ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2020

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал "Известия НАН Армении, Математика" публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата A4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
   - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
   - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
   - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы , место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала "Известия НАН Армении, Математика", пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
   E-mail: sart@ysu.am, URL: http://www.maik.ru
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале "Journal of Contemporary Mathematical Analysis". URL: http://www.springer.com.

****

Заказ N993. Тираж 150. Подписано к печати 22.01.20.

Печ. л. 5,75. Бумага офсетная. Цена договорная.

Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 3 – 8

КОНЕЧНЫЕ ПОДГРУППЫ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ n-КРУЧЕНЫХ ГРУПП

А. Л. ГЕВОРГЯН, Г. Г. ГЕВОРГЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *amirjan.gevorgian@googlemail.com*; *gevorgyan512@gmail.com*

Аннотация. Группа называется n-крученой, если она имеет систему определяющих соотношений вида $r^n = 1$ для некоторых элементов r и для любого ее элемента a конечного порядка выполняется соотношение $a^n = 1$. В работе доказывается, что все конечные подгруппы относительно свободных n-крученых групп являются циклическими группами. Отметим, что для каждого ранга $m > 1$ и для любого нечетного $n \geq 1003$ множество неизоморфных относительно свободных n-крученых групп ранга m континуально.

MSC2010 number: 20E07; 20F05; 20F50.

Ключевые слова: относительно свободная группа; конечная подгруппа; периодическая группа; n-крученая группа.

1. Введение

Пусть X – произвольный групповой алфавит, $\mathfrak{R}$ – некоторое множество записанных в этом алфавите слов, $n > 1$ фиксированное натуральное число и

$$G = \langle X | R^n = 1, R \in \mathfrak{R} \rangle \tag{1.1}$$

задание некоторой группы G.

Определение 1.1. *Группа* (1.1) *является n-крученой, если для любого элемента $Y \in G$ либо $Y^n = 1$, либо Y имеет бесконечный порядок.*

Понятие n-крученой группы было введено в работе [1], где доказаны также некоторые важные свойства этих групп. Класс n-крученых групп достаточно обширен. Нетрудно заметить, что свободные группы любого ранга m, а также свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ являются n-кручеными группами для любого натурального n. Как указано в [1], помимо этих групп n-кручеными являются также группы $B(m, n, \alpha)$, $\Gamma(m, n, \Pi)$, $m \geq 1$ (множество которых континуально), свободные группы многообразия, удовлетворяющего тождеству $[x, y]^n = 1$ и т.д. (см. [2]–[4]). Некоторые другие группы, которые, по сути, являются n-кручеными, были построены и изучены в работах С. И. Адяна, А. Ю. Ольшанского, С. В. Иванова, И. Г. Лысенка, В. С. Атабекяна и других авторов (см., например, [5]–[11]).

Предложение 1.1. *Если F – абсолютно свободная группа и N – такая ее нормальная подгруппа, что фактор группа F/N является группой без кручения, то группа F/N^n – n-крученая группа для любого $n \geq 1$, где N^n – подгруппа порожденная n-ыми степенями всех элементов из n.*

Доказательство. Во первых, очевидно, для группы F/N^n можно выбрать систему определяющих соотношений вида $r^n = 1$, где r пробегает множество N. Допустим, что элемент $a \in F/N^n$ имеет конечный порядок. Тогда его образ в фактор группе F/N тоже имеет конечный порядок и поэтому тривиален. Это означает, что $a \in N/N^n$. Остается заметить, что группа N/N^n – периодическая группа периода n. □

Напоминаем, что при любом нечетном $n \geq 1003$ через $\Gamma(m, n, \Pi)$ обозначается свободная группа ранга m многобразия групп, определяемого следующим семейством тождеств от двух переменных

$$\{(x^{pn}y^{pn}x^{-pn}y^{-pn})^n = 1\}, \tag{1.2}$$

где параметр p пробегает произвольное множество простых чисел Π. Эти знаменитые группы были построены С.И.Адяном в [2] (см. также [3], гл. VII) для решения проблемы конечного базиса, поставленной Б.Нейманом в 1937 г. Некоторые другие интересные свойства групп $\Gamma(m, n, \Pi)$ были изучены в [11]. В работе [12] доказано, что любая подгруппа каждой свободной группы $\Gamma(m, n, \Pi)$ произвольного ранга $m \geq 1$ является циклической группой. Аналогичное утверждение для свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 665$ и любого ранга раннее было доказано С. И. Адяном в [3] (см. гл. VII [3]) (для абсолютно свободных групп оно – просто доказуемое утверждение).

Нами будет доказана следующая более общая теорема.

Теорема 1.1. *Любая конечная подгруппа каждой относительно свободной n-крученой группы является циклической группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

2. Определения и вспомогательные леммы

Как и в [12], доказательство будем проводить по схеме, предложенной в главе VII монографии [3]. Сначала построим центральные расширения групп рассматриваемых относительно свободных групп и применив метод доказательства теоремы 1 из [3, гл. VII], с помощью теоремы Бэра завершим доказательство.

Пусть $\Gamma(X)$ – произвольная n-крученая группа с множеством свободных порождающих X. Согласно [1], группа $\Gamma(X)$ имеет специальную систему определяющих соотношений вида $A^n = 1$:

$$\Gamma_G(X) = \langle X \mid A^n = 1,\, A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \rangle. \tag{2.1}$$

Следуя [1], через $\Gamma(X,\alpha)$ обозначим группу с теми же образующими X и системой определяющих соотношений $A^n = 1$, где $A \in \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{E}_\alpha$:

$$\Gamma_G(X,\alpha) = \langle X \mid A^n = 1,\, A \in \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{E}_\alpha \rangle.$$

Далее, обозначим

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha. \tag{2.2}$$

Следующие 3 леммы доказанны в [1].

Лемма 2.1. *(Лемма 8,* [1]*) Для любого слова C, которое не равно 1 в группе $\Gamma(X)$, можно указать такие слова T и E, что $C = TE^rT^{-1}$ в $\Gamma_G(X)$ при некотором целом r, где либо $E \in \mathcal{E}$, либо E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.*

Лемма 2.2. *(Лемма 6,* [1]*) Если E есть отмеченный элементарный период некоторого ранга $\gamma \geq 1$ (или если $E \in \mathcal{E}_\gamma$), то E имеет порядок n в группе $\Gamma(X,\gamma)$ (и в группе $\Gamma(X)$).*

Лемма 2.3. *(Лемма 7,* [1]*) Если E есть неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ, то E имеет бесконечный порядок в $\Gamma(X)$.*

Множество $\mathcal{E}$ счетно (см. теорему 2.13 главы VI из [3]), т.е. его элементы можно пронумеровать натуральными числами. Фиксируем некоторую нумерацию и пусть $\mathcal{E} = \{A_j | j \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел).

Фиксируем также произвольную не более чем счетную абелеву группу $\mathcal{D}$, заданную порождающими и определяющими соотношениями:

$$\mathcal{D} = \langle d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots \mid r = 1,\, r \in \mathcal{R} \rangle, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{R}$ – некоторое множество слов в групповом алфавите $d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots$.

Через $A_{\mathcal{D}}(X)$ обозначим группу, заданную системой образующих двух видов

$$X \cup \{d_1, d_2, ..., d_i, ...\} \tag{2.4}$$

и системой определяющих соотношений трех видов:

$$r = 1, \text{ для всех } r \in \mathcal{R},$$

$$\forall x \in X \quad x d_j = d_j x,$$

$$A_j^n = d_j \tag{2.5}$$

для всех $A_j \in \mathcal{E}$ (см. (2.2)) и $j \in \mathbb{N}$.

Из соотношений (2.5) вытекает, что группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ тоже порождаются множеством порождающих X. Для групп $A_{\mathcal{D}}X)$ справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1. *При любом нечетном $n \geq 1003$ для любой абелевой группы $\mathcal{D}$, имеющей задание* (2.3)*, выполняются условия:*

1. *центр группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ совпадает с $\mathcal{D}$,*
2. *фактор группа группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ по подгруппе $\mathcal{D}$ изоморфна группе $\Gamma(X)$.*

Предложение 2.1 доказывается точно также как и пункты 3, 4 теоремы 1 из [11]. В качестве группы $\mathcal{D}$ возьмем бесконечную циклическую группу

$$\mathcal{Z} = \langle d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots \mid d_j d_k^{-1} = 1,\, j, k \in \mathbb{N} \rangle.$$

Тогда центром полученной группы $A_{\mathcal{Z}}(X)$ будет бесконечная циклическая группа с порождающим $d = d_1$.

Лемма 2.4. *Групппа $A_{\mathcal{Z}}(X)$ является группой без кручения.*

Доказательство. В силу пункта 2 предложения 2.1 всякий нетривиальный элемент a группы $A_{\mathcal{Z}}(X)$ можно представить в виде $a = yd^j$, где y есть слово в порождающих группы $\Gamma(X)$, а d порождающий элемент ее центра. Покажем, что a имеет бесконечный порядок.

Если $y \neq 1$ в $\Gamma(X)$, то в силу леммы 2.1 найдутся такие слова T и E, что $y = TE^rT^{-1}$ в группе $\Gamma(X)$ при некотором целом r, причем или $E \in \mathcal{E}$, или E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$. В силу пункта 1 предложения 2.1, центр группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом d. При $y = 1$ утверждение теоремы очевидно. Остается рассмотреть случай, когда $y \neq 1$ в $\Gamma(X)$. В случае, когда E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$, то по лемме 2.3, элемент E, а значит и y, имеет бесконечный порядок в фактор группе $\Gamma(X)$. Тогда его прообраз a в $A_{\mathcal{D}}(X)$ тоже имеет бесконечный порядок.

Если же $E \in \mathcal{E}$, то используя лемму 2.2, мы буквально повторив доказательство теоремы 1.6 из [3] убедимся, что a имеет бесконечный порядок. $\square$

3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть конечная подгруппа G группы $\Gamma(X)$ порождается элементами $g_1, g_2, ..., g_k$. Рассмотрим подгруппу G_1 группы $A_{\mathcal{Z}}(X)$, порождаемую элементами $g_1, g_2, ..., g_k, d$. Согласно пункту 1 предложения 2.1 элемент d содержится в центре группы G_1. Следовательно, фактор группа группы G_1 по ее центру конечна.

По известной теореме Бэра (см. [14]) из конечности фактор группы по центру следует конечность коммутанта. Следовательно, коммутант группы G_1 конечен. Так как, по лемме 2.4, группа $A_{\mathcal{Z}}(X)$ является группой без кручения, то в ней конечна только единичная подгруппа. Значит коммутант группы G_1 тривиален, т.е. G_1 является абелевой группой. Поэтому, образ G в $\Gamma(X)$ группы G_1 тоже является абелевой группой. В силу следствия 2 работы [1] всякая абелева подгруппа группы $\Gamma(X)$ – циклическая группа. Таким образом G – циклическая подгруппа. Теорема доказана.

Abstract. A group is called an n-torsion group if it has a system of defining relations of the form $r^n = 1$ for some elements r, and for any of its finite order element a the defining relation $a^n = 1$ holds. In this paper, we prove that all the finite subgroups of the relatively free n-torsion groups are cyclic groups. Note that for each rank $m > 1$ and for any odd $n \geq 1003$, the set of nonisomorphic relatively free n-torsion groups of rank m has the cardinality of the continuum.

Список литературы

[1] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “n-torsion groups”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **54**, no. 6, 319 – 327 (2019).

[2] S. I. Adjan, “Infinite irreducible systems of group identities”, Math. USSR-Izv., **4**, no. 4, 721 – 739 (1970).

[3] S. I. Adian, "The Burnside problem and identities in groups", Springer-Verlag, Berlin-New York, Results in Mathematics and Related Areas, **95** (1979).
[4] S. I. Adyan, "Groups with periodic commutators", Dokl. Math., **62**, no. 2, 174 – 176 (2000).
[5] A. Yu. Olshanskii, The Geometry of Defning Relations in Groups, Kluwer Academic Publishers (1991).
[6] S. V. Ivanov, "The free Burnside groups of sufficiently large exponents", Int. J. of Algebra and Computation, **4**, 1 – 307 (1994).
[7] I. G. Lysenok, "Infinite Burnside groups of even exponent", Izv. Math., **60**, no. 3, 453 – 654 (1996).
[8] V. S. Atabekyan, "Monomorphisms of free Burnside groups", Math Notes, **86**, 457 – 462 (2009). https://doi.org/10.1134/S0001434609090211
[9] V. S. Atabekyan, "Splitting automorphisms of free Burnside groups", Sb. Math., **204**, no. 2, 182 – 189 (2013).
[10] V. S. Atabekyan, H. T. Aslanyan, "The automorphisms of endomorphism semigroups of relatively free groups", International Journal of Algebra and Computation, **28**, no. 02, 207 – 215 (2018).
[11] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, "On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian", Izv. Math., **81**, no. 5, 889 – 900 (2017).
[12] H. T. Aslanyan, A. L. Gevorgyan, H. A. Grigoryan, "Finite subgroups of the free groups of the infinitely based varieties of S. I. Adian", Armenian Journal of Mathematics, **11**, no. 06, 1 – 6 (2019).
[13] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, "Central extensions of free periodic groups", Sb. Math., **209**, no. 12, 1677 – 1689 (2018).
[14] R. Baer, "Endlichkeitskriterien fur Kommutatorgruppen", Math. Aim., **124**, 161 – 177 (1952).

Поступила 7 августа 2019

После доработки 7 октября 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 9 – 18

О СХОДИМОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ЧАСТНЫХ СУММ КРАТНОГО РЯДА ФРАНКЛИНА К БЕСКОНЕЧНОСТИ

Г. Г. ГЕВОРКЯН, М. Г. ГРИГОРЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *ggg@ysu.am*; *gmarting@ysu.am*

Аннотация. В работе доказывается, что квадратичные частичные суммы кратного ряда Франклина с номерами 2^ν, $\nu = 1, 2, ...$, не могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры.

MSC2000 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: система Франклина; кратный ряд; сходимость к бесконечности.

1. Введение

В 1915 году Н. Н. Лузиным [1] была поставлена задача о том, может ли тригонометрический ряд сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры.

С тех пор многие математики исследовали вопрос сходимости или суммируемости к $+\infty$ ортогональных рядов на множестве положительной меры.

Ю. Б. Гермейер [2] доказал, что тригонометрический ряд не может суммироваться методом Римана к $+\infty$ на множестве положительной меры. Н. Н. Лузин и И. И. Привалов [3] построили пример тригонометрического ряда, почти всюду суммируемого к $+\infty$ методом Абеля. Д. Е. Меньшов [4] доказал, что для любой функции, не обязательно конечной почти всюду, существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней по мере. В частности, существует тригонометрический ряд, который по мере сходится к $+\infty$ на $[-\pi, \pi]$. А. А. Талалян [5] установил, что для любой измеримой на $[-\pi, \pi]$ функции f существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней по мере и почти всюду на множестве, где f конечна.

Наконец, в 1988 году С. В. Конягин [6] решил проблему Н. Н. Лузина, доказав следующую теорему.

[1]Работа Г. Г. Геворкяна и М. Г. Григоряна выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проектов 18T-1A074 и 18T-1A148, соответственно.

Теорема (С. В. Конягин). *Пусть* $\underline{S}(x)$ *и* $\overline{S}(x)$ *нижний и верхний пределы частичных сумм некоторого тригонометрического ряда. Тогда*

$$\mathrm{mes}\{x \in [-\pi, \pi] : -\infty < \underline{S}(x) \le \overline{S}(x) = +\infty\} = 0.$$

В частности, тригонометрический ряд не может сходится к $+\infty$ *на множестве положительной меры.*

Для рядов по системам Хаара и Уолша имеется следующая картина. А. А. Талалян и Ф. Г. Арутюнян [7] доказали, что ряды по системам Хаара и Уолша не могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры. В работах [8], [9] даны более простые доказательства этой теоремы. Однако (см. [10]), существуют равномерно ограниченные ортонормированные системы функций, ряды по которым могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры при любой перестановке членов ряда. Н. Б. Погосян [11] установил, что для каждой полной ортонормированной системы существует ряд, который после подходящей перестановки сходится почти всюду к $+\infty$.

Ортонормальную в $L^2[0,1]$ систему Франклина, определение которой будет дано в следующем параграфе, обозначим через $\{f_n(t)\}_{m=1}^{\infty}$. Далее обозначим $I = [0,1]$ и $\mathrm{mes}(A)$-Лебеговая мера множества A. Недавно были доказаны следующие теоремы (см. [4]).

Теорема А (Г. Г. Геворкян). *Для любого ряда* $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(t)$ *имеет место*

$$\mathrm{mes}\{t \in I : \lim_{\nu\to\infty} \sum_{m=0}^{2^{\nu}} a_m f_m(t) = +\infty\} = 0.$$

В частности, ряд Франклина не может сходиться к $+\infty$ *на множестве положительной меры.*

Теорема Б (Г. Г. Геворкян). *Если для ряда* $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(t)$ *выполняется*

$$\mathrm{mes}\{t \in E : \liminf_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m f_m(t) = +\infty\} = 0,$$

то ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(t)$ *сходится на* E *почти всюду. В частности, ряд Франклина не может сходиться к* $+\infty$ *на множестве положительной меры.*

В работе [18] доказаны:

- Если $\sup_k \frac{n_{k+1}}{n_k} < \infty$, то (см. [18], теорема 3)

$$\mathrm{mes}\{x \in I : \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{n_k} a_m f_m(t) = +\infty\} = 0.$$

- Если $\sup_k \frac{n_{k+1}}{n_k} = \infty$, то (см. [18], теорема 4) существует ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(t)$, со свойством
$$\operatorname{mes}\{x \in I : \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{n_k} a_m f_m(t) = +\infty\} = 1.$$

Аналог теоремы А для рядов по ортонормальным сплайнам доказан в работе [16]. Аналог теоремы Б для таких рядов неизвестен.

В настоящей работе рассматриваются кратные ряды по системе Франклина. Пусть k некоторое натуральное число. Рассмотрим кратные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^k} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_k) \in \mathbb{N}_0^k$-вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in [0; 1]^k$ и $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1) \cdots f_{m_k}(x_k)$.

Обозначим через $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ кубические частичные суммы ряда (1.1) с номерами 2^ν, т.е.

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}: m_i \le 2^\nu} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_k)$.

Верна следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любого ряда* (1.1) *имеет место*
$$\operatorname{mes}\{\boldsymbol{x} \in I^k : \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(\boldsymbol{x}) = +\infty\} = 0.$$

2. Определение системы Франклина и вспомогательные леммы

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $\mu \ge 0$, где $1 \le \nu \le 2^\mu$. Обозначим
$$s_{n,i} = \begin{cases} \frac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{для } 0 \le i \le 2\nu, \\ \frac{i-\nu}{2^\mu}, & \text{для } 2\nu < i \le n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных и кусочно линейных на $[0; 1]$ с узлами $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$, т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0; 1]$ и линейная на каждом отрезке $[s_{n,i-1}; s_{n,i}]$, $i = 1, 2, ..., n$. Ясно, что $\dim S_n = n + 1$ и множество $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$ получается добавлением точки $s_{n,2\nu-1}$ к множеству $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Поэтому, существует единственная, с точностью до знака, функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f_n\|_2 = 1$. Полагая $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$, $x \in [0; 1]$, получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином [12].

Введем следующие обозначения: $t_j^\nu = \frac{j}{2^\nu}$, когда $0 \le j \le 2^\nu$, $t_{-1}^\nu = t_0^\nu = 0$ и $t_{2^\nu+1}^\nu = t_{2^\nu}^\nu = 1$. Положим $\delta_j^\nu = (t_{j-1}^\nu; t_{j+1}^\nu)$, для $0 \le j \le 2^\nu$. Пусть δ_{ij}-символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \ne j$. Функции φ_j^ν определим следуюшим образом:

$$\varphi_j^\nu(t_i^\nu) = \delta_{ij}, \quad j = 0, ..., 2^\nu, \quad \text{и} \quad \varphi_j^\nu \quad \text{линейна на} \quad [t_{i-1}^\nu, t_i^\nu], \quad i = 1, ..., 2^\nu.$$

Для натурального ν положим $\mathbb{N}_\nu^k = \{0, 1, ..., 2^\nu\}^k$. Для вектора $\mathbf{j} = (j_1, ..., j_k) \in \mathbb{N}_\nu^k$ обозначим

$$\Delta_{\mathbf{j}}^\nu = \delta_{j_1}^\nu \times \cdots \times \delta_{j_k}^\nu, \ \mathbf{t}_{\mathbf{j}}^\nu = (t_{j_1}^\nu, ..., t_{j_k}^\nu), \quad \text{и} \quad \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{j}}^\nu(t_1, ..., t_k) = \varphi_{j_1}^\nu(t_1) \cdots \varphi_{j_k}^\nu(t_k).$$

Нетрудно заметить, что $\sum_{j=0}^{2^\nu} \varphi_j^\nu(x) = 1$, когда $x \in I$. Следовательно

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^k} \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in I^k, \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} \phi_{\mathbf{j}}^\nu = \Delta_{\mathbf{j}}^\nu.$$

Очевидно, что система функций $\{\phi_{\mathbf{j}}^\nu\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^k}$ образует базис в линейном пространстве S_{2^ν}. Имеем также

$$\int_{I^k} \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{j}}^\nu} \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \prod_{i=1}^k \int_{\delta_{j_i}^\nu} \varphi_{j_i}^\nu(x_i) dx_i = \prod_{i=1}^k \frac{\operatorname{mes}(\delta_{j_i}^\nu)}{2} = \frac{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^\nu)}{2^k}.$$

Обозначив

$$M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) = \frac{2^k}{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^\nu)} \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

получим

$$\int_{I^k} M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \tag{2.2}$$

Верна следующая лемма (см. [13] лемма 2).

Лемма 2.1. *Для любых $M_{\boldsymbol{j}_0}^{\nu_0}(\boldsymbol{x})$ и $\nu > \nu_0$ существуют числа $\alpha_{\boldsymbol{j}}$ такие что*

$$M_{\boldsymbol{j}_0}^{\nu_0}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}_\nu^k} \alpha_{\boldsymbol{j}} M_{\boldsymbol{j}}^\nu(\boldsymbol{x}),$$

причем

$$\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}_\nu^k} \alpha_{\boldsymbol{j}} = 1, \quad \alpha_{\boldsymbol{j}} \ge 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{\boldsymbol{j}} = 0, \quad \text{если} \quad \Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu \not\subset \Delta_{\boldsymbol{j}_0}^{\nu_0}.$$

Пусть $N_0(t) = 1 - t$, $N_1(t) = t$, $t \in I$ $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_k)$, где $\epsilon_i = 0$ или 1. Положим

$$N_\epsilon(\mathbf{x}) = N_{\epsilon_1}(x_1) \cdot N_{\epsilon_2}(x_2) \cdots N_{\epsilon_k}(x_k).$$

Лемма 2.2. *Пусть*

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{\epsilon} a_\epsilon N_\epsilon(\boldsymbol{x}), \quad \text{где} \quad a_\epsilon \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

и

$$\int_{I^k} F(\boldsymbol{x}) N_{\epsilon'}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1, \quad \text{для некоторого} \quad \epsilon'. \tag{2.4}$$

Тогда $\operatorname{mes}\{\boldsymbol{x} \in I^k : F(\boldsymbol{x}) \geq 2^{k-1}\} \geq 3^{-k^2}$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_I N_0(t)N_0(t)dt = \int_I N_1(t)N_1(t)dt = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \int_I N_0(t)N_1(t)dt = \frac{1}{6}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{I^k} N_{\epsilon'}(\mathbf{x}) N_\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}}, \quad \text{где} \quad |\epsilon - \epsilon'| := \sum |\epsilon_i - \epsilon'_i|. \tag{2.5}$$

Из (2.3), (2.4) и (2.5) получим

$$1 = \sum_{\epsilon} a_\epsilon \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}}. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$A_+ = \{\epsilon : a_\epsilon \geq 0\}, \quad A_- = \{\epsilon : a_\epsilon < 0\} \quad \text{и} \quad a := \max_{\epsilon \in A_+} a_\epsilon. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) следует, что

$$1 - \sum_{\epsilon \in A_-} a_\epsilon \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}} = \sum_{\epsilon \in A_+} a_\epsilon \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}} \leq a\frac{1}{3^k} \sum_{\epsilon} \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}} = a\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{2}\right)^k = \frac{a}{2^k}.$$

Следовательно

$$a \geq 2^k - \sum_{\epsilon \in A_-} a_\epsilon \frac{1}{3^k} \cdot \frac{2^k}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}}. \tag{2.8}$$

Пусть точка ϵ'' такая, что $a = a_{\epsilon''}$. Без ограничения общности, можем считать, что $\epsilon'' = (0, ..., 0)$. Обозначим $E = [0, 3^{-k}]^k$. Очевидно, что

$$N_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \geq \left(1 - 3^{-k}\right)^k > \frac{1}{2}, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in E, \tag{2.9}$$

и

$$N_\epsilon(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{3^{k|\epsilon|}}, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in E. \tag{2.10}$$

Из (2.3), (2.7)–(2.10) $\mathbf{x} \in E$ получим

$$F(\mathbf{x}) \geq aN_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) + \sum_{\epsilon \in A_-} a_\epsilon \frac{1}{3^{k|\epsilon|}} \geq 2^{k-1} - \sum_{\epsilon \in A_-} a_\epsilon \left(\frac{2^{k-1-|\epsilon|}}{3^k} - \frac{1}{3^{k|\epsilon|}}\right) \tag{2.11}$$

Из $0 < |\epsilon| \le k$ следует, что

$$\frac{2^{k-1-|\epsilon|}}{3^k} - \frac{1}{3^{k|\epsilon|}} > 0.$$

Поэтому, из (2.11) следует

$$F(\mathbf{x}) \ge 2^{k-1} \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in E.$$

Очевидно, что $\mathrm{mes}E = 3^{-k^2}$. □

Лемма 2.3. *Если* $(\sigma_\nu, M_{\boldsymbol{j}}^\nu) =: A > 0$, $\boldsymbol{j} = (j_1, ..., j_k)$, $0 < j_i < 2^\nu$, $i = 1, ..., k$, *то*

$$\mathrm{mes}\left\{\boldsymbol{x} \in \mathrm{supp}\Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu : \sigma_\nu(\boldsymbol{x}) \ge \frac{A}{2}\right\} \ge 3^{-k^2}\mathrm{mes}(\Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu).$$

Доказательство. Пусть Δ_i, $i = 1, 2, ..., 2^k$ октанты куба $\Delta_{\mathbf{j}}^\nu$. Очевидно, что из условия леммы следует, что на одной из Δ_i выполняется

$$\int_{\Delta_i} \sigma_\nu(\mathbf{x}) M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} > 2^{-k} A.$$

Куб Δ_i k-линейным преобразованием переведем в куб I^k. Тогда функция $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ перейдет в некую функцию вида (2.3), а $M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x})$ в функцию вида $2^k N_\epsilon(\mathbf{x})$. Тогда имеем

$$\int_{I^k} F(\mathbf{x}) N_\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \ge 2^{-k} A.$$

Для завершения доказательства остается применить лемму 2.2. □

Из леммы 2.3 следует

Лемма 2.4. *Если* $(\sigma_\nu, M_{\boldsymbol{j}}^\nu) =: A < 0$, $\boldsymbol{j} = (j_1, ..., j_k)$, $0 < j_i < 2^\nu$, $i = 1, ..., k$, *то*

$$\mathrm{mes}\left\{\boldsymbol{x} \in \mathrm{supp}\Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu : \sigma_\nu(\boldsymbol{x}) \le \frac{A}{2}\right\} \ge 3^{-k^2}\mathrm{mes}(\Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu).$$

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1.1. Допустим обратное, существует ряд (1.1), такой что для последовательности $\sigma_\nu(\mathbf{x})$, $\nu = 1, 2, ...,$, определяемой формулой (1.2), выполняется

$$\mathrm{mes}(E_+) > 0, \quad \text{где} \quad E_+ := \{\mathbf{x} \in I^k : \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(\mathbf{x}) = +\infty\}. \tag{3.1}$$

Множества вида $\left[\frac{i_1}{2^\nu}, \frac{i_1+1}{2^\nu}\right] \times \cdots \times \left[\frac{i_k}{2^\nu}, \frac{i_k+1}{2^\nu}\right]$ назовем двоичними кубами. Применяя аналог теоремы о точках плотности измеримых множеств в многомерном случае (см. напр. [18], теорема 2.1), найдем двоичный куб Δ, для которого выполняется

$$\mathrm{mes}(\Delta \cap E_+) > (1 - \gamma_1)\mathrm{mes}(\Delta), \quad \text{где} \quad \gamma_1 := 2^{-5k} 3^{-k^2}. \tag{3.2}$$

Далее, применяя теорему о непрерывности меры, найдем число $L < 0$, такое что

$$\mathrm{mes}(E_-) < \gamma_1 \mathrm{mes}(\Delta), \tag{3.3}$$

где

$$E_- = \{\mathbf{x} \in \Delta : \inf_\nu \sigma_\nu(\mathbf{x}) \le L\}. \tag{3.4}$$

Ясно, что для некоторых $\nu_0, \mathbf{j}_0$ будет $\Delta^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0} = \Delta$.

По индукции определим представления

$$M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}) = \sum_{n=\nu_0}^{\nu} \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} M^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^2_\nu} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} M^\nu_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}), \tag{3.5}$$

с неотрицательными коэффициентами $\alpha^{(n)}_{\mathbf{i}}$, $\beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}}$.

