be a normed space and W be a Banach space. Then a mapping $f : V^n \longrightarrow W$ satisfying the hypotheses of Corollary 3.6 and the following inequalities:*

$$\|\Gamma_s f_o(x_1, x_2)\| \leq \prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{n} \|x_{ij}\|^{\alpha_{ij}} \ \ and \ \ \|\Gamma_s f_e(x_1, x_2)\| \leq \prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{n} \|x_{ij}\|^{\alpha_{ij}}$$

for all $x_1, x_2 \in V^n$, satisfies equation (2.2).

Список литературы

[1] T. Aoki, “On the stability of the linear transformation in Banach spaces”, J. Math. Soc. Japan., **2**, 64 – 66 (1950).

[2] A. Bahyrycz, “On stability and hyperstability of an equation characterizing multi-additive mappings”, Fixed Point Theory, **18**, no. 2, 445 – 456 (2017).

[3] A. Bahyrycz, K. Cieplinski and J. Olko, “On an equation characterizing multi Cauchy-Jensen mappings and its Hyers-Ulam stability”, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., **35**, 1349 – 1358 (2015).

[4] A. Bahyrycz, K. Ciepliński and J. Olko, “On an equation characterizing multi-additive-quadratic mappings and its Hyers-Ulam stability”, Appl. Math. Comput., **265**, 448 – 455 (2015).

[5] A. Bodaghi, “Approximate mixed type additive and quartic functional equation”, Bol. Soc. Paran. Mat., **35**, no. 1, 43 – 56 (2017).

[6] A. Bodaghi, “Intuitionistic fuzzy stability of the generalized forms of cubic and quartic functional equations”, J. Intel. Fuzzy Syst., **30**, 2309 – 2317 (2016).

[7] A. Bodaghi, “Stability of a mixed type additive and quartic function equation”, Filomat, **28**, no. 8, 1629 – 1640 (2014).

[8] A. Bodaghi, “Stability of a quartic functional equation”, The Scientific World Journal, **2014**, Art. ID 752146, 9 pages, doi:10.1155/2014/752146.

[9] A. Bodaghi and S. O. Kim, “Ulam’s type stability of a functional equation deriving from quadratic and additive functions”, J. Math. Ineq., **9**, no. 1, 73 – 84 (2015).

[10] A. Bodaghi and S. O. Kim, “Stability of a functional equation deriving from quadratic and additive functions in non-Archimedean normed spaces”, Abstr. Appl. Anal., **2013**, Art. ID 198018 (2013).

[11] A. Bodaghi, C. Park and O. T. Mewomo, “Multiquartic functional equations”, Adv. Diff. Equa., **2019**, 2019:312, https://doi.org/10.1186/s13662-019-2255-5

[12] A. Bodaghi and B. Shojaee, “On an equation characterizing multi-cubic mappings and its stability and hyperstability”, Fixed Point Theory, to appear, arXiv:1907.09378v2

[13] N. Brillouët-Belluot, J. Brzdek and K. Ciepliński, “On some recent developments in Ulam’s type stability”, Abstr. Appl. Anal., Art. ID 716936, 41 pp. (2012).

[14] J. Brzdęk, “Hyperstability of the Cauchy equation on restricted domains”, Acta Math. Hungar., **141**, 58 – 67 (2013).

[15] J. Brzdęk, “Stability of the equation of the p-Wright affine functions”, Aequat. Math., **85**, 497 – 503 (2013).

[16] J. Brzdęk and K. Ciepliński, “Hyperstability and Superstability”, Abstr. Appl. Anal., Article ID 401756, 13 pp. (2013).

[17] J. Brzdęk and K. Ciepliński, “Remarks on the Hyers-Ulam stability of some systems of functional equations”, Appl. Math. Comput., **219**, 4096 – 4105 (2012).

[18] J. Brzdęk and J. Chudziak and Zs. Palés, “A fixed point approach to the stability of functional equations in non-Archimedean metric spaces”, Nonlinear Anal., **74**, 6728 – 6732 (2011).

[19] L. Cădariu, V. Radu, “The alternative of fixed point and stability results for functional equations”, Int. J. Appl. Math. Stat., **7**, 40 – 58 (2007).

[20] K. Ciepliński, “Applications of fixed point theorems to the Hyers-Ulam stability of functional equations-A survey”, Ann. Funct. Anal., **3**, 151 – 164 (2012).

[21] K. Ciepliński, “On the generalized Hyers-Ulam stability of multi-quadratic mappings”, Comput. Math. Appl., **62**, 3418 – 3426 (2011).
[22] K. Ciepliński, “Generalized stability of multi-additive mappings”, Appl. Math. Lett., **23**, 1291 – 1294 (2010).
[23] S. Falihi, B. Shojaee, A. Bodaghi and A. Zivari-Kazempour, “Approximation on the mixed type additive-quadratic-sextic functional equation”, U.P.B. Sci. Bull., Series A, **81**, Iss. 3, 13 – 22 (2019).
[24] Z. Gajda, “On stability of additive mappings”, Int. J. Math. Math. Sci., **14**, no. 3, 431 – 434 (1991).
[25] D. H. Hyers, “On the stability of the linear functional equation”, Proc. Natl. Acad. Sci., **27**, 222 – 224 (1941).
[26] P. Kannappan, Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer, New York (2009).
[27] H. Koh and D. Kang, “On the stability of a generalized cubic functional equation”, Bull. Korean Math. Soc., **45**, no. 4, 739 – 748 (2008).
[28] M. Kuczma, An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy’s Equation and Jensen’s Inequality, Birkhauser Verlag, Basel (2009).
[29] M. Maghsoudi, A. Bodaghi, A. Niazi Motlagh and M. Karami, “Almost additive-quadratic-cubic mappings in modular spaces”, Revista De La Union Mat. Arg., **60**, no. 2, 359 – 379 (2019).
[30] A. Najati and M. B. Moghimi, “Stability of a functional equation deriving from quadratic and additive functions in quasi-Banach spaces”, J. Math. Anal. Appl., **337**, 399 – 415 (2008).
[31] P. Narasimman and A. Bodaghi, “Solution and stability of a mixed type functional equation”, Filomat, **31**, no. 5, 1229 – 1239 (2017).
[32] W.-G. Park, J.-H. Bae and B.-H. Chung, “On an additive-quadratic functional equation and its stability”, J. Appl. Math. Comput., **18**, 563 – 572 (2005).
[33] J. M. Rassias, “Solution of the Ulam stability problem for quartic mappings”, Glasnik Matematicki Series III, **34**, no. 2, 243 – 252 (1999).
[34] Th. M. Rassias, “On the stability of the linear mapping in Banach spaces”, Proc. Amer. Math. Soc., **72**, no. 2, 297 – 300 (1978).
[35] F. Skof, “Proprietes locali e approssimazione di operatori”, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **53**, 113 – 129 (1983).
[36] P. K. Sahoo and P. Kannappan, Introduction to Functional Equations, CRC Press, Boca Raton, FL (2011).
[37] S. M. Ulam, Problems in Modern Mathematic, Science Editions, John Wiley & Sons, Inc., New York (1964).
[38] T. Z. Xu, J. M. Rassias, and W. X. Xu, “A generalized mixed quadratic-quartic functional equation”, Bull. Malay. Math. Sci. Soc., **35**, no. 3, 633 – 649 (2012).
[39] G. Zamani Eskandani, H. Vaezi and Y. N. Dehghan, “Stability of a mixed additive and quadratic functional equation in non-Archimedean Banach modules”, Taiwanese J. Math., **14**, no. 4, 1309 – 1324 (2010).
[40] X. Zhao, X. Yang and C.-T. Pang, “Solution and stability of the multiquadratic functional equation”, Abstr. Appl. Anal., Art. ID 415053, 8 pp. (2013).

Поступила 30 марта 2019

После доработки 19 сентября 2019

Принята к публикации 11 октября 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 4, 2020, стр. 47 – 64

О БЕСКОНЕЧНОМ ВОЗРАСТАНИИ ОДНОГО КЛАССА МНОГОЧЛЕНОВ

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Российско - Армянский Университет[1]
Институт математики Национальная Академия Наук Армении
E-mails: *haikghazaryan@mail.ru; vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. Обозначим через $\mathbb{I}_n$ (соответственно $\tilde{\mathbb{I}}_n$) множество многочленов n переменных $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ с вещественными коэффициентами таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$ (соответственно $\tilde{P}(\xi) := \sum_\nu |D^\nu P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. В терминах степени m, геометрической структуры многогранника Ньютона $\Re(P)$ многочлена P и кратностей нулей его главного однородного подмногочлена P_m получаются (в некоторых случаях совпадающие) необходимые и достаточные условия для $P \in \mathbb{I}_n$ (соответственно $P \in \tilde{\mathbb{I}}_n$). Для обобщенно однородных многочленов R трех переменных найдены геометрически наглядные достаточные условия при которых $R \in \tilde{\mathbb{I}}_3$.

MSC2010 number: 12E10; 26C05.

Ключевые слова: функция Л. Хермандера, почти гипоэллиптический многочлен, Многогранник Ньютона.

1. Постановка задачи,описание множества $\tilde{\mathbb{I}}_n$ в терминах кратностей нулей подмногочленов

Пусть $\mathbb{R}^n$ – $n-$мерное евклидово пространство точек (векторов) $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $\mathbb{R}^{n,+} := \{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi_j \geq 0, (j = 1, ..., n)\}$, $\mathbb{R}^{n,0} := \{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi_1 \cdots \xi_n \neq 0\}$.

Через $\mathbb{N}_0^n$ обозначим множество $n-$мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^{n,+} \cap \mathbb{R}^{n,0}$ и $t > 0$ обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\xi, \lambda| = \sqrt{|\xi_1|^{2/\lambda_1} + ... + |\xi_n|^{2/\lambda_n}}$, $t^\lambda \xi = (t^{\lambda_1} \xi_1, ..., t^{\lambda_n} \xi_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial / \partial \xi_j$ $(j = 1, ..., n)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержки ГКНМОИ РА, проект N8SCS 157 - 1A197 и тематического фонда Российско - Армянского университета министерства образования и науки Российской федерации.

Пусть $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ линейный дифференциальнй оператор с постоянными коэффициентами, $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ отвечающий ему символ (характеристический многочлен), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \gamma_\alpha \neq 0\}$, а $\tilde{P}(\xi) := \sum\limits_\nu |D^\nu P(\xi)|$ функция Л. Хёрмандера этого оператора (многочлена) (см.[4], пример 10.1.2) .

Определение 1.1. *(см. [9] – [10]) Пусть* $\mathcal{A} = \{\alpha^1, ..., \alpha^M : \ \alpha^j \in \mathbb{R}^{n,+} \ (j = 1, 2, ..., M)\}$. *Минимальный выпуклий многогранник* $\Re(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^{n,+}$, *содержащий набор* $\mathcal{A}$, *назовем* ***многогранником Ньютона*** *(м.н.) набора* $\mathcal{A}$. *Многогранник Ньютона набора* $(P) \cup \{0\}$ *назовем многогранником Ньютона многочлена* $P(\xi)$, *(оператора* $P(D)$*)* .

Многогранник $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ назовем **правильным** если a) $\Re$ имеет вершину в начале координат и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат (множество которых обозначим через $\Re^0$), b) координаты всех внешных (относительно $\Re$) нормалей $(n-1)-$ мерных некоординатных граней (множество которых обозначим через $\Lambda(\Re)$) неотрицательны.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^{n,+} \cap \mathbb{R}^{n,\,0}$. Многочлен R назовем обобщенно - однородным ($\lambda-$однородным) $\lambda-$порядка d, если $R(t^\lambda \xi) = t^d R(\xi)$ для любых $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что при $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1$ это обычный однородный многочлен.

Отметим, что подмногочлены многочлена от n переменных на самом деле могут зависеть от k переменных, где $k < n$. Поэтому мы введем следующее обозначение: через $Pol(n, k)$, $(k \le n)$ обозначим множество многочленов $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ таких, что (быть может после соответствующей перенумерации) существуют точки ξ^j такие, что $D_j P(\xi^j) \neq 0$ $(j = 1, ..., k)$, а $D_j P(\xi) \equiv 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}_n$ при $j = k+1, ..., n$.

Для $\lambda-$однородного многочлена R обозначим $\Sigma(R) = \Sigma(R, \lambda) := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ |\xi, \lambda| = 1, \ R(\xi) = 0\}$. Пусть $\eta \in \Sigma(R)$, через $l_{R,\,\lambda}(\eta)$ обозначим $\lambda-$кратность нуля η, т.е. число, удовлетворяющее условию

$$\sum_{(\lambda,\,\alpha) < \, l_{\,R,\,\lambda}(\eta)} |D^\alpha R(\eta)| = 0, \qquad \sum_{(\lambda,\,\alpha) = l_{\,R,\,\lambda}(\eta)} |D^\alpha R(\eta)| \neq 0.$$

Далее через $\mathbb{I}_n$ (соответственно $\tilde{\mathbb{I}}_n$) обозначим множество многочленов P таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ (соответственно $\tilde{P}(\xi) \to \infty$) при $|\xi| \to \infty$. Очевидно, что из $P \in \mathbb{I}_n$ следует, что $P \in \tilde{\mathbb{I}}_n$. Обратное не верно, что следует из следующего простого примера: $P(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \notin \mathbb{I}_2$, однако $P \in \tilde{\mathbb{I}}_2$.

Определение 1.2. *(см. [4] и [13]) Оператор* $P(D)$ *(многочлен* $P(\xi)$*) называется гипоэллиптическим (соответственно почти гипоэллиптическим), если для любого мультииндекса* $0 \neq \nu \in \mathbb{N}_0^n$ $|D^\nu P(\xi)|/[1+|P(\xi)| \to 0$ *при* $|\xi| \to \infty$ *(соответственно* $|D^\nu P(\xi)|/[1+|P(\xi)|) \leq C \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ *с некоторой постоянной* $C > 0$*).*

Во многих вопросах общих линейных дифференциальных уравнений решающую роль играет поведение на бесконечности характеристического многочлена (полного символа) соответствующего дифференциального оператора и поведение на бесконечности функции Л. Хермандера. Например, символ гипоэллиптического оператора бесконечно возрастает на бесконечности (принадлежит $\mathbb{I}_n$), поэтому, чтобы проверить гипоэллиптичность данного оператора $P(D)$, в первую очередь необходимо убедится, что $P \in \mathbb{I}_n$. Другой пример это весовые пространства $B_{p,k}$ Л. Хёрмандера, где весовая функция $k \in \mathbb{I}_n$. При исследовании свойств гладкости решений дифференциального уравнения $P(D)u = 0$ роль веса играет функция Л. Хермандера $\tilde{P}$.

Эти и другие примеры стали толчком для исследования поведения многочленов многих переменных и их функций Л. Хёрмандера при стремлении модуля аргумента к бесконечности. Этим вопросам посвящены многие работы, отметим лишь работы [1] - [12], непосредственно примыкающие к настоящей заметке.

В частности в работах [1] [2] (см. также [4], Добавление А) доказано (теорема Зайденберга - Тарского), что для многочлена $P : P(\xi) > 0 \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ существуют числа $\sigma > 0$ и $T \in \mathbb{R}^1$ такие, что $P(\xi) \geq \sigma\,(1 + |\xi|)^T \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. При этом, если $P \in \mathbb{I}_n$, то $T > 0$.

В работах [3] , [5] и [12] изучены поведения гладких функций и, в частности многочленов, в окрестностьях критических точках и в бесконечности. В работах [9] и [10] в разных терминах получены достаточные условия гипоэллиптичности и условия для $P \in \mathbb{I}_n$. В работах [6] - [8] и [11] и других получены достаточные условия гипоэллиптичности оператора и, тем самым условия принадлежности многочлена к множеству $\mathbb{I}_n$. В этих работах многочлен P является в определенном смысле невырожденным, т.е. мало отличается от эллиптического. В работах [14]-[16], при помощи сравнения кратностей нулей подходящих подмногочленов и их порядков однородности, получены достаточные условия гипоэллиптичности для некоторых классов вырожденных операторов, и, тем самым условия принадлежности многочлена к множеству $\mathbb{I}_n$.

Мы поставили перед собой целью нахождения условий для $P \in \tilde{\mathbb{I}}_n$, не прибегая к известным критериям для $\tilde{P}^2 \in \mathbb{I}_n$. С условем, конечно, чтобы, в сравнении с имеющимися условиями, эти условия были легко проверяемыми и более прозрачными. При этом основное ударение мы будем делать на получение наглядных геометрических условий.

Работа состоит из двух пунктов. В первом пункте а) приводятся необходимые понятия, б) в терминах сравнения степени и кратностей нулей обобщенно - однородного многочлена R получено необходимое и достаточное условие для $R \in \tilde{\mathbb{I}}_n$ (теорема 1.1), в) в терминах сравнения степени и кратностей нулей главного обобщенно - однородного подмногочлеана многочлена P получено достаточное условие для $P \in \tilde{\mathbb{I}}_n$ (теорема 1.2), г) в терминах геометрических свойств многогранника Ньютона найдены условия при которых для обобщенно - однородного многочлена R выполняются достаточное условие Теоремы 1.1 (лемма 1.1), следовательно $R \in \tilde{\mathbb{I}}_n$ и условия при которых почти гипоэллиптический многочлен P удовлетворяет условию Теоремы 1.2 (лемма 1.2), следовательно $P \in \tilde{\mathbb{I}}_n$. Второй пункт посвящён многочлеанам трёх переменных. Здесь найдены геометрически наглядные достаточные условия при которых обобщенно-однородный многочлен удовлетворяет условию Теоремы 1.1 (леммы 2.1-2.3) и, в терминах некоторого представления общего многочлена P, одно необходимое и достаточное условие для $P \notin \tilde{\mathbb{I}}_3$ (лемма 2.5).

Следующее предложение даёт критерий принадлежности обобщенно-однородного ($\lambda-$однородного) многочлена к множеству $\tilde{\mathbb{I}}_n$ в терминах порядка и кратностей нулей этого многочлена.

Теорема 1.1. *Пусть R $\lambda-$однородный многочлен $\lambda-$порядка $d(\lambda)$. Тогда $R \in \tilde{\mathbb{I}}_n$ в том и только в том случае, когда*

$$l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda) \;\; \forall \eta \in \Sigma(R, \lambda). \tag{1.1}$$

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $R \in \tilde{\mathbb{I}}_n$, докажем справедливость (1.1). Так как $\sum_{(\lambda,\alpha)=d(\lambda)} |D^\alpha R(\xi)| = const := c_0$ и $\sum_{(\lambda,\alpha)<l_{R,\lambda}(\eta)} |D^\alpha R(\eta)| = 0$ для всех $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$, то, предполагая обратное, что $l_{R,\,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$ для некоторой точки $\eta^0 \in \Sigma(R, \lambda)$, получим

$$\tilde{R}(\xi^s) := \tilde{R}(s^\lambda \, \eta^0) = \sum_{(\lambda,\, \alpha)=d(\lambda)} |D^\alpha R(\xi^s)| +$$

$$(1.2) \qquad + \sum_{(\lambda,\,\alpha)<\,d(\lambda)=l_{R,\,\lambda}(\eta^0)} s^{(\lambda,\,\alpha)}|D^\alpha R(\eta^0)| = c_0,\ (s = 1, 2, ...).$$

Так как $\lambda \in \mathbb{R}^{n,+} \cap \mathbb{R}^{n,\,0}$ и $|\eta^0, \lambda| = 1$, то $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$, поэтому (1.2) противоречит условию $R \in \tilde{\mathbb{I}}_n$ и доказывает необходимость теоремы.

Достаточность. Пусть, наоборот, при выполнении условия (1.1) существуют последовательность $\{\xi^s\}:\ |\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и число $C > 0$ такие, что

$$(1.3) \qquad \tilde{R}(\xi^s) \le C \quad (s = 1, 2, ...).$$

Положим $\eta^s = \xi^s/|\,\xi^s, \lambda|^\lambda$ $(s = 1, 2, ...)$. Так как $|\,\eta^s, \lambda| = 1$ $(s = 1, 2, ...)$, то множество $\{\eta^s\}$ ограничено. За счет выбора подпоследовательности можно считать, что последовательность $\{\eta^s\}$ сходится (пусть к некоторой точке $\eta:\ |\eta, \lambda| = 1$). В силу $\lambda-$однородности многочленов $R^{(\alpha)}: \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ($\lambda-$ порядков $d(\lambda) - (\lambda, \alpha)$) из (1.3) имеем для достаточно больших s

$$C \ge \tilde{R}(\xi^s) = \sum_\alpha |\,\xi^s, \lambda|^{d(\lambda)-(\lambda,\alpha)}|R^{(\alpha)}(\eta^s)| = \sum_\alpha |\,\xi^s, \lambda|^{d(\lambda)-(\lambda,\alpha)}[|R^{(\alpha)}(\eta)| + o(1)].$$

Так как $|\xi^s, \lambda| \to \infty$ при $s \to \infty$, то отсюда следует, что $R^{(\alpha)}(\eta) = 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^n : (\lambda, \alpha) < d(\lambda)$, т.е. что $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$ и $l_{R,\lambda}(\eta) \ge d(\lambda)$. Это противоречит условию (1.1) и доказывает теорему. □

Очевидно, что для произвольного вектора $\lambda \in \mathbb{R}^{n,+} \cap \mathbb{R}^{n,\,0}$ любой многочлен $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ можно представить в виде суммы $\lambda-$однородных многочленов

$$(1.4) \qquad P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

где числа $d_0 > d_1 > ... > d_m \ge 0$ определяются однозначно.

Теорема 1.2. *Пусть по данному вектору $\lambda \in \mathbb{R}^{n,+} \cap \mathbb{R}^{n,\,0}$ многочлен P представлен в виде (1.4). Если $l_{P_0,\,\lambda}(\eta) < d_0$ для всех $\eta \in \Sigma(P_0,\,\lambda)$, то $P \in \tilde{\mathbb{I}}_n$.*

Доказательство. Пусть, наоборот, при условиях теоремы существуют последовательность $\{\xi^s\}$ и число $C > 0$ такие, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$(1.5) \qquad \tilde{P}(\xi^s) \le C \quad (s = 1, 2, ...).$$

Так как множество $\{\,\eta^s := \xi^s/|\xi^s, \lambda|^\lambda\}$ ограничено, то за счет выбора подпоследовательности можно считать, что последовательность $\{\eta^s\}$ сходится (пусть к некоторой точке $\eta:\ |\eta,\lambda|=1$). Тогда в силу (1.5) и $\lambda-$однородности многочленов $\{P_j\}$ ($\lambda-$порядков $\{d_j\}$) из (1.4) имеем для достаточно больших s

$$C \geq \tilde{P}(\xi^s) \geq |P(\xi^s)| \geq ||P_0(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{M} P_j(\xi^s)|$$

$$= |\xi^s,\lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| - |\sum_{j=1}^{M} |\xi^s,\lambda|^{d_j}\,P_j(\eta^s)|| = |\xi^s,\lambda|^{d_0}\,[|P_0(\eta)| + o(1)].$$

Так как $d_0>0$, то отсюда следует, что $\eta \in \Sigma(P_0,\lambda)$. Откуда, в силу условий $l_{P_0,\lambda}(\eta) < d_0$, $d_0 > d_1 > ... > d_M \geq 0$ и определения числа $l_{P_0,\lambda}(\eta)$, имеем при $s \to \infty$

$$\tilde{P}(\xi^s) \geq \sum_{(\lambda,\alpha)=l_{P_0,\lambda}(\eta)} |P^{(\alpha)}(\xi^s)| \geq \sum_{(\lambda,\alpha)=l_{P_0,\lambda}(\eta)} |\,|P_0^{(\alpha)}(\xi^s) - |\sum_{j=1}^{M} P_j^{(\alpha)}(\xi^s)|\,|$$

$$= \sum_{(\lambda,\alpha)=l_{P_0,\lambda}(\eta)} |\xi^s,\lambda|^{d_0-(\lambda,\alpha)}\,|P_0^{(\alpha)}(\eta^s)| - |\sum_{j=1}^{M} |\xi^s,\lambda|^{d_j-(\lambda,\alpha)}\,P_j^{(\alpha)}(\eta^s)|\,|$$

$$= |\xi^s,\lambda|^{d_0-l_{P_0,\lambda}(\eta)} \sum_{(\lambda,\alpha)=l_{P_0,\lambda}(\eta)} |P_0^{(\alpha)}(\eta)|\,[1+o(1)] \to \infty.$$

Это противоречит предположению (1.5) и доказывает теорему. □

Замечание 1.1. *Отметим, что а) имея в виду теорему 1.1, теорему 1.2 можно сформулировать так: если главная однородная часть P_0 многочлен P принадлежит $\mathbb{I}_n$, то $P \in \tilde{\mathbb{I}}_n$, б) это условие не является необходимым, как показывает следующий пример: многочлен $P_0(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^4$ не принадлежит множеству $\tilde{\mathbb{I}}_2$, в то время, как $P(\xi) = P_0(\xi) + \xi_1^2 + \xi_2^2 \in \tilde{\mathbb{I}}_2$.*

Теперь мы приведем несколько наглядных геометрических примеров, когда условие (1.1) для $\lambda-$однородного многочлена или условие $l_{P_0,\lambda}(\eta) < d_0$ для общего многочлена выполняются. Другие примеры (для многочленов трёх переменных) будут приведены во втором пункте.

Лемма 1.1. *Пусть $R \in Pol(n,n)$ $\lambda-$однородный многочлен $\lambda-$порядка $d(\lambda)$. Тогда $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ для любой точки $\eta \in \Sigma(R,\lambda)$ при выполнении одного из следующих условий*

a) $\Re^0(R) \cap \mathbb{R}^{n,0} \neq \emptyset$, b) $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $(i,j=1,...,n)$.

Доказательство. Пункт а). Пусть $\alpha^0 \in \Re^0 \cap \mathbb{R}^{n,0}$. Тогда существует вектор $\lambda^0 \in \mathbb{R}^{n,+} \cap \mathbb{R}^{n,0}$ такой, что $d_0 := (\lambda^0,\alpha^0) > max\{(\lambda^0,\alpha) : \alpha \in (R) \setminus \{\alpha^0\}\}$. Представим

$\lambda-$однородный многочлен R в виде суммы λ^0-однородных многочленов: $R(\xi) = \sum_{j=0}^{M} r_j(\xi)$, где r_j λ^0-однородный многочлен λ^0-порядка d_j $(j = 0, 1, ..., M)$, $d_0 > d_1 > ... > d_M > 0$, при этом $\alpha_j^0 \geq 1$ $(j = 1, ..., n)$ и $r_0(\xi) = \gamma_0 \xi^{\alpha^0}$ для некоторого $\gamma_0 \neq 0$. Тогда $l_{r_0, \lambda^0}(\tau) \leq d_0 - \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j^0 \alpha_j^0 < d_0$ для любого $\tau \in \Sigma(r_0, \lambda^0)$. Поэтому на основании теоремы 1.2 $R \in \tilde{\mathbb{I}}_n$, а по теореме 1.1 $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ для всех $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$, что доказывает пункт a)

Пункт b). Доказательство будем провести по индукции по n. При $n = 2$ эта лемма доказана в [15]. Пусть утверждение леммы справедливо при $n \leq k - 1$ $(k \geq 3)$, докажем его справедливость при $n = k$. Предположим обратное, что при $n = k$ существуют вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$, удовлетворяющий условию b) леммы, $\lambda-$однородный многочлен $R \in Pol(k, k)$ и точка $\eta^0 \in \Sigma(R, \lambda)$ для которых $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$. Из условия на λ следует, что (быть может после некоторой перенумерации) его координаты удовлетворяют условию

$$(1.6) \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k.$$

Положим $B_1 := \{\alpha \in (R), \alpha_1 = \max_{\beta=(\beta_1,...,\beta_n)\in(R)} \beta_1\}$, $B_{j+1} = \{\alpha \in (B_j), \alpha_j = \max_{\beta \in B_j} \beta_j\}$ $(j = 1, ..., k-1)$.

Из построения множеств B_j $(j = 1, ..., k)$ следует, что множество B_k состоит из единственной точки $\alpha^0 \in (R)$, при этом $\alpha_1^0 > 0$, а из (1.6) следует, что $\{\beta \in (R) : \beta \geq \alpha^0 - (1, 0, ..., 0)\} = \{\alpha^0\}$. Следовательно $D^{\alpha^0-(1,0,...,0)} R(\xi) = \alpha^0! \, \gamma_{\alpha^0} \, \xi_1$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Так как $\alpha^0 \in (R)$, то $\gamma_{\alpha^0} \neq 0$, поэтому с некоторой постоянной $c > 0$ отсюда имеем

$$(1.7) \qquad |\xi_1| \leq c\, \tilde{R}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Так как R $\lambda-$однородный многочлен для которого $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$, то на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta^0$ $(s = 1, 2, ...)$ $\tilde{R}(\xi^s) \equiv const := b_0$, а из (1.7) и условия $\lambda_1 > 0$ следует, что $|\eta_1^0| \, s^{\lambda_1} \leq c\, b_0$ $(s = 1, 2, ...)$, т.е. $\eta_1^0 = 0$.

Пусть ради определенности $\eta_1^0 = \eta_2^0 = ... = \eta_r^0 = 0$, $\eta_{r+1}^0 ... \eta_k^0 \neq 0$ $1 \leq r < k$. Положим $\xi' := (\xi_1, ..., \xi_r)$, $\xi'' := (\xi_{r+1}, ..., \xi_k)$, $\lambda' = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$ $\lambda'' = (\lambda_{r+1}, ..., \lambda_k)$ и представим многочлен R в виде $R(\xi) = R(\xi', \xi'') = \sum_{\alpha' \in \mathbb{N}_0^r} (\xi')^{\alpha'} \, q_{\alpha'}(\xi'')$, где $q_{\alpha'}$ $\lambda''-$однородный многочлен $\lambda''-$порядка $d(\lambda) - (\lambda', \alpha')$. При этом, так как $R \in Pol(k, k)$, то, очевидно, существует мультииндекс $\beta' \in \mathbb{N}_0^r :$ $(\beta', \lambda') < d(\lambda)$ такой, что $q_{\beta'} \neq const$.

В силу того, что $(\eta')^0 = 0$, $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$ и $(\beta', \lambda') < d(\lambda)$ имеем

$$(1.8) \qquad 0 = (D^{\beta'} R)(\eta^0) = \beta'! \, q_{\beta'}((\eta'')^0).$$

Очевидно, что любой ненулевой $\lambda-$однородный многочлен положительного порядка от одной переменной обращается в нуль только в начале координат. Поэтому, имея в виду то, что $(\eta^{''})^0 \in \mathbb{R}^{k-r,0}$, $d(\lambda)-(\beta^{'},\lambda^{'})>0$ и $q_{\beta'}$ $\lambda^{''}-$однородный многочлен $\lambda^{''}-$порядка $d(\lambda)-(\lambda^{'},\beta^{'})$, получим, что $k-r\geq 2$, при этом существуют индексы i_1 и i_2 : $r<i_1,i_2\leq k$ такие, что выражение $D_{i_1}q_{\beta'}(\xi'')\cdot D_{i_2}q_{\beta'}(\xi'')$ отлично от тождественного нулья.

Пусть $q_{\beta'} \in Pol(k-r,k_1)$, где $2\leq k_1\leq k-r<k$. Для определенности предположим, что $D_{r+1}\,q_{\beta'}...D_{r+k_1}\,q_{\beta'}\neq 0$ и $D_{r+j}\,q_{\beta'}(\xi)\equiv 0$ $(j=k_1+1,...,k-r)$. Положим $\xi^{''}=(\xi^{'''},\xi^{IV})$, где $\xi^{'''}=(\xi_{r+1,...,\xi_{r+k_1}})$, $\xi^{IV}=(\xi_{r+k_1+1},...,\xi_k)$. Так как для любого $\alpha^{'''}\in\mathbb{N}_0^{k_1}$ $(\lambda^{'''},\alpha^{'''})<d(\lambda)-(\lambda^{'},\beta^{'})$ и $(\lambda,(\beta^{'},\alpha^{'''},0^{IV}))<d(\lambda)$, то в силу предположения $l_{R,\lambda}(\eta)=d(\lambda)$ имеем $0=\frac{1}{\beta'!}(D^{\beta^{'}}D^{\alpha^{'''}})R(\eta^0)=(D^{\alpha^{'''}}q_{\beta'})((\eta^{'''})^0)$, т.е. $l_{q_{\beta'},\lambda^{'''}}((\eta^{'''})^0)=d(\lambda)-(\lambda^{'},\beta^{'})$.

Положим $\tau^{'''}=(\eta^{'''})^0/|(\eta^{'''})^0,\lambda^{'''}|^{\lambda^{'''}}$. Тогда в силу $\lambda^{'''}-$однородности многочлена $q_{\beta'}$ $\lambda^{'''}-$порядка $d(\lambda)-(\lambda^{'},\beta^{'})>0$ получаем, что $\tau^{''}\in\Sigma(q_{\beta'},\lambda^{'''})$ и $l_{q_{\beta'},\lambda^{'''}}(\tau^{'''})=d(\lambda)-(\lambda^{'},\beta^{'})$. Так как $k_1<k$ и $q_{\beta'}\in Pol(k_1,k_1)$, то это противоречит предположению индукции и доказывает лемму. $\square$

Следующее предложение относится к почти гипоэллиптическим многочленам и доказывается аналогичными соображениями. Отметим только, что из определения почти гипоэллиптичности многочлена (см. определение 1.2) следует, что такой многочлен принадлежит $\tilde{\mathbb{I}}_n$ тогда и только тогда, когда когда он принадлежит $\mathbb{I}_n$.

Лемма 1.2. *Пусть $P\in Pol(n,n)$ почти гипоэллиптический многочлен. Тогда $P\in\mathbb{I}_n$ при выполнении одного из следующих условий*

1) $\Re^0(P)\cap\mathbb{R}^{n,0}\neq\emptyset$,

2) существует вектор $\lambda\in\Lambda(\Re(P))$ такой, что $\lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$ $(i,j=1,2,...,n)$.

2. Многочлены от трех переменных

В этом пункте мы будем рассматривать многочлены от трёх переменных. При этом, в отличие от предыдущего пункта, в настоящем пункте под многогранником Ньютона многочлена R будем понимать многогранник Ньютона набора (R).

Лемма 2.1. *Пусть* $R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d(\lambda)} \gamma_\alpha \, \xi^\alpha$ $\lambda-$*однородный многочлен, многогранник Ньютона* $\Re(R)$ *которого является одномерным с вершинами на координатных плоскостях* $\mathbb{R}^3$. *Если* $\Re(R)$ *не параллелен ни одной координатной плоскости* $\mathbb{R}^3$, *то* $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ *для всех* $\eta \in \Sigma(R,\lambda)$.

Доказательство. Пусть $\alpha^0 \neq \alpha^1$ вершины многогранника $\Re(R)$. Из одномерности $\Re(R)$ следует, что множество точек $\Re(R)$ можно представить в виде

$$\Re(R) = \{\nu(t) := t\,\alpha^0 + (1-t)\,\alpha^1; \;\; t \in [0,1]\}. \tag{2.1}$$

Так как α^0 и α^1 лежат на координатных плоскостях и $\Re(R)$ не параллелен ни одной координатной плоскости, то α^0 и α^1 лежат на разных координатных плоскостях. Пусть, для определенности $\alpha^0 = (0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)$ и $\alpha^1 = (\alpha_1^1, 0, \alpha_3^1)$. Из условия леммы следует, что $\alpha_1^1\,\alpha_2^0 \neq 0$ и $\alpha_3^0 \neq \alpha_3^1$ (пусть $\alpha_3^0 > \alpha_3^1$). Это значит, что $R \in Pol(3,3)$.

Рассмотрим следующие возможные случаи: 1) $\alpha_3^1 \neq 0$, 2) $\alpha_3^1 = 0$.

Так как, очевидно, в силу условия $\alpha_3^0 > \alpha_3^1$ (см. также представление (2.1)), в случае 1): 1.a) $\{\alpha \in (R), \alpha \geq (0,0,\alpha_3^0)\} = \{\alpha^0\}$, то $D_3^{\alpha_0^3} R(\xi) = \alpha_0^3\,!\,\gamma_{\alpha^0}\,\xi_2^{\alpha_2^0}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ и 1.b) $\{\alpha \in (R), \alpha_3 \geq \alpha_3^1,\, \alpha_2 = 0\} = \{\alpha^1\}$, то $D_3^{\alpha_3^1} R(\xi_1, 0, \xi_3) = \alpha_3^1\,!\,\gamma_{\alpha^1}\,\xi_1^{\alpha_1^1}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$.

С другй стороны, так как $\gamma_{\alpha^0} \cdot \gamma_{\alpha^1} \neq 0$, то для всех $\eta \in \Sigma(R,\lambda)$, для которых $\eta_2 \neq 0$ из 1.a) получаем $l_{R,\lambda}(\eta) \leq \lambda_3 \alpha_3^0 = d(\lambda) - \lambda_2 \alpha_2^0 < d(\lambda)$. А для тех $\eta = (\eta_1, 0, \eta_3) \in \Sigma(R,\lambda)$, для которых $\eta_1 \neq 0$, из 1.b) получаем $l_{R,\lambda}(\eta) \leq d(\lambda) - \lambda_1\,\alpha_1^1 < d(\lambda)$.

Если же $\eta_1 = \eta_2 = 0$ для $\eta \in \Sigma(R,\lambda)$, то $\eta = \pm(0,0,1)$ и, так как для $\{\alpha \in (R) : \alpha_2 \geq \alpha_2^0, \alpha_1 \neq 0\} = \{\alpha^0\}$, то $D_2^{\alpha_2^0} R(\eta) = (D_1^{\alpha_1^0} R)(\eta) = \alpha_1^0\,!\,\gamma_{\alpha^0}\,\eta_3^{\alpha_3^0} \neq 0$. Отсюда следует, что $l_{R,\lambda}(\eta) \leq d(\lambda) - \lambda_3 \alpha_3^0 < d(\lambda)$.

Этим утверждение леммы в случае 1) доказано.