Полагая $\Lambda^1_{\nu_0} = \emptyset$, $\Lambda^2_{\nu_0} = \{\mathbf{j}_0\}$, $\beta^{(\nu_0)}_{\mathbf{j}_0} = 1$, получим представление (3.5) для $\nu = \nu_0$. Отметим, что выполняется (см. (3.3), (3.4))

$$\mathrm{mes}(\Delta^{\nu_0}_{\mathbf{i}} \cap E_-) < \gamma_1 \mathrm{mes}(\Delta^{\nu_0}_{\mathbf{i}}) \;\text{ для }\; \mathbf{i} \in \Lambda^2_{\nu_0}.$$

Допустим имеем представление (3.5) для $\nu - 1$ и получим ее для ν. В силу леммы 2.1 имеем

$$\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^2_{\nu-1}} \beta^{(\nu-1)}_{\mathbf{i}} M^{\nu-1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}} \eta^{(\nu)}_{\mathbf{l}} M^\nu_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}). \tag{3.6}$$

Обозначим $\Lambda_\nu = \{\mathbf{l} : \eta^{(\nu)}_{\mathbf{l}} \ne 0\}$,

$$\Lambda^1_\nu = \{\mathbf{l} \in \Lambda_\nu : \mathrm{mes}(\Delta^\nu_{\mathbf{l}} \cap E_-) \ge \gamma_2 \mathrm{mes}(\Delta^\nu_{\mathbf{l}})\}, \;\text{ где } \gamma_2 = 2^{-k} \cdot 3^{-k^2}, \tag{3.7}$$

$$\Lambda^2_\nu = \Lambda_\nu \backslash \Lambda^1_\nu. \tag{3.8}$$

Положим также

$$\alpha^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = \eta^{(\nu)}_{\mathbf{i}}, \;\text{ если }\; \mathbf{i} \in \Lambda^1_\nu \;\text{ и }\; \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = \eta^{(\nu)}_{\mathbf{i}}, \;\text{ если }\; \mathbf{i} \in \Lambda^2_\nu.$$

Неотрицательность коэффициентов $\alpha^{(\nu)}_{\mathbf{i}}$, $\beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}}$ следует из леммы 2.1 и (3.6). Кроме того, учитывая, что интегралы всех функций, входящих в (3.5) равны единице, получим

$$\sum_{n=\nu_0}^{\nu} \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^2_\nu} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = 1. \tag{3.9}$$

Заметим, что

$$\mathrm{mes}(\Delta^\nu_{\mathbf{i}} \cap E_-) \le 2^k \gamma_2 \mathrm{mes}(\Delta^\nu_{\mathbf{i}}), \;\text{ когда }\; \mathbf{i} \in \Lambda^1_\nu. \tag{3.10}$$

Действительно, если $\mathbf{i} \in \Lambda_\nu^1$, то для некоторого $\mathbf{j} \in \Lambda_{\nu-1}^2$ имеет место $\Delta_\mathbf{i}^\nu \subset \Delta_\mathbf{j}^{\nu-1}$. Поэтому (см. (3.7), (3.8))

$$\mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu \cap E_-) \le \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{j}^{\nu-1} \cap E_-) \le \gamma_2 \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{j}^{\nu-1}) \le 2^k \gamma_2 \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu). \tag{3.11}$$

Из (3.7), (3.8), (3.10) и (3.11) следует, что

$$\mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu \cap E_-) \le 3^{-k^2} \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu), \quad \text{когда} \ \ \mathbf{i} \in \Lambda_\nu^1 \cup \Lambda_\nu^2. \tag{3.12}$$

Применяя лемму 2.4, из (3.12) и (3.4) получаем

$$(\sigma_\nu, M_\mathbf{i}^\nu) > 2L, \quad \text{когда} \ \ \mathbf{i} \in \Lambda_\nu^1 \cup \Lambda_\nu^2. \tag{3.13}$$

Для произвольного числа $L_1 > -1000L$ обозначим

$$\Lambda_\nu^3 = \{\mathbf{i} \in \Lambda_\nu^2 : \mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta_\mathbf{i}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) > L_1\} > (1 - 3^{-k^2}) \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu)\}, \tag{3.14}$$

и

$$\Lambda_\nu^4 = \Lambda_\nu^2 \backslash \Lambda_\nu^3. \tag{3.15}$$

Докажем, что

$$(\sigma_\nu, M_\mathbf{i}^\nu) \ge \frac{L_1}{2}, \quad \text{если} \ \ \mathbf{i} \in \Lambda_\nu^3. \tag{3.16}$$

Допустим обратное: $(\sigma_\nu, M_\mathbf{i}^\nu) < \frac{L_1}{2}$ для некоторого $\mathbf{i} \in \Lambda_\nu^3$. Тогда будем иметь

$$(\sigma_\nu - L_1, M_\mathbf{i}^\nu) = -L_1 + (\sigma_\nu, M_\mathbf{i}^\nu) < -\frac{L_1}{2}. \tag{3.17}$$

Применяя лемму 2.4 к (3.17), получим

$$\mathrm{mes}\left\{\mathbf{x} \in \Delta_\mathbf{i}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) - L_1 \le -\frac{L_1}{4}\right\} \ge 3^{-k^2} \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu). \tag{3.18}$$

Соотношение (3.18) противоречит (3.14). Следовательно выполняется (3.16).

Пусть $\mathbf{i} \in \Lambda_\nu^4$, т.е.

$$\mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta_\mathbf{i}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) > L_1\} < (1 - 3^{-k^2}) \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu).$$

Обозначим через $\Delta_{\mathbf{i},j}^\nu$, $j = 1, ..., 2^k$, октанты куба $\Delta_\mathbf{i}^\nu$. Тогда для одного из них, допустим для $\Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu$, выполняется

$$\mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) > L_1\} < (1 - 3^{-k^2}) \mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu). \tag{3.19}$$

Положим

$$B_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu = \{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) \le L_1\} \tag{3.20}$$

Из (3.19), (3.20) следует

$$\mathrm{mes}(B_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu) \ge 3^{-k^2} \mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu).$$

Каждый куб $B^{\nu}_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}$, с условиями (3.19), (3.20), может содержаться не более чем в 2^k разных кубах $\Delta^{\nu}_{\mathbf{i}}$, с условием $\mathbf{i} \in \Lambda^4_\nu$. Следовательно

$$\operatorname{card}(\Lambda^4_\nu) \leq 2^\nu 2^k 3^{k^2} \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta : \sigma_\nu(\mathbf{x}) < L_1\}. \tag{3.21}$$

Из (3.2) следует, что для любого L_1, при достаточно больших ν, имеет место

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta : \sigma_\nu(\mathbf{x}) < L_1\} < 2^{-5k} 3^{-k^2} \operatorname{mes}(\Delta). \tag{3.22}$$

Из (3.21), (3.22) имеем

$$\operatorname{card}(\Lambda^4_\nu) \leq 2^{-4k} 2^{\nu-\nu_0}. \tag{3.23}$$

Обозначим

$$G = \bigcup_{\mathbf{i}\in\Lambda^4_\nu} \Delta^{\nu}_{\mathbf{i}}. \tag{3.24}$$

Очевидно, что (см. (3.23), (3.24)) $\operatorname{mes}(G) < 2^{-3k}2^{-\nu_0}$, и поэтому (см. также (2.2), (3.5), (2.1))

$$\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^4_\nu} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^4_\nu} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} \int M^{\nu}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_G M^{\nu_0}_{\mathbf{i}_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq 2^{k+\nu_0}2^{-3k-\nu_0} = 2^{-2k}. \tag{3.25}$$

Положим

$$H_\nu := \bigcup_{n=\nu_0}^{\nu} \bigcup_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \Delta^n_i.$$

Из (3.10) следует , что

$$\operatorname{mes}(H_\nu) \leq 2^k \gamma_2 \operatorname{mes}(\Delta) = 3^{-k^2}\operatorname{mes}(\Delta).$$

Следовательно (см. также (2.2), (3.5), (2.1))

$$\sum_{n=\nu_0}^{\nu}\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} = \sum_{n=\nu_0}^{\nu}\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} \int M^{n}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_{H_\mu} M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{3.26}$$

$$\leq \operatorname{mes}(H_\mu)\|M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}\|_\infty \leq 3^{-k^2}\operatorname{mes}(\Delta)\frac{2^k}{\operatorname{mes}(\Delta)} \leq 2^{-k}.$$

Из (3.9), (3.15), (3.25), (3.26) вытекает, что

$$\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^3_\nu} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = 1 - \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^4_\nu} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} - \sum_{n=\nu_0}^{\nu}\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} \geq 1 - 2^{-2k} - 2^{-k} > 0.5. \tag{3.27}$$

Комбинируя (3.25) – (3.27) с (3.5), (3.13), (3.16), получим

$$d := (\sigma_{\nu_0}, M^{\nu_0}_{\mathbf{i}_0}) > \frac{L_1}{4} + 2L,$$

где L_1 может быть сколь угодно большим. Полученное противоречие доказывает неверность предположения (3.1). Теорема доказана.

Abstract. In this paper we prove that the quadratic partial sums of a multiple Franklin series with indices 2^ν, $\nu = 1, 2, \dots$, cannot converge to $+\infty$ on a set of positive measure.

Список литературы

[1] Н. Н. Лузин, Интеграл и Тригонометрический Ряд, М.– Л., ГИИТЛ (1951).
[2] Ю. Б. Гермейер, Производные Римана и Валле-Пуссена и их Применение к Некоторым Вопросам из Теории Тригонометрических Рядов, Дис. канд. физ.-мат. наук, М. (1946).
[3] И. И. Привалов, Граничные Свойства Аналитических Функций, М. ГИИТЛ (1950).
[4] Д. Е. Меньщов, "О сходимости по мере тригонометрических рядов", Труды МИАН СССР **32**, 3 – 97 (1950).
[5] А. А. Талалян, "Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов", Изв. АН СССР, сер. матем. **27**, 621 – 660 (1963).
[6] С. В. Конягин, "О пределах неопределенности тригонометрических рядов", Матем. заметки, **44**, 770 – 784 (1988).
[7] А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, "О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$", Мат. сб. **66**, 240 – 247 (1965).
[8] R. F. Gundy, "Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series", Trans. Amer. Math. Soc., **124**, 228 – 248 (1966).
[9] В. А. Скворцов, "Дифференцирование относительно сетей и ряды Хаара", Мат. заметки **4**, 33 – 40 (1968).
[10] Р. И. Овсепян, А. А. Талалян, "О сходимости ортогональных рядов к $+\infty$", Мат. заметки **2**, 129 – 135 (1970).
[11] Н. Б. Погосян, "Представление измерумых функций базисами $L_p[0,1]$, $p \geq 2$", ДАН Арм. ССР **4**, 205 – 209 (1976).
[12] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann., **100**, 522 – 528 (1928).
[13] Г. Г. Геворкян, "Теоремы единственности для рядов по системе Франклина", Матем. заметки, **101**, 199 – 210 (2017).
[14] Г. Г. Геворкян, "О сходимости рядов Франклина к $+\infty$", Матем. заметки, принято в печать.
[15] G. G. Gevorkyan, "On a "martingale property" of Franklin series", Analysis Math., accepted.
[16] G.G. Gevorkyan, K. A. Keryan, M. P. Poghosyan, "Convergence to infinity for orthonormal spline series", Monatsh. Math., submited.
[17] К. А. Навасардян, В. Г. Микаелян, "О сходимостияастичных сумм рядов Франклина к $+\infty$", Изв. НАН Армении, сер. матем., **54**, no. 6, 54 – 65 (2019).
[18] М. Гусман, Дифференцирование Интегралов, Мир, Москва (1978).

Поступила 10 июня 2019

После доработки 15 сентября 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 19 – 42

MULTIPLICITY OF SOLUTIONS FOR KIRCHHOFF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS INVOLVING THE LIOUVILLE-WEYL FRACTIONAL DERIVATIVES

A. A. NORI, N. NYAMORADI, N. EGHBALI

Razi University, Kermanshah, Iran
University of Mohaghegh Ardabili, Iran
E-mails: *alishraf406@gmail.com; neamat80@yahoo.com eghbali@uma.ac.ir*

Abstract. In this paper, by using variational methods and critical point theory we investigate the existence of solutions for the following fractional Kirchhoff-type equation: $\left(\int_{\mathbb{R}} |_{-\infty}D_t^{\alpha}u(t)|^2dt\right) {}_tD_{\infty}^{\alpha}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}u(t)) + l(t)u(t) = f(t, u(t))$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in H^{\alpha}(\mathbb{R})$, where $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, ${}_{-\infty}D_t^{\alpha}$ and ${}_tD_{\infty}^{\alpha}$ are the left and right Liouville-Weyl fractional derivatives of order α on the whole axis $\mathbb{R}$, respectively, $u \in \mathbb{R}$, $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous and has a positive minimum, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, and $S : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is a continuous function.

MSC2010 numbers: 34A08, 35A15.

Keywords: fractional differential equation; Liouville-Weyl fractional derivative; variational method; genus property; Morse theory.

1. Introduction

Fractional differential equations have been of great interest recently. This is because of both the intensive development of the theory of fractional calculus itself and the applications of such constructions in various scientific fields such as physics, mechanics, chemistry, engineering, etc. For details, see [1] - citeTrujillo1 and the references therein. In recent years, fractional differential equations with Liouville-Weyl fractional derivative have been studied in many papers (see [4] - citeXOZ), in which the authors have used the variational method to establish the existence of solutions. For instance, in [5, 9] the authors considered the following fractional Hamiltonian systems:

$$\begin{cases} {}_tD_{\infty}^{\alpha}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}u(t)) + L(t)u(t) = \nabla W(t, u(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ u \in H^{\alpha}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

where $\alpha \in (1/2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^n$, $L \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n^2})$ is a symmetric matrix-valued function for all $t \in \mathbb{R}$, $W \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, and $\nabla W(t, u(t))$ is the gradient of W at u.

Inspired by the above quoted works, the aim of this paper is to establish the existence of solutions to the following fractional Kirchhoff-type equation:

$$\begin{cases} S\big(\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt\big)\, {}_tD_\infty^\alpha({}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)) + l(t)u(t) = f(t,u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u \in H^\alpha(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.1}$$

where $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, ${}_{-\infty}D_t^\alpha$ and ${}_tD_\infty^\alpha$ are the left and right Liouville-Weyl fractional derivatives of order α on the whole axis $\mathbb{R}$, respectively, $u \in \mathbb{R}$, $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous and has a positive minimum, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, and $S : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is a continuous function which satisfies the following conditions:

(S1) there exists a constant $s_1 > 0$ such that $S(t) \geqslant s_1$ for all $t \geqslant 0$;

(S2) there exists a constant $s_2 > 0$ such that $S(t) \leqslant s_2$ for all $t \geqslant 0$.

If $S(t) = a + bt$, then the problem (1.1) is reduced to the following:

$$\begin{cases} \big(a + b\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt\big)\, {}_tD_\infty^\alpha({}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)) + l(t)u(t) = f(t,u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u \in H^\alpha(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.2}$$

Observe that the problem (1.2) is related to the stationary analogue of the Kirchhoff equation:

$$u_{xx} + \left(a + b\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt\right) {}_tD_\infty^\alpha({}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)) + l(t)u(t) = g(t,x),$$

which was proposed by Kirchhoff [11] as an extension of the classical d'Alembert's wave equation for free vibrations of elastic strings.

Recently, Nyamoradi and Zhou [8] have studied the following Kirchhoff type fractional differential problem:

(1.3)

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}} \left(|{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 + l(t)|u(t)|^2\right) dt\right) ({}_tD_\infty^\alpha({}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)) + l(t)u(t)) = f(t,u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u \in H^\alpha(\mathbb{R}), \end{cases}$$

and obtained the following result on the existence of solutions of the system (1.3).

Theorem 1.1. *Let $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, and let the following assumptions hold:*

(L) *the function $l : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ is continuous and $l(t) \to +\infty$ as $|t| \to \infty$;*

(M0) *there exists a constant $m_0 > 0$ such that $M(t) \geq m_0$ for all $t \geq 0$;*

(M1) *there exists a constant $m_1 > 0$ such that $M(t) \leq m_1$ for all $t \geq 0$;*

(H1) *$|f(t,x)| \leq h(t)|x|^{q-1}$ for all $t \in \mathbb{R}$ and $x \in \mathbb{R}$, where $2 < q < \infty$ and $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ is a continuous function such that $h \in L^\infty(\mathbb{R})$;*

(H2) *there exist $r > 0$ and $\widetilde{\lambda} \in (\lambda_1, \overline{\lambda})$ such that $m_1\lambda_1 < m_0\widetilde{\lambda}$, and $|u| \leq r$ implies*

$$m_1\lambda_1|u|^2 \leq 2F(t,u) \leq m_0\widetilde{\lambda}|u|^2,$$

where $F(t,u) = \int_0^u f(t,s)ds$ *and* $\overline{\lambda} > \lambda_1$ *such that*

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(|_{-\infty}D_t^{\alpha} u(t)|^2 + l(t)|u(t)|^2 \Big) dt \geq \overline{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt;$$

(H3) $\frac{2F(t,x)}{|x|^2} < m_0(\lambda_1 - \mu)$ *for any* $\mu > 0$ *and all* $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Then the problem (1.3) has at least two nontrivial weak solutions in X^{α}.

To state our main results we need to make some assumptions for the potential l and on the non-linearity f. In this paper, for the potential l we make the following assumptions.

(l1) $l(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $l_0 := \inf_{t\in\mathbb{R}} l(t) > a_0 > 0$;

(l2) There exists $r > 0$ such that for any $M > 0$

$$\text{meas}(\{t \in (y-r, y+r) : \ l(t) \leq M\}) \to 0 \quad \text{as} \quad |y| \to \infty.$$

Also, we make the following assumptions on the non-linearity f.

(f1) $f \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(t,x)x \geq 0$, for all $x \geq 0$, and there exist $c_0 > 0$, $2 < q < +\infty$ such that

$$|f(t,x)| \leq c_0(1 + |x|^{q-1}), \quad \text{for all } \ t, x \in \mathbb{R};$$

(f2) There exist $\mu > 4$ and $R > 0$ such that

$$\mu F(t,x) \leq x f(t,x), \quad \text{for all } \ t, x \in \mathbb{R} \ \text{ and } \ |x| \geq R;$$

(f3) $\lim_{|x|\to 0} \frac{f(t,x)}{x} = 0$ uniformly for $x \in \mathbb{R}$;

(f4) $f(t,-x) = -f(t,x)$ for all $t, x \in \mathbb{R}$;

(f5) For all $s, x \in \mathbb{R}^+$ and $s \in [0,1]$, the inequality $\mathcal{F}(t,sx) \leq \mathcal{F}(t,x)$ holds, for a.e. $t \in \mathbb{R}$, where $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ is defined by $\mathcal{F}(t,x) = \frac{1}{4} f(t,x)x - F(t,x)$;

(f6) $\lim_{|x|\to\infty} \frac{F(t,x)}{|x|^4} = \infty$ uniformly for $x \in \mathbb{R}$;

(f7) There exist an open interval $J \subset \mathbb{R}$ and constants $\delta > 0$, $\gamma_0 \in (1,2)$ and $\eta > 0$ such that

$$F(t,x) \geq \eta |x|^{\gamma_0}, \quad \forall \ (t,x) \in J \times [-\delta, \delta];$$

(f8) There exist $\delta > 0$ and $\widetilde{\lambda} \in (0, \lambda_1)$, such that

$$2F(t,x) \leqslant s_1 \widetilde{\lambda} |x|^2, \quad \forall \ \ t \in \mathbb{R}, \ |x| \leq \delta;$$

(f9) There exists $R > 0$ and $\theta > 2\frac{\max\{s_2,1\}}{\min\{s_1,1\}}$ such that

$$0 < \theta F(t,x) \leqslant f(t,x)x, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, |x| \geq R.$$

The following theorems are the main results of this paper.

Theorem 1.2. *Assume that (l1), (l2), (S1), (S2), and (f1), (f3), (f8) and (f9) hold. Then the problem (1.1) has at least two nontrivial weak solutions.*

Theorem 1.3. *Assume that (l1), (l2) and (f1)-(f4) hold. Then the problem (1.2) has infinitely many weak solutions.*

Theorem 1.4. *Assume that (l1), (l2), (f1) and (f3)-(f6) hold. Then the problem (1.2) has infinitely many weak solutions.*

Theorem 1.5. *Assume that (l1), (l2), (f1)-(f4) and (f7) hold. Then the problem (1.2) has infinitely many nontrivial weak solutions.*

The reminder of the paper is organized as follows. In Section 2, we present some preliminary facts and section 3 is devoted to the proofs of our results.

2. Preliminaries and reminder about fractional calculus

In this section we present some basic concepts and lemmas that we will need in the sequel.

Definition 2.1. *([12]) The left and right Liouville-Weyl fractional integrals of order $0 < \alpha < 1$ on the whole axis $\mathbb{R}$ are defined by*

$$ {}_{-\infty}I_x^{\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}(x-\xi)^{\alpha-1}\phi(\xi)d\xi, \tag{2.1}$$

$$ {}_{x}I_{\infty}^{\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}(\xi-x)^{\alpha-1}\phi(\xi)d\xi, \tag{2.2}$$

respectively, where $x \in \mathbb{R}$.

The left and right Liouville-Weyl fractional derivatives of order $0 < \alpha < 1$ on the whole axis $\mathbb{R}$ are defined by

$$ {}_{-\infty}D_x^{\alpha}\phi(x) = \frac{d}{dx}\,{}_{-\infty}I_x^{1-\alpha}\phi(x), \tag{2.3}$$

$$ {}_{x}D_{\infty}^{\alpha}\phi(x) = -\frac{d}{dx}\,{}_{x}I_{\infty}^{1-\alpha}\phi(x), \tag{2.4}$$

respectively, where $x \in \mathbb{R}$.

The formulas (2.3) and (2.4) may be written in an alternative form as follows:

$$ {}_{-\infty}D_x^{\alpha}\phi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{\infty}\frac{\phi(x)-\phi(x-\xi)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi, \tag{2.5}$$

$$ {}_{x}D_{\infty}^{\alpha}\phi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{\infty}\frac{\phi(x)-\phi(x+\xi)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi. \tag{2.6}$$

Also, we define the Fourier transform $\mathcal{F}(u)(\xi)$ of $u(x)$:

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx.$$

For any $\alpha > 0$, we define the semi-norm and norm respectively as follows (see [5]):

$$\begin{aligned} |u|_{I^{\alpha}_{-\infty}} &= ||_{-\infty}D^{\alpha}_{x}u||_{L^2}, \\ ||u||_{I^{\alpha}_{-\infty}} &= \left(||u||^2_{L^2} + |u|^2_{I^{\alpha}_{-\infty}}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

where $I^{\alpha}_{-\infty}(\mathbb{R})$ stands for the completion of $C^{\infty}_0(\mathbb{R})$ with respect to the norm $||\cdot||_{I^{\alpha}_{-\infty}}$.

Next, for $0 < \alpha < 1$, we give a relationship between the classical fractional Sobolev space $H^{\alpha}(\mathbb{R})$ and the space $I^{\alpha}_{-\infty}(\mathbb{R})$, where $H^{\alpha}(\mathbb{R})$ is defined by

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}) = \overline{C^{\infty}_0(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{\alpha}},$$

with the norm

$$||u||_{\alpha} = \left(||u||^2_{L^2} + |u|^2_{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.8}$$

and semi-norm $|u|_{\alpha} = |||\xi|^{\alpha}\mathcal{F}(u)||_{L^2}$.
Observe that the spaces $H^{\alpha}(\mathbb{R})$ and $I^{\alpha}_{-\infty}(\mathbb{R})$ are equal and have equivalent norms (see [5]). Therefore, we define

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}) |\ |\xi|^{\alpha}\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})\right\}.$$

Define

$$X^{\alpha} = \left\{u \in H^{\alpha}(\mathbb{R}) | \int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t)|^2 + l(t)|u(t)|^2\right)dt < \infty\right\},$$

and observe that X^{α} is a reflexive and separable Hilbert space with the inner product:

$$\langle u, v\rangle_{X^{\alpha}} = \int_{\mathbb{R}} \left({}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t) \cdot {}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}v(t) + l(t)u(t)v(t)\right)dt, \tag{2.9}$$

and the corresponding norm: $\|u\|^2_{X^{\alpha}} = \langle u, u\rangle_{X^{\alpha}}$.
We first consider the eigenvalue problem:

$$\begin{cases} {}_{t}D^{\alpha}_{\infty}({}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t)) + l(t)u(t) = \lambda u, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u \in H^{\alpha}(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{2.10}$$

By a weak solution of the system (2.10) we will mean any $u \in X^{\alpha}$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} \left({}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t) \cdot {}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}v(t) + l(t)u(t)v(t)\right)dt = \lambda \int_{\mathbb{R}} u(t)v(t)dt, \tag{2.11}$$

for every $v \in X^{\alpha}$.

Theorem 2.1. *Suppose that (l1) and (l2) hold. Then each eigenvalue of (2.10) is real, and if we repeat each eigenvalue according to its multiplicity, then we have* $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ *and* $\lambda_k \to \infty$ *as* $k \to \infty$. *For the eigenvalues* λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *we have the following characterizations:*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in X^\alpha \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 + l(t)|u(t)|^2 \right) dt}{\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt}, \tag{2.12}$$

and

$$\lambda_k = \inf_{u \in X^\alpha \cap E_k^T} \frac{\int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 + l(t)|u(t)|^2 \right) dt}{\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt}, \quad k \geq 2, \tag{2.13}$$

where $E_k = \oplus_{1 \leq j \leq k} \ker([rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty}D_t^\alpha{}_{-\infty}D_t^\alpha + l(t) - \lambda_k)$ *stand for the eigenspaces. Furthermore, there exists an orthogonal basis* $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ *of* X^α, *where* $w_k \in X^\alpha$ *is an eigenfunction corresponding to the eigenvalue* λ_k.

Proof. The proof is similar to that of Theorem 1 of [8], and so, is omitted. $\square$

Lemma 2.1. *(See* [9, Lemma 2.2]*) Under the assumptions (l1) and (l2), the embedding* $X^\alpha \hookrightarrow L^2([0, T])$ *is compact.*

Lemma 2.2. *(See* [5, Theorem 2.1]*) Let* $\alpha > \frac{1}{2}$, *then* $H^\alpha(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ *and there is a constant* $C = C_\alpha$ *such that*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| \leq C\|u\|_{X^\alpha}. \tag{2.14}$$

Also, by Lemma 2.2, there is a constant $C_\alpha > 0$ such that

$$\|u\|_\infty \leq C_\alpha \|u\|_{X^\alpha}. \tag{2.15}$$

Remark 2.1. From Lemma 2.2, it follows that if $u \in H^\alpha(\mathbb{R})$ with $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, then $u \in L^q(\mathbb{R})$ for all $q \in [2, \infty)$, because

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q dx \leq \|u\|_\infty^{q-2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Remark 2.2. Using Remark 2.1 and Lemma 2.1, it can easily be verified that the embedding of X^α in $L^q(\mathbb{R})$ is also compact for $q \in (2, \infty)$. Therefore, for all $2 \leq q < \infty$, the embedding of X^α in $L^q(\mathbb{R})$ is continuous and compact, and hence, in view of Lemma 2.2, for all $q \in [2, \infty)$ there exists $D_q > 0$ such that

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq D_q \|u\|_{X^\alpha}.$$

The functional $I\colon X^\alpha \to \mathbb{R}$ corresponding to the problem (1.1) is defined by

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{S}\bigg(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt\bigg) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} l(t)|u(t)|^2 dt - \int_{\mathbb{R}} F(t, u(t))dt,$$

where $\widehat{S}(t) = \int_0^t |S(s)|ds$. It is easy to see that $I \in C^1(X^\alpha, \mathbb{R})$ and its critical points are solutions of the problem (1.1). Also, for any $u, v \in X^\alpha$, we have

$$I'(u)v = S\bigg(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt\bigg) \times$$

$$\int_{\mathbb{R}} [rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty}D_t^\alpha u(t)[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty}D_t^\alpha v(t)dt + \int_{\mathbb{R}} l(t)uvdt - \int_{\mathbb{R}} f(t, u)vdt.$$

Now, we provide some concepts of local linking and results that will be used in the proofs of the main results (see [13, 14]). Let X be a real Banach space, and let $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $\mathcal{H} = \{u \in X : I'(u) = 0\}$. Let $u \in \mathcal{H}$ be an isolated critical point of I with $I(u) = c \in \mathbb{R}$, and let U be a neighborhood of u, continuing the unique critical point u. The group

$$C_z(I, u) = H_z(I^c \cap U, I^c \cap U\backslash\{u\}),\ z \in \mathbb{Z}$$

is called the zth critical group of I at u, where $I^c = \{u \in X; I(u) \leqslant c\}$ and $H_z(.,.)$ denotes the zth singular relative homology group with integer coefficients. Let $a < \inf_{u\in\mathcal{H}} I(u)$, the group

$$C_z(I, \infty) = H_z(X, I^a), \quad z \in \mathbb{Z}$$

is called the critical group of I at infinity. We call

$$M_z = \sum_{u\in H} dim C_z(I, u)$$

the zth Morse-type number of the pair (X, I^a), and

$$\beta_z = \dim C_z(I, \infty),$$

the Betti number of the pair (X, I^a). The core of Morse theory are the following relations between the numbers M_z and β_z (see [15, 16]):

$$\sum_{j=0}^{z}(-1)^{z-j}M_j \geq \sum_{j=0}^{z}(-1)^{z-j}\beta_j, \quad \text{for } z \in \mathbb{Z} \quad \text{(Morse inequality);}$$

$$\sum_{z=0}^{\infty}(-1)^z M_z = \sum_{z=0}^{\infty}(-1)^z \beta_z \quad \text{(Morse equality).}$$

Observe that if $\mathcal{H} = \emptyset$, then $\beta_z = 0$ for all $z \in \mathbb{Z}$. Since $M_z \geq \beta_z$, for each $z \in \mathbb{Z}$, it follows that if $\beta_{z_*} \neq 0$ for some $z_* \in \mathbb{Z}$, then I must have a critical point u_* with $C_{z_*}(I, u_*) \not\cong 0$. If $\mathcal{H} = u_*$, then $C_z(I, \infty) \not\cong C_z(I, u_*)$ for some $z \in \mathbb{Z}$, and hence, I must have a new critical point. One can use the critical group to distinguish critical points obtained by other methods and use the Morse equality to find new critical points. This is the basic idea to be used in the proofs of our main results.

Lemma 2.3 ([17]). *Assume that $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ has a critical point $u = 0$ with $I(0) = 0$, and I has a local linking at 0 with respect to the direct sum decomposition $X = X^- \bigoplus X^+$, $\kappa = \dim X^- < \infty$, that is, there exists small enough $r > 0$ such that $I(u) > 0$ for $u \in X^+$ with $0 < \|u\| \leqslant r$, and $I(u) \leqslant 0$ for $u \in X^-$ with $\|u\| \leqslant r$. Then $C_\kappa(I,0) \ncong 0$, that is, 0 is a homological nontrivial critical point of I.*

3. Proof of the main results

In this section, we prove Theorems 2 – 5, stated in Section 1. In what follows, the letter C will denote various positive constants whose value can be changed from line to line but essential to the analysis of the problem. To prove Theorem 1.2, we will need a number of auxiliary results, which we state in the form of lemmas or propositions.

Lemma 3.1. *Let f satisfy (f1) and (f3). Then any bounded sequence $\{u_n\} \subset X^\alpha$ such that $I'(u_n) \to 0$ as $n \to \infty$ has at least one convergent subsequence.*

Proof. Assume that $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^\alpha$ is bounded in X^α. Then, X^α is a reflexive Banach space, and so, passing to a subsequence if necessary (for simplicity denoted again by $\{u_n\}$), by Remark 2, we may assume that

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{weakly in } X^\alpha, \\ u_n \to u, & \text{strongly in } L^q(\mathbb{R})\ (2 \leqslant q < \infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

Then we can write

$$\langle I'(u_n) - I'(u)\rangle(u_n - u) = S\bigg(\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha u_n(t)|^2 dt\bigg) \int_{\mathbb{R}} {}_{-\infty}D_t^\alpha u_n(t) {}_{-\infty}D_t^\alpha (u_n(t) - u(t))dt$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} l(t)|u_n(t) - u(t)|^2 dt - S\bigg(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00,0.00,0.00_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt\bigg)$$
$$\times \int_{\mathbb{R}} [rgb]1.00,0.00,0.00_{-\infty}D_t^\alpha u(t)[rgb]1.00,0.00,0.00_{-\infty}D_t^\alpha (u_n(t) - u(t))dt$$
$$- \int_{\mathbb{R}} \big(f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))\big)(u_n(t) - u(t))dt$$

$$= S\Big(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u_n(t)|^2 dt \Big) \int_{\mathbb{R}} |_t D_{\infty}^{\alpha} (u_n(t) - u(t))|^2 dt$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} l(t) |u_n(t) - u(t)|^2 dt + \Big(S\big(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u_n(t)|^2 dt \big)$$
$$- S\big(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u(t)|^2 dt \big) \Big) \int_{\mathbb{R}} [rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u(t)$$
$$\times [rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} (u_n(t) - u(t)) dt - \int_{\mathbb{R}} \big(f(t, u_n(t)) - f(t, u(t)) \big) (u_n(t) - u(t)) dt$$
$$\geqslant \min\{s_1, 1\} \|u_n - u\|_{X^{\alpha}}^2 - \Big(S\big(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u(t)|^2 dt \big) -$$
$$- S\big(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u_n(t)|^2 dt \big) \Big)$$
$$\Big(\int_{\mathbb{R}} [rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u(t) [rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} (u_n(t) - u(t)) dt \Big)$$
$$- \int_{\mathbb{R}} \big(f(t, u_n(t)) - f(t, u(t)) \big) (u_n(t) - u(t)) dt. \tag{3.2}$$

So, it follows from (3.2) that

$$\begin{aligned} &\min\{s_1, 1\} \|u_n - u\|_{X^{\alpha}}^2 \leqslant \langle I'(u_n) - I'(u) \rangle (u_n - u) \\ &+ \Big(S\big(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u(t)|^2 dt \big) - S\big(\int_{\mathbb{R}} |_{-\infty} D_t^{\alpha} u_n(t)|^2 dt \big) \Big) \\ &\Big(\int_{\mathbb{R}} [rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u(t) [rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} (u_n(t) - u(t)) dt \Big) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \big(f(t, u_n(t)) - f(t, u(t)) \big) (u_n(t) - u(t)) dt. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Therefore, $\{u_n\}$ is bounded in X^{α} and $u_n \rightharpoonup u$ in X^{α}, and we have

$$\Big(S \Big(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u(t)|^2 dt \Big) - S \Big(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u_n(t)|^2 dt \Big) \Big)$$
$$\int_{\mathbb{R}} [rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} u(t) [rgb]1.00, 0.00, 0.00_{-\infty} D_t^{\alpha} (u_n(t) - u(t)) dt \to 0 \tag{3.4}$$

as $n \to \infty$. In view of (f1) and (f3), for any given $\epsilon > 0$, there exists $C_{\epsilon} > 0$ such that

$$|f(t, u)| \leqslant \epsilon |u| + C_{\epsilon} |u|^{q-1}, \text{ for almost every } t, u \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Consequently, according to (3.5), we have

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \big(f(t,u_n)-f(t,u)\big)(u_n-u)dt\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \big(\epsilon(|u_n|+|u|)+C_\epsilon(|u_n|^{q-1}-|u|^{q-1})\big)|u_n-u|dt$$
$$\leqslant \epsilon\big(\|u_n\|_2+\|u\|_2\big)\|u_n-u\|+C_\epsilon\big(\|u_n\|_q^{q-1}-\|u\|_q^{q-1}\big)\|u_n-u\|_q$$
$$\leqslant \epsilon C_1\|u_n-u\|_2+C_2C_\epsilon\|u_n-u\|_q, \tag{3.6}$$

where C_1 and C_2 are positive constants that are independent of n and ϵ. Since by (3.1), $\|u_n-u\|_2\to 0$ and $\|u_n-u\|_q\to 0$ as $n\to\infty$, one has

$$\int_{\mathbb{R}} \big(f(t,u_n)-f(t,u)\big)(u_n-u)dt \to 0 \quad as \;\; n\to 0. \tag{3.7}$$

Finally, since $I'(u_n)\to 0$, then by using (3.3), (3.4) and (3.7), we get $\|u_n-u\|_{X^\alpha}\to 0$. This completes the proof. $\square$

Proposition 3.1. *All the (PS) sequences for I are bounded, provided that f satisfies (f1) and (f9).*

Proof. Let $\{u_n\}\subseteq X^\alpha$ satisfy

$$I(u_n)\to c, \;\; I'(u_n)\to 0 \;\text{ in } (X^\alpha)^* \quad \text{as } \; n\to\infty.$$

Then, by the above relations, (S1), (S2), (f1) and (f9), we have

$$\theta c+o(1)+o(\|u_n\|)=\theta I(u_n)-\langle I'(u_n),u_n\rangle,$$

where

$$\begin{aligned}\theta I(u_n) &= \frac{1}{2}\theta\widehat{S}(\|_{-\infty}D_t^\alpha\|^2)+\frac{1}{2}\theta\int_{\mathbb{R}} l(t)|u_n|^2dt-\theta\int_{\mathbb{R}}F(t,u_n)dt\\ &\geqslant \frac{1}{2}\theta s_1\|_{-\infty}D_t^\alpha u_n\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\theta\int_{\mathbb{R}} l(t)|u_n|^2dt-\theta\int_{\mathbb{R}}F(t,u_n)dt\\ &\geqslant \frac{1}{2}\theta\min\{s_1,1\}\|u_n\|_{X^\alpha}^2-\theta\int_{\mathbb{R}}F(t,u_n)dt,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\langle I'(u_n),u_n\rangle &\leqslant s_2\int_{\mathbb{R}}|_{-\infty}D_t^\alpha u_n|^2dt+\int_{\mathbb{R}}l(t)|u_n|^2dt-\int_{\mathbb{R}}f(t,u_n)u_ndt\\ &\leqslant \max\{s_2,1\}\|u_n\|_{x^\alpha}^2-\int_{\mathbb{R}}f(t,u_n)u_ndt.\end{aligned}$$

Then, we have

$$\theta c+o(1)+o(\|u_n\|)\geqslant (\frac{1}{2}\theta\min\{s_1,1\}-\max\{s_2,1\})\|u_n\|_{X^\alpha}^2+$$
$$\int_{\mathbb{R}}\big(f(t,u_n)u_n-\theta F(t,u_n)\big)dt\geqslant (\frac{1}{2}\theta\min\{s_1,1\}-\max\{s_2,1\})\|u_n\|_{X^\alpha}^2, \tag{3.8}$$

implying that $\{u_n\}$ is bounded in X^α. □

Lemma 3.2. *Assume that f satisfies the conditions (f1), (f3) and (f9). Then the functional I satisfies the (PS) condition.*

Proof. The result follows from Lemma 3.1 and Proposition 3.1, and so, we omit the details.

Proposition 3.2. *Let f satisfy the conditions (f1), (f3) and (f9). Then $C_z(I,\infty)\cong 0$ for all $z\in\mathbb{Z}$.*

Proof. Let S^1 be the unit sphere in X^α. By (f1), (f3) and (f9), one can get

$$|F(t,x)|\geqslant C|x|^\theta - C_1|x|^2,\ \text{ for all } t,x\in\mathbb{R}. \tag{3.9}$$

So, by (3.9), for any $u\in S^1$, we have

$$\begin{aligned} I(su) &= \frac{1}{2}\widehat{S}\bigg(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00,0.00,0.00_{-\infty}D_t^\alpha su(t)|^2dt\bigg) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} l(t)|su(t)|^2dt - \int_{\mathbb{R}} F(t,su(t))dt \\ &\leqslant \frac{1}{2}\max\{s_2,1\}\|su\|_{X^\alpha}^2 - \int_{\mathbb{R}} F(t,su(t))dt \leqslant \frac{1}{2}\max\{s_2,1\}s^2\|u\|_{X^\alpha}^2 - \int_{\mathbb{R}}(|su|^\theta - C_1|su|^2)dt \\ &\leqslant \frac{1}{2}\max\{s_2,1\}s^2\|u\|_{X^\alpha}^2 - s^\theta\|u\|_{L^\theta}^\theta + C_1\|u\|_{L^2}^2 \to -\infty,\ \text{ as } s\to+\infty. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Then, there exists $a_1>0$, where $I(su)\leqslant -a_1$ for some $s>0$. In fact, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}I(su) &= \langle I'(su),u\rangle = S\bigg(\int_{\mathbb{R}} s^2|_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2dt\bigg)|s|\int_{\mathbb{R}} |_tD_\infty^\alpha u(t)|^2dt \\ &+ s\int_{\mathbb{R}} l(t)|u|^2dt - \int_{\mathbb{R}} f(t,su)udt \\ &\leqslant s_2|s|\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00,0.00,0.00_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2dt + s\int_{\mathbb{R}} l(t)|u|^2dt - \int_{\mathbb{R}} f(t,su)udt \\ &\leqslant \frac{1}{s}\bigg[\max\{s_2,1\}\bigg(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00,0.00,0.00_{-\infty}D_t^\alpha su(t)|^2dt + \int_{\mathbb{R}} l(t)|su|^2dt\bigg) - \int_{\mathbb{R}} f(t,su)sudt\bigg] \\ &= \frac{1}{s}\bigg(\max\{s_2,1\}\ s^2\|u\|_{X^\alpha}^2 - \int_{\mathbb{R}} f(t,su)sudt\bigg) = \frac{1}{s}\bigg(\max\{s_2,1\}\ s^2\|u\|_{X^\alpha}^2 - \int_{\mathbb{R}} F(t,su)dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} F(t,su)dt - \int_{\mathbb{R}} f(t,su)sudt\bigg) = \frac{1}{s}\bigg[\frac{2\max\{s_2,1\}}{\min\{s_1,1\}}\bigg(\frac{\min\{s_1,1\}}{2}\|su\|_{X^\alpha}^2 - \int_{\mathbb{R}} F(t,su)dt\bigg) \\ &+ \frac{2\max\{s_2,1\}}{\min\{s_1,1\}}\int_{\mathbb{R}} F(t,su)dt - \int_{\mathbb{R}} f(t,su)sudt\bigg] \leqslant \frac{1}{s}\bigg[\frac{2\max\{s_2,1\}}{\min\{s_1,1\}}\bigg(\frac{1}{2}\widehat{S}(\|su\|_{X^\alpha}^2)) - \int_{\mathbb{R}} F(t,su)dt\bigg)\bigg]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

So, by (3.10) there exists $A > 0$ such that for any $a > A$ and $s > 0$ big enough, we can get

$$I(su) \leqslant -a \Rightarrow \frac{d}{ds} I(su) < 0. \tag{3.12}$$

Hence, for any $a > A$, there exists a unique $T := T(u) > 0$ such that

$$I(T(u)u) = -a \quad \text{for } u \in \ \ S^1. \tag{3.13}$$

By (3.12) and the implicit function theorem, T is a continuous function from S^1 to $\mathbb{R}$. Define

$$h(u) = \begin{cases} 1, & \text{if } I(u) \leqslant -a, \\ \frac{1}{\|u\|_{X^\alpha}} T(\frac{u}{\|u\|_{X^\alpha}}), & \text{if } I(u) > -a, \quad u \neq 0, \end{cases}$$

and observe that $h \in C(X^\alpha, \mathbb{R})$. Now, we define

$$\eta(t,u) = (1-t)u + th(u)u. \tag{3.14}$$

It is clear that η is continues, and by (3.13) and (3.14), for all $u \in X^\alpha \setminus \{0\}$ with $I(u) > -a$, we have $I(\eta(1,u)) = I(h(u)u) = -a$. Then $\eta(1,u) \in I^{-a}$ for $u \in X^\alpha \setminus \{0\}$; $\eta(s,u) = u$ for $s \in [0,1]$ and $u \in I^{-a}$, so I^{-a} is a strong deformation retract of $X^\alpha \setminus \{0\}$. Hence, for $z \in \mathbb{Z}$, we have

$$C_z(I, \infty) = H_z(X^\alpha, I^{-a}) \cong H_z(X^\alpha, X^\alpha \setminus \{0\}) \cong H_z(B^\infty, S^1) \cong 0,$$

where $B^\infty = \{u \in X^\alpha : \|u\|_{X^\alpha} \leq 1\}$. □

Proposition 3.3. *Let f satisfy the conditions (f1) and (f8). Then $C_z(I,0) \cong \delta_{z,0}\mathbb{Z}$ for all $z \in \mathbb{Z}$.*

Proof. For any $u \in X^\alpha$, in view of (S1), (f1) and (f8), we have

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\widehat{S}\bigg(\int_{\mathbb{R}} |[rgb]1.00,0.00,0.00_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt\bigg) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} l(t)|u(t)|^2 dt - \int_{\mathbb{R}} F(t,u(t))dt \\ &\geqslant \frac{1}{2}\min\{s_1, 1\}\|u\|_{X^\alpha}^2 - \int_{\{|u| \leqslant \delta\}} F(t,u)dt - \int_{\{|u|>\delta\}} F(t,u)dt \\ &\geqslant \frac{1}{2}\min\{s_1, 1\}\|u\|_{X^\alpha}^2 - \frac{\widetilde{\lambda}}{2} s_1 \int_{\{|u| \leqslant \delta\}} |u|^2 dt - \int_{\{|u|>\delta\}} F(t,u)dt \\ &\geqslant \frac{1}{2}\bigg(\min\{s_1, 1\} - s_1\frac{\widetilde{\lambda}}{\lambda_1}\bigg)\|u\|_{X^\alpha}^2 - C_0 D_q^q \|u\|_{X^\alpha}^q. \end{aligned}$$

Since $2 < q \leqslant p^*$, we conclude that $u = 0$ is a local minimizer of I, and so, $C_z(I,0) \cong \delta_{z,0}\mathbb{Z}$ for all $z \in \mathbb{Z}$. □

Proposition 3.4. *Assume that the conditions (l2), (l3), (S1), (S2), (f1) and (f8) are fulfilled. Then $C_1(I,0) \neq 0$.*

Proof. The proof is similar to that of Lemma 4.10 of [8], and so, is omitted. □

Proof of Theorem 1.2. In view of Propositions 3.2 and 3.3, we have $C_z(I,\infty) \cong 0$, $z \in \mathbb{Z}$ and $C_z(I,0) \cong \delta_{z,0}\mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Z}$, and hence $C_z(I,\infty) \not\cong C_z(I,0)$. Thus, Morse theory implies that the problem (1.1) has at least one nontrivial solution.

Also, Lemma 3.2 tells us that I satisfies the (PS) condition, is bounded from below and has a global minimizer. Since by Proposition 3.4 we have $C_1(I,0) \neq 0$, then 0 is not the minimizer of I and is homological nontrivial. It follows from Lemma 2.3, that I has at least two nontrivial critical points. □

The functional $I : X^\alpha \to \mathbb{R}$ corresponding to the problem (1.2) is defined by

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} l(t)|u(t)|^2 dt - \int_{\mathbb{R}} F(t,u(t))dt, \end{aligned} \tag{3.15}$$

where $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$. Under the conditions of Theorems 1.3, 1.4 and 1.5, it is easy to see that $I \in C^1(X^\alpha,\mathbb{R})$, and its critical points are solutions of the problem (1.2). Also, we know that for any $u,v \in X^\alpha$

$$\begin{aligned} I'(u)v &= \left(a + b\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt\right)\int_{\mathbb{R}} {}_{-\infty}D_t^\alpha u(t) \cdot {}_{-\infty}D_t^\alpha v(t)dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} l(t)u(t)v(t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(t,u(t)v(t)dt. \end{aligned}$$

Let E_i denote the eigenspace of λ_i, then $\dim E_i < \infty$. Denote $X_1 = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus_k$ and

$$X_2 = \overline{\oplus_{j=k+1}^\infty E_i},$$

and observe that X has a direct sum decomposition $X = X_1 \oplus X_2$ with $\dim X_1 < \infty$.

Now, we recall the following theorem from Rabinowitz [18], which was introduced to find infinitely many solutions of the problem (1.2).

Theorem 3.1. *Let X be an infinite dimensional real Banach space, and let $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ be even, satisfy the (PS) condition and $I(0) = 0$. If $X = X_1 \oplus X_2$ with X_1 being finite dimensional, and I satisfying:*

(i) there exist constants $\rho, \gamma > 0$ such that $I_{\partial B_\rho \cap X_2} \geq \gamma$, where $\partial B_\rho = \{u \in X : \|u\| = \rho\}$, and

(ii) for each finite dimensional subspace $\widetilde{X} \subset X$, there exists $r = r_{\widetilde{X}} > 0$ such that $I \leq 0$ on $\widetilde{X} \backslash B_r$.

Then, I possesses an unbounded sequence of critical values.

For the reader's convenience, we now recall the variant fountain theorem, which is due to Zou [19]. Assume that X is a Banach space with the norm $\|\cdot\|$ and $X = \overline{\oplus_{j\in\mathbb{N}} E_j}$, where E_j are finite-dimensional subspaces of X. For each $k \in \mathbb{N}$, let $Y_k = \oplus_{j=0}^{k} E_j$, $Z_k = \overline{\oplus_{j=k}^{\infty} E_j}$ and $B_k = \{u \in Y_k : \|u\| \leq \rho_k\}$, $N_k = \{u \in Z_k : \|u\| \leq r_k\}$, for $\rho_k > r_k > 0$. Consider a C^1-functional $\Psi_\lambda : X \to \mathbb{R}$ defined by

$$\Psi_\lambda(u) = A(u) - \lambda H(u), \ \lambda \in [1, 2].$$

We set up the following assumptions:

(T1) Ψ_λ maps bounded sets to bounded sets uniformly for all $\lambda \in [1, 2]$, and $\Psi_\lambda(-u) = \Psi_\lambda(u)$ for all $(\lambda, u) \in [1, 2] \times X$.

(T2) $H(u) \geq 0$ for all $u \in X$; $A(u) \to \infty$ or $H(u) \to \infty$ as $\|u\| \to \infty$, or

(T3) $H(u) \leq 0$ for all $u \in X$; $H(u) \to -\infty$ as $\|u\| \to \infty$.

For $k \geq 2$, define $\Gamma_k := \{\gamma \in C(B_k, X) : \ \gamma \text{ is odd}, \ \gamma|_{\partial B_k} = id\}$, and

$$\begin{aligned} a_k(\lambda) &:= \max_{u\in Y_k, \|u\|=\rho_k} \Psi_\lambda(u), \\ b_k(\lambda) &:= \inf_{u\in Z_k, \|u\|=r_k} \Psi_\lambda(u), \\ c_k(\lambda) &:= \inf_{\gamma\in\Gamma_k} \max_{u\in B_k} \Psi_\lambda(\gamma(u)). \end{aligned}$$

Theorem 3.2. *([19, Theorem 2.1]) Assume that the conditions (T1) and (T2) (or (T3)) hold. If $b_k(\lambda) > a_k(\lambda)$ for all $\lambda \in [1, 2]$, then $c_k(\lambda) > b_k(\lambda)$ for all $\lambda \in [1, 2]$. Moreover, for a.e. $\lambda \in [1, 2]$, there exists a sequence $\{u_n^k(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ such that*

$$\sup_n \|u_n^k(\lambda)\| < \infty, \quad \Psi'_\lambda(u_n^k(\lambda)) \to 0, \ \ \text{and} \ \ \Psi_\lambda(u_n^k(\lambda)) \to c_k, \ \ \text{as } n \to \infty.$$

In order to find the sequence of nontrivial solutions of the problem (1.2), we will use the genus properties, so we recall a definition and some results (see [18]).

Let X be a Banach space, $g \in C^1(X, \mathbb{R})$ and $c \in \mathbb{R}$. We set

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{A \subset X \setminus \{0\} : \ A \text{ is closed in } X \text{ and is symmetric with respect to } 0\}, \\ K_c &= \{x \in X : \ g(x) = c, \ g'(x) = 0\}, \\ g^c &= \{x \in X : \ g(x) \leq c\}. \end{aligned}$$

Definition 3.1. *([16]) For $A \in \Sigma$, we say that the genus of A is j (denoted by $\gamma(A) = j$) if there is an odd map $\psi \in C(A, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$, and j is the smallest integer with this property.*

Theorem 3.3. *Let g be an even C^1 functional on X which satisfies the Palais-Smale condition. For $j \in \mathbb{N}$, $j > 0$, let*

$$\Sigma_j = \{A \in \Sigma : \ \gamma(A) \geq j\}, \qquad c_j = \inf_{A \in \Sigma_j} \sup_{u \in A} g(u).$$

The following assertions hold:

(i) If $\Sigma_j \neq \emptyset$ and $c_j \in \mathbb{R}$, then c_j is a critical value of g.

(ii) If there exists $r \in \mathbb{N}$ such that $c_j = c_{j+1} = \cdots = c_{j+r} = c \in \mathbb{R}$ and $c \neq g(0)$, then $\gamma(K_c) \geq r + 1$.

Lemma 3.3. *Suppose that the condition (f2) is satisfied. Then any Palais-Smale sequence of I is bounded in X^α.*

Proof. Assume that $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^\alpha$ is a sequence such that $I(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, and $I'(u_n) \to 0$ as $n \to \infty$. Then there exists a constant $M > 0$ such that for any $n \in \mathbb{N}$

$$|I(u_n)| \leq M \quad \text{and} \quad \|I'(u_n)\|_{(X^\alpha)^*} \leq M. \tag{3.16}$$

Under hypothesis (f2), for n large enough, we can write

$$\begin{aligned} M + M\|u_n\|_{X^\alpha} &\geq I(u_n) - \tfrac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\mu}\right) \min\{a,1\}\|u_n\|^2_{X^\alpha} \\ &+ b\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{\mu}\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty}D_t^\alpha u_n(t)|^2 dt\right)^2 + \tfrac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} (f(t,u_n(t))u_n \right. \\ &\left. - \mu F(t,u_n)\right)dt \geq \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\mu}\right) \min\{a,1\}\|u_n\|^2_{X^\alpha}. \end{aligned}$$

Since $\mu > 4$, $\{u_n\}$ is bounded. □

Lemma 3.4. *Suppose that the conditions (f1)-(f3) are satisfied. Then the functional I satisfies the Palais-Smale condition.*

Proof. Assume that $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^\alpha$ is a Palais-Smale sequence of I. Then, by Lemma 3.3, we see that $\{u_n\}$ is bounded in X^α. Hence, by Lemma 3.1, the functional I satisfies the Palais-Smale condition. □

Proof of Theorem 1.3. Observe first that, by Lemma 3.4, the functional I satisfies the Palais-Smale condition. Moreover, I is even due to condition (f4). Next, we proceed to show that I satisfies the hypotheses (i) and (ii) of Theorem 3.1 by dividing it into the following steps.

Step 1. There exist constants $\rho, \gamma > 0$ such that $I_{\partial B_\rho \cap X_2} \geq \gamma$. To this end, choose $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$ and $\gamma = \frac{\min\{a,1\}}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\rho^2$. Then by (f3), there exists $\delta > 0$

such that

$$|f(t,x)| \leq \lambda \min\{a,1\}|x|, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ |x| \leq \delta,$$

and hence, by (f1), one can get

$$F(t,x) \leq \lambda \frac{\min\{a,1\}}{2} x^2 + C_3|x|^q, \quad \forall\, t, x \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Next, for $u \in X_2$, we have

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(a|_{-\infty}D_t^{\alpha}u(t)|^2 + l(t)|u(t)|^2\right)dt + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}} |_{-\infty}D_t^{\alpha}u(t)|^2 dt\right)^2 \\ &\quad -\frac{\min\{a,1\}}{2}\lambda \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt - C_3 \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^q dt \\ &\geq \frac{\min\{a,1\}}{2}\|u\|_{X^\alpha}^2 - \frac{\min\{a,1\}}{2}\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\|u\|_{X^\alpha}^2 - C_3 D_2 \|u\|_{X^\alpha}^q \\ &\geq \frac{\min\{a,1\}}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_{X^\alpha}^2 - C_3 D_2 \|u\|_{X^\alpha}^q. \end{aligned}$$

Since $q > 2$, then there exists some small $\rho > 0$ such that

$$I(u) \geq \frac{\min\{a,1\}}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\rho^2 = \gamma > 0$$

for any $u \in X_2$ with $\|u\|_{X_\alpha} = \rho$.

Step 2. We claim that for each finite dimensional subspace $\widetilde{X} \subset X^\alpha$, there exists a number $r = r_{\widetilde{X}} > 0$ such that $I \leq 0$ on $\widetilde{X} \backslash B_r$. To this end, observe that in view of (f1), (f2) and (f3), there exist constants $C_4, C_5 > 0$ such that

$$F(t,u) \geq C_4|u|^\mu - C_5|u|^2, \quad \forall\, t, u \in \mathbb{R}.$$

So, for any $u \in \widetilde{X} \backslash B_r$, one can get

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(a|_{-\infty}D_t^{\alpha}u(t)|^2 + l(t)|u(t)|^2\right)dt + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}} |_{-\infty}D_t^{\alpha}u(t)|^2 dt\right)^2 \\ &\quad -C_4 \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^\mu dt + C_5 \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt \\ &\leq \frac{\max\{a,1\}}{2}\|u\|_{X^\alpha}^2 + \frac{b}{4}\|u\|_{X^\alpha}^4 - C_4 \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^\mu dt + C_5 \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Since $\widetilde{X} \subset X^\alpha$ is a finite dimensional space, then all the norms $\widetilde{X}$ are equivalent, and hence we can choose $r = r_{\widetilde{X}} > 0$ such that $I \leq 0$ on $\widetilde{X} \backslash B_r$. Thus, the proof is completed by Theorem 3.1.

□

For $j \in \mathbb{N}$, let $X_j = \mathbb{R}w_j$, where w_j is the eigenfunction corresponding to the eigenvalue λ_j. In order to apply the above variant fountain theorem to prove our

Theorem 1.4, we define the family of functionals Ψ_λ on X^α by

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda(u) &= \frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}}|_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2dt + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}}|_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2dt\right)^2 \\ &+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} l(t)|u(t)|^2dt - \lambda\int_{\mathbb{R}} F(t,u(t))dt := A(u) - \lambda B(u), \quad \forall\, \lambda\in[1,2]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Obviously, $B(u)\geq 0$ follows by the condition (f1), $A(u)\to\infty$ as $\|u\|_{X^\alpha}\to\infty$ and by condition (f4), we know that $\Psi_\lambda(-u)=\Psi_\lambda(u)$ for all $\lambda\in[1,2]$, $u\in X^\alpha$. Also, Ψ_λ maps bounded sets to bounded sets uniformly for $\lambda\in[1,2]$.

Now we show that Ψ_λ satisfies the conditions of Theorem 3.2.

Lemma 3.5. *Under the assumptions of Theorem 1.4, there exists a sequence $r_k\to+\infty$ as $k\to\infty$ such that*

$$b_k(\lambda) = \inf_{u\in Z_k, \|u\|_{X^\alpha}=r_k}\Psi_\lambda(u) > 0,$$

where $Z_k = \overline{\oplus_{j=k}^\infty E_j} = \overline{span\{w_k,\dots\}}$ for all $k\in\mathbb{N}$.