Рассмотрим случай 2), т.е. когда $\alpha^0 = (0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)$, $\alpha^1 = (\alpha_1^1, 0, 0)$ где $\alpha_2^0 \cdot \alpha_3^0 \cdot \alpha_1^1 \neq 0$. Из условия $\alpha^1 \in \Re^0(R)$ непосредственно следует, что $\pm(1,0,0) \notin \Sigma(R,\lambda)$. Следовательно $|\eta_2| + |\eta_3| > 0$ для любого $\eta \in \Sigma(R,\lambda)$ и , так как в случае 2) (см. также представление (2.1)) $\alpha_2 < \alpha_2^0$ и $\alpha_3 < \alpha_3^0$ для любого $\alpha \in (R) : \alpha \neq \alpha^0$, то $D_2^{\alpha_2^0} R(\xi) = \alpha_2^0\,!\,\gamma_{\alpha^0}\,\xi_3^{\alpha_3^0}$, $D_3^{\alpha_3^0} R(\xi) = \alpha_2^0\,!\,\gamma_{\alpha^0} = \alpha_3^0\,!\,\gamma_{\alpha^0}\,\xi_2^{\alpha_2^0}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$.

Отсюда, в силу условия $\gamma_{\alpha^0} \neq 0$, непосредственно следует, что $l_{R,\lambda}(\eta) \leq max\{\lambda_2 \alpha_2^0, \lambda_3 \alpha_3^0\}$ для произвольной $\eta \in \Sigma(R,\lambda)$. Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Пусть* $R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d(\lambda)} \gamma_\alpha \, \xi^\alpha$ $\lambda-$*однородный многочлен, вершины многогранника Ньютона* $\Re(R)$ *которого лежат на координатных плоскостях. Если* $\Re(R)$ *имеет одномерную грань не параллельную ни одной координатной плоскости, то* $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ *для всех* $\eta \in \Sigma(R,\lambda)$.

Доказательство. Пусть $\Gamma-$ одномерная грань $\Re(R)$, не параллельная ни к одной координатной плоскости и $R^{1,\Gamma}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Gamma \cap (R)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Повторяя рассуждения, проводимые при первой части доказательства леммы 2.1, получим, что $R^{1,\Gamma} \in Pol(3,3)$, следовательно $R \in Pol(3.3)$.

Покажем, что существует вектор $\lambda^0 \in \mathbb{R}^{3,+} \cap \mathbb{R}^{3,\,0}$, являющийся внешней нормалью грани Γ, (тогда $(\lambda^0, \alpha) = const := d_0(\lambda^0)$ для любой точки $\alpha \in \Gamma$) и ортогональный вектору λ так, чтобы $d_0 = d_0(\lambda^0) > \max_{\beta \in [\Re(R) \setminus \Gamma] \cap (R)} (\lambda^0, \beta)$. На самом деле, пусть λ^1 произвольная нормаль грани Γ (являющаяся и внешней нормалью многогранника $\Re(R)$) ортогональная вектору λ. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ вектор $\varepsilon\lambda^1 + \lambda$ также является внешней нормалью грани Γ. Так как $\lambda \in \mathbb{R}^{3,+} \cap \mathbb{R}^{3,0}$, то $\varepsilon\lambda^1 + \lambda \in \mathbb{R}^{3,+} \cap \mathbb{R}^{3,0}$ для достаточно малых ε. С другой стороны, по выбору вектора λ^1, для произвольных точек $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in [\Re(R) \setminus \Gamma]$ $(\lambda^1, \alpha) > (\lambda^1, \beta)$, поэтому, очевидно, $(\varepsilon\lambda^1 + \lambda, \alpha) > (\varepsilon\lambda^1 + \lambda, \beta)$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, в качестве вектора λ^0, можно брать произвольный вектор вида $\lambda^0 = \varepsilon_0\lambda^1 + \lambda$, где число $\varepsilon_0 > 0$ выбрано так, чтобы $\lambda^0 \in \mathbb{R}^{3,+} \cap \mathbb{R}^{3,0}$.

Представим многочлен R в виде суммы λ^0-однородных многочленов: $R(\xi) = \sum_{j=0}^{m} R_j(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{(\lambda^0,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, где $d_0 > d_1 > ... > d_M > 0$, при этом, очевидно, $R_0(\xi) = R^{1,\Gamma}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3$.

Так как многочлен R_0 удовлетворяет условиям леммы 2.1, то $l_{R_0,\lambda^0}(\tau) < d_0$ для любой точки $\tau \in \Sigma(R_0, \lambda^0)$. Тогда, в силу теоремы 1.2, $R \in \tilde{\mathbb{I}}_3$ и, так как R $\lambda-$однородный многочлен, то в силу теоремы 1.1 $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ при всех $\eta \in \Sigma(R,\lambda)$. Лемма доказана. $\square$

На примере покажем, что требование о существовании одномерной грани, не параллельной ни одной координатной плоскости, существенно.

Пример 2.1. *Пусть* $\lambda = (1,1,2)$, $R(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^4 \, \xi_3^3 + \xi_3^5$ $\lambda-$*однородный многочлен* $\lambda-$*порядка* $d(\lambda) = 10$. *Вершины* $e^1 = (0,4,3)$, $e^2 = (4,0,3)$ *и* $e^3 = (0,0,5)$ *его многогранника Ньютона лежат на координатных плоскостях, при этом одномерные грани* (e^1, e^3) *и* (e^3, e^2) *лежат на координатных плоскостях, а одномерная грань* $\Gamma := (e^1, e^2)$ *параллельна плоскости* $\xi_1 = 0$. *Таким образаом,* *все одномерные грани параллельны соответствующим координатным плоскостям. Грани* Γ *соответствует подмногочлен* $R_\Gamma(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^4\, \xi_3^3$ *с нулями* $\pm\eta := \pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, *при этом* $l_{\Gamma,\lambda}(\pm\eta) = 10 = d(\lambda)$.

Лемма 2.3. *Пусть* $R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d(\lambda)} \gamma_\alpha\, \xi^\alpha \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *- однородный многочлен (* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *), представленный в виде*

$$R(\xi) = \sum_{j=r}^{M} \xi_3^j\, q_j(\xi_1, \xi_2) =: \sum_{j=r}^{M} R_j(\xi), \tag{2.2}$$

где $r, M \in \mathbb{N}_0$, q_j $\mu := (\lambda_1, \lambda_2)-$*однородный многочлен* $\mu-$*порядка* $d(\lambda) - j\,\lambda_3$ *двух переменных* $(j = r, ..., M)$. *Если либо a)* $0 < r < d(\lambda)/\lambda_3$ *и* $q_r \in Pol(2,2)$ *либо b)* $0 < M < d(\lambda)/\lambda_3$ *и* $q_M \in Pol(2,2)$, *то* $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ *для всех* $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$.

Доказательство. Очевидно, при выполнении каждого из условий a) или b) $R \in Pol(3,3)$. Так как доказательство леммы в обоих случаях проводится аналогично, то рассмотрим только случай a). Пусть $\lambda^0 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3^0)$, где $0 < \lambda_3^0 < \lambda_3$. Так как многочлены R_j $(j = r, ..., M)$ являются λ^0-однородными порядков $d_j := d(\lambda) - j(\lambda_3 - \lambda_3^0)$, то представление (2.2) являеся представлением $\lambda-$однородного многочлена R в виде суммы λ^0-однородных многочленов. Представим множество $\Sigma(R_r, \lambda^0)$ в следующем виде

$$\Sigma(R_r, \lambda^0) = \{\tau \in \Sigma(R_r, \lambda^0), \tau_3 \neq 0\} \cup \{\tau \in \Sigma(R_r, \lambda^0), \tau_3 = 0\} =: B_1 \cup B_2.$$

Так как $q_r(\tau_1, \tau_2) = 0$ для всех $\tau \in B_1$, по условию a) $q_r \in Pol(2,2)$ является $\mu := (\lambda_1, \lambda_2)-$однородным многочленом $\mu-$порядка $d(\lambda) - r\,\lambda_3$, и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то на основании леммы 1 работы [15] $l_{q_r,\mu}(\tau_1, \tau_2) < d(\lambda) - r\,\lambda_3$. Следовательно $l_{R_r,\lambda^0}(\tau)$ $= l_{q_r,\mu}(\tau_1, \tau_2) < d(\lambda) - r\,(\lambda_3 - \lambda_3^0) = d_0$ для всех $\tau \in B_1$.

Если $q_r(\tau_1, \tau_2) \neq 0$ для данного $\tau \in B_2$, то, очевидно, $l_{R_r,\lambda^0}(\tau) < r\,\lambda_3^0 < d_0$. Если же $q_r(\tau_1, \tau_2) = 0$ для $\tau \in B_2$, то на основании той же леммы 1 работы [15] $l_{R_r,\lambda^0}(\tau) \leq r\,\lambda_3^0 + l_{q_r,\mu}(\tau_1, \tau_2) < r\,\lambda_3^0 + d(\lambda) - r\,\lambda_3 = d_0$. Следовательно $l_{R_r,\lambda^0}(\tau) < d_0$ для всех $\tau \in B_2$. Отсюда в силу теоремы 1.2 имеем, что $R \in \tilde{\mathbb{I}}_3$. Так как R $\lambda-$однороден, то в силу теоремы 1.1 это означает, что $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ для всех $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$. □

Пример 2.2. *На примере покажем, что выполнение условия a) или b) существенно для выполнения соотношения* $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ *для всех* $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$.

Пусть $\lambda = (1, 3/2, 3/2)$, $R(\xi) = \xi_1^6 + (\xi_2 - \xi_3)^4$ $\lambda-$однородный многочлен порядка $d(\lambda) = 6$, $\Sigma(R, \lambda) = \{\eta^{\pm} := \pm(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$, $r = 0$, $M = 4 = d(\lambda)/(3/2)$, т.е. нарушаются оба условия a) и b). Легко посчитать тогда, что $l_{R,\lambda}(\eta^{\pm}) = 6 = d(\lambda)$.

Из лемм 1.1 - 1.2 и 2.2 - 2.3 непосрественно следует

Следствие 2.1. *Пусть* $R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d(\lambda)} \gamma_\alpha \, \xi^\alpha$ $\lambda-$*однородный многочлен. Тогда* $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ *для всех* $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$ *при выполнении одного из следующих трех условий 1)* $\Re(R)$ *имеет вершину в* $\mathbb{R}^{3,0}$, *2)* $\Re(R)$ *имеет одномерную гран, не параллельную ни к одной координатной плоскости, 3)* $\Re(R)$ *может иметь одномерную грань, параллельную какой - либо кооррдинатной плоскости (например кооррдинатной плоскости* $\xi_1 = 0$*), но не лежащей в ней и такой, что* $\lambda_2 \neq \lambda_3$.

Ниже мы будем пользоваться следующим очевидным предложением

Предложение 2.1. *Пусть* R $\lambda-$*однородный многочлен* $\lambda-$*порядка* $d(\lambda)$. *Если* $\lambda_1 = \lambda_3 =: \mu$, *то многочлен* R *можно представить в виде* $R(\xi) = \sum_{r \in \mathcal{A}_2} \xi_2^r \, q_{r,2}(\xi_1, \xi_3)$, *где* $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(R) := \{r \in \mathbb{N}_0, \ [d(\lambda) - r\lambda_2]/\mu \in \mathbb{N}_0\}$, *а* $q_{r,2}$ *однородный многочлен порядка* $[d(\lambda) - r\lambda_2]/\mu$. *При этом*

$$\max_{r \in \mathcal{A}_2} \{r\} = \max_{\alpha \in (R)} \{\alpha_2\}; \qquad \min_{r \in \mathcal{A}_2} \{r\} = \min_{\alpha \in (R)} \{\alpha_2\}.$$

Отметим, что в этом представлении множество $\mathcal{A}_2$ можно заменить на множества $\mathcal{A}_1$, или $\mathcal{A}_3$, соответствующим образом меняя $q_{r,2}$ на $q_{r,1}$ или $q_{r,3}$.

Лемма 2.4. *Пусть* $R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d(\lambda)} \gamma_\alpha \, \xi^\alpha \in Pol(3, 3)$ $\lambda-$*однородный многочлен* $\lambda-$*порядка* $d(\lambda)$ *такой, что* $(R) \cap \{\xi_j = 0\} \neq \emptyset$, $j = 1, 3$, $m_2 := \max_{\alpha \in (R)} \{\alpha_2\} < d(\lambda)/\lambda_2$ *и* $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$ *для некоторой точки* $\eta^0 \in \Sigma(R, \lambda)$. *Тогда a)* $\lambda_1 = \lambda_3$, *b)*$\eta_1^0 \, \eta_3^0 \neq 0$, *c) существует* $\lambda-$*однородный многочлен* $R_1 \in Pol(3.3)$ $\lambda-$*порядка* $d_1(\lambda) = m_2 \, \lambda_2$ *такой, что* $(0, m_2, 0) \in \Re^0(R_1)$, $\eta^0 \in \Sigma(R_1, \lambda)$ *и* $l_{R_1,\,\lambda}(\eta^0) = d_1(\lambda)$, *при этом* $R(\xi) = (\eta_3^0 \, \xi_1 - \eta_1^0 \, \xi_3)^{[d(\lambda) - d_1(\lambda)]/\lambda_1} \, R_1(\xi)$.

Доказательство. Из условия $P \in Pol(3, 3)$ следует, что $m_2 > 0$, а из условия $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$ и следствия 2.1, что 1) все вершины $\Re(R)$ лежат на координатных плоскостях, 2) каждая одномерная грань $\Re(R)$ параллельна к некоторой координатной плоскости, 3) Если какая - то одномерная грань многогранника $\Re(R)$ параллельна (например) координатной плоскости $\xi_1 = 0$, но не лежит на этой плоскости, то $\lambda_2 = \lambda_3$.

Из условий $(R)\cap\{\xi_j=0\}\neq\emptyset$ $(j=1,3)$ следует, что $\Re^0(R)\cap\{\xi_j=0\}\neq\emptyset$. $(j=1,3)$. Пусть $\alpha^0=(0,\alpha_2^0,\alpha_3^0),\alpha^1=(\alpha_1^1,\alpha_2^1,0)\in\Re^0(R)$ такие, что $\alpha_2^0=max\{\alpha_2;\alpha=(0,\alpha_2,\alpha_3)\in((R)\cap\{\xi_1=0\})\}$, $\alpha_2^1=max\{\alpha_2;\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,0)\in(R\cap\{\xi_3=0\})\}$. Легко видеть, что из свойства 1) следует, что $G:=\{\nu(t)=t\,\alpha^0+(1-t)\,\alpha^1\ t\in[0,1]\}$ является одномерной гранью $\Re(R)$. Так как $\alpha_2^0,\,\alpha_2^1\leq m_2<d(\lambda)/\lambda_2$ то $\alpha_3^0\,\alpha_1^1>0$, следовательно в силу 2) G параллельна плоскости $\xi_2=0$ и поэтому $\alpha_2^0=\alpha_2^1=m_2$.

Отсюда в силу 3) получаем, что $\lambda_1=\lambda_3=:\mu$ и

$$\alpha^0=(0,m_2,[d(\lambda)-m_2\,\lambda_2]/\lambda_1),\ \ \alpha^1=([d(\lambda)-m_2\,\lambda_2]/\lambda_1,m_2,0). \tag{2.3}$$

Тогда в силу предложения 2.1 многочлен R можно представить в виде

$$R(\xi)=\sum_{j\in A_2}\xi_2^j q_{j,\,2}(\xi_1,\xi_3), \tag{2.4}$$

где $q_{j,\,2}$ однородный многочлен порядка $[d(\lambda)-j_2\,\lambda_2]/\mu$, при этом $q_{m_2,\,2}\in Pol(2,2)$, и $q_{m_2,\,2}(1,0)\cdot q_{m_2,\,2}(0,1)\neq 0$ (см (2.3)). Отсюда, в свою очередь, следует, что $\eta_1^0.\eta_3^0\neq 0$.

Итак, доказано, что $\lambda_1=\lambda_3$, $\eta_1^0.\eta_3^0\neq 0$ и $q_{m_2,\,2}\in Pol(2,2)$.

По индукции по убыванию $j\in A_2$ покажем, что

$$l_{q_{m_2,\,2}}(\eta_1^0,\eta_3^0)=[d(\lambda)-m_2\lambda_2]/\mu, \tag{2.5}$$

$$l_{q_j,\,2}(\eta_1^0,\eta_3^0)\geq[d(\lambda)-m_2\lambda_2]/\mu\ \forall j\in A_2. \tag{2.6}$$

Для тех $\alpha\in\mathbb{N}_0^3$ для которых $\alpha_1+\alpha_3=[d(\lambda)-m_2\lambda_2]/\mu-1$ (напомним, что $(\lambda,\alpha)=d(\lambda)-\mu<d(\lambda)$) из условия $l_{R,\,\lambda}(\eta^0)=d(\lambda)$ имеем

$$0=[D^\alpha R](\eta^0)=D_1^{\alpha_1}\,D_3^{\alpha_3}q_{m_2,2}(\eta_1^0,\,\eta_3^0).$$

Отсюда, в силу формулы Эйлера для однородных функций, имея еще в виду то, что многочлен $q_{m_2,2}$ отличен от тождественного нуля и $ordq_{m_2,2}=[d(\lambda)-m_2\,\lambda_2]/\mu$, получаем (2.5).

Пусть $k\in A_2$ и $l_{q_{j,\,2}}(\eta_1^0,\eta_3^0)\geq[d(\lambda)-m_2\,\lambda_2]/\mu$ для всех $j\in A_2:j>k$. Докажем, что $l_{q_{k,\,2}}(\eta_1^0,\eta_3^0)\geq[d(\lambda)-m_2\lambda_2]/\mu$.

Пусть $\alpha=(\alpha_1,k,\alpha_3)\in\mathbb{N}_0^3$, $\alpha_1+\alpha_3=[d(\lambda)-m_2\,\lambda_2]/\mu-1$. Так как $(\lambda,\alpha)=d(\lambda)-(m_2-k)\lambda_2-\mu<d(\lambda)$, то в силу условия $l_{R,\,\lambda}(\eta^0)=d(\lambda)$ и предположения индукции имеем

$$0=[D^\alpha R](\eta^0)=\sum_{A_2\ni j\geq k}\frac{j!}{(j-k)!}(\eta_2^0)^{j-k}[D_1^{\alpha_1}D_3^{\alpha_3}q_{j,2}](\eta_1^0,\eta_3^0)$$

$$= [D_1^{\alpha_1} D_3^{\alpha_3} q_{k,2}](\eta_1^0, \eta_3^0).$$

Так как $q_{k,\,2}$ однородный многочлен, то в силу упомянутой леммы Эйлера отсюда получаем, что $l_{q_{k,\,2}}(\eta_1^0, \eta_3^0) \geq [d(\lambda) - m_2\lambda_2]/\mu$. По предположению индукции, это вместе с (2.5) доказывает соотношение (2.6).