Proof. For any $2<q<+\infty$, we set

$$\beta_k = \sup_{u\in Z_k}\frac{\|u\|_q}{\|u\|_{X^\alpha}}, \quad \forall\, k\in\mathbb{N}. \tag{3.19}$$

It is clear that $0<\beta_{k+1}\leq\beta_k$, so that $\beta_k\to\overline{\beta}$. For every $k\geq 0$, there exists $u_k\in Z_k$ such that $\|u_k\|_{X^\alpha}=1$ and $\|u_k\|_q>\frac{\beta_k}{2}$. By the definition of Z_k, we have $u_k\rightharpoonup 0$ in X^α, and by Remark 2.2, we have $u_k\to 0$ in $L^q(\mathbb{R}^N)$. Thus, we have proved that $\overline{\beta}=0$, and hence $\beta_k\to 0$ as $k\to\infty$.
In view of conditions (f1) and (f3), for any given $\varepsilon>0$, there exists a positive constant $\theta_\varepsilon>0$ such that

$$F(t,u)\leq\varepsilon u^2+\theta_\varepsilon|u|^q, \quad \forall\, t,u\in\mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Hence, for any $u\in Z_k$ and $\varepsilon>0$ small enough, by (3.19) and (3.20), we get

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda(u) &\geq \frac{\min\{a,1\}}{2}\|u\|^2_{X^\alpha} - \lambda\varepsilon\|u\|_2^2 - \lambda\theta_\varepsilon\|u\|_q^q \\ &\geq \left(\frac{\min\{a,1\}}{2} - \frac{\lambda\varepsilon}{a_0}\right)\|u\|^2_{X^\alpha} - \lambda\theta_\varepsilon\beta_k^q\|u\|^q_{X^\alpha}.\end{aligned}$$

For any $k\in\mathbb{N}$, let

$$r_k = \left(\frac{\lambda q\theta_\varepsilon\beta_k^q}{\min\{a,1\}}\right)^{\frac{1}{2-q}}.$$

Then, we have

$$\begin{aligned} b_k(\lambda) &= \inf_{u\in Z_k, \|u\|_{X^\alpha}=r_k} \Psi_\lambda(u) \\ &\geq \inf_{u\in Z_k, \|u\|_{X^\alpha}=r_k} \left[\left(\frac{\min\{a,1\}}{2} - \frac{\lambda\varepsilon}{a_0}\right)\|u\|^2_{X^\alpha} - \lambda\theta_\varepsilon\beta_k^q\|u\|^q_{X^\alpha}\right] \\ &\geq \left(\frac{\min\{a,1\}}{2} - \frac{\lambda\varepsilon}{a_0} - \frac{\min\{a,1\}}{q}\right)\left(\frac{\lambda q\theta_\varepsilon\beta_k^q}{\min\{a,1\}}\right)^{\frac{2}{2-q}} := \widetilde{b}_k \to +\infty \quad \text{as } k\to\infty, \end{aligned}$$

(because $\beta_k \to 0$ as $k \to \infty$ and $q > 2$). Hence for $\varepsilon > 0$ small enough, we have $b_k(\lambda) > 0$.

□

Lemma 3.6. *Under the assumptions of Theorem 1.4, for the sequence $\{r_k\}$ obtained in Lemma 3.5, there exists $0 < r_k < \rho_k$ for all $k \in \mathbb{N}$, such that*

$$a_k(\lambda) = \max_{u\in Y_k, \|u\|_{X^\alpha}=\rho_k} \Psi_\lambda(u) \leq 0, \quad \textit{for all} \quad \lambda \in [1,2],$$

where $Y_k = \oplus_{j=1}^k E_j = span\{w_1, \dots, w_k\}$ for all $k \in \mathbb{N}$.

Proof. For any $k \in \mathbb{N}$, there exist two constants $\eta_1, \eta_2 > 0$ such that

$$\|u\|_2 \leq \eta_1\|u\|_{X^\alpha} \quad \text{and} \quad \|u\|_{X^\alpha} \leq \eta_2\|u\|_4 \tag{3.21}$$

which is due to the fact that all norms on finite-dimensional space Y_k are equivalent. Next, by (f1), (f3) and (f6), for any $\varrho > 0$, there exists a constant $\vartheta > 0$ such that

$$F(t,u) \geq \frac{1}{4}\varrho u^4 - \vartheta u^2, \quad \forall\, t,u \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

Then, for any $u \in Y_k$, by (3.21), (3.22) and (3.23), one has

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(u) &\leq \frac{\max\{a,1\}}{2}\|u\|^2_{X^\alpha} + \frac{b}{4}\|u\|^4_{X^\alpha} - \frac{\lambda}{4}\varrho\|u\|_4^4 + \lambda\vartheta\|u\|_2^2 \\ &\leq \frac{\max\{a,1\}}{2}\|u\|^2_{X^\alpha} + \frac{b}{4}\|u\|^4_{X^\alpha} - \frac{\lambda}{4}\varrho\eta_2^4\|u\|^4_{X^\alpha} + \lambda\vartheta\eta_1^2\|u\|^2_{X^\alpha} \\ &= \left(\frac{\max\{a,1\}}{2} + \lambda\vartheta\eta_1^2\right)\|u\|^2_{X^\alpha} + \left(\frac{b}{4} - \frac{\lambda}{4}\varrho\eta_2^4\right)\|u\|^4_{X^\alpha}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Now we take ϱ large enough to satisfy

$$\frac{b}{4} - \frac{\lambda}{4}\varrho\eta_2^4 < 0.$$

Then, we can choose $\|u\|_{X^\alpha} = \rho_k > 0$ large enough to obtain

$$a_k(\lambda) := \max_{u\in Y_k, \|u\|_{X^\alpha}=\rho_k} \Psi_\lambda(u) \leq 0.$$

Lemma 3.6 is proved. □

Lemma 3.7. *Under the assumptions of Theorem 1.4, there exist* $\lambda_n \to 1$ *as* $n \to \infty$*, and* $\{u_n(k)\}_{n=1}^{\infty} \subset X^\alpha$ *such that*

$$\sup_n \|u_n(k)\|_{X^\alpha} < \infty, \quad \Psi'_{\lambda_n}(u_n(k)) = 0,$$
$$\Psi_{\lambda_n}(u_n(k)) \in [\widetilde{b}_k, \widetilde{c}_k],$$

as $n \to \infty$*, where* $\widetilde{c}_k := \sup_{u \in B_k} \Psi_1(u)$.

Proof. It is easy to see that the conditions (T1) and (T2) of Theorem 3.2 are satisfied. Therefore ,by Lemmas 3.5 and 3.6 and Theorem 3.2, we can obtain the result. □

Proof of Theorem 1.4. For the sake of notational simplicity, in what follows we use the notation $u_n := u_n(k)$ for all $n \in \mathbb{N}$. By Lemma 3.7, it suffices to prove the boundedness of $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. If not, passing to a subsequence if necessary, we can assume that $\|u_n\|_{X^\alpha} \to \infty$ as $n \to \infty$. Define $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{X^\alpha}}$. So $\|v_n\|_{X^\alpha} = 1$. Hence, X^α is a reflexive Banach space (X^α is a Hilbert space), and so, by passing to a subsequence (for simplicity denoted again by $\{u_n\}$) if necessary, by Remark 2.2, we may assume that

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v, & \text{weakly in } X^\alpha, \\ v_n \to v, & \text{strongly in } L^q(\mathbb{R}^n)\ 2 \leq q < \infty), \\ v_n \to v, & \text{a.e. } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.24}$$

We consider two cases: $v \neq 0$ and $v = 0$ in X^α.

Case 1. Let $v \neq 0$ in X^α. In view of $\Psi_{\lambda_n}(u_n) \in [\widetilde{b}_k, \widetilde{c}_k]$, we get

$$\frac{b}{4}\|u_n\|_{X^\alpha}^4 \geq \widetilde{b}_k - \frac{\max\{a,1\}}{2}\|u_n\|_{X^\alpha}^2 + \int_{\mathbb{R}} F(t, u_n)dt.$$

Dividing by $\|u_n\|_{X^\alpha}^4$ both sides of the above equality, we obtain

$$o(1) + \frac{b}{4} \geq \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t, u_n)}{\|u_n\|_{X^\alpha}^4} dt. \tag{3.25}$$

We set $\Omega := \{t \in \mathbb{R} : \ v(t) \neq 0\}$. Observing that $\text{meas}(\Omega) > 0$, and for $t \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t, u_n)}{\|u_n\|_{X^\alpha}^4} = +\infty,$$

we can apply Fatou's lemma to conclude that

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t, u_n)}{\|u_n\|_{X^\alpha}^4} dt \geq \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \frac{F(t, u_n)}{\|u_n\|_{X^\alpha}^4} dt = +\infty,$$

which contradicts (3.25).

Case 2. Let $v = 0$ in X^α. We define

$$\Psi_{\lambda_n}(x_n u_n) := \max_{x\in[0,1]} \Psi_{\lambda_n}(x u_n), \tag{3.26}$$

and use (3.20), to get

$$\int_{\mathbb{R}} F(t,v_n)dt \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |v_n|^2 dt + \theta_\varepsilon \int_{\mathbb{R}} |v_n|^q \to 0, \quad \text{as } \ n \to \infty. \tag{3.27}$$

Hence, choosing n sufficiently large and using (3.27), we can write

$$\begin{aligned}
\Psi_{\lambda_n}(x_n u_n) \geq \Psi_{\lambda_n}(v_n) &= \tfrac{a}{2} \textstyle\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha v_n(t)|^2 dt + \tfrac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha v_n(t)|^2 dt \right)^2 \\
&+ \tfrac{1}{2} \textstyle\int_{\mathbb{R}} l(t)|v_n(t)|^2 dt - \lambda_n \int_{\mathbb{R}} F(t,v_n(t))dt \\
&\geq \tfrac{\min\{a,1\}}{2} \|v_n\|_{X^\alpha}^2 + \tfrac{b}{4} \left(\textstyle\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha v_n(t)|^2 dt \right)^2 \\
&+ \tfrac{a}{2} \textstyle\int_{\mathbb{R}} l(t)|v_n(t)|^2 dt - \lambda_n \int_{\mathbb{R}} \tfrac{\min\{a,1\}}{2} F(t,v_n(t))dt \geq \tfrac{\min\{a,1\}}{2},
\end{aligned}$$

meaning that $\lim_{n\to\infty} \Psi_{\lambda_n}(x_n u_n) = \infty$. So, by Lemma 3.7, we see that $\Psi'_{\lambda_n}(x_n u_n)(x_n u_n) = 0$. On the other hand, by Lemma 3.7 and (f5), we can get as $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\infty \leftarrow\ & \Psi_{\lambda_n}(x_n u_n) - \frac{1}{4}\Psi'_{\lambda_n}(x_n u_n)(x_n u_n) \\
=\ & \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha (x_n u_n)|^2 dt + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} l(t)|x_n u_n|^2 dt \\
& + \lambda_n \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{4} f(t, x_n u_n) x_n u_n - F(t, x_n u_n) \right] dt \\
\leq\ & \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha (u_n)|^2 dt + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} l(t)|u_n|^2 dt \\
& + \lambda_n \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{4} f(t, u_n) u_n - F(t, u_n) \right] dt \\
=\ & \Psi_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{4}\Psi'_{\lambda_n}(u_n)(u_n) \in [\widetilde{b}_k, \widetilde{c}_k].
\end{aligned}$$

Therefore, the sequence $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ is bounded in X^α.

Arguments, similar to those used in the proof of Lemma 3.4, show that there exists a convergent subsequence of $\{u_n\}$ when $\lambda_n \to 1$. Then, we may assume that $u_n \to w_k$ in X^α (we know that $\{u_n\}$ is relevant to the choice of k). Also, we have $\Psi_1(w_k) = 0$. Thus, Ψ_1 has a critical point w_k with $\Psi_1(w_k) \in [\widetilde{b}_k, \widetilde{c}_k]$. Consequently, we see that $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ is an unbounded sequence of critical points of functional $\Psi_1 = I$ since $\widetilde{b}_k \to \infty$. This completes the proof is the theorem. □

Proof of Theorem 1.5. We know that $I \in C^1(X^\alpha, \mathbb{R})$ and, in view of Lemma 3.4, I satisfies the Palais-Smale condition. It follows from (f4), (3.15), (3.20) and (3.22) that I is even and $I(0) = 0$. In order to apply Theorem 3.3, we first prove the following assertion:

$$\text{for any } n \in \mathbb{N} \text{ there exists } \ \varepsilon > 0 \text{ such that } \gamma(I^{-\varepsilon}) \geq n. \tag{3.28}$$

Let $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ be the standard orthogonal basis of X^α, that is,

$$\|e_n\|_{X^\alpha} = 1 \quad \text{and} \quad \langle e_i, e_j\rangle_{X^\alpha} = 0, \quad 1 \le i \ne j. \tag{3.29}$$

For any $n \in \mathbb{N}$, we set

$$X_n^\alpha = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}, \qquad S_n = \{u \in X_n^\alpha : \ \|u\|_{X^\alpha} = 1\}. \tag{3.30}$$

For $u \in X_n^\alpha$, there exist $\mu_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n$ such that

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i(t) \quad \text{for } t \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

So, we have

$$\|u\|_{L^{\gamma_0}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{\gamma_0} dt\right)^{\frac{1}{\gamma_0}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^{\gamma_0} \int_{\mathbb{R}} |e_i(t)|^{\gamma_0} dt\right)^{\frac{1}{\gamma_0}}, \tag{3.32}$$

and

$$\begin{aligned} \|u\|_{X^\alpha}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(|{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 + l(t)|u(t)|^2\right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \int_{\mathbb{R}} \left(|{}_{-\infty}D_t^\alpha e_i(t)|^2 + b(t)|e_i(t)|^2\right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \|e_i\|_{X^\alpha}^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Since all the norms of a finite dimensional normed space are equivalent, there is a constant $C' > 0$ such that

$$C'\|u\|_{X^\alpha} \le \|u\|_{L^{\gamma_0}} \quad \text{for } u \in X_n^\alpha. \tag{3.34}$$

In view of (f2), for $u \in S_n$, we can take some J_0 such that

$$\int_{\mathbb{R}} F(t, u(t)) dt = \int_{\mathbb{R}} F\left(t, \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i(t)\right) dt \ge \eta \int_{J_0} \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i(t)\right|^{\gamma_0} dt := \rho_0. \tag{3.35}$$

We claim that $\rho_0 > 0$. Assuming that this is not true, for any bounded open set $J \subset \mathbb{R}$, a sequence $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in S_n$ can be found to satisfy

$$\int_J |u_k(t)|^{\gamma_0} dt = \eta \int_J \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_{ik} e_i(t)\right|^{\gamma_0} dt \to 0, \text{ as } k \to +\infty,$$

where $u_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ik} e_i(t)$ such that $\sum_{i=1}^{n} \mu_{ik}^2 = 1$, and hence, we have

$$\lim_{k\to+\infty} \mu_{ik} := \mu_{i0} \in [0, 1] \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_{i0}^2 = 1.$$

Thus, for any bounded open set $J \subset \mathbb{R}$,

$$\int_J \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_{i0} e_i(t) \right|^{\gamma_0} dt = 0.$$

Since J is arbitrary, we have $u_0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_{i0} e_i(t) = 0$ a.e. on $\mathbb{R}$, which contradicts the fact that $\|u_0\|_{X^\alpha} = 1$. Therefore, we have

(3.36)

$$\int_{\mathbb{R}} F(t, u(t))dt = \int_{\mathbb{R}} F\left(t, \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i(t)\right) dt \geq \eta \int_{J_0} \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i(t) \right|^{\gamma_0} dt = \rho_0 > 0.$$

Next, from (f2), (3.15), (3.32)-(3.34) and (3.36), one can get

$$\begin{aligned} J(su) &= \frac{s^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(a|{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 + l(t)|u(t)|^2 \right) dt + \frac{s^4 b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} |{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 dt \right)^2 \\ &\qquad - \int_{\mathbb{R}} F(t, su(t))dt \\ &\leq \frac{s^2 \min\{a,1\}}{2} \|u\|_{X^\alpha}^2 + \frac{s^4 b}{4} \|u\|_{X^\alpha}^4 - \eta s^{\gamma_0} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{\gamma_0} \int_{I_0} |e_i(t)|^{\gamma_0} dt \\ &\leq \frac{s^2 \min\{a,1\}}{2} \|u\|_{X^\alpha}^2 + \frac{s^4 b}{4} \|u\|_{X^\alpha}^4 - \eta s^{\gamma_0} \|u\|_{\gamma_0}^{\gamma_0} \\ &\leq \frac{s^2 \min\{a,1\}}{2} \|u\|_{X^\alpha}^2 + \frac{s^4 b}{4} \|u\|_{X^\alpha}^4 - \eta (C's)^{\gamma_0} \|u\|_{X^\alpha}^{\gamma_0} \\ &\leq \frac{s^2 \min\{a,1\}}{2} + \frac{s^4 b}{4} - \eta (C's)^{\gamma_0}, \quad \forall\, u \in S_n, \ \ 0 < s < \delta, \end{aligned} \tag{3.37}$$

which implies that there exist $\varepsilon > 0$ and $\sigma > 0$ such that

$$I(\sigma u) < -\varepsilon \quad \forall\, u \in S_n. \tag{3.38}$$

Denoting

$$S_n^\sigma = \{\sigma u : \ u \in S_n\}, \quad \Omega = \left\{ (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 < \sigma^2 \right\},$$

and using (3.38), we conclude that

$$I(u) < -\varepsilon \quad \forall\, u \in S_n^\sigma,$$

which, together with the fact that $I \in C^1(X^\alpha, \mathbb{R})$ and is even, implies that

$$S_n^\sigma \subset I^{-\varepsilon} \in \Sigma. \tag{3.39}$$

On the other hand, it follows from (3.31) and (3.33) that there exists an odd homeomorphism mapping $\Psi \in C(S_n^\sigma, \partial\Omega)$. By the properties of genus (see item 3° of Propositions 7.5 and 7.7 of [18]), we have

$$\gamma(I^{-\varepsilon}) \geq \gamma(S_n^\sigma) = n, \tag{3.40}$$

which completes the proof of assertion (3.28). Set

$$c_n = \inf_{A \in \Sigma_n} \sup_{u \in A} J(u).$$

Taking into account that J is bounded from below on X^α, we can use (3.40) to conclude that $-\infty < c_n \leq -\varepsilon < 0$, that is, for any $n \in \mathbb{N}$, c_n is a real negative number. Now, applying Theorem 3.3, we conclude that I has infinitely many nontrivial critical points, and hence, the system (1.2) possesses infinitely many nontrivial solutions. This completes the proof of the theorem. □

Acknowledgments. The authors would like to thank the referees for their suggestions and helpful comments which improved the presentation of the original manuscript.

Список литературы

[1] A. M. A. El-Sayed, "Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders", Nonlinear Anal. **33**, 181 – 186 (1998).

[2] A. A. Kilbas, J. J. Trujillo, "Differential equations of fractional order: Methods, results and problems I", Appl. Anal. **78**, 153 – 192 (2001).

[3] A. A. Kilbas, J. J. Trujillo, "Differential equations of fractional order: Methods, results and problems II", Appl. Anal. **81**, 435 – 493 (2002).

[4] Z. Zhang, R. Yuan, "Variational approach to solutions for a class of fractional Hamiltonian systems", Math. Methods Appl. Sci., **37**, 1873 – 1883 (2014).

[5] C. Torres, "Existence of solution for a class of fractional Hamiltonian systems", Electronic J. Differ. Equat., **259**, 1 – 12 (2013).

[6] Y. Zhou, Basic Theory of Fractional Differential Equations, World Scientific, Singapore (2014).

[7] N. Nyamoradi, Y. Zhou, "Bifurcation results for a class of fractional Hamiltonian systems with Liouville-Weyl fractional derivatives", J. Vibration and Control (2014), Online, DOI: 10.1177/1077546314535827.

[8] N. Nyamoradi, Y. Zhou, "Existence of solutions for a Kirchhoff type fractional differential equations via minimal principle and Morse theorys", Topolog. Meth. Appl. Anal. **76**(2), 617 – 630 (2015).

[9] G. A. M. Cruz, C. E. Torres Ledesma, "Multiplicity of solutions for fractional Hamiltonian systems with Liouville-Weyl fractional derivative", Fract. Calc. Appl. Anal., **18** (4), 875 – 890 (2015).

[10] J. Xu, D. O'Regan, K. Zhang, "Multiple solutions for a class of fractional Hamiltonian systems", Fract. Calc. Appl. Anal., **18** (1), 48 – 63 (2015).

[11] Kirchhoff, G.: Mechanik. Teubner: Leipzig (1883).

[12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in: North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, (2006).

[13] S. Li, J. Liu, Some existence theorems on multiple critical points and their applications, Kexue Tongbao, **17**, 1025 – 1027 (1984).

[14] A. Li, J. Su, "Multiple nontrivial solutions to a p-kirchhoff equation", Commun. Pure Appl. Anal. **15** (1), 91 – 102 (2016).

[15] K. C. Chang, Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solutions Problems, First ed., Birkhauser, Boston (1993).

[16] J. Mawhinm, M. Willem, Critical point theory and Hamiltonian systems, Applied Mathematical Sciences **74**, Springer, Berlin (1989).

[17] J. Liu, "A Morse index for a saddle point", Syst. Sc. Math. Sc. **2**, 32 – 39 (1989).

[18] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., **65**, American Mathematical Society, Providence (1986).
[19] W. M. Zou, "Variant fountain theorems and their applications", Manuscripta. Math. **104**, 343 – 358 (2001).

Поступила 03 сентября 2018

После доработки 19 февраля 2019

Принята к публикации 25 апреля 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 43 – 56

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ СЛУЧАЙНОГО ОТРЕЗКА И КОВАРИОГРАМА НЕЧЕТКОГО ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

В. К. ОГАНЯН, В. Г. БАРДАХЧЯН, Е. И. УЛИТИНА

Ереванский государственный университет[1]
Сочинский государственый университет, Сочи, Россия
E-mails: *victoohanyan@ysu.am; vardanbardakchyan@gmail.com; ulitina@rambler.ru*

Аннотация. Во многих случаях, где в измерениях может присутствовать ограниченная погрешность для расчетов можно использовать нечеткие методы. В случае восстановления выпуклого тела с помощью ковариограммы мы ввели понятие нечеткого выпуклого тела. В данной работе мы представляем зависящее от ориентации нечеткое распределение случайного отрезка и изучаем некоторые его свойства.

MSC2010 numbers: 60D05; 60A86; 53C65.

Ключевые слова: нечеткое выпуклое множество; распределение случайного отрезка; ковариограма.

1. Введение

Для восстановления выпуклого тела важным инструментом является ковариограма ([1] - [3]). Есть четкая связь между ковариограмой и зависящим от ориентации распределением длины случайного отрезка (см. [3]).

Однако чаще всего есть небольшие погрешности в измерениях, которые могут привести к неправильным результатам касающимся изучаемого тела. Поэтому как и во многих случаях моделирования погрешностей, измерения с интервальными значениями функций, мы используем нечеткие аналоги обычных расчетов (см. [5]), надеясь, таким образом, восстановить ковариограму выпуклого тела в нечетком смысле (то есть, таким образом, чтобы она включала в себя ковариограмы многих возможных множеств).

В нашей предыдушей статье (см. [4]) мы дали все необходимые определения для нечеткого случая этой проблемы. Сначала мы ввели понятие обобщенного

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки РА совместно с Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 18RF - 019 и 18-51-05010Арм-а соответственно). Исследование первого автора было также поддержано Центром Математических Исследований Ереванского Государственного Университета, а также тематическим грантом # 18T-1A252.

нечеткого распределения, являющееся функцией принимающей нечеткие значения (т.е. нечеткие числа). Затем мы дали определения нечеткого выпуклого множества и нечеткой ковариограмы. Таким образом, нечеткое выпуклое множество строится прибавляя и отнимая нечеткое число от изначального тела но при этом прибавляя размерность начального тела на 1, превращая его в нечеткое множество с одними и теми же α-уровнями.

То есть выпуклое тело $D \subset R^n$ мы немного модифицируем, превращая его в нечеткое тело с носителем в R^n, и принимающее те же значения для всех α-уровней, а затем прибавляем

$$\overline{D}_\alpha = D + \tilde{A}_\alpha$$

и отнимаем в смысле Хукухары

$$\underline{D_\alpha} = D - \tilde{B}_\alpha$$

нечеткие множества с носителями в R^n и с $\tilde{A}_\alpha$, $\tilde{B}_\alpha$ α-уровнями, начало координат принадлежит $\tilde{A}_\alpha$ и $\tilde{B}_\alpha$.

В конечном итоге мы определяем нечеткое выпуклое мнжество с помощью α-уровней следующим образом:

$$\tilde{D}_\alpha = \{G : G \,\text{выпукло и}\; \underline{D_\alpha} \subset G \subset \overline{D}_\alpha\}.$$

Это можно сделать в некотором смысле только для выпуклых тел.

Используя это определение, в работе [4] мы показали, что $\tilde{D}$ удовлетворяет всем свойствам нечетких чисел, за исключением того, что его значения не числа, а выпуклые множества.

Далее мы определили нечеткую ковариограму как функциональное обобщение обычной ковариограмы, с α-уровнями заданными в следующем виде:

$$C_\alpha(\tilde{D}, u) = C(\tilde{D}_\alpha, u) = \{C(G, u) : G \in \tilde{D}_\alpha\},$$

где $u \in R^n$, $C(G, u, t) = V_n(G \cap (G + u))$, и $V_n(\cdot)$ n-мерная мера Лебега.

Самое важное свойство $C(\tilde{D}, u)$ это то, что для данного u она является выпуклым числом. Два возможных доказательства были найдены, один из которых представлен в [4].

Далее мы дали эквивалентное определение ковариограмы с помощью ориентации u и длины следующим образом .

$$C_\alpha(\tilde{D}, u, t) = C(\tilde{D}_\alpha, u, t) = \{C(G, u, t) : G \in \tilde{D}_\alpha\}$$

с $C(G,u,t) = V_n(G \cap (G+tu))$, и $u \in S^{n-1}$, $t \in R$. В работе [4] было показано, что в данном виде нечеткая ковариограма является нечеткой функцией по t, для данного направления u. То есть можно воспользоваться дифференцируемостью по Хукухаре и интегрированием по Ауману.

Однако нечеткая ковариограма может быть не дифференцируема по Хукухаре. Поэтому мы воспользовались интегралом Аумана, чтобы получить обобщение знаменитой теоремы Матерона для нечеткого случая, которая приняла следующий вид:

$$C_\alpha(\tilde{D},u,t) = \bigcup_{\Omega_\alpha \in \tilde{\Omega}_{1,\alpha}(u)} \left(- \int_0^t \left(1 - \tilde{F}_{\alpha,\Omega}(u,v)\right) b_\Omega, \alpha)(u)\, dv \right),$$

где

$$\tilde{\Omega}_{1,\alpha}(u) = \{\Omega_{1G}(u) : \ G \in \tilde{D}_\alpha\},$$

$$\Omega_{1G}(u) = \{\text{прямые параллельные } u \text{ и пересекающие } G\},$$

а $\tilde{F}_{\alpha,\Omega}(u,t)$ является нечетким распределением длины пересечения прямых параллельных u с данным $\Omega_\alpha \in \tilde{\Omega}_{1,\alpha}(u)$ и $b_{\Omega,\alpha}(u) = V_{n-1}(\Pi r_{u^\perp}\Omega_\alpha)$, где

$$\Pi r_{u^\perp} G = \{\text{ортогональная проекция } G \text{ на гиперплоскость с нормальным вектором } u\ \}.$$

И так мы имеем нечеткое измерение т.е. нечеткое наблюдение для длины. Мы должны построить нечеткую функцию распределения, с помощью которой мы можем восстановить нечеткую ковариограму для всех возможных нечетких множеств между максимальным и минимальным наблюдениями.

2. Зависящее от направления нечеткое распределение длины случайного отрезка.

Теперь пусть мы имеем наблюдения длин отрезков фиксированной длины l. Для заданной длины мы имеем следующее определение для G:

$$\Omega_{2,l}(u,G) : \{\text{все отрезки длины } l \text{ параллельные } u, \text{ и пересекающие } G\}$$

и в более явной форме

$$\Omega_{2,l}(u,G) = \{(x,y) : x \in \Pi r_{u^\perp} G, y \in [-l/2, \chi_G(u,x) + l/2]\},$$

где $\chi_G(u,x)$ – длина хорды в направлении u исходящая из точки x проекции.

Заметим, что когда имеет место ошибка в измерении, то длина хорды и длина случайного отрезка могут считаться нечеткими. То есть существует два источника нечеткости, первое – длина хорды, и вторая – нечеткость в измерениях пересечения. Мы пока берем один источник нечеткости. В дальнейшем мы покажем что источник нечеткости не является принципиальным, так-как соответствующие выражения одинаковы в смысле распределения.

Обычное, зависяшее от направления распределение длины задается по следующей формуле:

$$F_{|L|}(u,s) = \frac{V_n(B_G^{u,s})}{V_n(\Omega_{2,l}(u))}$$

где $B_G^{u,s} = \{(x,y) \in \Omega_{2,l}(u) : \ |L|(x,y) < s\}$ или иными словами все отрезки всех прямых данного направления, для которых длина пересечения с телом меньше данного s.

Источник нечеткости по сути является именно измерение. Однако, можно подойти к этому фиксируя наблюдения (т.е. имея уверенность в наблюдениях) и воспринимая данное выпуклое тело как нечеткое (т.е. нечеткое выпуклое тело и безошибочные наблюдения). В этом случае имеем слудующие обозначения.

$$\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}) = \tilde{\Omega}_{2,l}(u,\tilde{D}_\alpha) = \{\Omega_{2,l}(u,G) : \, G \in \tilde{D}_\alpha\}.$$

Далее обозначим

$$\tilde{B}_{D,\alpha}^{u,s} = \{\{(x,y) \in \Omega_{2,l}(u,G) : \text{такие что } \ |L|(x,y) \cap G < s\} : \, G \in \tilde{D}_\alpha\}.$$

по другому это можно сделать задав нечеткую функцию распределения

$$\tilde{F}_{|L|,\alpha}(u,s) = \left[inf_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s), sup_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s)\right].$$

Заметим, что это должно быть замкнутым интервалом, хотя полузакрытий интервал мог быть достаточен с точки зрения теории вероятностей. Дело в том, что $\tilde{F}_{|L|}(u,s)$ должен быть нечетким числом для всех u и s, и мы можем переписать

$$\tilde{F}_{|L|,\alpha}(u,s) = \left[min_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s), max_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s)\right]$$

Утверждение 2.1. $\tilde{F}_{|L|,\alpha}(u,s)$ *является нечетким распределением.(Определение нечеткого распределения см. [4]).*

Доказательство очевидно.

Теорема 2.1. *Имеет место следующее нечеткое соотношение*

$$\tilde{F}_{|L|,\alpha}(u,s) \subset \frac{V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})}{V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))}.$$

Прежде чем перейти к доказательству дадим небольшое уточнение.

Замечание 2.1. *Термин нечеткое соотношение здесь используется в том смысле, что указанное для α-уровней соотношение является правильным для соответствующих нечетких чисел. $V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))$ и $V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})$ заданы как нечеткие числа, то есть они принимают все возможные значения для всех элементов в $\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D})$ и $\tilde{B}^{u,s}_{G,\alpha}$, и то же самое для $\frac{V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))}{V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})}$. Так же заметим, что знаменатель никогда не принимает значение 0.*

То есть для доказательства мы должны показать что обе части являются нечеткими числами (или нечеткими сравнимыми обьектами), и что данное соотношение выполняется для всех α-уровней ([5,6]).

Доказательство. Сначала покажем, что $V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))$ и $V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})$ нечеткие числа, задавая их α-уровни. Для этого рассмотрим

$$V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D})) = \{V_n(\Omega_{2,l}(u,G)) : \, G \in \tilde{D}_\alpha\}.$$

Заметим, что $V_n(\Omega_{2,l}(u,G))$ принимает все значение между минимальным и максимальным телами. □

Лемма 2.1. $V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))$ *нечеткое число с α-уровнем:*

$$V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D})) = [V_n(\Omega_{2,l}(u,\underline{D_\alpha})), V_n(\Omega_{2,l}(u,\overline{D}_\alpha))].$$

Доказательство. Отметим, что $\underline{D_\alpha} \subset \overline{D_\alpha}$ и $\Pi r_{u^\perp}\underline{D}_\alpha \subset \Pi r_{u^\perp}\overline{D}_\alpha$ (или $\Omega_{1,\underline{D_\alpha}(u)} \subset \Omega_{1,\overline{D_\alpha}}(u)$) и $\chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) \leq \chi_{\overline{D}_\alpha}(u,x)$ для всех $x \in \Pi r_{u^\perp}\overline{D}_\alpha$, откуда получаем

$$V_n(\Omega_{2,l}(u,\underline{D_\alpha})) \leq V_n(\Omega_{2,l}(u,\overline{D}_\alpha))$$

так как для любого $x \in \Pi r_{u^\perp}\overline{D}_\alpha$ имеем $[-l/2, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)+l/2] \subset [-l/2, \chi_{\overline{D}_\alpha}(u,x)+l/2]$, то есть

$$V_n(\Omega_{2,l}(u,\underline{D_\alpha})) = V_n\left(\left\{(x,y) : \, x \in \Pi r_{u^\perp}\underline{D_\alpha}, \, y \in [-l/2, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)+l/2]\right\}\right) \leq$$
$$V_n\left(\left\{(x,y) : \, x \in \Pi r_{u^\perp}\overline{D_\alpha}, \, y \in [-l/2, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)+l/2]\right\}\right) \leq$$
$$V_n\left(\{(x,y) : \, x \in \Pi r_{u^\perp}\overline{D_\alpha}, \, y \in [-l/2, \chi_{\overline{D_\alpha}}(u,x)+l/2]\}\right) = V_n(\Omega_{2,l}(u,\overline{D_\alpha}))$$

Далее отметим, что значение $V \in [V_n(\Omega_{2,l}(u,\underline{D_\alpha})), V_n(\Omega_{2,l}(u,\overline{D_\alpha}))]$ принимается некоторым выпуклым телом в $\tilde{D}_\alpha$. Для этого достаточно показать это для малых изменений и для операции включение. Тривиальные случаи, когда $\underline{D_\alpha} = \overline{D}_\alpha$ или $V_n(\Omega_{2,l}(u, \underline{D_\alpha})) = V_n(\Omega_{2,l}(u, \overline{D_\alpha}))$.

Когда же $V_n(\Omega_{2,l}(u, \overline{D_\alpha})) > V_n(\Omega_{2,l}(u, \underline{D_\alpha}))$ берем достаточно малое $\epsilon > 0$, $V_n(\Omega_{2,l}(u, \overline{D_\alpha})) > (1+\epsilon) V_n(\Omega_{2,l}(u, \underline{D_\alpha}))$. Тело, которое нас интересует можно получить взяв $\Pi r_{u^\perp} G = \Pi r_{u^\perp} \overline{D}_\alpha$ и $\chi_G(u,x) = (1+\epsilon)\chi_{\overline{D}_\alpha}(u,x) + \epsilon\, l$, если это возможно, в противном случае можно положить $\Pi r_{u^\perp} \overline{D}_\alpha \subset \Pi r_{u^\perp} G$ и перезадать хорды.

Осталось показать, что если $\beta > \alpha$, то имеем

$$[V_n(\Omega_{2,l}(u, \underline{D_\beta})), V_n(\Omega_{2,l}(u, \overline{D_\beta}))] \subset [V_n(\Omega_{2,l}(u, \underline{D_\alpha})), V_n(\Omega_{2,l}(u, \overline{D_\alpha}))].$$

Это можно сделать, так как

$$\underline{D_\alpha} \subset \underline{D_\beta} \subset \overline{D_\beta} \subset \overline{D_\alpha}$$

а также

$$\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \subset \Pi r_{u^\perp} \underline{D_\beta} \subset \Pi r_{u^\perp} \overline{D_\beta} \subset \Pi r_{u^\perp} \overline{D_\alpha}$$

и

$$\begin{aligned} (2.1) \qquad & [-l/2, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) + l/2] \subset [-l/2, \chi_{\underline{D_\beta}}(u,x) + l/2] \subset \\ & \subset [-l/2, \chi_{\overline{D_\beta}}(u,x) + l/2] \subset [-l/2, \chi_{\overline{D_\alpha}}(u,x) + l/2] \end{aligned}$$

для всех $x \in \Pi r_{u^\perp} \overline{D}_\alpha$. Остальное очевидно.

Осталось показать непрерывность, что можно сделать аналогично методу в [4]. □

Лемма 2.2. $V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})$ *нечеткое число с α-уровнями и*

$$V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha}) = \left[V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}}), V_n(B^{u,s}_{\overline{D_\alpha}}) \right].$$

Доказательство. Вновь используя $\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \subset \Pi r_{u^\perp} \overline{D_\alpha}$ и $[-l/2, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) + l/2] \subset [-l/2, \chi_{\overline{D_\alpha}}(u,x) + l/2]$, получаем

$$\Omega_{2,l}(u, \underline{D_\alpha}) \subset \Omega_{2,l}(u, \overline{D_\alpha}),$$

или другими словами, всякий отрезок пересекающий $\underline{D_\alpha}$, очевидно, пересекает и $\overline{D_\alpha}$. То есть

$$V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}}) \le V_n(B^{u,s}_{\overline{D_\alpha}}).$$

Далее заметим, что каждое значение $V \in \left[V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}}), V_n(B^{u,s}_{\overline{D_\alpha}}) \right]$ реализуется некоторым выпуклым телом. Вновь рассмотрим случай малых изменений. Игнорируя очевидные случаи минимальных и максимальных тел, мы берем $V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}}) < V_n(B^{u,s}_{\overline{D_\alpha}})$ и малое $\epsilon > 0$, $V_n(B^{u,s}_{\overline{D_\alpha}}) > (1+\epsilon) V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}})$.

Для того, чтобы привести аналогичные вычисления, зададим $B_G^{u,s}$ в более явной форме. Легко заметить, что

$$B_G^{u,s} = \{(x,y) \in \Omega_{2,l}(u,G) : |L|(x,y) \cap G < s\} =$$
$$= \{(x,y) : x \in \Pi r_{u^\perp} G,\ y \in [-l/2, s-l/2] \cup [\chi_G(u,x) + l/2 - s, \chi_G(u,x) + l/2]\}.$$

Отметим, что если $[-l/2, s-l/2] \cap [\chi_G(u,x) + l/2 - s, \chi_G(u,x) + l/2] = \emptyset$, длина множества всех возможных серединных точек $2s$, и не может быть изменена.

Поэтому чтобы понять изменения мы должны рассмотреть случаи, где изменение длины хорды приведет к изменению условия $[-l/2, s-l/2] \cap [\chi_G(u,x) + l/2 - s, \chi_G(u,x) + l/2] = \emptyset$.

Для этого определим подмножества $\Pi r_{u,s^\perp} G \subset \Pi r_{u^\perp} G$ для которых выполняется данное условие. Для всех остальных точек

$$\chi_G(u,x) + l/2 - s \leq s - l/2 \quad \text{или} \quad \chi_G(u,x) \leq 2s - l.$$

Для первой части имеем

$$[-l/2, s-l/2] \cup [\chi_G(u,x) + l/2 - s, \chi_G(u,x) + l/2] = [-l/2, \chi_G(u,x) + l/2].$$

Отсюда вытекает

$$V_n(B_G^{u,s}) = \int_{x \in \Pi r_{u^\perp} G;\, \chi_G(u,x) \leq 2s-l} (\chi_G(u,x) + l)\, dx + 2s\, V_{n-1}(\Pi r_{u,s^\perp} G)$$
$$\int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} (\chi_G(u,x) + l)\, dx + 2s\, V_{n-1}(\Pi r_{u,s^\perp} G).$$

Отметим, что мы не можем изменять длины одних хорд, не трогая другие, так как это может нарушить выпуклоть. Поэтому поступаем следующим образом - не давая явного выражения для изменений, для любого значения

$$V \in \left[V_n(B_{\underline{D_\alpha}}^{u,s}), V_n(B_{\overline{D_\alpha}}^{u,s})\right]$$

можно сделать соответствующие изменения формы тела, чтобы получить

$$\underline{D_\alpha} \subset G \subset \overline{D}_\alpha \quad \text{и} \quad V_n(B_G^{u,s}) = V.$$

Для доказательства исследуем, что будет, если мы возмем $\chi_G(u,x) = (1+\epsilon)\, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)$. В этом случае получаем 3 подмножества.

I. $\Pi r_{u,s^\perp} G \supset \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}$

II. $\Pi r_{u,s^\perp} G \cap \left(\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}\right)$

III. $\left(\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G\right) \cap \left(\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}\right) = \Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G.$

Для I имеем: $2sV_{n-1}(\Pi r_{u,s^\perp} G)$.

Для II имеем: $\int_{(\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G) \cap \Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha}} (\chi_G(u,x) + l)\, dx$.

Для III имеем: $\int_{(\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G) \cap (\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha})} (\chi_G(u,x) + l)\, dx$.

Сравним последние две величины:

$$\int_{(\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} (\chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) + l)\, dx + \int_{\Pi r_{u,s^\perp} G \cap \big(\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}\big)} (\chi_(\underline{D_\alpha}(u,x) + l)\, dx +$$

$$2s\, V_n(\Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}) V \int_{(\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G)} (\chi_G(u,x) + l)\, dx + 2s\, V_n(\Pi r_{u,s^\perp} G).$$

Начнем с последнего слагаемого

$$2s\, V_{n-1}(\Pi r_{u,s^\perp} G) - 2s\, V_{n-1}(\Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}) = 2s\, V_{n-1}(\Pi r_{u,s^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha})$$

так как $\Pi r_{u,s^\perp} G \supset \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}$.

Далее рассмотрим разность

$$\int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} (\chi_G(u,x) + l)\, dx - \int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} (\chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) + l)\, dx =$$

$$\int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} (\chi_G(u,x) - \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x))\, dx = \int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} \epsilon\, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x))\, dx =$$

$$\epsilon \int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x))\, dx.$$

Получаем

$$V_n(B_G^{u,s}) - V_n(B_{\underline{D_\alpha}}^{u,s}) = 2s\, V_{n-1}(\Pi r_{u,s^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}) + \epsilon \int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x))\, dx -$$

$$\int_{\Pi r_{u,s^\perp} G \cap (\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha})} (\chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) + l)\, dx.$$

Более подробно рассмотрим $\Pi r_{u,s^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}$ и $\Pi r_{u,s^\perp} G \cap \big(\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}\big)$.

$\Pi r_{u,s^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}$ на самом деле является множеством:

$$\chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) \le 2s - l \le (1+\epsilon)\, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x).$$

Оставшаяся часть $\Pi r_{u,s^\perp} G \cap \big(\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}\big)$ в точности тоже самое. То есть можем записать

$$V_n(B_G^{u,s}) - V_n(B_{\underline{D_\alpha}}^{u,s}) = 2s\, V_{n-1}(\Pi r_{u,s^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}) + \epsilon \int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x))\, dx -$$

$$\int_{\Pi r_{u,s^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}} (\chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) + l)\, dx =$$

$$\int_{\Pi r_{u,s^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}} (2s - l - \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)))\, dx + \epsilon \int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x))\, dx.$$

Кроме того, имеем

$$0 \le 2s - l - \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) \le \epsilon\, \chi_{D_\alpha}(u,x).$$

Следовательно, получаем

$$V_n(B_G^{u,s}) - V_n(B_{\underline{D_\alpha}}^{u,s}) > 0$$

и

$$V_n(B_G^{u,s}) \leq V_n(B_{\underline{D_\alpha}}^{u,s}) + \epsilon \left(\int_{\Pi r_{u,s^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} \underline{D_\alpha}} \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)\, dx + \int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G} \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)\, dx \right).$$

Осталось понять имеет ли место обратное, т.е. приводит ли большое значение ε-а, к меньшему значению ограничения.

Чем больше ε, тем больше $\Pi r_{u,s^\perp} G$ и больше множество точек, для которых хорды длиннее, и тем меньше $\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^\perp} G$ часть, где хорды короче. То есть чем больше ϵ тем больше значение ограничения. Очевидно ограничение минимальное так-как его нельзя сделать меньше.

С другой стороны, очевидно, что это непрерывные функции по ϵ, так что можно взять всякое желаемое значение $V \in \left[V_n(B_{\underline{D_\alpha}}^{u,s}), V_n(B_{\overline{D_\alpha}}^{u,s}) \right]$. Так как мы имеем

$$V_n(B_G^{u,s}) = V_n(B(\underline{D_\alpha})^{u,s}) + \int_{\Pi r_{u,s^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s^perp} \underline{D_\alpha}} (2s - l - \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x))\, dx$$

$$+\epsilon \int_{\Pi r_{u^\perp} G \setminus \Pi r_{u,s}^\perp G} \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)\, dx.$$

Мы можем утверждать то же самое для конкретного значения, а не для ограничения.

Далее покажем, что

$$[V_n(B_{\underline{D_\beta}}^{u,s}), V_n(B_{\overline{D_\beta}}^{u,s})] \subset [V_n(B_{\underline{D_\alpha}}^{u,s}), V_n(B_{\overline{D_\alpha}}^{u,s})]$$

для $\beta > \alpha$. Используя (2.1) можем утверждать

$$\Omega_{2,l}(u, \underline{D_\alpha}) \subset \Omega_{2,l}(u, \underline{D_\beta}) \subset \Omega_{2,l}(u, \overline{D_\beta}) \subset \Omega_{2,l}(u, \overline{D_\alpha})$$

и

$$\chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x) \leq \chi_{\underline{D_\beta}}(u,x) \leq \chi_{\overline{D_\beta}}(u,x) \leq \chi_{\overline{D_\alpha}}(u,x).$$

И так имеем

$$V_n(B_{\underline{D_\alpha}}^{u,s}) = V_n(\{(x,y) :\, x \in \Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha},\, y \in [-l/2, s-l/2] \cup [\chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)+l/2-s, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)+l/2]\}) \leq$$

$$V_n(\{(x,y) :\, x \in \Pi r_{u^\perp} \underline{D_\beta},\, y \in [-l/2, s-l/2] \cup [\chi_{\underline{D_\beta}}(u,x)+l/2-s, \chi_{\underline{D_\beta}}(u,x)+l/2]\}) = V_n(B_{\underline{D_\beta}^{u,s}}) \leq$$

$$V_n(\{(x,y) :\, x \in \Pi r_{u^\perp} \overline{D_\beta},\, y \in [-l/2, s-l/2] \cup [\chi_{\overline{D_\beta}}(u,x)+l/2-s, \chi_{\overline{D_\beta}}(u,x)+l/2]\}) = V_n(B_{\overline{D_\beta}^{u,s}}) \leq$$

$$V_n(\{(x,y) :\, x \in \Pi r_{u^\perp} \overline{D_\alpha},\, y \in [-l/2, s-l/2] \cup [\chi_{\overline{D_\alpha}}(u,x)+l/2-s, \chi_{\overline{D_\alpha}}(u,x)+l/2]\}) = V_n(B_{\overline{D_\alpha}^{u,s}}).$$

Осталось показать непрерывность, что можно сделать аналогичным образом как в [4]. □

3. Продолжение доказательства теоремы

Из двух лемм мы получаем, что $\frac{V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})}{V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))}$ тоже нечеткое число (по расширению Задэ, см. [7]).

Осталось показать

$$\min_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s) \geq \min \frac{V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})}{V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))}$$

и

$$\max_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s) < \max \frac{V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})}{V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))}.$$

То есть для каждого α-уровня имеем

$$\min \frac{V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})}{V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))} = \frac{\min V_n(\tilde{B}^{u,s}_{D,\alpha})}{\max V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D}))} = \frac{V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}})}{V_n(\Omega_{2,l}(u,\overline{D}_\alpha))}.$$

Допустим, что $\underline{D_\alpha} \neq \overline{D}_\alpha$, иначе нечеткость бессмыслена.

Сначало отметим, что

$$1 > \frac{V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}})}{V_n(\Omega_{2,l}(u,\overline{D}_\alpha))} \geq 0.$$

Это следует из факта, что $\underline{D_\alpha}$ может быть точкой, тем самым превращая знаменатель в 0, и из-за того, что $V_n(\Omega_{2,l}(u,\overline{D}_\alpha)) > V_n(\Omega_{2,l}(u,\underline{D_\alpha})) \geq V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}})$ по определению $B^{u,s}_G$.

Более того заметим, что для всякого $G \in \tilde{D}_\alpha$

$$V_n(B^{u,s}_G) \geq V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}})$$

и

$$V_n(\Omega_{2,l}(u,G)) \leq V_n(\Omega_{2,l}(u,\overline{D}_\alpha)).$$

Возникает вопрос – существует ли $G^* \in \tilde{D}_\alpha$ такое, что равенство имеет место одновременно для двух случаев. Вообще говоря ответ отрицателен.Тем не менее имеет место следующий результат.

Лемма 3.1. *Для $\underline{D_\alpha} \subset G^* \subset \overline{D}_\alpha$, если $V_n(B^{u,s}_{G^*}) = V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}})$ и $V_n(\Omega_{2,l}(u,\overline{D}_\alpha)) = V_n(\Omega_{2,l}(u,G^*))$, то должно иметь место $\Pi r_{u^\perp}\underline{D_\alpha} = \Pi r_{u^\perp}\overline{D}_\alpha$ п.в. (необходимое но не достаточное условие).*

Доказательство. Из равенства

$$V_n(B^{u;s}_{G^*}) = V_n(B^{u,s}_{\underline{D_\alpha}})$$

следует, что

$$\Pi r_{u^\perp} G^* = \Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \ ..$$

которое вытекает из следующих соотношений

$V_n(\{(x,y):\ x \in \Pi r_{u^\perp}(G^* \cap \underline{D_\alpha}), y \in [-l/2, s-l/2] \cup [\chi_{G^*}(u,x)+l/2-s, \chi_{G^*}(u,x)+l/2]\}) \geq$

$V_n(\{(x,y):\ x \in \Pi r_{u^\perp}(G^* \cap \underline{D_\alpha}), y \in [-l/2, s-l/2] \cup [\chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)+l/2-s, \chi_{\underline{D_\alpha}}(u,x)+l/2]\})$.

So if $\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \subset \Pi r_{u^\perp} G^*$ then

$V_n(\{(x,y): x \in \Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} \backslash \Pi r_{u^\perp} G^*, y \in [-l/2, s-l/2] \cup [\chi_{G^*}(u,x)+l/2-s, ?_{G^*}(u,x)+l/2]\}) = 0,$

что означает $\Pi r_{u^\perp} G^* = \Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha}$ п.в..

Заметим также, что

$$V_n(\Omega_{2,l}(u, \overline{D}_\alpha)) = V_n(\Omega_{2,l}(u, G^*))$$

откуда следует, что

$$\Pi r_{u^\perp} G^* = \Pi r_{u^\perp} \overline{D}_\alpha \ ..$$

так как иначе мы имеем из $G^* \subset \overline{D}_\alpha$, что $\chi_{G^*}(u,x) \leq \chi_{\overline{D}_\alpha}(u,x)$. Более того, в силу сказанного выше

$$\chi_{G^*}(u,x) = \chi_{\overline{D}_\alpha}(u,x)..$$

для того чтобы имело место

$$V_n\left(\left\{(x,y): x \in \Pi r_{u^\perp} \overline{D}_\alpha, y \in [-l/2, \chi_{\overline{D}_\alpha}(u,x) + l/2]\right\}\right) =$$

$$V_n\left(\{(x,y): x \in \Pi r_{u^\perp} G^*, y \in [-l/2, \chi_{G^*}(u,x) + l/2]\}\right).$$

То есть в конечном итоге имеем

$$\Pi r_{u^\perp} G^* = \Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} = \Pi r_{u^\perp} \overline{D}_\alpha \ a.e.$$

и

$$\chi_{G^*}(u,x) = \chi_{\overline{D}_\alpha}(u,x) \ ..$$

Однако возможна ситуация $\Pi r_{u^\perp} \underline{D_\alpha} = \Pi r_(u^\perp) \overline{D}_\alpha$ п.в.. Основная нетождественность требует, чтобы это не выполнялось хотя бы в одном направлении u. □

Таже идеа работает и в случае 2-го неравенства.

$$\max_{G \in \tilde{D_\alpha}} F_{|L|}(u,s) \leq \max \frac{V_n(\tilde{B}^{(u,s)}_{D,\alpha})}{V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u, \tilde{D}))}$$

$$\max \frac{V_n(\tilde{B}^{(u,s)}_{D,\alpha})}{V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D})} = \frac{\max V_n(\tilde{B}^{(u,s)}_{D,\alpha})}{\min V_n(\tilde{\Omega}_{2,l,\alpha}(u,\tilde{D})} = \frac{V_n(B^{(u,s)}_{\overline{D}_\alpha})}{V_n(\Omega_{2,l}(u,\underline{D_\alpha})}$$

Очевидно существует s такое, что

$$\frac{V_n(B^{(u,s)}_{\overline{D}_\alpha})}{V_n(\Omega_{2,l}(u,\underline{D_\alpha})} > 1$$

Но из первого утверждения мы имеем, что $F_{|L|}(u,s)$ является нечеткой функцией распределения и не может принимать значения большие 1.

Лемма 3.2. *Для $\underline{D_\alpha} \subset G^* \subset \overline{D_\alpha}$, если $V_n(B^{u,s}_{G^*}) = V_n(B^{u,s}_{\overline{D}_\alpha})$ и $V_n(\Omega_{2,l}(u,\underline{D_\alpha})) = V_n(\Omega_{2,l}(u,G^*))$, должно имет место $\Pi r_{u^\perp}\underline{D_\alpha} = \Pi r_{u^\perp}\overline{D}_\alpha$ п.в.*

Доказательство аналогично лемме 3.1.

Замечание 3.1. *Заметим, что условие общее в двух последних леммах возможно, лишь одно из результатов может иметь место (и никак оба одновременно).*

Утверждение 3.1. *Для фиксированного s, α, u, существует некий интервал A такой, что для каждого значения $F \in [min_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s), \max_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s)]$ существует $\underline{D_\alpha} \subset G^* \subset \overline{D}_\alpha$ ($G^* \in \tilde{D}_\alpha$) такое, что $F = F_{|L|}(G^*)(u,s)$.*

Замечание 3.2. *Это утверждение оправдывает определение $\tilde{F}_{|L|}(u,s)]$ которое мы привели.*

Доказательство. Это локальное свойство. Мы не сможем явно показать выбор A. Обозначим

$$F(\gamma,s) = \gamma \min_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s) + (1-\gamma)\max_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s),$$

где $\gamma \in (0,1)$ (так как граничные случаи очевидны по определению.)

Сделаем еще следующие обозначения

$$argmin_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s) = G^{\min}$$

и

$$argmax_{G\in\tilde{D}_\alpha} F_{|L|}(u,s) = G^{\max}$$

Очевидно оба выражения зависят от s, α и u.

Теперь рассмотрим следующую выпуклую комбинацию

$$G(\gamma) = \gamma\, G^{\min} + (1-\gamma)\, G^{\max}.$$

Можно утверждать

$$\Pi r_{u^\perp} G(\gamma) = \gamma\, \Pi r_{u^\perp} G^{\min} + (1-\gamma)\, \Pi r_{u^\perp} G^{\max}.$$

Более того, для $x \in \Pi r_{u^\perp} G(\gamma)$

$$\chi_{G(\gamma)}(u,x) = \gamma\, \chi_{G^{\min}}(u,x) + (1-\gamma)\, \chi_{G^{\max}}(u,x)$$

и по теореме Бруна-Минковского имеем

$$\left(V_n\left(\Omega_{2,l}^{G(\gamma)}(u)\right)\right)^{1/d} \geq \gamma\, \left(V_n\left(\Omega_{2,l}^{G^{\min}}(u)\right)\right)^{1/d} + (1-\gamma)\, \left(V_n\left(\Omega_{2,l}^{G^{\max}}(u)\right)\right)^{1/d}.$$

Оставшаяся часть менее очевидна. Так как

$$B_{G(\gamma)}^{u,s} = \left\{(x,y):\, x \in \Pi r_{u^\perp} G(\gamma), y \in [-l/2, s-l/2] \cup [\chi_{G(\gamma)}(u,x) + l/2 - s, \chi_{G(\gamma)}(u,x) + l/2]\right\}.$$

Отметим, что в случае с Ω_2 имеется только один отрезок, длина которого может быть получена прямым вычислением (в зависимости от длины хорды). А в случае с B есть два варианта.

1. $\chi_{G(\gamma)}(u,x) \leq 2s - l$.
2. И остальная часть.

Для первого мы опять имеем один интервал. Для второго случая имеем объединение 2 интервалов и поэтому должны рассмотреть несколько непересекающихся подмножеств $\Pi r_{u^\perp} G(\gamma)$.

I. $\chi_{G^{\min}}(u,x) \leq 2s-l$ и $\chi_{G^{\max}}(u,x) \leq 2s-l$ и соответственно $\chi_{G(\gamma)}(u,x) \leq 2s-l$

II. $\chi_{G^{\min}}(u,x) \leq 2s-l$; $\chi_{G^{\max}}(u,x) > 2s-l$, но $\chi_{G(\gamma)}(u,x) \leq 2s-l$

III. $\chi_{G^{\min}}(u,x) \leq 2s-l$; $\chi_{G^{\max}}(u,x) > 2s-l$, но $\chi_{G(\gamma)}(u,x) > 2s-l$

IV. $\chi_{G^{\min}}(u,x) > 2s-l$; $\chi_{G^{\max}}(u,x) \leq 2s-l$, но $\chi_{G(\gamma)}(u,x) \leq 2s-l$

V. $\chi_{G^{\min}}(u,x) > 2s-l$; $\chi_{G^{\max}}(u,x) \leq 2s-l$, но $\chi_{G(\gamma)}(u,x) > 2s-l$

VI. $\chi_{G^{\min}}(u,x) > 2s-l$; $\chi_{G^{\max}}(u,x) > 2s-l$, и соответственно $\chi_{G(\gamma)}(u,x) > 2s-l$

Вычисления оставшейся части довольно громоздко. Не затрудняя читателя скажем, что мы показали, что по обратному условию Мильмана получается ограничение сверху.

То есть имеем

$$d(\gamma)\, F(\gamma,s) \geq F(G(\gamma),s) = \frac{V_n(B_{G(\gamma)}^{u,s})}{V_n(\Omega_{2,l}^{G(\gamma)}(u))} \geq c(\gamma)\, F(\gamma,s).$$

То есть достаточно, что $F(\gamma,s)$ и $F(G(\gamma),s)$ непрерывные функционалы, чтобы утверждать, что для любого $\gamma \in (0,1)$ существует $\delta \in [0,1]$ такое, что $F(G(\delta),s) = F(\gamma,s)$. $\square$

Abstract. For most of the cases of bounded measurement errors fuzzification of calculations can be used. In the case of reconstructing convex body by random line segments we introduce a fuzzy convex body concept and define orientation dependent distribution of the length of line segment. We consider several properties of the latter.

Список литературы

[1] G. Matheron, Random Sets and Integral Geometry, Wiley (1975).
[2] R. Schneider, W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Springer (2008).
[3] A. G. Gasparyan, V. K. Ohanyan, "Orientation-dependent distribution of the length of a random segment and covariogram", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **50**, no. 2, 90 – 97 (2015).
[4] V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, A. R. Simonyan, E. I. Ulitina, "Fuzzification of convex bodies in $\mathbf{R}^n$", Программные системы и вычислительные методы, no. 2, 1 – 10 (2019).
[5] R. Viertl, Statistical Methods for Fuzzy Data, John Wiley & Sons (2011).
[6] Ph. Diamond, P. Kloeden, Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications, World Scientific (1994).
[7] G. J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall (1995).