Так как при $j \in A_2$ $q_{j,\,2}$ однородный многочлен, то в силу леммы Б.Пини (см. [6] для однородных и [14] для обобщенно - однородных многочленов) для любого $j \in A_2$ существует однородный многочлен $q'_{j,\,2}$ ($q'_{m_2,\,2} \equiv const \neq 0$) такой, что $q_{j,\,2}(\xi_1, \xi_3) = (\eta_3^0\, \xi_1 - \eta_1^0\, \xi_3)^{[d(\lambda) - m_2\, \lambda_2]/\mu}\; q'_{j,\,2}(\xi_1, \xi_3)$. Отсюда, в силу представления (2.4) имеем

$$R(\xi) = (\eta_3^0\, \xi_1 - \eta_1^0\, \xi_3)^{[d(\lambda) - m_2\, \lambda_2]/\mu} \sum_{j \in A_2} \xi_2^j\, q'_{j,\,2}(\xi_1, \xi_3)$$

$$=: (\eta_3^0\, \xi_1 - \eta_1^0\, \xi_3)^{[d(\lambda) - m_2\, \lambda_2]/\mu}\; R_1(\xi), \tag{2.7}$$

где, очевидно, R_1 $\lambda-$однородный многочлен $\lambda-$порядка $m_2\,\lambda_2$. Так как $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$, то из (2.7), в силу условия $m_2 < d(\lambda)/\lambda_2$ леммы, следует, что $\eta^0 \in \Sigma(R_1, \lambda)$ и $l_{R_1,\lambda}(\eta^0) = m_2\,\lambda_2$. □

Из доказанной леммы непосредственно следует

Следствие 2.2. *Пусть* $R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d(\lambda)} \gamma_\alpha\, \xi^\alpha \in Pol(3,3)$, $(R) \cap \{\xi_j = 0\} \neq \emptyset$, *и* $m_j := \max_{\alpha \in (R)}\{\alpha_j\} < d(\lambda)/\lambda_j$ $(j = 1,2,3)$. *Если* $R \notin \tilde{\mathbb{I}}_3$, *то* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Основным результатом настоящего пункта является следующая

Теорема 2.1. *(в случае $n = 2$ см. [17]) Пусть $R \in Pol(3,3)$ $\lambda-$однородный многочлен $\lambda-$порядка $d(\lambda) > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Тогда $R \notin \tilde{\mathbb{I}}_3$ в том и только в том случае, когда существуют числа a, b, c_j $j \in \mathcal{A}_3(R)$ (определение множества $\mathcal{A}_3(R)$ см. в предложении 2.1) такие, что многочлен R представляется в виде*

$$R(\xi) = \sum_{j\, \in\, \mathcal{A}_3(R)} c_j\, \xi_3^j\, (a\, \xi_1 + b\, \xi_2)^{[d(\lambda) - j\, \lambda_3]/\lambda_1}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $R \notin \tilde{\mathbb{I}}_3$, покажем, что многочлен R представляется в виде (2.8). Рассмотрим следующие два возможных случая: 1) $M := \max\limits_{\alpha \in (R)}\{\alpha_3\} = d(\lambda)/\lambda_3$, 2) $M < d(\lambda)/\lambda_3$.

В силу предложения 2.1 многочлен R можно представить в виде

$$R(\xi) = \sum_{j \in\, \mathcal{A}_3(R)} \xi_3^j\, q_{j,\,3}(\xi_1, \xi_2) =: \sum_{j\, \in\, \mathcal{A}_3(R)} R_j(\xi), \tag{2.9}$$

где, для каждого $j \in \mathcal{A}_3(R)$, $q_{j,3}$ однородный многочлен порядка $[d(\lambda) - j\,\lambda_3]/\lambda_1$, а R_j ненулевой $\lambda-$однородный многочлен $\lambda-$порядка $d(\lambda)$.

В силу теореми 1.1 и из условия $R \notin \tilde{\mathbb{I}}_3$ следует, что $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$ для некоторой точки $\eta^0 \in \Sigma(R,\,\lambda)$.

В случае 1) возможны следующие подслучаи: 1.1) $0 < \lambda_3 < \lambda_1 = \lambda_2$, 1.2) $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$. Легко проверить, что в подслучае 1.1) $\{\alpha \in (R), \alpha_3 > M - 1\} = \{(0,0,M)\}$, поэтому

$$D_3^{M-1} R(\xi) = M!\,\gamma_{(0,0,M)}\,\xi_3 \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{2.10}$$

Так как в случае 1) $\gamma_{(0,0,M)} \neq 0$, то отсюда с некоторой постоянной $\kappa_1 > 0$ имеем $|\xi_3| \leq \kappa_1\,\tilde{R}(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$. Откуда, в силу условий $\eta^0 \in \Sigma(R,\lambda)$ и $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$, получаем, что $\eta_3^0 = 0$. Так как

$$(D_3^j R)(\xi_1,\xi_2,0) = j!\,q_{j,3}(\xi_1,\xi_2) \;\; \forall (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2, j \in \mathcal{A}_3(R), j < M, \tag{2.11}$$

то в силу условия $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$ отсюда получаем, что $q_{j,3}(\eta_1^0,\eta_2^0) = 0$ и $l_{q_{j,3},(\lambda_1,\lambda_2)}(\eta_1^0,\eta_2^0) = d(\lambda) - j\,\lambda_3 > 0$.

Покажем, что в подслучае 1.1) из условия $R \in Pol(3,3)$ следует, что $q_{j,3} \in Pol(2,2)$. Предположим обратное, что, например, $D_2\,q_{j_0}(\xi) \equiv 0$, т.е. $q_{j_0,3} \in Pol(2,1)$ для некоторого $j_0 \in \mathcal{A}_3(R), j_0 < M$. Тогда в силу однородности многочлена $q_{j,3}$ получаем, что $\eta_1^0 = 0$, т.е $\eta^0 = \pm(0,1,0)$. Тогда из (2.11) следует, что для любого $j \in A_3, j < M$ $q_{j,3}(0,1) = 0$ и $l_{q_{j,3},(\lambda_1,\lambda_2)}(0,1) = d(\lambda) - j\,\lambda_3$. Так как $q_{j,3}$ однородный многочлен порядка $[d(\lambda) - j\,\lambda_3]/\lambda_1$ такой, что $l_{q_{j,3}}(0,1) = [d(\lambda) - j\,\lambda_3]/\lambda_1$ для любого $j \in \mathcal{A}_3, j < M$, то в силу леммы Эйлера об однородных функциях получаем, что $q_{j,3}(\xi_1,\xi_2) = q_{j,3}(\xi_1,0)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $j \in A_3, j < M$.

Так как $q_{M,3}(\xi_1,\xi_2) = const$, то отсюда в силу представления (2.9) получаем, что $R \in Pol(3,2)$. Полученное противоречие доказывает, что $q_{j,3} \in Pol(2,2)$. для тех $j \in \mathcal{A}_3$, для которых $q_{j,3}$ не обращатся в нуль тождественно. Тогда в силу леммы Пини, для однородного многочлена $q_{j,3}$, для которого $l_{q_{j,3}}(\eta_1^0,\eta_2^0) = [d(\lambda) - j\,\lambda_3]/\lambda_1$, существует число c_j такое, что

$$q_{j,3}(\xi_1,\xi_2) = c_j\,(\eta_2^0\xi_1 - \eta_1^0\xi_2)^{[d(\lambda)-j\,\lambda_3]/\lambda_1} \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^2, j \in \mathcal{A}_3, j < M, \tag{2.12}$$

откуда в силу (2.9) получаем утверждение леммы в подслучае 1.1) с $c_M = \gamma_{(0,0,M)}$.

Перейдем к подслучаю 1.2). Пусть $r := \min_{\alpha \in (\mathbb{R})}\{\alpha_3\}$. Очевидно $r \in \mathcal{A}_3(R)$. Из условия $R \in Pol(3,3)$ следует, что $r < M$. Так как в рассматриваемом случае $\{\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in (R) : \alpha_1 + \alpha_2 \geq [d(\lambda) - r\,\lambda_3]/\lambda_1 - 1\} = \{\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,r) \in (R)\}$

$(\neq \emptyset)$, то $\sum_{\Theta_r} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^r R(\xi)| = r! \sum_{\Theta_r} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} q_{r,\,3}(\xi_1, \xi_2)|$, где суммы распространяются по множеству $\Theta_r := \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2 : \ \ \alpha_1 + \alpha_2 = [d(\lambda) - r\,\lambda_3]/\lambda_1 - 1\}$. Так как в силу условия $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ при $\alpha_1 + \alpha_2 = [d(\lambda) - r\,\lambda_3]/\lambda_1 - 1$ имеет место соотношение $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3\, r = d(\lambda) - \lambda_1 < d(\lambda)$, то учитывая, что $l_{R,\lambda}(\eta^0) = d(\lambda)$ отсюда получаем: $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} q_{r,\,3}(\eta_1^0, \eta_2^0) = 0$ для всех $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2 :$ $\alpha_1 + \alpha_2 = [d(\lambda) - r\,\lambda_3]/\lambda_1 - 1$.

Так как $l_{q_{r,\,3},(\lambda_1,\lambda_2)}(\eta_1^0, \eta_2^0) = d(\lambda) - \lambda_3\, r$, то отсюда, в силу леммы Эйлера, получаем, что $q_{r,\,3}(\eta_1^0, \eta_2^0) = 0$ и $l_{q_{r,\,3}}(\eta_1^0, \eta_2^0) = [d(\lambda) - \lambda_3\, r]/\lambda_1$.

Пусть $q_{j,\,3}$ не обращаются в нуль тождественно для $j \in A_3(R), j < M$. Докажем по индукции по возрастанию $j \in A_3(R) : j < M$, что $q_{k,\,3}(\eta_1^0, \eta_2^0) = 0$ и $l_{q_{k,\,3}}(\eta_1^0, \eta_2^0) = [d(\lambda) - \lambda_3\, k]/\lambda_1$. при всех $k \in \mathcal{A}_3(R) : k < M$.

Пусть $k \in \mathcal{A}_3(R) : r < k < M$ и при всех $j < k \ \ q_{j,\,3}(\eta_1^0, \eta_2^0) = 0$ и $l_{q_{j,\,3}}(\eta_1^0, \eta_2^0) = [d(\lambda) - \lambda_3\, j]/\lambda_1$. Так как для (отличного от тождественного нуля) многочлена $q_{j,\,3}$ справедливо соотношение $l_{q_{j,\,3}}(\eta_1^0, \eta_2^0) \geq [d(\lambda) - \lambda_3\, k]/\lambda_1$, то по предположению индукции при всех $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2 : \ \ \alpha_1 + \alpha_2 = [d(\lambda) - r\,\lambda_3]/\lambda_1 - 1$ имеем

$$0 = \sum_{\Theta_k} |[D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^k R](\eta^0)| = k! \sum_{\Theta_k} |[D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} q_{k,\,3}](\eta^0)|.$$

Отсюда, в силу леммы Эйлера, имеем $q_{k,\,3}(\eta_1^0, \eta_2^0) = 0$ и $l_{q_{k,\,3}}(\eta_1^0, \eta_2^0) = [d(\lambda) - \lambda_3\, k]/\lambda_1$. Этим, при отличии от тождественного нуля многочленов $q_{j,\,3}$ $(j \in \mathcal{A}_3(R) :$ $j < M)$, по принципу математической индукции, доказано, что $q_{j,\,3}(\eta_1^0, \eta_2^0) = 0$ и $l_{q_{j,\,3}}(\eta_1^0, \eta_2^0) = [d(\lambda) - \lambda_3\, j]/\lambda_1$. для любого $j \in \mathcal{A}_3(R) : j < M$.

Тогда, применяя лемму Пини, с некоторыми постоянными c_j (при этом $c_j = 0$ при $q_{j,\,3}(\xi) \equiv 0$ и $c_j \neq 0$ в противном случае) получаем представление (2.12). А из представлений (2.9) и (2.12) получаем утверждение теоремы в случае 1.2) с $c_M = \gamma(0, 0, M)$.

Рассмотрим случай 2), когда $M < d(\lambda)/\lambda_3$. Мы сведем этот случай к случаю 1). Сначала покажем, что в случае 2) в представлении (2.9) $q_{M,\,3} \in Pol(2, 2)$. Пусть, наоборот, для определенности $q_{M,\,3} \in Pol(2, 1)$ т.е. $D_2\, q_{M,\,3}(\xi) \equiv 0$, а $D_1\, q_{M,\,3}$ отличен от тождественного нуля. Из условия $R \notin \tilde{\mathbb{I}}_3$ и следствия 2.1 имееем

I) вершины многогранника $\Re(R)$ лежат в координатных плоскостях

II) каждая одномерная грань $\Re(R)$ параллельна некоторой координатной плоскости.

Из условия $R \in \tilde{\mathbb{I}}_3$ следует, что $M > 0$, а из условий на многочлены $D_1 q_{M,\,3}$ и $D_2 q_{M,\,3}$, что $\alpha^0 := (\alpha_1^0, 0, M) \in \Re^0(R)$, где $\alpha_1^0 := ord\, q_{M,\,3}(\xi_1, 0) = [d(\lambda) - \lambda_3\, M]/\lambda_1$. Так как $\max_{\alpha=(0,\alpha_2,\alpha_3)\in(R)}\{\alpha_3\} < M$ (напомним, что $D_2 q_{M,\,3}(\xi) \equiv 0$), то в силу пункта II) $(R) \cap \{\xi_1 = 0\} = \emptyset$. Тогда из условия $R \in Pol(3,3)$ следует, что $\Re^0(R) \cap \{\xi_3 = 0\} \neq \emptyset$.

Пусть $\alpha^1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, 0) \in \Re^0(R)$ выбран так, что $\alpha_1^1 = \min_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,0)\in(R)}\{\alpha_1\}$. Из геометрических соображений очевидно, что $\alpha_1^0 = \min_{\alpha=(\alpha_1,0,\alpha_3)\in(R)}\{\alpha_1\}$. Тогда легко убедиться в том, что $G; = \{\nu(t) = t\,\alpha_1^0 + (1-t)\,\alpha^1, t \in [0,1]\}$ является одномерной гранью $\Re(R)$. Тогда из пункта II) получаем, что $\alpha_1^0 = \alpha_1^1$ (следовательно $\alpha_2^0 > 0$.) Так как $\sum\limits_{\alpha\in(R)\cap G} \gamma_\alpha \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1^0} \cdot \sum\limits_{(\alpha_1^0,\alpha_2,\alpha_3)\in(R)} \gamma_{(\alpha_1^0,\alpha_2,\alpha_3)} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} := \xi_1^{\alpha_1^0}\, q(\xi_2, \xi_3)$, где $q(1,0).q(0,1) \neq 0$, то $q \in Pol(2,2)$ $(\lambda_2, \lambda_3)-$однородный многочлен $(\lambda_2, \lambda_3)-$порядка $d(\lambda) - \alpha_1^0 \lambda_1 > 0$. Тогда в силу леммы 2.3 $l_{R,\lambda}(\eta) < d(\lambda)$ для любой $\eta \in \Sigma(R, \lambda)$. Полученное противоречие доказывает, что $q_{M,3} \in Pol(2,2)$. Тогда в силу леммы (2.4) многочлен R представляться в виде $R(\xi) = (\eta_2^0 \xi_1 - \eta_1^0 \xi_2)^{[d(\lambda) - M\,\lambda_3]/\lambda_1}\, R_1(\xi)$, где $R_1 \in Pol(3,3)$ $\lambda-$однородный многочлен $\lambda-$порядка $M\,\lambda_3 > 0$ такой, что $\eta^0 \in \Sigma(R_1, \lambda)$, $l_{R_1,\lambda}(\eta^0) = M\,\lambda_3$ и $(0,0,M) \in (R_1)$.

Так как многочлен R_1 удовлетворяет условиям доказываемой теоремы и $\max_{\alpha\in(R_1)}\{\alpha_3\} = M$, то в силу доказанной части этой теоремы непосредственно получаем утверждение теоремы и в случае 2). $\square$

Abstract. Denote by $\mathbb{I}_n$ (by $\tilde{\mathbb{I}}_n$ respectively) the set of polynomials of n variables $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ with real coefficients such that $|P(\xi)| \to \infty$ as $|\xi| \to \infty$ (respectively $\tilde{P}(\xi) := \sum_\nu |D^\nu P(\xi)| \to \infty$ as $|\xi| \to \infty$). In terms of a degree m, the geometrical structure of Newton polyhedron $\Re(P)$ of polynomial P and the multiplicity of zeros of its main homogeneous subpolynomial P_m necessary and sufficient conditions are obtained for $P \in \mathbb{I}_n$ (respectively $P \in \tilde{\mathbb{I}}_n$). For generalized homogeneous polynomials R of three variables geometrical sufficient conditions are obtained for $R \in \tilde{\mathbb{I}}_3$.

Список литературы

[1] A. A. Seidenberg, “A new decision method for elementary algebra”, Ann. Math., **60**, 365 – 374 (1954).

[2] A. Tarski, A Decision Method For Elementary Algebra and Geometry, Manuskript, Berkeley, 63 p. (1951).

[3] В. И. Арнольд, “Критические точки гладких фнкций и их нормальные формы’, УМН, **30**, вып.5, 3 – 65 (1975).

[4] Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, **2**, Москва, Мир (1986).

[5] Е. А. Горин, "Асимптотические свойства многочленов от нескольких переменных", УМН, **16**, но. 1, 91 – 118 (1961).

[6] B. Pini, "Osservazoni sulla hypoelliptica", Bol. Un.Mat. Ital., (3), **18**, 420 – 432 (1963).

[7] G. C. Barozzi, "Sul prodotto di polinomi quasiellipticí", Boll. Unione Mat. Ital. (2), **20**, 169 – 176 (1965).

[8] L. Cattabriga, "Su une classe di polinomi ipoellittici", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **36**, 285 – 309 (1966).

[9] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).

[10] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических полиномов", Мат. Сборник, **75** (117), но. 3, 400 – 416 (1968).

[11] J. Friberg, "Multi - quasielliptic polynomials", Annali della seuola Normale Sup. di Pisa, serie III, **XXI**, 239 – 260 (1967).

[12] В. А. Васильев, "Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума", Функц. Анализ, **11**, вып. 3, 1 – 11 (1977).

[13] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Doklady Ross. Acad. Nauk, Math., **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).

[14] Г. Г. Казарян, "Об одном семействе гипоэллиптических полиномов", Изв. АН Арм. ССР, **9**, но. 3, 189 – 211 (1974).

[15] В. Н. Маргарян, "Об одном представлении обобщенно - однородных многочленов от двух переменных", Сб. научных статей годичной конференции РАУ (2016).

[16] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы операторов", Труды МИАН СССР, **150**, 128 – 142 (1979).

[17] Г. Г. Казарян, "Почти гипоэллиптические многочлены, не возрастающие на бесконечности", Изв. НАН Армении, Мат., **4**, но. 2, 15 – 26 (2001).