Поступила 9 августа 2019

После доработки 4 декабря 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 57 – 71

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫПУКЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ПОЛУОСИ

Х. А. ХАЧАТРЯН, А. С. ПЕТРОСЯН

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова[1]
Институт математики НАН Армении
Армянский национальный аграрный университет
E-mails: *Khach82@rambler.ru*; *Haykuhi25@mail.ru*

Аннотация. Работа посвящена исследованию одного класса интегральных уравнений с симметричным ядром и с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой. Доказаны теоремы существования и единственности неотрицательного и ограниченного решения. Исследованы качественные свойства построенного решения. В конце работы приведены частные примеры указанного класса уравнений, имеющих непосредственные применения в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн и в теории географического распространения эпидемии.

MSC2010 number: 45G05.

Ключевые слова: монотонность; нелинейность; выпуклость; сходимость; ядро.

1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению следующего класса нелинейных интегральных уравнений на полуоси:

$$Q(f(x)) = \int_0^\infty K(x,t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ := [0,+\infty) \tag{1.1}$$

относительно искомой неотрицательной и ограниченной функции $f(x)$.

Ядро $K(x,t)$ - определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ неотрицательная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

I): $K(x,t) = K(t,x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$

II): $K(0,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}^+$ и $K(x,t) > 0,\ (x,t) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty),$

III): $\int_0^\infty K(x,t)dt \in C(\mathbb{R}^+), \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \int_0^\infty K(x,t)dt = 1,$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 19-11-00223)

$$\textbf{IV):}\ 0<\gamma(x):=1-\int\limits_0^\infty K(x,t)dt\in L_1(\mathbb{R}^+)\ \text{и}\ \int\limits_x^\infty K(x,t)dt\leq\frac{1}{2},\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

Функция Q - определенная на $\mathbb{R}^+$ непрерывная функция, причем

a): $y = Q(u)$ выпукла вниз на отрезке $[0,\eta]$, где число $\eta>0$ является первым положительным корнем уравнения $Q(u)=u$, (в дальнейшем для краткости будем использовать термин "выпукла"),

b): $Q(u)\uparrow$ по u на отрезке $[0,\eta]$,

c): $Q(0)=0$.

Следует отметить, что уравнение (1.1), кроме чисто теоретического интереса, представляет интерес во многих разделах современной математической физики и естествознания (см. [1]-[7]).

В частности, в случае когда ядро K зависит от разности своих аргументов и удовлетворяет условиям $I)-IV)$, такие уравнения возникают в кинетической теории газов, в теории переноса излучения (см. [1]-[3]). В том частном случае, когда ядро K представляется в виде разности двух гауссовских ядерных функцией, первая из которых зависит от разности своих аргументов, а вторая - от суммы своих аргументов, уравнение (1.1) имеет непосредственное применение в динамической теории p–адических открыто-замкнутых струн и в математической теории географического распространения эпидемии (см. [4]-[7]).

Отметим, что исследованию нелинейного уравнения (1.1) с разностными или суммарно-разностными ядрами K при различных ограничениях на Q посвящены работы [6]-[15].

В настоящей статье мы будем заниматься вопросами существования, единственности и асимптотического поведения решения для общего нелинейного интегрального уравнения (1.1). В конце работы приведем конкретные прикладные примеры нелинейности Q и ядра K, для которых выполняются все условия доказанных утверждений.

2. Обозначения и вспомогательные факты

2.1. **Об одной априорной оценке снизу.** Пусть $\overset{\circ}{K}(\tau)$ - определенная на множестве $\mathbb{R}$ непрерывная и ограниченная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$i_1)$**:** $\overset{\circ}{K}(\tau) > 0,\ \tau \in \mathbb{R},\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{K}(\tau) d\tau = 1,$

$i_2)$**:** $\overset{\circ}{K}(-x) = \overset{\circ}{K}(x),\ x > 0,\ \overset{\circ}{K}(\tau) \downarrow$ по τ на $\mathbb{R}^+$.

Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ рассмотрим следующее характеристическое уравнение:

$$\int\limits_0^{\infty} \overset{\circ}{K}(t) e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1}$$

относительно неотрицательного числа p.

Из свойств $i_1)$ и $i_2)$, в силу теоремы Больцано-Коши, можно убедиться, что для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ уравнение (2.1) имеет единственное положительное решение p_ε.

В недавней работе одного из авторов (см. [8]) доказана следующая априорная оценка снизу:

$$\int\limits_0^{\infty} (\overset{\circ}{K}(\tau - \tau') - \overset{\circ}{K}(\tau + \tau'))(1 - e^{-p_\varepsilon \tau'}) d\tau' \geq \varepsilon (1 - e^{-p_\varepsilon \tau}), \quad \tau \geq 0. \tag{2.2}$$

Оценка (2.2) будет играть важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

2.2. **Об одном вспомогательном нелинейном уравнении на полуоси.** Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное уравнение с "почти суммарно-разностным" ядром:

$$Q(\varphi(x)) = \int\limits_0^{\infty} \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))\varphi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.3}$$

относительно искомой неотрицательной и ограниченной функции $\varphi(x)$, где $\overset{\circ}{K}$ - удовлетворяет условиям $i_1), i_2)$.

Здесь $\lambda(x,t)$ - определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ вещественная функция, обладающая следующими свойствами:

$j_1)$**:** $\lambda(x,t) = \lambda(t,x),\ (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$

$j_2)$**:** $\varepsilon_0 := \inf\limits_{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \lambda(x,t) > 0,\ \lambda(x,t) \leq 1,\ (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$

$j_3)$**:** при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функция $\lambda(x,t)$ возрастает по x на $\mathbb{R}^+$.

Рассмотрим следующие итерации для уравнения (2.3):

$$Q(\varphi_{n+1}(x)) = \int\limits_0^{\infty} \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))\varphi_n(t) dt, \tag{2.4}$$
$$\varphi_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0,1,2,\ldots,\ x \in \mathbb{R}^+.$$

Используя следующее легко проверяемое неравенство:

$$\mathring{K}(x-t) \geq \mathring{K}(x+t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{2.5}$$

непрерывность, монотонность и выпуклость функции Q, а также условие $j_2)$, индукцией по n нетрудно проверить, что

$$\varphi_n(x) \downarrow \text{ по } n, \tag{2.6}$$

$$\varphi_n(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi_n \in C(\mathbb{R}^+),\ n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.7}$$

Если итерации (2.4) представить в следующем виде:

$$Q(\varphi_{n+1}(x)) = \int_{-\infty}^{x} \lambda(x, x-\tau)\, \mathring{K}(\tau)\varphi_n(x-\tau)d\tau - \int_0^{\infty} \mathring{K}(x+t)\lambda(x,t)\varphi_n(t)dt,$$

$$\varphi_0(x) \equiv \eta,\ \ n = 0,1,2,\ldots,\ \ x \in \mathbb{R}^+$$

и при этом использовать условия $i_2)$ и $j_3)$, то методом математической индукции можно также убедиться, что

$$\varphi_n(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+,\ n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.8}$$

Предположим, что уравнение $Q(u) = \dfrac{\varepsilon_0^2}{2}u$, $\varepsilon_0 \in (0,1]$ имеет положительное решение ξ. В силу выпуклости и монотонности функции Q решение является единственным на интервале $(0,\eta]$, причем $\xi < \eta$ (см. рис. 1).

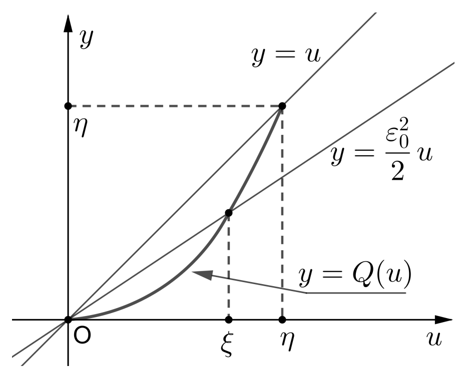

Рис. 1

Ниже индукцией по n убедимся, что

$$\varphi_n(x) \geq \xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}),\ x \in \mathbb{R}^+,\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{2.9}$$

где p_{ε_0} является единственным положительным решением характеристического уравнения (2.1) при $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2} \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. Действительно, при $n = 0$ оценка (2.9) сразу следует из простого неравенства $\xi < \eta$. Предполагая, что (2.9) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$ и при этом используя j_2) априорную оценку (2.2) для $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, а также неравенство (2.5) и выпуклость функции Q на отрезке $[0, \eta]$, из (2.4) будем иметь

$$Q(\varphi_{n+1}(x)) \geq \varepsilon_0 \xi \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} t}) dt \geq$$

$$\geq \xi \frac{\varepsilon_0^2}{2}(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}) \geq Q(\xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x})), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда в силу монотонности Q приходим к оценке (2.9) для $n+1$.

Итак, из полученных фактов (2.6)-(2.9) можем утверждать, что последовательность непрерывных и монотонных на $\mathbb{R}^+$ функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x).$$

Из (2.8) следует, что $\varphi(x)$ является монотонно неубывающей функцией на $\mathbb{R}^+$.

Используя теорему Б. Леви (см. [16]), а также непрерывность функции Q, легко можно убедиться, что предельная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.3). Из (2.6) и (2.9) следует также, что

$$\xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}) \leq \varphi(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.10}$$

Заметим, что $\varphi(x) \not\equiv \eta$. Действительно, этот факт сразу следует из следующего неравенства

$$\int\limits_0^\infty \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)) dt \leq \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)) dt = 1 - 2\int\limits_x^\infty \overset{\circ}{K}(t) dt < 1, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

при этом учитывается выпуклость функции Q.

Ниже убедимся, что $\varphi \in C(\mathbb{R}^+)$. Действительно, так как $\varepsilon_0 \leq \lambda(x,t) \leq 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, предельная функция φ удовлетворяет цепочке неравенств (2.10), а функция

$$\rho(x) := \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)) dt = 1 - 2\int\limits_x^\infty \overset{\circ}{K}(t) dt$$

непрерывна на $\mathbb{R}^+$, то

$$\int_0^\infty \lambda(x,t)(\mathring{K}(x-t)-\mathring{K}(x+t))\varphi(t)dt \in C(\mathbb{R}^+).$$

Но, так как $Q \in C(\mathbb{R}^+), Q \uparrow$ на $[0,\eta,]$ то из (2.3) сразу следует, что $\varphi \in C(\mathbb{R}^+)$.

Следовательно, согласно теореме Дини сходимость последовательных приближений (2.4) равномерна на каждом компакте из $\mathbb{R}^+$. Итак, на основе вышеизложенного можем утверждать

Лемма 2.1. *При условиях $i_1) - i_2), j_1) - j_3)$ и $a) - c)$, если уравнение $Q(u) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}u$, $\varepsilon_0 \in (0,1]$ имеет положительное решение, то уравнение (2.3) обладает неотрицательным монотонно неубывающим непрерывным и ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $\varphi(x)$, удовлетворяющим двойному неравенству (2.10) и $\varphi(x) \not\equiv \eta$.*

2.3. **Интегральная асимптотика решения уравнения** (1.1).

Лемма 2.2. *Пусть ядро K и функция Q удовлетворяют соответственно условиям $I) - IV)$, $a) - c)$ и уравнение $Q(u) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}u$, $\varepsilon_0 \in (0,1]$ имеет положительное решение. Пусть, далее, $f(x)$ является нетривиальным решением уравнения (1.1) и удовлетворяет следующим условиям :*

- **1):** $0 \le f(x) \le \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+$,
- **2):** *существует такое число $r > 0$, что на множестве $[r, +\infty)$ $f(x)$ является монотонно неубывающей функцией.*

Тогда данное решение обладает свойствами:

- $f(x) < \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+$,
- *существует $\delta = \delta(r) > 0$ такое, что $f(x) > 0$, $x \in [\delta(r), +\infty)$,*
- $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$.

Доказательство. Сперва заметим, что из непрерывности функции $\gamma(x)$, с учетом условия 1) следует, что

$$Q(f(x)) \in C_M(\mathbb{R}^+), \tag{2.11}$$

где $C_M(\mathbb{R}^+)$ - пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$. Так как $Q \in C(\mathbb{R}^+), Q(u) \uparrow$ на $[0,\eta]$, то из (2.11) и 1) сразу получаем, что

$$f \in C_M(\mathbb{R}^+). \tag{2.12}$$

Из (1.1) в силу условия $II)$ следует, что

$$f(0)=0. \tag{2.13}$$

В силу включения (2.12) можем утверждать, что $\eta-f\in L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$. Уравнение (1.1) представим в следующем виде:

$$\eta-Q(f(x))=\eta\gamma(x)+\int_0^\infty K(x,t)(\eta-f(t))dt,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.14}$$

Так как $f\uparrow$ на $[r,+\infty)$, то из (2.14) и условия 1) следует, что всех $x\geq r$ имеет место неравенство:

$$\begin{gathered}0\leq\eta-Q(f(x))\leq\eta\gamma(x)+(\eta-f(x))\int_x^\infty K(x,t)dt+\\ +\int_0^x K(x,t)(\eta-f(t))dt,\quad x\in[r,+\infty).\end{gathered} \tag{2.15}$$

Пусть $R>r$ - произвольное число. Проинтегрируем обе части неравенства (2.15) по x на отрезке $[r,R]$. Тогда, учитывая условия $I)$, $III)$, $IV)$ и теорему Фубини (см. [16]), будем иметь

$$0\leq\int_r^R(\eta-Q(f(x))dx\leq\eta\int_r^R\gamma(x)dx+\int_r^R(\eta-f(x))\int_x^\infty K(x,t)dtdx+\int_r^R\int_0^x K(x,t)(\eta-f(t))dtdx\leq$$

$$\leq\eta\int_r^\infty\gamma(x)dx+\frac{1}{2}\int_r^R(\eta-f(x))dx+\int_r^R\int_0^r K(x,t)(\eta-f(t))dtdx+\int_r^R\int_r^x K(x,t)(\eta-f(t))dtdx\leq$$

$$\leq\eta\int_r^\infty\gamma(x)dx+\frac{1}{2}\int_r^R(\eta-f(x))dx+\eta\int_0^r\int_r^\infty K(x,t)dxdt+\int_r^R(\eta-f(t))\int_t^R K(x,t)dxdt\leq$$

$$\leq\eta\int_r^\infty\gamma(x)dx+\frac{1}{2}\int_r^R(\eta-f(x))dx+\eta\int_0^r\int_0^\infty K(t,x)dxdt+\int_r^R(\eta-f(t))\int_t^\infty K(t,x)dxdt\leq$$

$$\leq\eta\int_r^\infty\gamma(x)dx+\int_r^R(\eta-f(t))dt+\eta r.$$

Из этого неравенства в силу выпуклости функции Q сразу следует, что

$$0\leq\int_r^R(f(x)-Q(f(x)))dx\leq\eta\int_r^\infty\gamma(x)dx+\eta r. \tag{2.16}$$

Устремляя в (2.16) $R \to +\infty$ получим

$$f - Q(f) \in L_1(r, +\infty) \tag{2.17}$$

и

$$0 \leq \int_r^\infty (f(x) - Q(f(x)))dx \leq \eta \left(\int_r^\infty \gamma(x)dx + r \right). \tag{2.18}$$

Так как $\gamma(x) > 0, \ x \in \mathbb{R}^+$, то из (1.1) сразу следует, что

$$f(x) < \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Заметим теперь, что существует число $\delta > 0$, такое, что

$$f(x) > 0, \quad x \in [\delta, +\infty). \tag{2.19}$$

Действительно, так как $f(0) = 0, \ f \in C_M(\mathbb{R}^+), \ f(x) \not\equiv 0, \ x \in \mathbb{R}^+$ и $f \uparrow$ на $[r, +\infty)$, то в силу условия 1), например, для всех $x \geq r+1$ функция $f(x)$ будет положительной.

Ниже убедимся, что для всех $x \geq r+1$ имеет место следующее неравенство:

$$f(x) - Q(f(x)) \geq \frac{f(r+1) - Q(f(r+1))}{\eta - f(r+1)} (\eta - f(x)). \tag{2.20}$$

Действительно, из выпуклости функции Q с учетом того, что $f(x) \geq f(r+1) > 0$, при $x \in [r+1, +\infty)$ сразу следует, что имеет место оценка

$$Q(f(x)) \leq \frac{\eta - Q(f(r+1))}{\eta - f(r+1)} f(x) + \eta \frac{Q(f(r+1)) - f(r+1)}{\eta - f(r+1)},$$

(см. рис. 2) откуда сразу приходим к (2.20).

Учитывая (2.20), (2.17), (2.18) и условие a) заключаем, что $\eta - f \in L_1(r+1, +\infty)$ и

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{r+1}^\infty (\eta - f(x))dx \leq \frac{\eta - f(r+1)}{f(r+1) - Q(f(r+1))} \int_{r+1}^\infty (f(x) - Q(f(x)))dx \leq \\ \leq \eta \left(\int_{r+1}^\infty \gamma(x)dx + r + 1 \right) \frac{(\eta - f(r+1))}{f(r+1) - Q(f(r+1))}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Так как $\eta - f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$ и $\eta - f \in L_1(r+1, +\infty)$, то $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$. □

3. Разрешимость уравнения (1.1)

3.1. **Теорема существования.** Возникает естественный вопрос: при каких ограничениях на ядро K уравнение (1.1) обладает нетривиальным неотрицательным и ограниченным решением, удовлетворяющим условиям леммы 2.2?

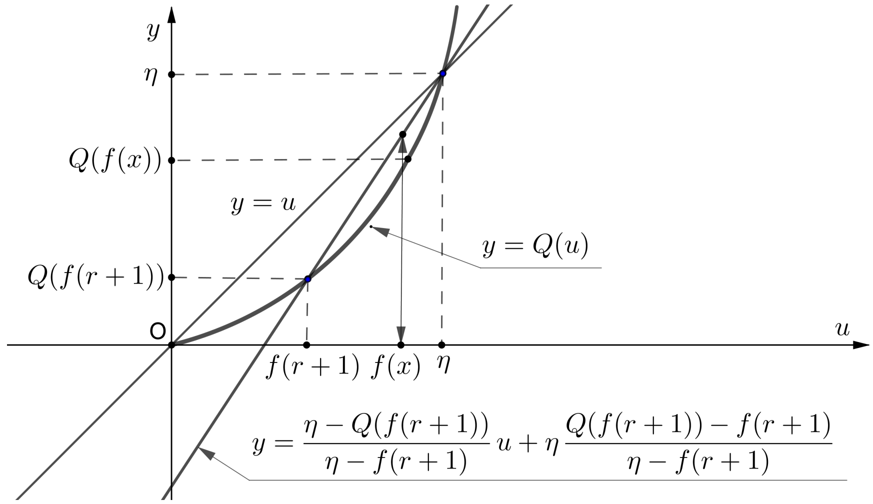

Рис. 2

Следующая теорема дает ответ на этот вопрос:

Теорема 3.1. *Пусть ядро K и функция Q удовлетворяют соответственно условиям $I) - III)$, $a) - c)$ и уравнение $Q(u) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}u$, $\varepsilon_0 \in (0,1]$ имеет положительное решение. Тогда, если $\gamma(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ и*

$$K(x,t) \geq \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{3.1}$$

где $\overset{\circ}{K}$ и λ обладают свойствами $i_1)-i_2)$ и $j_1)-j_3)$ соответственно , то уравнение (1.1) имеет неотрицательное нетривиальное непрерывное и ограниченное решение $f(x)$, причем

$$\xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}) \leq \varphi(x) \leq f(x) < \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Более того, если, дополнительно,

$$\mu(x) := \int_0^\infty (1 - \lambda(x,t))dt \in L_1(\mathbb{R}^+) \tag{3.2}$$

и

$$\int_0^\infty t\,\overset{\circ}{K}(t)dt < +\infty, \tag{3.3}$$

то $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Если же

$$K(x,t) = \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{3.4}$$

где λ и $\overset{\circ}{K}$ удовлетворяют условиям $j_1) - j_3)$ и $i_1) - i_2)$ соответственно, то $f(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$.

Доказательство. Рассмотрим следующие итерации

$$Q(f_{n+1}(x)) = \int_0^\infty K(x,t) f_n(t) dt, \tag{3.5}$$
$$f_0(x) = \varphi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Используя неравенство (3.1), условия $II)$, $III)$, $a)$ и $b)$, а также лемму 2.1 индукцией по n нетрудно убедиться в достоверности следующих утверждений:

$$f_n(x) \uparrow \text{ по } n, \tag{3.6}$$

$$f_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.7}$$

$$f_n(x) \le \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \ x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.8}$$

Следовательно, последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в силу непрерывности функции Q и предельной теоремы Б. Леви. Из (3.6) и (3.8) следует, что

$$\varphi(x) \le f(x) \le \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Но так как $\gamma(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ и функция Q выпукла на отрезке $[0, \eta]$, то из (1.1) следует, что $f(x) < \eta$, $x \in \mathbb{R}^+$. Следовательно, учитывая (2.10), приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}) \le \varphi(x) \le f(x) < \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.9}$$

Из непрерывности функций Q и $\int\limits_x^\infty K(x,t)dt$, с учетом неравенства (3.9), условия $b)$, следует, что $f \in C(\mathbb{R}^+)$.

Если выполняются условия (3.2) и (3.3), то тогда в силу $i_1)$

$$0 < \tilde{\gamma}(x) := 1 - \int_0^\infty \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))dt =$$

$$= \int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x-t)(1 - \lambda(x,t))dt + 2\int_x^\infty \overset{\circ}{K}(t)dt \le$$

$$\leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \overset{\circ}{K}(\tau)\mu(x) + 2\int\limits_x^\infty \overset{\circ}{K}(t)dt \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

ибо $\int\limits_0^\infty \int\limits_x^\infty \overset{\circ}{K}(\tau)d\tau dx = \int\limits_0^\infty \tau \overset{\circ}{K}(\tau)d\tau < +\infty.$

Следовательно $\tilde{\gamma} \in L_1(\mathbb{R}^+)$. С другой стороны, для ядра

$$\tilde{K}(x,t) := \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

выполняется также следующее неравенство:

$$\int\limits_x^\infty \tilde{K}(x,t)dt \leq \int\limits_x^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))dt =$$

$$= \frac{1}{2} - \int\limits_{2x}^\infty \overset{\circ}{K}(u)dt \leq \frac{1}{2}, \;\; x \in \mathbb{R}^+.$$

Таким образом, применяя лемму 2 для уравнения (2.3), можем утверждать, что

$$\eta - \varphi \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) сразу следует, что

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{3.11}$$

При выполнении равенства (3.4) получаем, что $f_n(x) = \varphi(x)$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, $f(x) = \varphi(x),\; x \in \mathbb{R}^+$. Но тогда, используя лемму 2.1, можем утверждать, что $f(x) \uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$. □

3.2. **Теорема единственности.** Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия $I) - IV)$, $a) - c)$ и уравнение $Q(u) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}u$, $\varepsilon_0 \in (0,1]$ имеет положительное решение. Тогда уравнение* (1.1) *не может иметь более одного решения в следующем классе функций:*

$$\mathfrak{M} := \{f(x) : 0 \leq f(x) \leq \eta, f(x) \not\equiv 0, f(x) \uparrow \text{ на } [r, +\infty)\}.$$

Доказательство. Предположим обратное: уравнение (1.1) имеет два решения $f, \tilde{f} \in \mathfrak{M}, f \not\equiv \tilde{f}$. Тогда согласно лемме 2.2

α_1)**:** $f, \tilde{f} \in C(\mathbb{R}^+)$,

α_2)**:** существует число $\delta > 0$ такое, что

$$f(x) > 0, \;\; \tilde{f}(x) > 0, \;\; x \in [\delta, +\infty), \tag{3.12}$$

α_3):

$$f(x) < \eta,\ \tilde{f}(x) < \eta,\ x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.13}$$

α_4):

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+),\ \eta - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{3.14}$$

С учетом неравенства треугольника из (3.14) следует, что $f - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Так как $f(0) = \tilde{f}(0) = 0$ (см. доказательство леммы 2.2) и $f(x) \not\equiv \tilde{f}(x)$, то существует такая точка $x_0 > 0$, что $f(x_0) \neq \tilde{f}(x_0)$.

В силу непрерывности функций f и $\tilde{f}$ можем утверждать, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеет место $f(x) \neq \tilde{f}(x)$.

Рассмотрим и оценим следующую разность:

$$0 \leq f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| \leq f(x) \int\limits_0^\infty K(x,t)|f(t) - \tilde{f}(t)|dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.15}$$

Так как $f - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, то в силу условий $I)$, $III)$ можем утверждать, что правая часть неравенства (3.15) принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$. Следовательно, учитывая $I)$ и используя теорему Фубини, из (3.15) получим

$$0 \leq \int\limits_0^\infty f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))|dx \leq \int\limits_0^\infty f(x) \int\limits_0^\infty K(x,t)|f(t) - \tilde{f}(t)|dtdx =$$

$$= \int\limits_0^\infty |f(t) - \tilde{f}(t)| \int\limits_0^\infty K(x,t)f(x)dxdt = \int\limits_0^\infty |f(t) - \tilde{f}(t)| \int\limits_0^\infty K(t,x)f(x)dxdt =$$

$$= \int\limits_0^\infty |f(t) - \tilde{f}(t)|Q(f(t))dt,$$

из чего следует, что

$$\int\limits_0^\infty \{f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| - Q(f(x))|f(x) - \tilde{f}(x)|\}dx \leq 0. \tag{3.16}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^\infty \{f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| - Q(f(x))|f(x) - \tilde{f}(x)|\}dx =$$

$$= \int\limits_E \{f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| - Q(f(x))|f(x) - \tilde{f}(x)|\}dx,$$

где

$$E := \{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \neq \tilde{f}(x), \tilde{f}(x) \neq 0, f(x) \neq 0\}.$$

Следовательно, из (3.16) имеем

$$\int_E \{f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| - Q(f(x))|f(x) - \tilde{f}(x)|\}dx \leq 0. \tag{3.17}$$

Следует отметить, что измеримое множество E имеет положительную меру: $mesE > 0$, ибо $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E$. Так как для всех $x \in E, f(x) \neq 0, f(x) \neq \tilde{f}(x)$, то из (3.17) следует, что

$$\int_E |f(x) - \tilde{f}(x)| \left(\frac{|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))|}{|f(x) - \tilde{f}(x)|} f(x) - Q(f(x)) \right) dx \leq 0. \tag{3.18}$$

Из выпуклости функции Q следует, что для всех $x \in E$ имеет место неравенство (см. рис. 3 и рис. 4)

$$tg\alpha = \frac{|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))|}{|f(x) - \tilde{f}(x)|} > \frac{Q(f(x))}{f(x)} = tg\beta, \tag{3.19}$$

ибо $\alpha > \beta$ и $y = tgx$ - возрастающая функция.

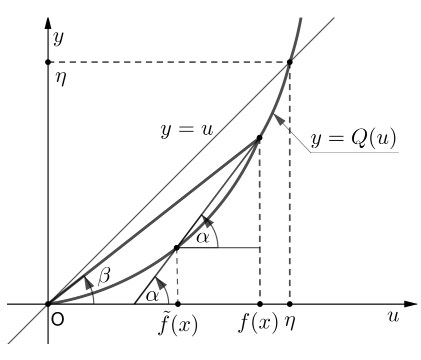

Рис. 3

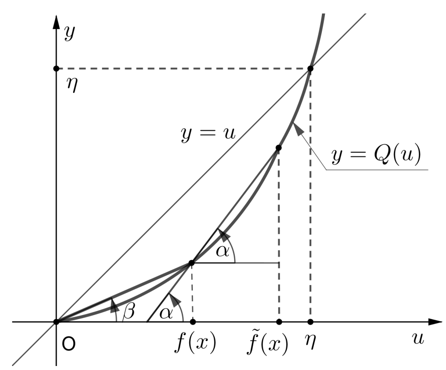

Рис. 4

Из полученных неравенств (3.19) и (3.18) в силу того что $mesE > 0$ приходим к противоречию. Следовательно, $f(x) = \tilde{f}(x), \ x \in \mathbb{R}^+$. □

Замечание 1. *Следует отметить, что утверждение теоремы 3.2 даст ответ на открытый вопрос статьи* [4] *о единственности монотонного решения следующего нелинейного интегрального уравнения со степенной нелинейностью:*

$$f^p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2} \right) f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.20}$$

с граничным условием

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1, \tag{3.21}$$

где $p > 2$ *- нечетное число.*

Действительно, если в качестве функции $Q(u)$ выбрать $Q(u) = u^p$, а в качестве ядра K функцию вида

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2}\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

то все условия сформулированных утверждений (Лемма 2.1, Лемма 2.2, Теорема 3.1, Теорема 3.2) будут выполнены. Граничная задача (3.20) - (3.21) возникает в теории p–адических открыто-замкнутых струн (см. [4]). В указанной теории встречаются также нелинейные уравнения вида (1.1), где

$$Q(u) = au^3 + (1-a)u, \quad a \in (0,1], \tag{3.22}$$

а

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\left(e^{-\frac{(x-t)^2}{4a}} - e^{-\frac{(x+t)^2}{4a}}\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{3.23}$$

(см. [5]), для которых также выполняются все условия доказанных утверждений.

Небезинтересно отметить, что в том частном случае, когда

$$K(x,t) = \overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t),$$

а

$$Q^{-1}(u) = \gamma(1 - e^{-u}),$$

$\gamma > 1$ - числовой параметр (Q^{-1} - обратная функция функции Q) уравнение (1.1) возникает в математической теории географического распространения эпидемии (см. [7], [10]).

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Abstract. The paper is devoted to the study of a class of integral equations with a symmetric kernel and with convex nonlinearity on the positive semiaxis . Existence and uniqueness theorems for a nonnegative and bounded solution are proved. The qualitative properties of the constructed solution are investigated. At the end of the paper, some particular examples for the above mentioned class of equations, having direct applications in the p–adic open-closed string dynamic theory and in the theory of geographical spread of epidemics are given.