Поступила 28 мая 2019

После доработки 28 мая 2019

Принята к публикации 11 октября 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 4, 2020, стр. 65 – 74

ON THE EXISTENCE OF POSITIVE WEAK SOLUTION FOR NONLINEAR SYSTEM WITH SINGULAR WEIGHTS

S. KHAFAGY, H. SERAG

Majmaah University, Majmaah, Saudi Arabia[1]
Al-Azhar University, Nasr City, Cairo, Egypt
E-mails: *s.khafagy@mu.edu.sa; serraghm@yahoo.com*

Abstract. In this article, we study the existence results of large positive weak solution for nonlinear system with singular weights (1.4), where Ω is a bounded domain of R^n with boundary $\partial\Omega$, $0 \in \Omega$, $1 < p, q < n$, $0 \leq r < \frac{n-p}{p}$, $0 \leq s < \frac{n-q}{q}$, and $\Lambda_p u = |u|^{p-2}u$, ϱ_p, ϱ_q, $\lambda, \mu, \gamma, \delta$ are positive constants and a, b are weight functions. We prove the existence of a large positive weak solutions for mappings. λ, μ large when $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^{\frac{1}{p-1}}\left(M(g(x))^{\frac{1}{q-1}}\right)}{x} = 0$, for every $M > 0$. Here, there is no any sign-changing conditions on a or b. The proof of the main results is based on the sub-supersolutions method. Application and concluding remark are provided to demonstrate the effectiveness of our results.

MSC2010 numbers: 35D30, 35J92, 93C10.
Keywords: weak solution; $P-$Laplacian; nonlinear system; sub-supersolutions.

1. Introduction

Positive weak solutions for systems involving Laplacian, $p-$Laplacian, weighted $p-$Laplacian or singular $p-$Laplacian operators have been obtained by many authors through the sub-supersolutions method (see [1, 2, 5],[9]-[17],[20, 22]).

In the recent past, systems involving singular p-Laplacian nonlinear systems have been studied by many authors ([10, 16, 19, 26]).

On the other hand, some other authors have obtained the existence of weak solutions for $p-$Laplacian, weighted $p-$Laplacian or singular $p-$Laplacian nonlinear systems using the method of the theory of nonlinear monotone operators (see [18, 24]) and an approximation method (see [3, 25]).

In ([6]), existence and uniqueness of positive solutions have been studied by Dalmas for the following semilinear elliptic system

$$\left.\begin{array}{rl} -\Delta u = f(v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = g(u) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

[1]The authors would like to thank the Deanship of Scientific Research at Majmaah University for supporting this work under Award No. 38/58/1439-2018.

when $f(cg(x))$ is sublinear at 0 and ∞ for every $c > 0$. Relevant results are obtained in [8], in the case $f(0) < 0$ or $g(0) < 0$, where the authors extended the study of [6] to the case with no sign conditions on $f(0)$ or $g(0)$.

In [7], the authors considered the existence results of positive solutions for the nonlinear p-Laplacian system

$$\left.\begin{array}{rl} -\Delta_p u = \lambda f(v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_p v = \lambda g(u) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

in the semiposotone case, i.e., $f(0)$ or $g(0)$ is negative. Under the condition

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f[M(g(x))^{\frac{1}{p-1}}]}{x^{p-1}} = 0, \qquad \text{for every } \ M > 0, \tag{1.3}$$

the existence results of positive weak solutions was given for system (1.2) when λ is large enough.

In this paper, we discuss the existence of positive weak solution for λ, μ large for the singular nonlinear system

$$\left.\begin{array}{rl} -\mathrm{div}[|x|^{-rp}|\nabla u|^{p-2}\nabla u] - \varrho_p\Lambda_p u = \lambda a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma} f(v) & \text{in } \Omega, \\ -\mathrm{div}[|x|^{-sq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v] - \varrho_q\Lambda_q v = \mu b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta} g(u) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

where Ω is a bounded domain of R^n with boundary $\partial\Omega$, $0 \in \Omega$, $1 < p, q < n$, $0 \le r < \frac{n-p}{p}$, $0 \le s < \frac{n-q}{q}$, $\Lambda_p u = |u|^{p-2}u$, $\varrho_p, \varrho_q, \lambda, \mu, \gamma, \delta$ are positive constants, a, b are weight functions and f, g are given functions. We prove through the sub–supersolutions method, the existence of a large positive weak solutions for λ, μ large when $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^{\frac{1}{p-1}}(M(g(x))^{\frac{1}{q-1}})}{x} = 0$, for every $M > 0$

In this paper we are dealing with the singular $(p, q)-$Laplacian nonlinear system with no any sign-changing conditions on the functions a or b.

This paper is organized as follows: we introduce some basic definitions, technical results, notations and some assumptions on the functions a, b, f, g in section 2. Section 3 is devoted to the study of the existence and nonexistence of positive weak solutions for (1.4) by using the sub–supersolutions method. In section 4, we present an application and concluding remark showing that our results complement previously reported results.

2. Definitions and technical results

Let Ω be a bounded domain in R^n with smooth boundary $\partial\Omega$. If $0 < r < \frac{n-p}{p}$ and $p \ge 1$, we define the weighted $L_p(\Omega, |x|^{-(r+1)p+\gamma})$ space with the norm (see

[27])

$$\|u\|_{L_p(\Omega,|x|^{-(r+1)p+\gamma})} = \left[\int\limits_{\Omega} |x|^{-(r+1)p+\gamma}|\nabla u|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.1}$$

If $1 < p < n$ and $0 < r < \frac{n-p}{p}$, we define $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp})$ as being the closure of $C_0^{\infty}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp})$ with respect to the norm defined by

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp})} = \left[\int\limits_{\Omega} |x|^{-rp}|\nabla u|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.2}$$

The space $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp})$ is a separable reflexive Banach space.

Definition 2.1. *We say that a pair of functions $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp}) \times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-sq})$ is a weak solution for system (1.4) if and only if:*

(2.3)
$$\left.\begin{array}{l}
\int\limits_{\Omega} |x|^{-rp}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\zeta dx - \varrho_p \int\limits_{\Omega} |u|^{p-2}u\zeta dx = \lambda \int\limits_{\Omega} a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma}f(v)\zeta dx,\\
\int\limits_{\Omega} |x|^{-sq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla\eta dx - \varrho_q \int\limits_{\Omega} |v|^{q-2}v\eta dx = \mu \int\limits_{\Omega} b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta}g(u)\eta dx,
\end{array}\right\}$$

for all test functions $(\zeta,\eta) \in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp}) \times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-sq})$ with $\zeta,\eta \geq 0$.

Definition 2.2. *We say that a pair of functions $(\psi_1,\psi_2) \in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp}) \times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-sq})$ is a weak subsolution of (1.4) if and only if:*

(2.4)
$$\left.\begin{array}{l}
\int\limits_{\Omega} |x|^{-rp}|\nabla \psi_1|^{p-2}\nabla \psi_1\nabla\zeta dx - \varrho_p \int\limits_{\Omega} |\psi_1|^{p-2}\psi_1\zeta dx \leq \lambda \int\limits_{\Omega} a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma}f(\psi_2)\zeta dx,\\
\int\limits_{\Omega} |x|^{-sq}|\nabla \psi_2|^{q-2}\nabla \psi_2\nabla\eta dx - \varrho_q \int\limits_{\Omega} |\psi_2|^{q-2}\psi_2\eta dx \leq \mu \int\limits_{\Omega} b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta}g(\psi_1)\eta dx,
\end{array}\right\}$$

for all test functions $(\zeta,\eta) \in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp}) \times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-sq})$ with $\zeta,\eta \geq 0$.

Definition 2.3. *We say that a pair of functions $(z_1,z_2) \in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp}) \times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-sq})$ is a weak supersolution of (1.4) if and only if:*

(2.5)
$$\left.\begin{array}{l}
\int\limits_{\Omega} |x|^{-rp}|\nabla z_1|^{p-2}\nabla z_1\nabla\zeta dx - \varrho_p \int\limits_{\Omega} |z_1|^{p-2}z_1\zeta dx \geq \lambda \int\limits_{\Omega} a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma}f(z_2)\zeta dx,\\
\int\limits_{\Omega} |x|^{-sq}|\nabla z_2|^{q-2}\nabla z_2\nabla\eta dx - \varrho_q \int\limits_{\Omega} |z_2|^{q-2}z_2\eta dx \geq \mu \int\limits_{\Omega} b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta}g(z_1)\eta dx,
\end{array}\right\}$$

for all test functions $(\zeta,\eta) \in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp}) \times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-sq})$ with $\zeta,\eta \geq 0$.

Then the following result holds:

Lemma 2.1. *([4]) Suppose there exist subsolutions and supersolutions (ψ_1,ψ_2) and (z_1,z_2) respectively of system (1.4) such that $(\psi_1,\psi_2) \leq (z_1,z_2)$. Then system (1.4) has a solution (u,v) such that $(u,v) \in [(\psi_1,\psi_2),(z_1,z_2)]$.*

We suppose that a, b, f and g verify the following hypotheses:

$(\mathbf{H}_1)$ $\exists\ a_0, a_1, b_0, b_1 > 0$ such that $a_0 \le a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma} \le a_1$ and $b_0 \le b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta} \le b_1$.

$(\mathbf{H}_2)$ $f, g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ are C^1 nondecreasing continuous functions such that $f(s), g(s) > 0$ for $s > 0$ and $\exists\ k_0 > 0$ such that $f(s), g(s) \ge -k_0$ for all $s \ge 0$.

$(\mathbf{H}_3)$ $\exists\ \xi, \kappa, \alpha, \beta, \Delta, \Gamma > 0$ such that $f(v) \le \xi v^{q(\frac{p-1}{p})}$, $g(u) \le \kappa u^{p(\frac{q-1}{q})}$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$(\mathbf{H}_4)$ For all $M > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{\frac{1}{p-1}}\left(M(g(x))^{\frac{1}{q-1}}\right)}{x} = 0. \tag{2.6}$$

For simplicity, we make use of the following notations

$$\lambda_* = \frac{\varrho_p}{a_0} + \frac{\lambda \xi a_1}{p a_0} + \frac{\mu \kappa b_1}{q b_0}, \quad \mu_* = \frac{\varrho_q}{b_0} + \frac{\mu \kappa b_1}{q b_0} + \frac{\lambda \xi a_1}{p a_0}, \tag{2.7}$$

where the unknown quantities will be defined later.

Now, for the following singular eigenvalue problems ([27])

$$\left.\begin{array}{lr} -\mathrm{div}[|x|^{-rp}|\nabla u|^{p-2}\nabla u] = \lambda a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma}|u|^{p-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

and

$$\left.\begin{array}{lr} -\mathrm{div}[|x|^{-sq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v] = \lambda b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta}|v|^{q-2}v & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

we introduce the following technical results.

Theorem 2.1. *([27]) There exists the simple isolated first eigenvalue $\lambda_p > 0$ (respectively $\lambda_q > 0$) and precisely one corresponding eigenfunction $\phi_p \ge 0$ (respectively $\phi_q \ge 0$) a.e. in Ω of the eigenvalue problems (2.8) (respectively (2.9)). Moreover, they are characterized by*

$$\begin{gathered} \lambda_p \int_\Omega a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}|\phi_p|^p \le \int_\Omega |x|^{-rp}|\nabla \phi_p|^p. \quad \textit{and} \\ \lambda_q \int_\Omega b(x)|x|^{-s(q+1)+\delta}|\phi_q|^q \le \int_\Omega |x|^{-sq}|\nabla \phi_q|^q. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Theorem 2.2. *(Young's Inequality) Let $1 < p < \infty$ and let q be the conjugate index of p, that is $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then for all $X, Y \ge 0$,*

$$XY \le \frac{X^p}{p} + \frac{Y^q}{q}. \tag{2.11}$$

3. Existence and nonexistence results

Theorem 3.1. *Let $(\mathbf{H}_1)$– $(\mathbf{H}_4)$ are hold. Then system (1.4) has a positive weak solution $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-rp}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-sq})$ for λ, μ large.*

Proof. Let $m,\ \sigma>0$ be such that $|x|^{-rp}|\nabla\phi_p|^p\ -\lambda_p a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}\phi_p^p\geq m$ and $|x|^{-sq}|\nabla\phi_q|^q\ -\lambda_q b(x)|x|^{-s(q+1)+\delta}\phi_q^q\geq m$ on $\overline{\Omega}_\sigma=\{x\in\Omega: d(x,\partial\Omega)\leq\sigma\}$. We shall verify that (ψ_1,ψ_2) is a subsolution of (1.4) for λ,μ large where $(\psi_1,\psi_2)=\left(\frac{p-1}{p}(\frac{\lambda a_0k_0}{m})^{\frac{1}{p-1}}\phi_p^{\frac{p}{p-1}},\frac{q-1}{q}(\frac{\mu b_0k_0}{m})^{\frac{1}{q-1}}\phi_q^{\frac{q}{q-1}}\right)$. Let $\zeta\in W_0^{1,p}(P,\Omega)$ with $\zeta\geq 0$. A calculation shows that

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |x|^{-rp}|\nabla\psi_1|^{p-2}\nabla\psi_1\nabla\zeta dx-\varrho_p\int_\Omega|\psi_1|^{p-2}\psi_1\zeta dx\\
\leq\ &\frac{\lambda a_0k_0}{m}\int_\Omega|x|^{-rp}\phi_p|\nabla\phi_p|^{p-2}\nabla\phi_p\nabla\zeta dx\\
=\ &\frac{\lambda a_0k_0}{m}\left\{\int_\Omega|x|^{-rp}|\nabla\phi_p|^{p-2}\nabla\phi_p\nabla(\phi_p\zeta)dx-\int_\Omega|x|^{-rp}|\nabla\phi_p|^p\zeta dx\right\}\\
=\ &\frac{\lambda a_0k_0}{m}\int_\Omega(\lambda_p a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}\phi_p^p-|x|^{-rp}|\nabla\phi_p|^p)\zeta dx. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Similarly, for $\eta\in W_0^{1,q}(Q,\Omega)$ with $\eta\geq 0$, we have

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega|x|^{-sq}|\nabla\psi_2|^{q-2}\nabla\psi_2\nabla\eta dx-\varrho_q\int_\Omega|x|^{-s(q+1)+\delta}|\psi_2|^{q-2}\psi_2\eta dx\\
\leq\ &\frac{\mu b_0k_0}{m}\int_\Omega(\lambda_q b(x)|x|^{-s(q+1)+\delta}\phi_q^q-|x|^{-sq}|\nabla\phi_q|^q)\eta dx. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Now, on $\overline{\Omega}_\sigma$, we have $|x|^{-rp}|\nabla\phi_p|^p-\lambda_p a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}\phi_p^p\geq m$. Hence, Using $(\mathbf{H}_1)$ and $(\mathbf{H}_2)$, we have

$$\frac{\lambda a_0k_0}{m}(\lambda_p a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}\phi_p^p-|x|^{-rp}|\nabla\phi_p|^p)\leq-\lambda a_0k_0\leq\lambda a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}f(\psi_2).$$

A similar argument shows that

$$\frac{\mu b_0k_0}{m}(\lambda_q b(x)|x|^{-s(q+1)+\delta}\phi_q^q-|x|^{-sq}|\nabla\phi_q|^q)\leq-\mu b_0k_0\leq\mu b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta}g(\psi_1).$$

Next, on $\Omega-\overline{\Omega}_\sigma$, we have $\phi_p\geq\rho_p$, $\phi_q\geq\rho_q$ for some $\rho_p,\rho_q>0$. Also $g(\psi_1)$ and $f(\psi_2)$ are depending on λ,μ respectively and nondecreasing continuous functions and therefore for λ,μ large we have, using (2.10), $(\mathbf{H}_1)$ and $(\mathbf{H}_2)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda a_0k_0}{m}(\lambda_p a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}\phi_p^p-|x|^{-rp}|\nabla\phi_p|^p)\ &\leq\ \frac{\lambda a_0k_0}{m}\lambda_p\leq\lambda a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}f(\psi_2),\\
\frac{\mu b_0k_0}{m}(\lambda_q b(x)|x|^{-s(q+1)+\delta}\phi_q^q-|x|^{-sq}|\nabla\phi_q|^q)\ &\leq\ \frac{\mu b_0k_0}{m}\lambda_q\leq\mu b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta}g(\psi_1).
\end{aligned}$$

Hence, (3.1) becomes

$$\int_\Omega|x|^{-rp}|\nabla\psi_1|^{p-2}\nabla\psi_1\nabla\zeta dx-\varrho_p\int_\Omega|\psi_1|^{p-2}\psi_1\zeta dx\leq\lambda\int_\Omega a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}f(\psi_2)\zeta dx.$$

Similarly, for $\eta \in W_0^{1,q}(Q,\Omega)$ with $\eta \geq 0$, (3.2) becomes

$$\int_\Omega |x|^{-sq}|\nabla\psi_2|^{q-2}\nabla\psi_2\nabla\eta dx - \varrho_q\int_\Omega |\psi_2|^{q-2}\psi_2\eta dx \leq \lambda\int_\Omega b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta}g(\psi_1)\eta dx.$$

That is, according to (2.4), (ψ_1,ψ_2) is a subsolution of (1.4) for λ,μ large.

Supersolution:

Next, let (e_p,e_q) be the unique solution of (see [21])

$$\left.\begin{array}{rl} -\mathrm{div}[|\mathrm{x}|^{-\mathrm{rp}}|\nabla \mathrm{e_p}|^{\mathrm{p}-2}\nabla \mathrm{e_p}] = 1 & \text{in } \Omega, \\ -\mathrm{div}[|\mathrm{x}|^{-\mathrm{sq}}|\nabla \mathrm{e_q}|^{\mathrm{q}-2}\nabla \mathrm{e_q}] = 1 & \text{in } \Omega, \\ e_p = e_q = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

where as it is known $e_p, e_q > 0$ on Ω and $\frac{\partial e_p}{\partial n}, \frac{\partial e_q}{\partial n} < 0$ on $\partial\Omega$.