Список литературы

[1] Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, “О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в модели Бхатнагара-Гросса-Крука”, ТМФ, **125:2**, 339 – 342 (2000).
[2] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, “Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях”, ТМФ, **172:3**, 497 – 504 (2012).
[3] Н. Б. Енгибарян, “Об одной задаче нелинейного переноса излучения”, Астрофизика, **2:1**, 31 – 36 (1966).
[4] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, “О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны”, ТМФ, **138:3**, 355 – 368 (2004).
[5] Л. В. Жуковская, “Итерационний метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн”, ТМФ, **146:3**, 402 – 409 (2006).
[6] Х. А. Хачатрян, “О разрешимости некоторых классов нелиейных уравнений в теории $p-$адической струны”, Изв. РАН Сер. матем., **82:2**, 172 – 193 (2018).
[7] O. Diekmann, “Thresholds and Travelling Waves for the Geographical Spread of Infection”, Journal of Math. Biology, **6**, 109 – 130 (1978).
[8] Х. А. Хачатрян, “О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн”, Тр. ММО, **79:1**, 117 – 132 (2018).
[9] Л. Г. Арабаджян, “Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна”, Изв. НАН Армении, Математика, **32**, no. 1, 21 – 28 (1997).
[10] O. Diekmann, “Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic”, Journal of Diff. Equations, **33: 1**, 58 – 73 (1979).
[11] Kh. A. Khachatryan, “On a class of nonlinear integral equations with a noncompact operator”, Journal of Contemporary Math. Analysis, **46**, no. 2, 89 – 100 (2011).
[12] Х. А. Хачатрян, “Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью”, Изв. РАН. Сер. матем., **76:1**, 173 – 200 (2012).
[13] Li Kun, Li Xiong, “Asymptotic behavior and uniqueness of traveling wave solution in Richer competition system”, Journal Math. Anal. Appl., **389:1**, 486 – 497 (2012).
[14] V. S. Vladimirov, “The equation of p-adic closed strings for the scalar tachyon field”, Sci. China, Ser. A, **51:4**, 754 – 764 (2008).
[15] Х. А. Хачатрян, “О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой”, Изв. РАН. Сер. матем., **79:2**, 205 – 224 (2015).
[16] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Москва, Наука, 544 стр. (1981).

Поступила 7 мая 2019

После доработки 17 сентября 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 72 – 87

NORMAL FAMILIES OF MEROMORPHIC FUNCTIONS CONCERNING ZERO NUMBERS

XIAO-HUA CAI, JUN-FAN CHEN

Fujian Normal University, Fuzhou, P.R. China;[1]
Fujian Province University, Fujian Putian, P.R. China
E-mails: *xhcai1992@163.com; junfanchen@163.com*

Abstract. In this paper, we study the problem of normality of meromorphic functions with multiple values and obtain three normality criteria. Examples are given to illustrate that the conditions in our results are necessary.

MSC2010 numbers: 30D45; 30D30.
Keywords: meromorphic function; normal family; multiple value; zero number.

1. Introduction

Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on a domain D in $\mathbb{C}$. Then $\mathcal{F}$ is said to be normal on D, in the sense of Montel, if each sequence $\{f_n(z)\}$ has a subsequence $\{f_{n_j}(z)\}$ that converges spherically locally uniformly in D to a meromorphic function or to the constant ∞ (see [1, 2, 3]).

The following well-known result was proved by Hayman [4] in 1992.

Theorem 1.1. (see [4]). *Let f be a meromorphic function in $\mathbb{C}$ and $n \geq 5$ be a positive integer, and let $a(\neq 0)$ and b be two finite constants. If $f' - af^n \neq b$, then f is a constant.*

Mues [5] gave some examples to show that Theorem 1.1 is not valid for $n = 3$ and $n = 4$. In 1967, the normality criterion corresponding to Theorem 1.1 was confirmed by Hayman [6].

Theorem 1.2. (see [6]). *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D and $n \geq 3$ be a positive integer, and let $a(\neq 0)$ and b be two finite constants. If for each $f \in \mathcal{F}$, $f' - af^n \neq b$ in D, then $\mathcal{F}$ is normal in D.*

Ye [7], Pang [8], Schwick [9] and Xu [10] have considered the case where in Theorem 1.2, f' is replaced by $f^{(k)}$, and proved the following theorem.

[1]The research was supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2018J01658) and by the Key Laboratory of Applied Mathematics of Fujian Province University (Putian University) (Grant No. SX201801).

Theorem 1.3. (see [7] - [10]). *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D, let n and k be two positive integers satisfying $n \geq k+3$, and let $a(\neq 0)$ and b be two finite constants. If for each $f \in \mathcal{F}$, $f^{(k)} - af^n \neq b$ in D, then $\mathcal{F}$ is normal in D.*

In 2014, Deng et al. [11] dealt with the case where the equation $f^{(k)} - af^n = b$ has solutions (see Theorem 1.3), and proved the following result.

Theorem 1.4. (see [11]). *Let m, n and k be three positive integers satisfying $n \geq k+m+2$, and let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D such that for each $f \in \mathcal{F}$, all the zeros of f are of multiplicity at least k. Let $a(\neq 0)$ and b be two finite constants. If for each $f \in \mathcal{F}$, the expression $f^{(k)} - af^n - b$ has at most m distinct zeros in D, then $\mathcal{F}$ is normal in D.*

The following question arises naturally: is it possible to extended Theorem 1.4, and prove the result for expression $\left(f^l\right)^{(k)} - af^n - b$ instead of $f^{(k)} - af^n - b$?

In this paper, we study this problem and obtain the following result.

Theorem 1.5. *Let m, n, k and l be four positive integers satisfying $n \geq k+(m+1)l+1$, and let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D such that for each $f \in \mathcal{F}$, all the zeros of f are of multiplicity at least k. Let $a(\neq 0)$ and b be two finite constants. If for each $f \in \mathcal{F}$, the expression $\left(f^l\right)^{(k)} - af^n - b$ has at most ml distinct zeros in D, then $\mathcal{F}$ is normal in D.*

Remark 1.1. Observe that for $l = 1$, Theorem 1.5 generalizes Theorem 1.4.

Here we raise the question: what can be expected if we relax the condition $n \geq k+(m+1)l+1$ in Theorem 1.5? We have the following results.

Theorem 1.6. *Let m, n, k and l be four positive integers satisfying $n \geq (m+1)l+2$, and let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D such that for each $f \in \mathcal{F}$, all the zeros and poles of f are of multiplicity at least k. Let $a(\neq 0)$ and b be two finite constants. If for each $f \in \mathcal{F}$, the expression $\left(f^l\right)^{(k)} - af^n - b$ has at most ml distinct zeros in D, then $\mathcal{F}$ is normal in D.*

Theorem 1.7. *Let m, n, k and l be four positive integers satisfying $n \geq (m+1)l+1$, and let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D such that for each $f \in \mathcal{F}$, all the zeros of f are of multiplicity at least k, and all the poles of f are of multiplicity at least $k+1$. Let $a(\neq 0)$ and b be two finite constants. If for each $f \in \mathcal{F}$, the expression $\left(f^l\right)^{(k)} - af^n - b$ has at most ml distinct zeros in D, then $\mathcal{F}$ is normal in D.*

Now we give some examples to show that the conditions in our results are necessary.

Example 1.1. Let n and k be two positive integers, $a(\neq 0)$ be a finite constant, and let $\mathcal{F} = \{f_i = iz^{k-1} : i = 1, 2, 3, \cdots\}$ and $D = \{z : |z| < 1\}$. Then, for each $f \in \mathcal{F}$, the expression $f^{(k)} - af^n - 0$ has just one zero in D. But $\mathcal{F}$ is not normal in D.

For the case $l = 1$, Example 1.1 shows that the condition that all zeros of functions from $\mathcal{F}$ have multiplicities at least k in Theorems 1.5-1.7 is the best possible.

Example 1.2. Let m, k and l be three positive integers, $a(\neq 0)$ be a finite constant, and let $D = \{z : |z| < 1\}$. Set $\mathcal{F} = \{f_n\}$, where $f_n = \frac{1}{nz+\frac{a}{(-1)^k k! n^k}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Then we have

$$\begin{aligned}
\left(f_n^l\right)^{(k)} - af_n^{k+(m+1)l} &= \frac{(-1)^k n^k C_{l+k}^l}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{l+k}} - \frac{a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{k+(m+1)l}} \\
&= \frac{(-1)^k n^k C_{l+k}^l \left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{ml} - a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{k+(m+1)l}},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left(f_n^l\right)^{(k)} - af_n^{k+(m+1)l+1} &= \frac{(-1)^k n^k C_{l+k}^l}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{l+k}} - \frac{a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{k+(m+1)l+1}} \\
&= \frac{(-1)^k n^k C_{l+k}^l \left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{ml+1} - a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{k+(m+1)l+1}}.
\end{aligned}$$

It is clear that for each $f \in \mathcal{F}$, the expression $\left(f^l\right)^{(k)} - af^{k+(m+1)l} - 0$ has exactly ml distinct zeros in D, and $\left(f^l\right)^{(k)} - af^{k+(m+1)l+1} - 0$ has exactly $ml + 1$ distinct zeros in D. But $\mathcal{F}$ is not normal in D.

This shows that the conditions $n \geq k + (m+1)l + 1$ and that $\left(f^l\right)^{(k)} - af^n - b$ has at most ml distinct zeros in Theorem 1.5 are the best possible.

Example 1.3. Let m, k and l be three positive integers, $a(\neq 0)$ be a finite constant, and let $D = \{z : |z| < 1\}$. Set $\mathcal{F} = \{f_n\}$, where $f_n = \frac{1}{\left[nz+\frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^k}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Then we have

$$\begin{aligned}\left(f_n^l\right)^{(k)} - af_n^{(m+1)l+1} &= \frac{(-1)^k n^k C_{lk+k}^{lk}}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{lk+k}} - \frac{a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{k+k(m+1)l}} \\ &= \frac{(-1)^k n^k C_{lk+k}^{lk}\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{kml} - a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{k+k(m+1)l}},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left(f_n^l\right)^{(k)} - af_n^{(m+1)l+2} &= \frac{(-1)^k n^k C_{lk+k}^{lk}}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{lk+k}} - \frac{a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{2k+k(m+1)l}} \\ &= \frac{(-1)^k n^k C_{lk+k}^{lk}\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{k(ml+1)} - a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{2k+k(m+1)l}},\end{aligned}$$

It is clear that for each $f \in \mathcal{F}$, the expression $\left(f^l\right)^{(k)} - af^{(m+1)l+1} - 0$ has $kml \geq ml$ distinct zeros in D, and $\left(f^l\right)^{(k)} - af^{(m+1)l+2} - 0$ has $k(ml+1) \geq ml+1$ distinct zeros in D. But $\mathcal{F}$ is not normal in D.

For the case $k = 1$, Example 1.3 shows that the conditions $n \geq (m+1)l+2$ and that $\left(f^l\right)^{(k)} - af^n - b$ has at most ml distinct zeros in Theorem 1.6 are the best possible.

Example 1.4. Let m, k and l be three positive integers, $a(\neq 0)$ be a finite constant, and let $D = \{z : |z| < 1\}$. Set $\mathcal{F} = \{f_n\}$, where $f_n = \frac{1}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{k+1}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Then we have

$$\begin{aligned}\left(f_n^l\right)^{(k)} - af_n^{(m+1)l} &= \frac{(-1)^k n^k C_{lk+l+k}^{lk+l}}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{lk+l+k}} - \frac{a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{(k+1)(m+1)l}} \\ &= \frac{(-1)^k n^k C_{lk+l+k}^{lk+l}\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{(ml-1)k+ml} - a}{\left[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}\right]^{(k+1)(m+1)l}},\end{aligned}$$

It is clear that for each $f \in \mathcal{F}$, the expression $\left(f^l\right)^{(k)} - af^{(m+1)l} - 0$ has $(ml-1)k + ml \geq ml$ distinct zeros in D. But $\mathcal{F}$ is not normal in D.

For the case $ml = 1$, Example 1.4 shows that the condition $n \geq (m+1)l+1$ in Theorem 1.7 is the best possible.

2. Some lemmas

In this section we state some lemmas which will be used in the proofs of the main results.

Lemma 2.1. (see [3]). *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D. Then $\mathcal{F}$ is normal on D if and only if $\mathcal{F}$ is normal at each point $z_0 \in D$.*

Lemma 2.2. (see [12]). *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on the unit disc Δ such that all the zeros of functions from $\mathcal{F}$ have multiplicities $\geq p$, and all the poles of functions from $\mathcal{F}$ have multiplicities $\geq q$. Let α be a real number satisfying $-p < \alpha < q$. Then $\mathcal{F}$ is not normal in any neighborhood of $z_0 \in \Delta$ if and only if there exist:*

(i) points $z_n \in \triangle$, $z_n \to z_0$,

(ii) functions $f_n \in \mathcal{F}$,

(iii) positive numbers $\rho_n \to 0^+$,

such that $g_n(\zeta) = \rho_n^{\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta) \to g(\zeta)$ spherically uniformly on compact subsets of $\mathbb{C}$, where g is a nonconstant meromorphic function such that all the zeros of g have multiplicities $\geq p$, and all the poles of g have multiplicities $\geq q$. Moreover, the order of g is not greater than 2.

Lemma 2.3. (see [13]). *Let f be a nonconstant meromorphic function in $\mathbb{C}$, n be a positive integer, and a be a finite constant such that $n \geq 4$ and $a \neq 0$. Then $f' - af^n$ has at least two distinct zeros.*

Lemma 2.4. (see [14]). *Let f be a nonconstant meromorphic function in $\mathbb{C}$, n, k, d be three positive integers, and a be a finite constant such that $n \geq 3$, $a \neq 0$ and $d \geq \frac{k+1}{n-2}$. If all the zeros of f have multiplicities $\geq p$, and all the poles of f have multiplicities $\geq d$, then $f^{(k)} - af^n$ has at least two distinct zeros.*

3. Proof of Theorem 1.5

Suppose that $\mathcal{F}$ is not normal in D. Then by Lemma 2.1, there exists at least one point z_0 such that $\mathcal{F}$ is not normal at z_0. By Lemma 2.2, there exist $f_j \in \mathcal{F}$, $z_j \to z_0$, and $\rho_j \to 0^+$ such that

$$g_j(\zeta) = \rho_j^{\frac{k}{n-l}} f_j(z_j + \rho_j \zeta) \to g(\zeta)$$

spherically uniformly on compact subsets of $\mathbb{C}$, where g is a nonconstant meromorphic function such that all the zeros of g have multiplicities $\geq k$, and the order of g is not greater than 2.

Obviously, $\left(g^l\right)^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta)\not\equiv 0$. We do not suppose that g is an entire function since $n\geq k+(m+1)l+1$. Thus, we have

$$\begin{gathered}nT(r,g)=T(r,g^n)=T\left(r,\frac{\left(g^l\right)^{(k)}}{a}\right)\leq T\left(r,\left(g^l\right)^{(k)}\right)+O(1)\\ \leq N\left(r,\left(g^l\right)^{(k)}\right)+m\left(r,\left(g^l\right)^{(k)}\right)+O(1)\leq m\left(r,g^l\right)+m\left(r,\frac{\left(g^l\right)^{(k)}}{g^l}\right)+O(1)\\ \leq lm(r,g)+S(r,g)\leq lT(r,g)+S(r,g),\end{gathered}$$

and so $(n-l)T(r,g)\leq S(r,g)$. This is a contradiction.

We claim that the expression $\left(g^l\right)^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta)$ has at most ml distinct zeros. Suppose that this is not the case, and $\left(g^l\right)^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta)$ has $ml+1$ distinct zeros ζ_i $(i=1,2,3,\cdots,ml+1)$. Note that

$$\begin{gathered}\rho_j^{\frac{nk}{n-l}}\left[\left(f_j^l\right)^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta)-af_j^n(z_j+\rho_j\zeta)-b\right]\\ =\left(g_j^l\right)^{(k)}(\zeta)-ag_j^n(\zeta)-\rho_j^{\frac{nk}{n-l}}b\to\left(g^l\right)^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta)\end{gathered}$$

uniformly on compact subsets of $\mathbb{C}$ disjoint from the poles of g. Hence, by Hurwitz's theorem, for sufficiently large j, there exist points $\zeta_{j,i}(i=1,2,3,\cdots,ml+1)$ such that $\zeta_{j,i}\to\zeta_i$, and $\left(f_j^l\right)^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta)-af_j^n(z_j+\rho_j\zeta)=b$. However, the expression $\left(f_j^l\right)^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta)-af_j^n(z_j+\rho_j\zeta)-b$ has at most ml distinct zeros in D, and $z_j+\rho_j\zeta_{j,i}\to z_0$, which is a contradiction. So, the expression $\left(g^l\right)^{(k)}(\zeta)-ag^n(\zeta)$ has at most ml distinct zeros. Observe that if $mlk=1$, then $m=1$, $l=1$, $k=1$, which contradicts the result of Lemma 2.3. Next, we consider the case where $mlk\geq 2$. We set

$$\phi(\zeta)=\frac{\left(g^l\right)^{(k)}(\zeta)}{ag^n(\zeta)},\tag{3.1}$$

where $\phi\not\equiv 1$. Since all the zeros of g have multiplicities at least k, it follows that $\left(g^l\right)^{(k)}\not\equiv 0$, and hence $\phi\not\equiv 0$. From (3.1) we get

$$ag^n(\zeta)=\frac{\left(g^l\right)^{(k)}(\zeta)}{\phi(\zeta)}.\tag{3.2}$$

Thus, in view of (3.2), we can write

$$\begin{gathered}nm(r,g)=m\left(r,g^n\right)\leq m\left(r,\frac{\left(g^l\right)^{(k)}}{\phi}\right)+\log^+\frac{1}{|a|}\leq m\left(r,\frac{1}{\phi}\right)+m\left(r,\left(g^l\right)^{(k)}\right)+\log^+\frac{1}{|a|}\\ \leq m\left(r,\frac{1}{\phi}\right)+m\left(r,g^l\right)+m\left(r,\frac{\left(g^l\right)^{(k)}}{g^l}\right)+\log^+\frac{1}{|a|}\leq m\left(r,\frac{1}{\phi}\right)+lm(r,g)+S(r,g),\end{gathered}$$

implying that

$$(n-l)m(r,g)\leq m\left(r,\frac{1}{\phi}\right)+S(r,g).\tag{3.3}$$

On the other hand, we have

$$nN(r,g)=N\left(r,ag^n\right)=N\left(r,\frac{\left(g^l\right)^{(k)}}{\phi}\right)\le N\left(r,\tfrac{1}{\phi}\right)+N\left(r,\left(g^l\right)^{(k)}\right)-\overline{N}_0(r)$$
$$\le N\left(r,\tfrac{1}{\phi}\right)+N\left(r,g^l\right)+k\overline{N}\left(r,g^l\right)-\overline{N}_0(r)\le N\left(r,\tfrac{1}{\phi}\right)+lN(r,g)+k\overline{N}(r,g)-\overline{N}_0(r),$$

where $\overline{N}_0(r)$ is the reduced counting function of zeros of ϕ and $\left(g^l\right)^{(k)}$. Then

$$(n-l)N(r,g)\le N\left(r,\frac{1}{\phi}\right)+k\overline{N}(r,g)-\overline{N}_0(r). \tag{3.4}$$

From (3.1) we have

$$\overline{N}(r,\phi)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\phi}\right)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}(r,g)+\overline{N}_0(r). \tag{3.5}$$

By (3.3)-(3.5) and Nevanlinna's first and second fundamental theorems, we obtain

$$\begin{aligned}(n-l)T(r,g)&\le T\left(r,\frac{1}{\phi}\right)+k\overline{N}(r,g)-\overline{N}_0(r)+S(r,g)\\&\le T(r,\phi)+k\overline{N}(r,g)-\overline{N}_0(r)+S(r,g)\\&\le \overline{N}(r,\phi)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\phi}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\phi-1}\right)+k\overline{N}(r,g)-\overline{N}_0(r)+S(r,g)\\&\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\left(g^l\right)^{(k)}-ag^n}\right)+k\overline{N}(r,g)+S(r,g),\end{aligned}$$

that is,

$$(n-l)T(r,g)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+(k+1)\overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\left(g^l\right)^{(k)}-ag^n}\right)+S(r,g). \tag{3.6}$$

Suppose that the expression $\left(g^l\right)^{(k)}-ag^n$ has $t(\le ml)$ distinct zeros. Taking into account the inequalities:

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\le\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{g}\right)\le\frac{1}{k}T(r,g)+S(r,g), \tag{3.7}$$

$$\overline{N}(r,g)\le T(r,g), \tag{3.8}$$

from (3.6), we get

$$\left(n-l-k-1-\frac{1}{k}\right)T(r,g)\le t\log r+S(r,g).$$

This inequality together with the condition $n\ge k+(m+1)l+1$ yields

$$T(r,g)\le\frac{mlk}{mlk-1}\log r+S(r,g).$$

Thus, we we have shown that g is a nonconstant rational function satisfying $\deg g\le 2$ for $mlk=2$ and $\deg g=1$ for $mlk>2$.

Next, we discuss two cases: $\deg g=1$ and $\deg g=2$.

Case 1. Let $\deg g = 1$. We set

$$g(\zeta) = \frac{A_1\zeta + B_1}{A_2\zeta + B_2},$$

where $(A_1, A_2) \neq (0,0)$ and $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, and discuss two subcases.

Case 1.1. Let $A_1 = 0$. Then we can write

$$g(\zeta) = \frac{B_1}{A_2\zeta + B_2},$$

where $A_2 \neq 0$ is a constant. So, we have

$$\begin{aligned}\left(g^l\right)^{(k)}(\zeta) - ag^n(\zeta) &= \left[\frac{B_1^l}{(A_2\zeta + B_2)^l}\right]^{(k)} - \frac{aB_1^n}{(A_2\zeta + B_2)^n} \\ &= \frac{(-1)^k B_1^l A_2^k C_{k+l}^l (A_2\zeta + B_2)^{n-k-l} - aB_1^n}{(A_2\zeta + B_2)^n}.\end{aligned}$$

Since $n - k - l \geq ml + 1$, the expression $\left(g^l\right)^{(k)} - ag^n$ has at least $ml + 1$ distinct zeros. This is a contradiction.

Case 1.2. Let $A_1 \neq 0$. Then $k = 1$. We discuss two subcases.

Case 1.2.1. Let $A_2 = 0$. Then we can write $g(\zeta) = A(\zeta - c)$, where $A \neq 0$ is a constant. Hence

$$\left(g^l\right)'(\zeta) - ag^n(\zeta) = lA^l(\zeta - c)^{l-1} - aA^n(\zeta - c)^n.$$

Obviously, the expression $\left(g^l\right)' - ag^n$ has at least $n - l + 1 \geq ml + k + 2 = ml + 3$ distinct zeros, which is a contradiction.

Case 1.2.2. Let $A_2 \neq 0$. We set

$$g(\zeta) = A\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \beta},$$

where $A = \frac{A_1}{A_2} \neq 0$ is a constant, and $\alpha \neq \beta$.

Set $\psi = \frac{1}{g}$. Then $\left(g^l\right)'(\zeta) - ag^n(\zeta) = -\frac{l\psi'}{\psi^{l+1}} - \frac{a}{\psi^n} = -\frac{l\psi'\psi^{n-l-1} + a}{\psi^n}$. Obviously, all the zeros of $\left(g^l\right)' - ag^n$ come from the zeros of $l\psi'\psi^{n-l-1} + a$ or the poles of ψ^n.

Set $\varphi = \frac{l\psi^{n-l}}{n-l}$. Then $\varphi' = l\psi'\psi^{n-l-1}$ and

$$\varphi(\zeta) = \frac{l}{(n-l)A^{n-l}}\frac{(\zeta - \beta)^{n-l}}{(\zeta - \alpha)^{n-l}}.$$

So, we get

$$\varphi'(\zeta) = \frac{(\beta - \alpha)l}{(n-l)A^{n-l}}\frac{(\zeta - \beta)^{n-l-1}}{(\zeta - \alpha)^{n-l+1}}. \tag{3.9}$$

Obviously, $\varphi' + a$ has at least one zero. Let $\varphi' + a$ have d (≥ 1) distinct zeros. Then we have

$$\varphi'(\zeta) + a = \frac{C\Pi_{i=1}^d(\zeta - \eta_i)^{t_i}}{(\zeta - \alpha)^{n-l+1}},$$

where $C \neq 0$ is a constant, and $t_i \geq 1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, d)$ are positive numbers satisfying $\Sigma_{i=1}^{d} t_i = n - l + 1$. Thus, we have

$$\varphi''(\zeta) = \frac{\Pi_{i=1}^{d}(\zeta - \eta_i)^{t_i - 1} h_1(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n-l+2}}, \tag{3.10}$$

where h_1 is a polynomial with deg $h_1 \leq d$.

From (3.9) we get

$$\varphi''(\zeta) = \frac{(\zeta - \beta)^{n-l-2} h_2(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n-l+2}}, \tag{3.11}$$

where h_2 is a polynomial with $\deg h_2 \leq 1$.

Observing that α, β and η_i $(i = 1, 2, \cdots, d)$ are distinct, from (3.10) and (3.11), we get $\Sigma_{i=1}^{d}(t_i - 1) \leq \deg h_2 \leq 1$, $d \geq n - l \geq k + ml + 1 = ml + 2$. Then, $\varphi' + a$ has at least $ml + 2$ distinct zeros, and so, $\left(g^l\right)' - ag^n$ has at least $ml + 2$ distinct zeros. In particular, if $l > 1$, then $\left(g^l\right)' - ag^n$ has at least $ml + 3$ distinct zeros, since α is the pole of ψ^n and the zero of $\left(g^l\right)' - ag^n$, which is different from all zeros of $\varphi' + a$. This is a contradiction.

Case 2. Let $\deg g = 2$. Then we can have the following subcases: $m = 1$, $l = 1$, $k = 2$; $m = 1$, $l = 2$, $k = 1$ or $m = 2$, $l = 1$, $k = 1$.

Case 2.1. Let $m = 1$, $l = 1$, $k = 2$. We consider two subcases.

Case 2.1.1. Suppose $g \neq 0$. Let

$$g(\zeta) = \frac{1}{A_2\zeta^2 + B_2\zeta + C_2},$$

where $A_2 \neq 0$ is a constant. By (3.6) and $t \leq ml = 1$, we have

$$(n - l)T(r, g) \leq (k + 1)T(r, g) + \log r + S(r, g),$$

and hence, $T(r, g) \leq \log r + S(r, g)$. So, g is a rational function satisfying $\deg g = 1$, which contradicts $\deg g = 2$.

Case 2.1.2. Suppose g has at least one zero. Note that all zeros of g have multiplicities at least k and $k = 2$. Let

$$g(\zeta) = \frac{(\zeta - c)^2}{A_2\zeta^2 + B_2\zeta + C_2}.$$

Next, again we consider two subcases.

Case 2.1.2.1. Suppose $A_2\zeta^2 + B_2\zeta + C_2$ has at most one distinct zero. Then $\overline{N}(r, g) \leq \log r$. Since $\deg g = 2$ and $T(r, g) = 2\log r$, we have $\overline{N}(r, g) \leq \frac{1}{2}T(r, g)$. By (3.6) and $t \leq ml = 1$, we obtain

$$(n - l)T(r, g) \leq \frac{1}{2}T(r, g) + \frac{k + 1}{2}T(r, g) + \log r + S(r, g).$$

Then, we get $T(r, g) \leq \frac{1}{2}\log r + S(r, g)$, which is a contradiction.

Case 2.1.2.2. Suppose $A_2\zeta^2 + B_2\zeta + C_2$ has two distinct zeros, and let $A_2\zeta^2 + B_2\zeta + C_2 = A_2(\zeta - \beta_1)(\zeta - \beta_2)$, $\beta_1 \neq \beta_2$. Then, we have

$$g(\zeta) = \frac{(\zeta - c)^2}{A_2(\zeta - \beta_1)(\zeta - \beta_2)}.$$

By simple calculation, we get

$$g(\zeta) = \frac{1}{A_2} + \frac{a_1}{A_2(\zeta - \beta_1)} + \frac{a_2}{A_2(\zeta - \beta_2)},$$

where

$$a_1 = \frac{(c - \beta_1)^2}{\beta_1 - \beta_2}, \quad a_2 = \frac{(c - \beta_2)^2}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} g''(\zeta) - ag^n(\zeta) &= \tfrac{2}{A_2}\left[\tfrac{a_1}{(\zeta-\beta_1)^3} + \tfrac{a_2}{(\zeta-\beta_2)^3}\right] - \tfrac{a(\zeta-c)^{2n}}{A_2^n(\zeta-\beta_1)^n(\zeta-\beta_2)^n} \\ &= \tfrac{2A_2^{n-1}\left[a_1(\zeta-\beta_1)^{n-3}(\zeta-\beta_2)^n + a_2(\zeta-\beta_1)^n(\zeta-\beta_2)^{n-3}\right] - a(\zeta-c)^{2n}}{A_2^n(\zeta-\beta_1)^n(\zeta-\beta_2)^n}. \end{aligned}$$

Obviously, $g''-ag^n$ has at least $2 = ml+1$ distinct zeros, which is a contradiction.

Case 2.2. Let $m = 1$, $l = 2$, $k = 1$. We consider two subcases.

Case 2.2.1. Suppose $g \neq 0$. Let

$$g(\zeta) = \frac{1}{A_2\zeta^2 + B_2\zeta + C_2},$$

where $A_2 \neq 0$ is a constant. By (3.6) and $t \leq ml = 2$, we have

$$(n - l)T(r, g) \leq (k + 1)T(r, g) + 2\log r + S(r, g),$$

and hence, $T(r, g) \leq \log r + S(r, g)$. So, g is a rational function satisfying $\deg g = 1$, which contradicts $\deg g = 2$.