Let

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{C}{\nu_p}\left(\frac{\lambda}{1-\varrho_p\nu_p^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}e_p, \\ z_2 &= \left(\frac{\mu b_1}{1-\varrho_q\nu_q^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q-1}}\ [g(C(\frac{\lambda}{1-\varrho_p\nu_p^{p-1}})^{\frac{1}{p-1}})]^{\frac{1}{q-1}}e_q, \end{aligned} \tag{3.4}$$

where $C > 0$ is a large enough to be chosen later, $\nu_p = \|e_p\|_\infty$ and $\nu_q = \|e_q\|_\infty$. Now, let us verify that (z_1,z_2) is a supersolution of (1.4) for λ,μ large. To this end, let $\zeta \in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-rp})$ with $\zeta \geq 0$. Then we have, using (3.3) and (3.4)

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |x|^{-rp}|\nabla z_1|^{p-2}\nabla z_1\nabla\zeta dx - \varrho_p\int_\Omega |z_1|^{p-2}z_1\zeta dx \\ &= \frac{\lambda}{1-\varrho_p\nu_p^{p-1}}\left(\frac{C}{\nu_p}\right)^{p-1}\int_\Omega |x|^{-rp}|\nabla e_p|^{p-2}\nabla e_p\nabla\zeta dx \\ &\quad -\frac{\lambda}{1-\varrho_p\nu_p^{p-1}}\left(\frac{C}{\nu_p}\right)^{p-1}\varrho_p\int_\Omega |e_p|^{p-2}e_p\zeta dx \\ &\geq \lambda\left(\frac{C}{\nu_p}\right)^{p-1}\int_\Omega \zeta dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

By $(\mathbf{H}_4)$, we can choose C large enough so that

$$\left(\frac{C}{\nu_p}\right)^{p-1} \geq a_1 f([(\frac{\mu b_1}{1-\varrho_q\nu_q^{q-1}})^{\frac{1}{q-1}}][g(C(\frac{\lambda}{1-\varrho_p\nu_p^{p-1}})^{\frac{1}{p-1}})]^{\frac{1}{q-1}}\nu_q).$$

Hence (3.5) becomes,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |x|^{-rp}|\nabla z_1|^{p-2}\nabla z_1\cdot\nabla\zeta dx - \varrho_p\int_\Omega |z_1|^{p-2}z_1\zeta dx \\ &\geq \lambda a_1\int_\Omega f([(\frac{\mu b_1}{1-\varrho_q\nu_q^{q-1}})^{\frac{1}{q-1}}][g(C(\frac{\lambda}{1-\varrho_p\nu_p^{p-1}})^{\frac{1}{p-1}})]^{\frac{1}{q-1}}\nu_q)\zeta dx \\ &\geq \lambda\int_\Omega a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma}f(z_2)\zeta dx. \end{aligned}$$

Next, for $\eta \in W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-sq})$ with $\eta \geq 0$, one can have

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |x|^{-sq}|\nabla z_2|^{q-2}\nabla z_2 \nabla \eta dx - \varrho_q \int_\Omega |z_2|^{q-2} z_2 \eta dx \\
= & \frac{\mu b_1}{1-\varrho_q \nu_q^{q-1}} g(C(\frac{\lambda}{1-\varrho_p \nu_p^{p-1}})^{\frac{1}{p-1}}) \int_\Omega |x|^{-sq}|\nabla e_q|^{q-2}\nabla e_q \nabla \eta dx \\
& - \frac{\mu b_1}{1-\varrho_q \nu_q^{q-1}} g(C(\frac{\lambda}{1-\varrho_p \nu_p^{p-1}})^{\frac{1}{p-1}}) \varrho_q \int_\Omega |e_q|^{q-2} e_q \eta dx \\
\geq & \frac{\mu b_1}{1-\varrho_q \nu_q^{q-1}} g(\frac{C}{\nu_p}(\frac{\lambda}{1-\varrho_p \nu_p^{p-1}})^{\frac{1}{p-1}} e_p)[\int_\Omega \eta dx - \int_\Omega \varrho_q \nu_q^{q-1} \eta dx] \\
= & \frac{\mu b_1}{1-\varrho_q \nu_q^{q-1}} g(\frac{C}{\nu_p}(\frac{\lambda}{1-\varrho_p \nu_p^{p-1}})^{\frac{1}{p-1}} e_p)[1-\varrho_q \nu_q^{q-1}] \int_\Omega \eta dx \\
\geq & \mu b_1 \int_\Omega g(\frac{C}{\nu_p}(\frac{\lambda}{1-\varrho_p \nu_p^{p-1}})^{\frac{1}{p-1}} e_p) \eta dx \geq \mu \int_\Omega b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta} g(z_1) \eta dx.
\end{aligned}$$

That is, according to (2.5), (z_1, z_2) is a supersolution of (1.4) with $z_i \geq \psi_i$ for C large, $i = 1, 2$. Thus, according to (Lemma 1), there exists a positive weak solution (u, v) of (1.4) with $\psi_1 \leq u \leq z_1,\ \ \psi_2 \leq v \leq z_2$. This completes the proof.

Theorem 3.2. *If f and g satisfy hypothesis $(\mathbf{H}_3)$, then system (1.4) has not nontrivial positive weak solution if*

$$0 < \lambda_* < \lambda_p \text{ and } 0 < \mu_* < \mu_q \ , \tag{3.6}$$

where λ_*, μ_* are given by (2.7).

Proof. Multiplying the first equation of system (1.4) by u, and using Young inequality given by (2.11), we get

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-rp}|\nabla u|^p dx - \varrho_p \int_\Omega |u|^p dx &= \lambda \int_\Omega a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma} f(v) dx \leq \lambda \xi a_1 \int_\Omega u v^{q(\frac{p-1}{p})} dx \\
&\leq \frac{\lambda \xi a_1}{p} \int_\Omega [u^p + (p-1)v^q] dx.
\end{aligned}$$

It follows that

$$\int_\Omega |x|^{-rp}|\nabla u|^p dx \leq [\varrho_p + \frac{\lambda \xi a_1}{p}] \int_\Omega u^p dx + \frac{\lambda \xi a_1}{q} \int_\Omega v^q dx.$$

Using (2.10), we have

$$\begin{aligned}\lambda_p a_0 \int_\Omega |u|^p dx &\leq \lambda_p \int_\Omega a(x)|x|^{-r(p+1)+\gamma}|u|^p dx \leq \int_\Omega |x|^{-rp}|\nabla u|^p dx \\ &\leq [\varrho_p + \frac{\lambda\xi a_1}{p}] \int_\Omega u^p dx + \frac{\lambda\xi a_1}{q} \int_\Omega v^q dx,\end{aligned}$$

and hence,

$$[\lambda_p - \frac{\varrho_p}{a_0} - \frac{\lambda\xi a_1}{pa_0}] \|u\|_p^p - \frac{\lambda\xi a_1}{qa_0} \|v\|_q^q \leq 0. \tag{3.7}$$

On the other hand, multiplying the second equation of system (1.4) by v, and using (2.11), we have

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-sq}|\nabla v|^q dx - \varrho_q \int_\Omega |v|^q dx &= \mu \int_\Omega b(x)|x|^{-s(q+1)+\delta} g(u) v dx \leq \mu\kappa b_1 \int_\Omega u^{p(\frac{q-1}{q})} v dx \\ &\leq \frac{\mu\kappa b_1}{q} \int_\Omega [(q-1)u^p + v^q] dx,\end{aligned}$$

which implies

$$\int_\Omega |x|^{-sq}|\nabla v|^q dx \leq \frac{\mu\kappa b_1}{p} \int_\Omega u^p dx + [\varrho_q + \frac{\mu\kappa b_1}{q}] \int_\Omega v^q dx.$$

Using (2.10), we have

$$\begin{aligned}\lambda_q b_0 \int_\Omega |v|^q dx &\leq \lambda_q \int_\Omega b(x)|x|^{-s(q+1)+\delta}|v|^q dx \leq \int_\Omega |x|^{-sq}|\nabla v|^q dx \\ &\leq \frac{\mu\kappa b_1}{p} \int_\Omega u^p dx + [\varrho_q + \frac{\mu\kappa b_1}{q}] \int_\Omega v^q dx,\end{aligned}$$

and hence,

$$-\frac{\mu\kappa b_1}{pb_0} \|u\|_p^p + [\lambda_q - \frac{\varrho_q}{b_0} - \frac{\mu\kappa b_1}{qb_0}] \|v\|_q^q \leq 0. \tag{3.8}$$

Combining (3.7) and (3.8), we obtain

$$[\lambda_p - (\frac{\varrho_p}{a_0} + \frac{\lambda\xi a_1}{pa_0} + \frac{\mu\kappa b_1}{qb_0})] \|u\|_p^p + [\lambda_q - (\frac{\varrho_q}{b_0} + \frac{\mu\kappa b_1}{qb_0} + \frac{\lambda\xi a_1}{pa_0})] \|v\|_q^q \leq 0, \tag{3.9}$$

which is a contradiction if (3.6) holds. This completes the proof.

4. Application and concluding remark

Consider the following nonlinear system

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{div}[|x|^{-rp}|\nabla u|^{p-2}\nabla u] &= \lambda a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma}v^{\beta} && \text{in } \Omega,\\ -\mathrm{div}[|x|^{-sq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v] &= \mu b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta}u^{\alpha} && \text{in } \Omega,\\ u = v &= 0 && \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

under the assumptions

(a_1) Let $a(x), b(x)$ be weight functions such that $a_0 \le a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma} \le a_1$, $b_0 \le b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta} \le b_1$.

(a_2) $0 < \alpha < p-1$ and $0 < \beta < q-1$.

Corollary 4.1. *If (a_1) and (a_2) are hold, then system (4.1) has a large positive weak solution for λ, μ large.*

Proof. If $f(v) = v^{\beta}, g(u) = u^{\alpha}$, then (H_4) implies $\alpha\beta < (p-1)(q-1)$. Then, according to theorem 3.1 with $\varrho_p = \varrho_q = 0$, system (4.1) has a large positive weak solution for λ, μ large.

Remark 4.1. *Existence results obtained in this paper still hold if we replace the condition (2.6), given in (H_4), by the condition $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f[M(g(x))^{\frac{1}{q-1}}]}{x^{p-1}} = 0$, for every $M > 0$.*

Remark 4.2. *The results of this paper generalize and complement some results reported in the literature:*

1) If $|x|^{-rp} = |x|^{-sq} = 1, p = q = 2, \varrho_p = \varrho_q = 1, \lambda = \mu = 1$ and $a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma} = b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta} = 1$, then we have some results for the existence theorem in [1].

2) If $|x|^{-rp} = |x|^{-sq} = 1, p = q, \varrho_p = \varrho_q = 0, \lambda = \mu$ and $a(x)|x|^{-(r+1)p+\gamma} = b(x)|x|^{-(s+1)q+\delta} = 1$, then we have some results for the existence theorem in [7].

3) If $|x|^{-rp} = |x|^{-sq} = 1, p = q = 2, \varrho_p = \varrho_q = 0, |x|^{-(r+1)p+\gamma} = |x|^{-(s+1)q+\delta} = 1$ and $\lambda = \mu$, then we have some results for the existence theorem in [22].

4) If $|x|^{-rp} = |x|^{-sq} = 1, \varrho_p = \varrho_q = 0, |x|^{-(r+1)p+\gamma} = |x|^{-(s+1)q+\delta} = 1$ and $\lambda = \mu$, then we have some results for the existence and nonexistence theorems in [23].

Список литературы

[1] G. Afrouzi, S. Ala, “An existence result of positive solutions for a class of Laplacian system”, Int. Journal of Math. Analysis, **4**, 2075 – 2078 (2010).

[2] G. Afrouzi, A. Samira, S. Kazemipoor, “Existence of positive solutions for a class of $p-$Laplacian systems”, Int. J. Nonlinear Sci., **8** (4), 424 – 427 (2009).

[3] M. Bouchekif, H. Serag, F. de Th´elin, “On Maximum Principle and Existence of Solutions for Some Nonlinear Elliptic Systems”, Rev. Mat. Apl., **16**, 1 – 16 (1995).

[4] A. Canada, P. Drabek, J. Games, “Existence of Positive solutions for some problems with nonlinear diffusion”, Trans. Amer. Math. Soc. **349**, 4231 – 4249 (1997).

[5] M. Chhetri, D. Hai, R. Shivaji, "On positive solutions for classes of $p-$Laplacian semipositone system", Discrete and Dynamical Systems, **9** (4), 1063 – 1071 (2003).

[6] R. Dalmasso, "Existence and uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic systems", Nonlinear Anal. **39**, 559 – 568 (2000).

[7] D. Hai, R. Shivaji, "An existence result on positive solutions for a class of $p-$Laplacian systems". Nonlinear Anal. **56**, 1007 – 1010 (2004).

[8] D. Hai, R. Shivaji, "An existence result on positive solutions for a class of semilinear elliptic systems", Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A 134**, 137 – 141 (2004).

[9] S. Khafagy, "Existence results for weighted $(p, q)-$Laplacian nonlinear system", Appl. Math. E-Notes, **17**, 242 – 250 (2017).

[10] S. Khafagy, "Maximum Principle and Existence of Weak Solutions for Nonlinear System Involving Weighted $(p, q)-$Laplacian", Southeast Asian Bull. Math., **40**, 353 – 364 (2016).

[11] S. Khafagy, "MaximumPrinciple and Existence of Weak Solutions forNonlinear SystemInvolving Singular p-Laplacian Operators", J. Part. Diff. Eq., **29,** 89 – 101 (2016).

[12] S. Khafagy, "Non-existence of positive weak solutions for some weighted p-Laplacian system", J. Adv. Res. Dyn. Control Syst., **7,** 71 – 77 (2015).

[13] S. Khafagy, "On positive weak solutions for a class of weighted $(p, q)-$Laplacian nonlinear system", Romanian J. Math. Comp. Sci., **7,** 86– 92 (2017).

[14] S. Khafagy, "On positive weak solutions for a class of nonlinear system", Ital. J. Pure Appl. Math., **40**, 149 – 156 (2018).

[15] S. Khafagy, "On positive weak solution for a nonlinear system involving weighted $(p, q)-$Laplacian operators", J. Math. Anal., **9** (3), 86 – 96 (2018).

[16] S. Khafagy, "On positive weak solutions for nonlinear elliptic system involving singular $p-$Laplacian operator". J. Math. Anal., **7** (5), 10 – 17 (2016).

[17] S. Khafagy, "On the stabiblity of positive weak solution for weighted $p-$Laplacian nonlinear system", New Zealand J. Math., **45**, 39 – 43 (2015).

[18] S. Khafagy, H. Serag, "Existence of Weak Solutions for $n \times n$ Nonlinear Systems Involving Different $p-$Laplacian Operators", Electron. J. Diff. Eqns., **2009** (81), 1 – 14 (2009).

[19] S. Khafagy, H. Serag, "Stability results of positive weak solution for singular $p-$Laplacian nonlinear system", J. Appl. Math. & Informatics, **36** (3-4), 173 – 179 (2018).

[20] E. Lee, R. Shivaji, J. Ye, "Positive solutions for elliptic equations involving nonlinearities with falling zeroes", Appl. Math. Lett., **22,** 846 – 851 (2009).

[21] O. Miyagaki, R. Rodrigues, "On positive solutions for a class of singular quasilinear elliptic systems", J. Math. Anal. Appl. **334**, 818 – 833 (2007).

[22] S. Rasouli, Z. Halimi, Z. Mashhadban, "A note on the existence of positive solution for a class of Laplacian nonlinear system with sign-changing weight",TJMCS **3** (3), 339 – 345 (2011).

[23] S. Rasouli, Z. Halimi, Z. Mashhadban, "A remark on the existence of positive weak solution for a class of $(p, q)-$Laplacian nonlinear system with sign-changing weight", Nonlinear Anal., **73**, 385 – 389 (2010).

[24] H. Serag, S. Khafagy, "Existence of Weak Solutions for $n \times n$ Nonlinear Systems Involving Different Degenerated $p-$Laplacian Operators", New Zealand J. Math., **38**, 75 – 86 (2008).

[25] H. Serag, S. Khafagy, "On Maximum Principle and Existence of Positive Weak Solutions for $n \times n$ Nonlinear Systems Involving Degenerated $p-$Laplacian Operator", Turk J M, **34,** 59 – 71 (2010).

[26] B. Xuan, "Multiple solutions to a Ca arelli-Kohn-Nirenberg type equation with asymptotically linear term", rev.colomb.mat. **37**, 65 – 79 (2003).

[27] B. Xuan, "The eigenvalue problem for a singular quasilinear elliptic equation", Electron. J. Diff. Eqns., **2004** (16), 1 – 11 (2004).

Поступила 28 июня 2019

После доработки 18 октября 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 4, 2020, стр. 75 – 88

FACTORIZATION THEOREMS OF CESÀRO AND COPSON SPACES ON TIME SCALES

S. H. SAKER, R. R. MAHMOUD

Mansoura University, Mansoura-Egypt
Rustaq College of Education, Ministry of Higher Education, Sultanate of Oman
Fayoum University, Fayoum-Egypt
E-mails: *shsaker@mans.edu.eg; ramy.ramadan.rus@cas.edu.om rrm00@fayoum.edu.eg*

Abstract. In this paper, we prove some factorization theorems of Cesàro and Copson spaces on an arbitrary time scale $\mathbb{T}$, which offer enhancements of dynamic Copson's and Hardy's inequalities. Our results enhance, among others, the best-known forms of dynamic Hardy's inequality. The main results will be proved by employing the time scales Hölder's inequality and the derived time scales power rule of integration.

MSC2010 numbers: 26D15; 34A40; 34N05.
Keywords: Cesàro function spaces; Copson function spaces; factorization; Hardy's inequality.

1. Introduction

In 1920 Hardy [7] proved the discrete inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p, \quad p>1. \tag{1.1}$$

This inequality has been discovered in his attempt to give an elementary proof of Hilbert's inequality for double series that was known at that time, where $a_n \geq 0$ for $n \geq 1$. In 1925 Hardy [8] proved the continuous inequality, using the calculus of variations, which states that for $f \geq 0$, integrable over any finite interval $(0, x)$, f^p is integrable, convergent over $(0, \infty)$ and $p > 1$, then

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{\infty}f^p(x)dx. \tag{1.2}$$

The constant $(p/(p-1))^p$ in (1.1) and (1.2) is the best possible. Hardy's inequalities (1.1) and (1.2), can be interpreted as inclusions between the space of sequences l_p (i.e. space of all sequences $(a_n)_{n\geq 1}$ such that $(\sum_{n=1}^{\infty}|a_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$) and Cesàro space of sequences (respectively functions). That is

$$l_p \subseteq \mathrm{ces}(p),\ p > 1.$$

The Cesàro space of sequences is defined to be the set of all real sequences $(a_n)_{n\geq 1}$ that satisfy

$$\|a\|_{Ces_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

and the Cesàro space of functions is defined to be the set of all Lebesgue measurable real functions on $[0,\infty)$ such that

$$\|f\|_{Ces_p} = \left(\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

The same interpretation is valid if the Hardy operator is substituted by its dual. In his celebrated book, Bennett [4, Theorem 4.5] "enhanced" the classical Hardy inequality by substituting it with an equality, factorizing the Cesàro space of sequences, with the final aim to characterize its Köthe dual. He proved that a sequence x belongs to the Cesàro space of sequences $\text{ces}(p)$ if and only if it admits a factorization

$$x = y \cdot z \tag{1.3}$$

with

$$y \in l_p \text{ and } z_1^{p^*} + z_2^{p^*} + \cdots + z_n^{p^*} = O(n), \tag{1.4}$$

where $p^* = \frac{p}{p-1}$ is the conjugate index of p. This factorization gives also a better insight in the structure of Cesàro spaces. Since the discovery of this new way of looking at inequalities, various papers which deal with new proofs, generalizations and extensions have appeared in the literature. Several mathematicians such as Barza [3], Carton and Heinig (see [6]), Manna [12], Johnson and Mohapatra (see [9], [10] and [11]) studied the generalizations of the sequence spaces l_p and $\text{ces}(p)$.

The natural question emerges now: Is it possible to extend the factorization concept (1.3) and (1.4) to an arbitrary time scale $\mathbb{T}$ and obtain their continuous and discrete analogues as special cases?. The aim of this paper is to give an affirmative answer to this question. In particular, we will prove the time scales version of Bennett's result. The main results will be proved by applying the time scales Hölder's inequality and the time scales power rule of integration.

The paper is organized in the following way: In Section 2, we give some basic concepts of the calculus on time scales and some other lemmas which will be used throughout the paper. In Section 3, we prove the main results of the paper.

2. Preliminaries and basic lemmas

In this section, we present some basic definitions concerning the delta calculus on time scales. A time scale $\mathbb{T}$ is an arbitrary nonempty closed subset of the real numbers. For $t \in \mathbb{T}$, we define the forward jump operator $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ by $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$. The mapping $\mu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ such that $\mu(t) := \sigma(t) - t$ is called graininess. A function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is said to be right–dense continuous ($rd-$continuous) if it is right continuous at each right–dense point and there exists a finite left limit at all left–dense points, and f is said to be differentiable if its derivative exists. The space of $rd-$continuous functions is denoted by $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. In addition, we presume that $\sup \mathbb{T} = \infty$ and the time scale interval $[a, b]_{\mathbb{T}}$ is defined by $[a, b]_{\mathbb{T}} := [a, b] \cap \mathbb{T}$. For a function $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, we define the delta derivative f^{Δ} as follows: For $t \in \mathbb{T}$, if there exists a number $\alpha \in \mathbb{R}$ such that for all $\varepsilon > 0$ there exists a neighborhood U of t with

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \alpha(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|,$$

for all $s \in U$, then f is said to be differentiable at t, and we call α the delta derivative of f at t denoted by $f^{\Delta}(t)$. For example, if $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, then

$$f^{\Delta}(t) = f^{'}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \text{ for all } \ t \in \mathbb{T}.$$

If $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, then $f^{\Delta}(t) = f(t+1) - f(t)$ for all $t \in \mathbb{T}$. A useful formula is $f^{\sigma} = f + \mu f^{\Delta}$, where $f^{\sigma} := f \circ \sigma$. The following theorem gives the product rule for the derivative of the product fg of two differentiable functions f and g. Assume f, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ are delta differentiable at $t \in \mathbb{T}$, Then

$$(fg)^{\Delta} = f^{\Delta} g + f^{\sigma} g^{\Delta} = f g^{\Delta} + f^{\Delta} g^{\sigma}. \tag{2.1}$$

Now, we pass to the antiderivative and the integration on time scales for detla differentiable functions. For $a, b \in \mathbb{T}$, and a delta differentiable function f, the Cauchy integral of f^{Δ} is defined by

$$\int_a^b f^{\Delta}(t)\Delta t = f(b) - f(a).$$

An integration by parts formula reads

$$\int_a^b f(t) g^{\Delta}(t)\Delta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^{\Delta}(t) g^{\sigma}(t)\Delta t. \tag{2.2}$$

More details about delta calculus on time scales and the corresponding integral can ce found in [5, Chapter 1]. In the following, we present a time scales chain rule. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuously differentiable and suppose $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is delta differentiable. Then $f \circ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is delta differentiable and the formula

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f^{'}(g(t) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)) dh \right\} g^{\Delta}(t), \tag{2.3}$$

holds. A special case of (2.3) is given by

$$(x^{\gamma}(t))^{\Delta}=\gamma\int_{0}^{1}\left[hx^{\sigma}+(1-h)x\right]^{\gamma-1}dhx^{\Delta}(t),\quad \gamma>0. \tag{2.4}$$

The Hölder inequality, see [5, Theorem 6.13], on time scales is given by

$$\int_{a}^{b}|f(t)g(t)|\Delta t\leq\left[\int_{a}^{b}|f(t)|^{\gamma}\Delta t\right]^{\frac{1}{\gamma}}\left[\int_{a}^{b}|g(t)|^{\nu}\Delta t\right]^{\frac{1}{\nu}}, \tag{2.5}$$

where $a,\, b\in\mathbb{T}$ and $f,\, g\in \mathrm{C}_{rd}(\mathbb{I},\mathbb{R})$, $\gamma>1$ and $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\nu}=1$.

In the following, we will introduce the time scales power rule for integration presented and proved in [14].

Lemma 2.1. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with $a,x\in\mathbb{T}$ and $x\geq a$. If $0<p<1$, then*

$$\left(\int_{a}^{\sigma(x)}f(t)\Delta t\right)^{p}\geq p\int_{a}^{\sigma(x)}f(t)\left(\int_{a}^{\sigma(t)}f(s)\Delta s\right)^{p-1}\Delta t, \tag{2.6}$$

the inequality reversed for $p\geq 1$.

Lemma 2.2. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with $b\in\mathbb{T}$. If $0<p<1$, then*

$$\left(\int_{x}^{b}f(t)\Delta t\right)^{p}\geq p\int_{x}^{b}f(t)\left(\int_{t}^{b}f(s)\Delta s\right)^{p-1}\Delta t, \tag{2.7}$$

for $x\in\mathbb{T}$, $x\leq b$. The inequality reversed for $p\geq 1$.

The following special form of the dynamic Mikowski inequality, presented in [14],will be needed in the sequel.

Lemma 2.3. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with $a,\, b\in\mathbb{T}$ and let f and g be nonnegative $rd-$continuous functions on $[a,b]_{\mathbb{T}}$. If $m\geq 1$, then*

$$\left(\int_{a}^{b}f(t)\left(\int_{a}^{\sigma(t)}g(s)\Delta s\right)^{m}\Delta t\right)^{\frac{1}{m}}\leq\int_{a}^{b}g(s)\left(\int_{s}^{b}f(t)\Delta t\right)^{m}\Delta s. \tag{2.8}$$

Finally, the following two Hardy's lemmas will play a remarkable role in the proofs of our main results, see [15, Page 476] for their detailed proofs.

Lemma 2.4. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with $a,\, b\in\mathbb{T}$ and $f,\, g,\, h\in \mathrm{C}_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^{+})$. If*

$$\int_{a}^{\sigma(t)}f(x)\Delta x\leq\int_{a}^{\sigma(t)}g(x)\Delta x,$$

then

$$\int_{a}^{b}f(t)H(t)\Delta t\leq\int_{a}^{b}g(t)H(t)\Delta t, \tag{2.9}$$

where $H(t):=\int_{t}^{b}h(x)\Delta x$.

Lemma 2.5. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with a, $b \in \mathbb{T}$ and f, g, $h \in \mathrm{C}_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^{+})$. If k is a positive constant such that*

$$F(t) := \int_t^b f(x)\Delta x \le k \int_t^b g(x)\Delta x := kG(t),$$

then

$$\int_t^b f(t)H^{\sigma}(t)\Delta t \le k \int_t^b g(t)H^{\sigma}(t)\Delta t, \tag{2.10}$$

where $H^{\sigma}(t) := \int_a^{\sigma(t)} h(x)\Delta x$.

3. Factorization theorems of Cesàro space

Throughout this section (without mentioning) the integrals in the statements of the theorems are assumed to exist. We assume throughout the paper that $\mathbb{T}$ has the topology that it inherits from the standard topology on the real numbers $\mathbb{R}$ and assume that the functions in the statements of the theorems are rd-continuous and $\Delta-$integrable functions defined on $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$. We say that the function $f : [0,\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ belongs to the space $L^p_{\Delta}(\mathbb{T})$ if

$$\|f\|_{L^p_{\Delta}(\mathbb{T})} = \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p \Delta t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ if } 1 \le p < \infty$$

or there exists a constant $C \in \mathbb{R}^{+}$ such that $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \ge 0} |f(t)| < C$, if $p = +\infty$. The Cesàro space $Ces^p_{\Delta}(\mathbb{T})$ for $p \ge 1$ is the space of all functions f defined on $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ such that

$$\|f\|_{Ces^p_{\Delta}(\mathbb{T})} = \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(x)} \int_0^{\sigma(x)} |f(t)|\,\Delta t\right)^p \Delta x\right)^{1/p} < \infty. \tag{3.1}$$

For $p \ge 1$, the space $Ces^p_{\Delta}(\mathbb{T})$ is obvious a Banach space with the norm (3.1). For $1 \le p < \infty$, we define the function space $G_{\Delta}(p)$ as

$$G_{\Delta}(p) := \left\{ h : \sup_{x>0} \left(\frac{1}{\sigma(x)} \int\limits_0^{\sigma(x)} |h(t)|^p \,\Delta t \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

and we denote

$$!f!_p = \inf\left\{\|g\|_p \|h\|_{G_{\Delta}(p^*)}\right\},$$

where infimum is taken over all factorizations $f = g \cdot h$ with $g \in L^p_{\Delta}(\mathbb{T})$ and $h \in G_{\Delta}(p^*)$.

Theorem 3.1. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with $a \in \mathbb{T}$. If $1 < p < \infty$, then*

$$Ces^p_{\Delta}(\mathbb{T}) = L^p_{\Delta}(\mathbb{T}) \cdot G_{\Delta}(p^*), \tag{3.2}$$

which means that the function f belongs to $Ces^p_\Delta(\mathbb{T})$ if and only if it admits a factorization $f = g \cdot h$ with $g \in L^p_\Delta(\mathbb{T})$, $h \in G_\Delta(p^*)$ and

$$(p-1)^{\frac{-1}{p}} !f!_p \leq \|f\|_{Ces^p_\Delta} \leq p^* !f!_p. \tag{3.3}$$

Proof. "Imbedding $\hookrightarrow$". For $f \in Ces^p_\Delta(\mathbb{T})$, $f \neq 0$ and $x > 0$, let

$$k(x) = \int_x^\infty u^{-1} \left(\frac{1}{\sigma(u)} \int_0^{\sigma(u)} |f(t)| \, \Delta t \right)^{p-1} \Delta u.$$

Then $k(x) > 0$, k is decreasing and by Hölder's inequality (2.5)

$$\begin{aligned} k(x) &= \int_x^\infty u^{-1} \left(\frac{1}{\sigma(u)} \int_0^{\sigma(u)} |f(t)| \, \Delta t \right)^{p-1} \Delta u \\ &\leq \left(\int_x^\infty u^{-p} \Delta u \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^\infty \left(\frac{1}{\sigma(u)} \int_0^{\sigma(u)} |f(t)| \, \Delta t \right)^p \Delta u \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Using time scales chain rule (2.4) on the term $\left(\int_x^\infty u^{-p} \Delta u\right)^{\frac{1}{p}}$, we get that

$$\left(\int_x^\infty u^{-p} \Delta u \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} x^{1-\frac{1}{p}}},$$

which leads directly to

$$k(x) \leq \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} x^{1-\frac{1}{p}}} \|f\|^{p-1}_{Ces^p_\Delta}.$$

Consider the factorization $f = g \cdot h$, where

$$g(x) = (|f(x)| \, k(x))^{\frac{1}{p}} \ \operatorname{sgn} f(x) \qquad \text{and} \qquad h(x) = |f(x)|^{\frac{1}{p^*}} k(x)^{\frac{-1}{p}}.$$

Applying Lemma 2.3, we obtain that

$$\begin{aligned} \|g\|^p_p &= \int_0^\infty |f(x)| \int_x^\infty u^{-p} \left(\int_0^{\sigma(u)} |f(t)| \, \Delta t \right)^{p-1} \Delta u \Delta x \\ &\leq \int_0^\infty u^{-p} \left(\int_0^{\sigma(u)} |f(t)| \, \Delta t \right)^{p-1} \int_0^{\sigma(u)} |f(x)| \, \Delta x \Delta u = \|f\|^p_{Ces^p_\Delta}. \end{aligned}$$

By using Hölder's inequality (2.5), we get that

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\sigma(x)} |h(t)|^{p^*} \Delta t \right)^p &= \left(\int_0^{\sigma(x)} |f(t)|^{\frac{1}{p^*}} |f(t)|^{\frac{1}{p}} k(t)^{\frac{-p^*}{p}} \Delta t \right)^p \\ &\leq \left(\int_0^{\sigma(x)} |f(t)| \, \Delta t \right)^{p-1} \left(\int_0^{\sigma(x)} |f(t)| \, k(t)^{-p^*} \Delta t \right). \end{aligned}$$

Since $k(x)$ is decreasing, we have that

$$\begin{aligned} & \int_x^\infty \left(\frac{1}{\sigma(s)}\int_0^{\sigma(x)} |h(t)|^{p^*}\Delta t\right)^p \Delta s \\ \leq\ & \int_x^\infty s^{-1}\left[\left(\frac{1}{\sigma(s)}\int_0^{\sigma(x)} |f(t)|\Delta t\right)^{p-1}\left(\int_0^{\sigma(x)} |f(t)|\,k(t)^{-p^*}\Delta t\right)\right]\Delta s \\ =\ & k(x)\int_0^{\sigma(x)} |f(t)|\,k(t)^{-p^*}\Delta t \\ \leq\ & \int_0^{\sigma(x)} |f(t)|\,k(t)^{1-p^*}\Delta t = \int_0^{\sigma(x)} |h(t)|^{p^*}\Delta t, \end{aligned}$$

equivalently,

$$\int_x^\infty (\sigma(s))^{-p}\Delta s\left(\int_0^{\sigma(x)} |h(t)|^{p^*}\Delta t\right)^{p-1} \leq 1,$$

which leads to

$$\left(\int_0^{\sigma(x)} |h(t)|^{p^*}\Delta t\right)^{p-1} \leq (p-1)\,x^{p-1},$$

and hence (note that $x \leq \sigma(x)$)

$$\sup_{x>0}\frac{1}{\sigma(x)}\int_0^{\sigma(x)} |h(t)|^{p^*}\Delta t \leq (p-1)^{\frac{1}{p-1}},$$

or $\|h\|_{G_\Delta(p^*)} \leq (p-1)^{\frac{1}{p}}$, which proved that

$$Ces_\Delta^p \subset L_\Delta^p(\mathbb{T})\cdot G_\Delta(p^*),$$

and $(p-1)^{\frac{-1}{p}}!f! \leq \|f\|_{Ces_\Delta^p}$ which proves the right hand side.

"Imbedding $\hookleftarrow$". Let $f = g\cdot h$ with $g \in L_\Delta^p(\mathbb{T})$, $h \in G_\Delta(p^*)$. Then

$$\int_0^{\sigma(x)} |h(t)|^{p^*}\Delta t \leq \|h\|_{G_\Delta(p^*)}^{p^*}\int_0^{\sigma(x)}\Delta t.$$

Applying Lemma 2.4 for any decreasing function w on $(0,\infty)_\mathbb{T}$, we get that

$$\int_0^{\sigma(x)} |h(t)|^{p^*} w(t)\Delta t \leq \|h\|_{G_\Delta(p^*)}^{p^*}\int_0^{\sigma(x)} w(t)\Delta t.$$

By Hölder's inequality (2.5), we find that

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\sigma(x)} |f(t)|\Delta t\right)^p &= \left(\int_0^{\sigma(x)} |g(t)|\,w^{\frac{-1}{p^*}}(t)\,|h(t)|\,w^{\frac{1}{p^*}}(t)\Delta t\right)^p \\ &\leq \int_0^{\sigma(x)} |g(t)|^p\,w^{1-p}(t)\Delta t\left(\int_0^{\sigma(x)} |h(t)|^{p^*} w(t)\Delta t\right)^{p-1} \\ &\leq \int_0^{\sigma(x)} |g(t)|^p\,w^{1-p}(t)\Delta t\,\|h\|_{G_\Delta(p^*)}^{p^*}\left(\int_0^{\sigma(x)} w(t)\Delta t\right)^{p-1}, \end{aligned}$$

and, thus

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma(x)}\int_0^{\sigma(x)} |f(t)|\,\Delta t\right)^p \Delta x \\
\leq\ &\int_0^\infty (\sigma(x))^{-p}\left(\int_0^{\sigma(x)} |g(t)|^p\, w^{1-p}(t)\Delta t\right)\left(\int_0^{\sigma(x)} w(t)\Delta t\right)^{p-1} \Delta x\, \|h\|^p_{G_\Delta(p^*)}.
\end{aligned}$$

Taking in the last estimate $w(t)=t^{-\frac{1}{p}}$, we obtain that (note that $\frac{1}{\sigma(x)} \leq \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{Ces^p_\Delta(\mathbb{T})} &\leq \int_0^\infty x^{-p}\left(\int_0^{\sigma(x)} |g(t)|^p\, t^{1-\frac{1}{p}}(t)\Delta t\right)\left(\frac{x^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}}\right)^{p-1}\Delta x\, \|h\|^p_{G_\Delta(p^*)} \\
&= (p^*)^{p-1}\int_0^\infty \left(\int_0^{\sigma(x)} |g(t)|^p\, t^{1-\frac{1}{p}}(t)\Delta t\right) x^{\frac{1}{p}-2}\Delta x\, \|h\|^p_{G_\Delta(p^*)}.
\end{aligned}$$

Using Lemma (2.3), we obtain that

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{Ces_p} &\leq (p^*)^{p-1}\int_0^\infty \left(\int_t^\infty x^{\frac{1}{p}-2}\Delta x\right)|g(t)|^p\, t^{1-\frac{1}{p}}\Delta t\, \|h\|^p_{G_\Delta(p^*)} \\
&\leq (p^*)^p\int_0^\infty |g(t)|^p\,\Delta t\, \|h\|^p_{G_\Delta(p^*)} = (p^*)^p\, \|g\|^p_p\, \|h\|^p_{G_\Delta(p^*)},
\end{aligned}$$

or $\|f\|_{Ces^p_\Delta(\mathbb{T})} \leq p^*\, \|g\|_p\, \|h\|_{G_\Delta(p^*)}$, that is,

$$L^p_\Delta(\mathbb{T}) \cdot G_\Delta(p^*) \subset Ces^p_\Delta(\mathbb{T}),$$

and $\|f\|_{Ces^p_\Delta(\mathbb{T})} \leq p^*!f!$ which proved the left hand side of (3.3). The proof is complete. □

As a consequence from Theorem 3.1, we could get the best form of the dynamic Hardy inequality for $1<p<\infty$ due to Řehák [13] with the same constant.

Corollary 3.1. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with $0\in\mathbb{T}$, f are positive rd-continuous functions defined on $[0,\infty)_\mathbb{T}$. If $1<p<\infty$, then*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma(t)}\int_0^{\sigma(t)} |f(t)|\,\Delta t\right)^p \Delta x \leq (p^*)^p\int_0^\infty f^p(x)\Delta x.$$

Proof. *By taking $f(x)=h(x)$ and $g(x)=1$, $x>0$, the right-hand side of (3.3) results the required inequality. This completes the proof.* □

The next two special cases cover known factorizations to both Cesàro sequence and Cesàro function spaces for $p>1$.

Remark 3.1. *If we set $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ in Theorem 3.1, we get the factorization to unweighted Cesàro function space due to* [2], [3] *and* [6].

Remark 3.2. *If we set $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ in Theorem 3.1, we get the factorization to unweighted Cesàro sequence space due to Bennett* [4].

We conclude this section by presenting the corresponding factorization results for the case $p = 1$. For this case, we will denote

$$\|g\|_{\infty} := ess \sup_{x>0} |g(x)| < \infty,$$

which allows us to define the space $L^{\infty}_{\Delta}(\mathbb{T})$ associated with this norm, and

$$!f!_1 = \inf \left\{ \|g\|_{\infty} \|h\|_{L^1_{\Delta}(\mathbb{T})} \right\},$$

where infimum is taken over all factorizations $f = g \cdot h$ with $g \in L^{\infty}_{\Delta}$ and $h \in L^1_{\Delta}(\mathbb{T})$. By considering

$$k(x) := \int_x^{\infty} \frac{\Delta t}{t} \leq \alpha,$$

we will denote by c_1 the least constant for which the above inequality is satisfied. Similarly, c_2 is the biggest constant for which the reverse inequality is satisfied. Assume that there is some positive constant λ for which the inequality $\sigma(x) \leq \lambda x$ holds.

Theorem 3.2. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale, then the function f belongs to $Ces^1_{\Delta}(\mathbb{T})$ if and only if it admits a factorization $f = g \cdot h$ with $g \in L^{\infty}_{\Delta}(\mathbb{T})$, $h \in L^1_{\Delta}(\mathbb{T})$ and*

$$\lambda c_2 !f!_1 \leq \|f\|_{Ces^1_{\Delta}} \leq c_1 !f!_1. \tag{3.4}$$

Proof. For $g \in L^{\infty}_{\Delta}$ and $h \in L^1_{\Delta}(\mathbb{T})$, we will prove that the factorization $f = g \cdot h$ belongs to $Ces^1_{\Delta}(\mathbb{T})$. Consider the factorization $f = g \cdot h$. Using Hölder's inequality (2.5) we get that

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(x)} \int_0^{\sigma(x)} |f(t)| \, \Delta t \right) \Delta x &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(x)} \int_0^{\sigma(x)} |g(t) \cdot h(t)| \, \Delta t \right) \Delta x \\ &\leq \|g\|_{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(x)} \int_0^{\sigma(x)} |h(t)| \, \Delta t \right) \Delta x. \end{aligned}$$

Applying Lemma 2.3, we obtain that $f \in Ces^1_{\Delta}(\mathbb{T})$ and

$$\|f\|_{Ces^1_{\Delta}(\mathbb{T})} \leq c_1 \inf \left\{ \|g\|_{\infty} \|h\|_{L^1_{\Delta}(\mathbb{T})} \right\},$$

where infimum is taken over all possible factorizations of f. This completes the first part of the proof.

Conversely, suppose that $f \in Ces^1_{\Delta}(\mathbb{T})$ and

$$k(x) = \int_x^{\infty} \frac{\Delta t}{t} > 0, \text{ for all } t > 0.$$

By setting

$$g(x) = (|f(x)| \, k(x)) \ \operatorname{sgn} \ f(x), \ h(x) = k(x)^{-1},$$

this leads directly to

$$\|g\|_{L^1_{\Delta}(\mathbb{T})} \leq \lambda \|f\|_{Ces^1_{\Delta}(\mathbb{T})} < \infty.$$

Moreover, we have that

$$\|f\|_{Ces^1_\Delta} \geq \frac{1}{\lambda}\|h\|_{L^1_\Delta(\mathbb{T})} \geq c_2 \|h\|_{L^1_\Delta(\mathbb{T})} \|g\|_\infty ,$$

which asserts the left-hand side inequality (3.4). This completes the proof. □

4. Factorization theorems of Copson space

Following the same spirit as the previous section, in this section we present the factorization theorems for the Copson spaces Cop^p_Δ, $1 \leq p < \infty$, consisting of all functions f defined on $[0,\infty)_\mathbb{T}$ associated with the norm

$$\|f\|_{Cop^p_\Delta} = \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\Delta t\right)^p \Delta x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

We define the dynamic function spaces $G_\Delta(p)$ as

$$G^*_\Delta(p) := \left\{ f : \sup_{t>0} \left(\frac{1}{\int_t^\infty x^{-p}\Delta x} \int_t^\infty \frac{f(x)^p}{x^p}\Delta x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

and

$$!!f!!_p = \inf\left\{ \|g\|_p \|h\|_{G^*_\Delta(p^*)} \right\},$$

where infimum is taken over all factorizations $f = g \cdot h$ with $g \in L^p_\Delta(\mathbb{T})$ and $h \in G^*_\Delta(p^*)$.

Theorem 4.1. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with $a \in \mathbb{T}$. If $1 < p < \infty$, then*

$$Cop^p_\Delta = L^p_\Delta(\mathbb{T}) \cdot G^*_\Delta(p^*), \tag{4.1}$$

which means that the function f belongs to Cop^p_Δ if and only if it admits a factorization $f = g \cdot h$ with $g \in L^p_\Delta(\mathbb{T})$, $h \in G^*_\Delta(p^*)$ and

$$!!f!!_p \leq \|f\|_{Cop^p_\Delta} \leq p^{\frac{1}{p}} (p^*)^{\frac{1}{p^*}} !!f!!_p. \tag{4.2}$$

Proof. "Imbedding ↪". For $f \in Cop^p_\Delta$, $f \neq 0$ and $x > 0$, let

$$k(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\sigma(x)} \left(\int_t^\infty \frac{f(s)}{s}\Delta s\right)^{p-1} \Delta t.$$

Consider the factorization $f = g \cdot h$, where

$$g(x) = (|f(x)|\, k(x))^{\frac{1}{p}} \ \operatorname{sgn} f(x) \qquad \text{and} \qquad h(x) = |f(x)|^{\frac{1}{p^*}} k(x)^{\frac{-1}{p}}.$$

As in Theorem 3.1 and applying Lemma 2.3, we can obtain that

$$\|g\|^p_p = \|f\|^p_{Cop^p_\Delta} < \infty,$$

but using Hölder's inequality (2.5) and the definition of $h(x)$, we get that

$$\left(\int_x^\infty \left(\frac{h(t)}{t}\right)^{p^*} \Delta t\right)^p \leq \left(\int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\Delta t\right)^{p-1} \int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\frac{k^{-p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t.$$

We estimate first the right-hand side term of the above inequality multiplied by $\sigma(x)$, we have that

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^{\sigma(x)} \Delta t\right)\left(\int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\Delta t\right)^{p-1}\int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\frac{k^{-p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t \\
\leq\ & \left(\int_0^{\sigma(x)}\left(\int_t^\infty \frac{|f(s)|}{s}\Delta s\right)^{p-1}\Delta t\right)\left(\int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\frac{k^{-p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t\right) \\
=\ & x\,k(x)\left(\int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\frac{k^{-p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t\right),
\end{aligned}$$

since, by definition, $\sigma(x)k(x)$ is an increasing function. This implies that

$$\left(\int_0^{\sigma(x)} \Delta t\right)\left(\int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\Delta t\right)^{p-1}\int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\frac{k^{-p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t \leq \int_x^\infty f(t)\frac{k^{1-p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t.$$

From the definition of $h(x)$, we can write that $h^{p^*}(x) = f(x)k^{1-p^*}(x)$, which leads to

$$\begin{aligned}
\left(\int_x^\infty t^{-p^*}\Delta t\right)^{\frac{-1}{p^*}}\left(\int_x^\infty \frac{h^{p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq \frac{1}{\left(\int_0^{\sigma(x)}\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty t^{-p^*}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}}} \\
&\leq \frac{1}{(p^*-1)^{\frac{1}{p^*}}},
\end{aligned}$$

equivalently,

$$\sup_{x>0}\left(\frac{1}{\int_x^\infty t^{-p^*}\Delta t}\int_x^\infty \frac{h^{p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq 1,$$

or $\|h\|_{G^*_\Delta(p^*)} \leq 1$, which means that $h \in G^*_\Delta(p^*)$ and then

$$Cop^p_\Delta \subset L^p_\Delta(\mathbb{T}) \cdot G^*_\Delta(p^*),$$

with

$$!!f!! \leq \|g\|_p^p = \|f\|_{Cop^p_\Delta}.$$

"Imbedding $\hookleftarrow$". Let $f = g\cdot h$ with $g \in L^p_\Delta(\mathbb{T})$, $h \in G^*_\Delta(p^*)$ and $w(t)$ be any increasing function on $(0,\infty)_\mathbb{T}$, we get by Hölder's inequality (2.5) that

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\Delta t &= \int_x^\infty \frac{g(t)h(t)}{t}\Delta t = \int_x^\infty g(t)w^{-1}(t)\frac{h(t)w(t)}{t}\Delta t \\
&\leq \left(\int_x^\infty g^p(t)w^{-p}(t)\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty \frac{h^{p^*}(t)w^{p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Applying Lemma 2.5 to the term $\left(\int_x^\infty \frac{h^{p^*}(t)w^{p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}}$, we get that

$$\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\Delta t \leq \left(\int_x^\infty g^p(t)w^{-p}(t)\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty \frac{w^{p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}}\|h\|_{G^*_\Delta(p^*)},$$

and thus after raising to p^{th} power and integrating from 0 to ∞, we have that

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\Delta t\right)^p\Delta x\\ \leq\ & \|h\|^p_{G^*_\Delta(p^*)}\int_0^\infty\left(\int_x^\infty g^p(t)w^{-p}(t)\Delta t\right)\left(\int_x^\infty \frac{w^{p^*}(t)}{t^{p^*}}\Delta t\right)^{p-1}\Delta x.\end{aligned}$$

Using Lemma 2.3, we obtain that

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\Delta t\right)^p\Delta x\\ \leq\ & \|h\|^p_{G^*_\Delta(p^*)}\int_0^\infty g^p(x)\left(\int_0^{\sigma(x)}\left(\int_t^\infty \frac{w^{p^*}(s)}{s^{p^*}}\Delta s\right)^{p-1}\Delta t\right)w^{-p}(x)\Delta x.\end{aligned}$$

Taking $w(t)=\left(\int_t^\infty x^{-p^*}\Delta x\right)^{\frac{-1}{pp^*}}$ and applying Lemma 2.2, we can write that

$$\int_t^\infty \frac{w^{p^*}(s)}{s^{p^*}}\Delta s=\int_t^\infty \frac{1}{s^{p^*}}\left(\int_t^\infty \frac{1}{x^{p^*}}\Delta x\right)^{\frac{1}{p^*}-1}\Delta s\leq p^*\left(\int_t^\infty s^{-p^*}\Delta s\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Inserting this in the above inequality,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\Delta t\right)^p\Delta x\\ \leq\ & (p^*)^{p-1}\|h\|^p_{G^*_\Delta(p^*)}\int_0^\infty g^p(x)\left(\int_0^{\sigma(x)}\left(\int_t^\infty \frac{1}{s^{p^*}}\Delta s\right)^{\frac{p-1}{p^*}}\Delta t\right)\left(\int_x^\infty t^{-p^*}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}}\Delta x\\ =\ & (p^*)^{p-1}\|h\|^p_{G^*_\Delta(p^*)}\int_0^\infty g^p(x)\left(\int_x^\infty t^{-p^*}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}}\\ &\times\left(\int_0^{\sigma(x)}\left(\int_0^{\sigma(t)}\Delta s\right)^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_t^\infty \frac{1}{s^{p^*}}\Delta s\right)^{\frac{p-1}{p^*}}\left(\int_0^{\sigma(t)}\Delta s\right)^{\frac{p-1}{p}}\Delta t\right)\Delta x.\end{aligned}$$

By the definition of the constant C, we can write

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\Delta t\right)^p\Delta x\leq (p^*)^{p-1}\|h\|^p_{G^*_\Delta(p^*)}\int_0^\infty g^p(x)\left(\int_x^\infty t^{-p^*}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}}\\ &\times\left(\int_0^{\sigma(x)}\left(\int_0^{\sigma(t)}\Delta s\right)^{\frac{1}{p}-1}\left(\frac{1}{(p^*-1)^{\frac{1}{p^*}}}\left(\frac{\sigma(t)}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1}\Delta t\right)\Delta x\\ =\ & (p^*)^{p-1}\|h\|^p_{G^*_\Delta(p^*)}\int_0^\infty g^p(x)\left(\int_x^\infty t^{-p^*}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}}\\ &\times\left(\int_0^{\sigma(x)}(\sigma(t))^{\frac{1}{p}-1}\frac{1}{(p^*-1)^{\frac{p-1}{p^*}}}\left(\frac{\sigma(t)}{t}\right)^{\frac{p-1}{p}}\Delta t\right)\Delta x\\ =\ & (p^*)^{p-1}\|h\|^p_{G^*_\Delta(p^*)}\int_0^\infty g^p(x)\left(\int_x^\infty t^{-p^*}\Delta t\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\frac{1}{(p^*-1)^{\frac{p-1}{p^*}}}\int_0^{\sigma(x)} t^{\frac{-1}{p^*}}\Delta t\right)\Delta x,\end{aligned}$$

Finally, after using time scales chain rule (2.4) to estimate the inner integrals, we can easily obtain that

$$\|f\|^p_{Cop^p_\Delta} \leq p\,(p^*)^{p-1}\,\|h\|^p_{G^*_\Delta(p^*)} \int_0^\infty g^p(x)\Delta x,$$

or $\|f\|_{Cop^p_\Delta} \leq p^{\frac{1}{p}}\,(p^*)^{\frac{1}{p^*}}\,\|g\|_p\,\|h\|_{G^*_\Delta(p^*)}$, that is,

$$L^p_\Delta(\mathbb{T}) \cdot G^*_\Delta(p^*) \subset Cop^p_\Delta,$$

and $\|f\|_{Cop^p_\Delta} \leq p^{\frac{1}{p}}\,(p^*)^{\frac{1}{p^*}} !!f!!$. This completes the proof. □

As a consequence from Theorem 3.1, we could get the best form of the dynamic Copson inequality for $1 < p < \infty$ (see [1]).

Corollary 4.1. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with $0 \in \mathbb{T}$, f are positive rd-continuous functions defined on $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$. If $1 < p < \infty$, then*

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{|f(t)|}{t}\Delta t\right)^p \Delta x \leq p^{\frac{1}{p}}\,(p^*)^{\frac{1}{p^*}} \int_0^\infty f^p(x)\Delta x.$$

Proof. By taking $f(x) = h(x)$ and $g(x) = 1$, $x > 0$, the right-hand side of (4.2) results the required inequality. This completes the proof. □

The next two special cases cover known factorizations to both unweighted Copson sequence and Copson function spaces for $p > 1$.

Remark 4.1. *If we set $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ in Theorem 4.1, we get the factorization to Copson function space due to* [2] *and* [3].

Remark 4.2. *If we set $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ in Theorem 4.1, we get the factorization to Copson sequence space due to Bennett* [4, Theorem 5.5].

We conclude this section by presenting the corresponding factorization results for the case $p = 1$. For this case, by denoting $\|g\|_\infty := \sup_{x>0} |g(x)| < \infty$, we get that

$$\int_t^\infty \frac{g^p(x)}{x^p}\Delta x \leq \|g\|_\infty \int_t^\infty \frac{1}{x^p}\Delta x,$$

and $!!f!!_1 = \inf\left\{\|g\|_\infty\,\|h\|_{L^1_\Delta(\mathbb{T})}\right\}$, where infimum is taken over all factorizations $f = g \cdot h$ with $g \in L^\infty_\Delta(\mathbb{T})$ and $h \in L^1_\Delta(\mathbb{T})$. Suppose that there is some constant C for which the inequality $\sigma(x) \leq Cx$, and assume that there exists a positive constant c_4 the least constant for which this inequality is satisfied. Similarly, c_5 is the biggest constant for which the reverse inequality is satisfied. The proof of the following theorem is similar to the proof of Theorem 3.2 and hence is omitted.

Theorem 4.2. *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with $a \in \mathbb{T}$. The function f belongs to Cop^1_Δ if and only if it admits a factorization $f = g \cdot h$ with $g \in L^\infty_\Delta(\mathbb{T})$, $h \in L^1_\Delta(\mathbb{T})$ and*

$$c_5 !!f!!_1 \leq \|f\|_{Cop^1_\Delta} \leq c_4 !!f!!_1. \tag{4.3}$$

Список литературы

[1] R. P. Agarwal, D. O'Regan and S. H. Saker, Hardy Type Inequalities on Time Scales, Springer, Cham (2016).
[2] S. Astashkin and L. Maligranda, "Structure of Cesàro function spaces", Indag. math. **20** (3), 329 – 379 (2009).
[3] S. Barza, A. Marcoci and L. Marcoci, "Factorizations of weighted Hardy inequalities", Bull. Braz. Math. Soc. New Series, **49** (4), 915 – 932 (2018).
[4] G. Bennett, "Factorizing the Classical Inequalities", Memoirs of Amer. Math. Soc. 120 (No. 576), 1 – 130 (1996).
[5] M. Bohner and A. Peterson, Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, Birkhäuser, Boston, Mass, USA (2001).
[6] C. Carton-Lebrun, H. P. Heinig, "Weight characterization of an averaging operator, J. Math. Anal. Appl. 283 (1), 236 – 243 (2003).
[7] G. H. Hardy, "Notes on a theorem of Hilbert", Math. Z. 6, 314 – 317 (1920).
[8] G. H. Hardy, "Notes on some points in the integral calculus (LX). An inequality between integrals", Messenger Math. **54**, 150 – 156 (1925).
[9] Jr. P. D. Johnson and R. N. Mohapatra, "Density of finitely non-zero sequences in some sequence spaces", Math. Japonica **24**, 253 – 262 (1979).
[10] Jr. P. D. Johnson and R. N. Mohapatra, "On inequalities related to sequence spaces ces$[p,q]$", General Inequalities **4**, (W. Walter Ed.), Vol. 71: International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 191 – 201 (1984).
[11] Jr. P. D. Johnson and R. N. Mohapatra, "On an analogue of Hardy's inequality", Arch. Math. **60**, 157 – 163 (1993).
[12] A. Manna, "Factorized enhancement of Copson's inequality", Tamk. J. Math. **49** (3), 195 – 203 (2018).
[13] P. Řehák, "Hardy inequality on time scales and its application to half-linear dynamic equations", J. Ineq. Appl. **5**, 495 – 507 (2005).
[14] S. H. Saker, R. R. Mahmoud and A. Peterson, "Weighted Hardy-type inequalities on time scales with applications", Mediterr. J. Math. **13** (2), 585 – 606 (2016).
[15] S. H. Saker, R. R. Mahmoud and A. Peterson, "Some Bennett-Copson type inequalities on time scales", J. Math. Ineq. **10**, 471 – 489 (2016).

Поступила 17 апреля 2019

После доработки 23 июля 2019

Принята к публикации 11 октября 2019

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 55, номер 4, 2020

Содержание

E. A. Adegani, T. Bulboacă, A. Motamednezhad, Sufficient condition for p-valent strongly starlike functions ... 3

Ф. В. Айрапетян, Весовые интегральные представления голоморфных функций в единичном круге посредством ядер типа Миттаг-Леффлера ... 15

S. Falihi, A. Bodaghi, B. Shojaee, On the Noether and the Cayley-Bacharach theorems with PD multiplicities ... 31

Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, О бесконечном возрастании одного класса многочленов ... 47

S. Khafagy, H. Serag, On the existence of positive weak solution for nonlinear systems with singular weights ... 65

S. H. Saker, R. R. Mahmoud Factorization theorems of Cesàro and Copson spaces on time scales ... 75 – 88

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 55, No. 4, 2020

Contents

E. A. Adegani, T. Bulboacă, A. Motamednezhad, Sufficient condition for p-valent strongly starlike functions ... 3

F. V. Hayrapetyan, Weighted integral representations of holomorphic on the unit disk functions by means of Mittag-Leffler type ... 15

S. Falihi, A. Bodaghi, B. Shojaee, On the Noether and the Cayley-Bacharach theorems with PD multiplicities ... 31

G. G. Kazaryan, V. N. Margaryan, On unbounded increasing of a polynomial class ... 47

S. Khafagy, H. Serag, On the existence of positive weak solution for nonlinear systems with singular weights ... 65

S. H. Saker, R. R. Mahmoud Factorization theorems of Cesàro and Copson spaces on time scales ... 75 – 88