Case 2.2.2. Suppose g has at least one zero. Let

$$g(\zeta) = \frac{A_1\zeta^2 + B_1\zeta + C_1}{A_2\zeta^2 + B_2\zeta + C_2},$$

where$(A_1, A_2) \neq (0, 0)$. Again, we consider two subcases.

Case 2.2.2.1. Suppose $A_2\zeta^2 + B_2\zeta + C_2$ has at most one distinct zero. Then $\overline{N}(r, g) \leq \log r$. Thus, from $\deg g = 2$ we get $T(r, g) = 2\log r$, and hence, $\overline{N}(r, g) \leq \frac{1}{2}T(r, g)$. By (3.6) and $t \leq ml = 2$, we have

$$(n - l)T(r, g) \leq T(r, g) + \frac{k+1}{2}T(r, g) + 2\log r + S(r, g),$$

implying that $T(r, g) \leq \log r + S(r, g)$, which is a contradiction.

Case 2.2.2.2. Suppose $A_2\zeta^2 + B_2\zeta + C_2$ has two distinct zeros β_1, β_2. We consider two subcases.

Case 2.2.2.2.1. Suppose $A_1\zeta^2+B_1\zeta+C_1$ has one zero. Then $\overline{N}(r,\frac{1}{g})\le\frac{1}{2}T(r,g)+S(r,g)$. By (3.6) and $t\le ml=2$, we get

$$(n-l)T(r,g)\le\frac{1}{2}T(r,g)+(k+1)T(r,g)+2\log r+S(r,g),$$

then $T(r,g)\le\frac{4}{3}\log r+S(r,g)$, which is a contradiction.

Case 2.2.2.2.2. Suppose $A_1\zeta^2+B_1\zeta+C_1$ has two distinct zeros α_1, α_2. Noticing that $n\ge k+(m+1)l+1=6$ if $n\ge 7$, by (3.6) and $t\le ml=2$, we get $T(r,g)\le\log r+S(r,g)$, which is a contradiction. If $n=6$, let

$$g(\zeta)=A\frac{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)}{(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)},$$

where $A=\frac{A_1}{A_2}\ne 0$, α_1, α_2, β_1, β_2 are distinct. Set $\psi=\frac{1}{g}$. Then $\left(g^2\right)'-ag^6=-\frac{2\psi'\psi^3+a}{\psi^6}$. It is easy to verify that all the zeros of $\left(g^2\right)'-ag^6$ come from the zeros of $2\psi'\psi^3+a$ and the poles of ψ^6.

Set $\varphi=\frac{\psi^4}{2}$. Then we have $\varphi^{'}=2\psi'\psi^3$ and

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2A^4}\frac{(\zeta-\beta_1)^4(\zeta-\beta_2)^4}{(\zeta-\alpha_1)^4(\zeta-\alpha_2)^4}.$$

By simple calculation, we get

$$\varphi'(\zeta)=\frac{(\zeta-\beta_1)^3(\zeta-\beta_2)^3h_3(\zeta)}{(\zeta-\alpha_1)^5(\zeta-\alpha_2)^5},$$

where h_3 is a polynomial with $\deg h_3\le 2$.

Obviously, $\varphi'+a$ has at least one zero, which is different from α_1 and α_2. Then $\left(g^2\right)'-ag^n$ has at least $3=ml+1$ distinct zeros. This is a contradiction.

Case 2.3. Let $m=2$, $l=1$, $k=1$. We consider two subcases.

Case 2.3.1. Suppose $g\ne 0$. Arguments similar to those applied in Case 2.2.1 yield a contradiction.

Case 2.3.2. Suppose g has at least one zero. Let

$$g(\zeta)=\frac{A_1\zeta^2+B_1\zeta+C_1}{A_2\zeta^2+B_2\zeta+C_2},$$

where $(A_1,A_2)\ne(0,0)$. We consider two subcases.

Case 2.3.2.1. Suppose $A_2\zeta^2+B_2\zeta+C_2$ has at most one distinct zero. As discussed in Case 2.2.2.1, we can get a contradiction.

Case 2.3.2.2. Suppose $A_2\zeta^2+B_2\zeta+C_2$ has two distinct zeros β_1, β_2. We consider two subcases.

Case 2.3.2.2.1. Suppose $A_1\zeta^2+B_1\zeta+C_1$ has one zero. Then as discussed in Case 2.2.2.2.1, we can get a contradiction.

Case 2.3.2.2.2. Suppose $A_1\zeta^2+B_1\zeta+C_1$ has two distinct zeros α_1, α_2. Noticing that $n\ge k+(m+1)l+1=5$ if $n\ge 6$, by (3.6) and $t\le ml=2$, we get

$T(r,g) \leq \log r + S(r,g)$, which is a contradiction. If $n=5$, we set

$$g(\zeta) = A\frac{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)}{(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)},$$

where $A = \frac{A_1}{A_2} \neq 0$, α_1, α_2, β_1, β_2 are distinct. Set $\psi = \frac{1}{g}$. Then $g' - ag^5 = -\frac{\psi'\psi^3 + a}{\psi^5}$. It is clear that $g' - ag^5$ and $\psi'\psi^3 + a$ have the same zeros.

Set $\varphi = \frac{\psi^4}{4}$. Then we have $\varphi' = \psi'\psi^3$ and

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4A^4}\frac{(\zeta-\beta_1)^4(\zeta-\beta_2)^4}{(\zeta-\alpha_1)^4(\zeta-\alpha_2)^4}.$$

By simple calculation, we get

$$\varphi'(\zeta) = \frac{(\zeta-\beta_1)^3(\zeta-\beta_2)^3 h_4(\zeta)}{(\zeta-\alpha_1)^5(\zeta-\alpha_2)^5}, \tag{3.12}$$

where h_4 is a polynomial with deg $h_4 \leq 2$.

By Lemma 2.3, we know that $g' - ag^5$ has at least two distinct zeros, hence $\varphi' + a$ has at least two distinct zeros. Next, we need to prove that $\varphi' + a$ has at least three distinct zeros.

Suppose this is not the case, and $\varphi' + a$ has only two distinct zeros η_1, η_2. Let

$$\varphi'(\zeta) + a = C\frac{(\zeta-\eta_1)^{d_1}(\zeta-\eta_2)^{d_2}}{(\zeta-\alpha_1)^5(\zeta-\alpha_2)^5},$$

where $C \neq 0$ is a constant, and $d_1 + d_2 = 10$.

Then, we have

$$\varphi''(\zeta) = \frac{(\zeta-\eta_1)^{d_1-1}(\zeta-\eta_2)^{d_2-1} h_5(\zeta)}{(\zeta-\alpha_1)^6(\zeta-\alpha_2)^6}, \tag{3.13}$$

where h_5 is a polynomial with $\deg h_5 \leq 2$.

From (3.12) we have

$$\varphi''(\zeta) = \frac{(\zeta-\beta_1)^2(\zeta-\beta_2)^2 h_6(\zeta)}{(\zeta-\alpha_1)^6(\zeta-\alpha_2)^6}, \tag{3.14}$$

where h_6 is a polynomial with $\deg h_6 \leq 5$.

Since α_1,α_2, β_1, β_1, η_1, η_2 are distinct, combining (3.13) and (3.14) we get $d_1 + d_2 - 2 \leq 5$, that is, $d_1 + d_2 \leq 7$. This contradicts that $d_1 + d_2 = 10$.

So, $\varphi' + a$ has at least $3 = ml + 1$ distinct zeros, which is a contradiction.

Thus, the expression $\left(g^l\right)^{(k)} - ag^n$ has at least $ml+1$ distinct zeros, which is a contradiction. This shows that $\mathcal{F}$ is normal at z_0, and hence, $\mathcal{F}$ is normal in D.

Theorem 1.5 is proved.

As for the proof of Theorem 1.6, observe that by (3.6) and the assumption of the theorem, all the zeros and poles of g are of multiplicities at least k. Hence, we have

$$T(r,g) \leq \frac{mlk}{mlk+k-2}\log r + S(r,g).$$

Thus, we deduce that g is a nonconstant rational function satisfying $\deg g \leq 2$ for $k=1$, $ml \geq 2$, and $\deg g = 1$ for $k=2$, $ml \geq 1$. Since the rest of the proof of Theorem 1.6 is similar to that of Theorem 1.5, we here omit the details.

4. Proof of Theorem 1.7

Suppose that $\mathcal{F}$ is not normal in D. Then, by Lemma 2.1, there exists at least one point z_0 such that $\mathcal{F}$ is not normal at z_0. By Lemma 2.2, there exist $f_j \in \mathcal{F}$, $z_j \to z_0$, and $\rho_j \to 0^+$ such that

$$g_j(\zeta) = \rho_j^{\frac{k}{n-l}} f_j(z_j + \rho_j\zeta) \to g(\zeta)$$

spherically uniformly on compact subsets of $\mathbb{C}$, where g is a nonconstant meromorphic function such that all the zeros of g have multiplicities $\geq k$, and all the poles of g are of multiplicity $\geq k+1$, and the order of g is not greater than 2. As in the proof of Theorem 1.5, we can conclude that the expression $\left(g^l\right)^{(k)} - ag^n$ has at most ml distinct zeros. If $mlk = 1$, then we have $m=1$, $l=1$, $k=1$, which contradicts the result of Lemma 2.4. Next, we consider the case where $mlk \geq 2$.

Suppose that $\left(g^l\right)^{(k)} - ag^n$ has t $(\leq ml)$ distinct zeros. Since all the zeros of g have multiplicities $\geq k$, and all the poles of g are of multiplicity $\geq k+1$, as in the proof of Theorem 1.5, we get

$$T(r,g) \leq \frac{mlk}{mlk-1}\log r + S(r,g).$$

Thus, we have that g is a nonconstant rational function satisfying $\deg g \leq 2$ for $mlk = 2$ and $\deg g = 1$ for $mlk > 2$. Next, we discuss two cases.

Case 1. Let $mlk = 2$. Then we have the following subcases: $m=1$, $l=1$, $k=2$; $m=1$, $l=2$, $k=1$ or $m=2$, $l=1$, $k=1$.

Case 1.1. Let $m=1$, $l=1$, $k=2$. By Lemma 2.4 we know that $(g^l)^{(k)} - ag^n$ has at least $2 = ml+1$ distinct zeros, which is a contradiction.

Case 1.2. Let $m=1$, $l=2$, $k=1$. We consider two subcases.

Case 1.2.1. If g has poles, then noticing that all poles of g are of multiplicities at least $k+1=2$ and $\deg g \leq 2$, we can set

$$g(\zeta) = \frac{A_1\zeta^2 + B_1\zeta + C_1}{(\zeta - c)^2}.$$

We consider two subcases.

Case 1.2.1.1. Suppose g has at most one distinct zero. Then $\overline{N}(r, \frac{1}{g}) \leq \frac{1}{2}T(r,g) + S(r,g)$, and by (3.6) and $t \leq ml = 2$, we have

$$(n-l)T(r,g) \leq \frac{1}{2}T(r,g) + \frac{k+1}{2}T(r,g) + 2\log r + S(r,g).$$

Thus, $T(r,g) \leq \frac{4}{3}\log r + S(r,g)$, which is a contradiction.

Case 1.2.1.2. Suppose g has two distinct zeros. Noticing that $n \geq (m+1)l+1 = 5$ if $n \geq 6$, by (3.6) and $t \leq ml = 2$, we get $T(r,g) \leq \log r + S(r,g)$, which is a contradiction. If $n = 5$, then we set

$$g(\zeta) = A_1 \frac{(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \alpha_2)}{(\zeta - c)^2},$$

where $A_1 \neq 0$, α_1, α_2, c are distinct. Set $\psi = \frac{1}{g}$. Then we have $\left(g^2\right)' - ag^5 = -\frac{2\psi'\psi^2 + a}{\psi^5}$. It is easy to verify that all the zeros of $\left(g^2\right)' - ag^5$ come from the zeros of $2\psi'\psi^2 + a$ and the poles of ψ^5.

Set $\varphi = \frac{2\psi^3}{3}$. Then we have $\varphi' = 2\psi'\psi^2$ and

$$\varphi(\zeta) = \frac{2}{3A_1^3} \frac{(\zeta - c)^6}{(\zeta - \alpha_1)^3(\zeta - \alpha_2)^3}.$$

By simple calculation, we get

$$\varphi'(\zeta) = \frac{(\zeta - c)^5 h_7(\zeta)}{(\zeta - \alpha_1)^4(\zeta - \alpha_2)^4},$$

where h_7 is a polynomial with $\deg h_7 \leq 2$.

Obviously, $\varphi' + a$ has at least one zero, which is different from α_1 and α_2. Then $\left(g^2\right)' - ag^n$ has at least $3 = ml + 1$ distinct zeros. This is a contradiction.

Case 1.2.2. Suppose g has no poles, then by (3.6) and $t \leq ml = 2$, we have $T(r,g) \leq \log r + S(r,g)$. Hence $\deg g = 1$. Let $g(\zeta) = A(\zeta - c)$, where $A \neq 0$ is a constant. Then we have

$$\left(g^2\right)'(\zeta) - ag^n(\zeta) = 2A^2(\zeta - c) - aA^n(\zeta - c)^n.$$

Obviously, $\left(g^2\right)' - ag^n$ has at least $n - 1 \geq ml + 2$ distinct zeros, which is a contradiction.

Case 1.3. Let $m = 2$, $l = 1$, $k = 1$. We consider two subcases.

Case 1.3.1. If g has poles, then noticing that all the poles of g are of multiplicities at least $k + 1 = 2$, we set

$$g(\zeta) = \frac{A_1\zeta^2 + B_1\zeta + C_1}{(\zeta - c)^2}.$$

We consider two subcases.

Case 1.3.1.1. Suppose g has at most one distinct zero. Arguing as in Case 1.2.1.1, we can get a contradiction.

Case 1.3.1.2. Suppose g has two distinct zeros α_1, α_2. Noticing that $n \geq (m+1)l+1 = 4$ if $n \geq 5$, by (3.6) and $t \leq ml = 2$, we get $T(r,g) \leq \log r + S(r,g)$, which is a contradiction. If $n = 4$, then we set

$$g(\zeta) = A_1 \frac{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)}{(\zeta-c)^2},$$

where $A_1 \neq 0$, α_1, α_2 and c are distinct. Set $\psi = \frac{1}{g}$. Then we have $g' - ag^4 = -\frac{\psi'\psi^2+a}{\psi^4}$. Obviously, the expressions $g' - ag^4$ and $\psi'\psi^2 + a$ have the same zeros.

Since $n \geq (m+1)l+1 = 4$, by Lemma 2.3 we see that $g' - ag^4$ has at least two distinct zeros. Thus, $\psi'\psi^2 + a$ has at least two distinct zeros.

Next, we need to prove that $\psi'\psi^2 + a$ has at least three distinct zeros.

Suppose that this is not the case, and $\psi'\psi^2 + a$ has only two distinct zeros η_1, η_2. Set $\varphi = \frac{\psi^3}{3}$. Then we have $\varphi' = \psi'\psi^2$ and

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{3A_1^3} \frac{(\zeta-c)^6}{(\zeta-\alpha_1)^3(\zeta-\alpha_2)^3}.$$

By simple calculation, we get

$$\varphi'(\zeta) = \frac{(\zeta-c)^5 h_8(\zeta)}{(\zeta-\alpha_1)^4(\zeta-\alpha_2)^4}, \tag{4.1}$$

where h_8 is a polynomial with deg $h_8 \leq 2$.

Since $\varphi' = \psi'\psi^2$, we know that $\varphi' + a$ has two distinct zeros. Let

$$\varphi'(\zeta) + a = C\frac{(\zeta-\eta_1)^{d_1}(\zeta-\eta_2)^{d_1}}{(\zeta-\alpha_1)^4(\zeta-\alpha_2)^4},$$

where $C \neq 0$ is a constant, and $d_1 + d_2 = 8$. Then we have

$$\varphi''(\zeta) = \frac{(\zeta-\eta_1)^{d_1-1}(\zeta-\eta_2)^{d_1-1}h_9(\zeta)}{(\zeta-\alpha_1)^5(\zeta-\alpha_2)^5}, \tag{4.2}$$

where h_9 is a polynomial with $\deg h_9 \leq 2$.

From (4.1) we get

$$\varphi''(\zeta) = \frac{(\zeta-c)^4 h_{10}(\zeta)}{(\zeta-\alpha_1)^5(\zeta-\alpha_2)^5}, \tag{4.3}$$

where h_{10} is a polynomial with $\deg h_{10} \leq 4$.

Since α_1, α_2, η_1, η_2, c are distinct, combining (4.2) and (4.3), we get $d_1+d_2-2 \leq 4$, that is, $d_1 + d_2 \leq 6$, which contradicts the fact that $d_1 + d_2 = 8$.

Case 1.3.2. If g has no poles, then arguing as in Case 1.2.2, we can get a contradiction.

Case 2. Let $mlk > 2$, $\deg g = 1$.

Case 2.1. If g has at least one pole, then noticing that all the poles of g are of multiplicities at least $k+1 = 2$, we get $\deg g \geq 2$, which is a contradiction.

Case 2.2. If g has no poles, then $k=1$ and $\deg g=1$. Let $g(\zeta)=A(\zeta-c)$, where $A\neq 0$ is a constant. Then we have

$$\left(g^l\right)'(\zeta)-ag^n(\zeta)=lA^l(\zeta-c)^{l-1}-aA^n(\zeta-c)^n,$$

implying that $\left(g^l\right)'-ag^n$ has at least $n-l+1\geq ml+2$ distinct zeros, which is a contradiction. Thus, the expression $\left(g^l\right)^{(k)}-ag^n$ has at least $ml+1$ distinct zeros, which is a contradiction. This shows that $\mathcal{F}$ is normal at z_0, and hence, $\mathcal{F}$ is normal in D. Theorem 1.7 is proved.

Список литературы

[1] W. K. Hayman, Meromorphic Functions, Oxford, Clarendon Press (1964).
[2] J. Schiff, Normal Families, Berlin, Springer-Verlag (1993).
[3] L. Yang, Value Distribution Theory, Berlin, Springer-Verlag (1993).
[4] W. K. Hayman, "Picard values of meromorphic functions and their derivatives", Ann. Math., **70** (2), 9 – 42 (1959).
[5] E. Mues, "Über ein problem von Hayman", Math. Z., **164** (3), 239 – 259 (1979).
[6] W. K. Hayman, Research Problems of Function Theory, London, Athlone Press (1967).
[7] Y. S. Ye, "A new criterion and its application", Chin. Ann. Math. Ser. A (Supplement), **12**, 44 – 49 (1991).
[8] X. C. Pang, "Normality conditions for differential polynomials", Chin. Sci. Bull., **33**, 1690 – 1693 (1988).
[9] W. Schwick, "Normality criteria for families of meromorphic functions", J. d'Anal. Math., **52**, 241 – 289 (1989).
[10] Y. Xu, "Normal families of meromorphic function", Chin. J. Math., **21**, 381 – 386 (2001).
[11] B. M. Deng, H. L. Qiu, D. Liu, M. L. Fang, "Hayman's question on normal families concerning zero numbers", Complex Var. Elliptic Equ., **59**(5), 616 – 630 (2014).
[12] L. Zalcman, "Normal families: new perspectives", Bull. Amer. Math. Soc., **35**(3), 215 – 230 (1998).
[13] Q. C. Zhang, "Normal families of meromorphic functions concerning shared values", J. Math. Anal. Appl., **338**, 545 – 551 (2008).
[14] W. Chen, W. J. Yuan, H. G. Tian, "Normal families of meromorphic functions concerning higher derivative and shared values", Abstr. Appl. Anal., **2013**, Article ID 368321, 8 pages (2013).

Поступила 25 мая 2018

После доработки 10 апреля 2019

Принята к публикации 25 апреля 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 88 – 92

SOLUBILITY OF FINITE GENERALIZED FROBENIUS GROUPS WITH THE KERNEL OF ODD INDEX

X. B. WEI, W. B. GUO, D. V. LYTKINA, V. D. MAZUROV, A. KH. ZHURTOV

Anhui Jianzhu University, P.R.C., University of Science and Technology of China, P.R.C. [1]
Siberian state university of telecommunications and information sceinces, Russia
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Russia
Kabardino-Balkarian state university, Russia
E-mails: *wxb1289@126.com*; *wbguo@ustc.edu.cn*; *daria.lytkin@gmail.com*
mazurov@math.nsc.ru; *zhurtov_a@mail.ru*

Abstract. A finite group G is said to be a *generalized Frobenius group with kernel* F, if F is a proper nontrivial normal subgroup of G and for every element Fx of prime order of the quotient group G/F the coset Fx of the group G over F has only p-elements for some prime p depending on x. This article considers generalized Frobenius groups with insoluble kernel. We prove that a quotient group of a generalized Frobenius group over its insoluble kernel is a 2-group.

MSC2010 numbers: 20D05.
Keywords: generalized Frobenius group; Camina pair.

1. Introduction

A finite group G is said to be a *generalized Frobenius group with kernel* F, if F is a proper nontrivial normal subgroup of G and for every element Fx of prime order of the quotient group G/F the coset Fx of the group G over F has only p-elements for some prime p depending on x. Every Frobenius group and every Camina pair (see [1]) are generalized Frobenius groups. In [2], generalized Frobenius groups are described that coincide with their derived subgroup, and in particular it is shown that the kernels of such groups are nilpotent.

This article considers generalized Frobenius groups with insoluble kernel. We prove the following result.

Theorem 1.1. *If G is a generalized Frobenius group with an insoluble kernel F, then G/F is a 2-group.*

[1]The work of the first two authors is supported by NNSF of China (grant 11771409), the work of the third author is supported by Mathematical Center in Akademgorodok; the work of the fourth and fifth authors is supported by RFBR (grant 19-01-00507).

Note that one of the subgroups of index 2 in the automorphism group of the alternating group A_6 is a generalized Frobenius group with insoluble kernel, and so Theorem 1.1 cannot be improved.

Theorem 1.1 easily follows from the following proposition.

Proposition 1.1. *Suppose that F is a proper nontrivial normal subgroup of a group G and $G = F\langle t\rangle$ for some $t \in G$. If for every element $f \in F$ the element ft is a primary element of odd order, then F is a soluble group.*

Recall that an element is said to be *primary*, if its order is a prime power.

2. Preliminaries

In this paper, we are keeping with the notation of the Atlas of Finite groups [3].

Lemma 2.1. *Suppose that G is one of the simple groups from the following list:*

$L_m(q)$, $m \geqslant 4$; $L_3(q)$, $q \geqslant 4$;
$S_m(q)$, $m \geqslant 4$;
$U_m(q)$, $m \geqslant 5$;
$O_m^{\varepsilon}(q)$, $m \geqslant 7$;
$F_4(q)$; ${}^2F_4(q)$, ${}^2F_4(2)'$;
$E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$;
${}^3D_4(q)$.

Let P be a proper subgroup of minimal index in G. Then P is insoluble, and G has at most two conjugacy classes of subgroups isomorphic to P.

Proof. Follows from the description of proper subgroups of minimal indices of simple groups (see [4] – [8]). □

Lemma 2.2. *(*[9, Proposition 1.10.3(1)]*) Let G be one of the groups $L_n(q)$, $U_n(q)$, $S_n(q)$ or $O_n^{\varepsilon}(q)$, $n \geqslant 2$. In the last case, it is assumed that q is odd if $G = O_n(q)$, where n is odd. If G is soluble, then G is one of the following groups: $L_2(2)$, $L_2(3)$, $U_3(2)$, $O_2^+(q)$, $O_4^+(2)$, $O_4^+(3)$, $O_2^-(q)$.*

3. Proof of Proposition 1.1

Let G be a minimal example contradicting the conclusion of the proposition, and let p^r be the order of t for a prime p. The proof of Proposition 1.1 consists of several lemmas.

Lemma 3.1. *Every soluble normal subgroup of F is trivial.*

Proof. Let N be the largest normal soluble subgroup of F. Then $N \neq F$ is a characteristic subgroup of F, and thus it is normal in G. Suppose that $\overline{G} = G/N$, $\overline{F} = F/N$, $\bar{t} = Nt \in \overline{G}$. Since $\overline{ft} = Nft$ and ft is a primary element for every $f \in F$, it follows that $\overline{f}\overline{t}$ is a primary element for every $\overline{f} \in \overline{F}$. Therefore $\overline{G}$, $\overline{F}$ and $\bar{t}$ satisfy the assumption of the lemma, and hence $N = 1$. □

Lemma 3.2. *$G = M\langle t\rangle$ for a minimal normal subgroup M of G that lies in F. Besides, M is a direct product of isomorphic simple nonabelian subgroups $M_1, \dots, M_s$ for the smallest natural number s, such that $M_1^{t^s} = M_1$, $M_{i-1}^t = M_i$, where $i = 2, \dots, s$, $M_s^t = M_1$. Furthermore, $s = p^n$ for some natural n.*

Proof. It is clear that $M\langle t\rangle$ satisfies Lemma 3.1. Due to minimality of $G = M\langle t\rangle$, we have $M = M_1 \times \cdots \times M_s$ for nonabelian simple groups $M_1, \dots, M_s$, each of which is normal in M. Since M is a minimal normal subgroup in G, the subgroup $\langle t\rangle$ acts transitively on the set $\{M_1, \dots, M_s\}$ which can be enumerated as it is said in the conclusion of the lemma. □

Lemma 3.3. *In the notation of Lemma 3.2, we have $M = M_1$.*

Proof. The conclusion is trivial for $s = 1$. Suppose that $s > 1$. It is enough to show that $M_1\langle t^s\rangle$ satisfies the assumption of Proposition 1.1. Let $m \in M_1$. If $(tm)^s = 1$, then

$$y = xx^{tm}x^{(tm)^2} \dots x^{(tm)^{s-1}} \in C_M(tm)$$

for every $x \in M$, since $x^{(tm)^i} \in M_i$ when $i = 0, \dots, s-1$, and hence the elements of the set $\{x, x^{tm}, \dots, x^{(tm)^{s-1}}\}$ commute. Therefore for nontrivial p'-element $x \in M_1$ the element y is a nontrivial p'-element, and tmy is not a p-element contrary to the assumption. So $(tm)^s$ is a nontrivial p-element for every $m \in M_1$. Next, we have

$$\begin{aligned}(tm)^s &= \underbrace{tm\,tm\,tm \cdots tm}_{s \text{ times}} = t^s \cdot t^{1-s}mt^{s-1} \cdot t^{2-s}mt^{s-2} \cdot t^{s-3}m \cdots tm = \\ &= t^s m^{t^{(s-1)}} m^{t^{(s-2)}} \cdots m^t m = t^s m x,\end{aligned}$$

where $x \in N = M_2 \times \cdots \times M_s$, $[x, t^s m] = 1$.

Obviously, $N \cap M_1\langle t^s m\rangle = 1$, and hence $t^s m$ is the image of $(tm)^s$ under the natural isomorphism of $M\langle (tm)^s\rangle/N$ on $M_1\langle t^s m\rangle$. Since $(tm)^s$ is a nontrivial p-element, it follows that $t^s m$ is also a nontrivial p-element, and $M_1\langle t^s m\rangle$ satisfies the assumption of Proposition 1.1 with M_1 for F and t^s for t.

Due to minimality, we conclude that $G = M_1\langle t^s\rangle$, and the result follows. □

Lemma 3.4. *If P is a proper insoluble subgroup of M, then the number of conjugacy classes of subgroups isomorphic to P is at least three.*

Proof. Suppose the contrary. We can assume that $G = M\langle t\rangle \leqslant \mathrm{Aut}(M)$. Let P be a proper insoluble subgroup of M and $C_1, \ldots, C_r$ be pairwise distinct classes of subgroups isomorphic to P and conjugate in M. By assumption $r \leqslant 2$. The group $\mathrm{Aut}(M)$ acts naturally on $\{C_1, \ldots, C_r\}$, therefore the stabilizer of C_1 in $\mathrm{Aut}(M)$ contains G. This means that if $P \in C_1$, then $MN_G(P) = G$, and therefore the subgroup $(N_G(P) \cap M) \cdot \langle t_1\rangle$ for $t = mt_1$, $m \in M$, $t_1 \in N_G(P)$ satisfies the assumption of Proposition 1.1 with $N_G(P) \cap M$ for F and t_1 for t. Indeed, if $m_1 \in N_G(P) \cap M$, then $m_1 t_1 = m_1 m^{-1} \in M$. Thus we get a contradiction with minimality of G, and the result follows. □

Lemma 3.5. *M is isomorphic to one of the following groups:*

$$L_2(q), q \geqslant 4; Sz(2^{2n+1}), n \geqslant 1; R(q) = {}^2G_2(q), q = 3^l, l > 1; L_3(3); U_3(3).$$

Proof. By the assumption of Proposition 1.1, the group of outer automorphisms of M cannot be a 2-group, that is, M is a Lie type group over some finite field R. By Lemmas 3.4 and 2.1 the group M has a projective representation of degree at most 6 over R. Now tables in [9] and Lemma 2.2 show that the lemma is true. □

Lemma 3.6. *The group G does not exist.*

Proof. By Lemmas 3.2 and 3.3, we have $G = M\langle t\rangle$, where M is one of the groups listed in Lemma 3.5. Obviously, $G \leqslant \mathrm{Aut}(M)$. Since the groups of outer automorphisms of $L_3(3)$ and $U_3(3)$ are 2-groups, then M is isomorphic to one of the groups $L_2(q)$, $q \geqslant 4$; $Sz\left(2^{2n+1}\right)$, $n \geqslant 1$ or $R\left(3^l\right)$, $l > 1$. In each of these cases we can assume that t induces in M a field automorphism. Therefore the centralizer of t in M is not a p-group in contradiction with the assumption of Proposition 1.1, and the result follows. □

Proof of Proposition 1.1. The result follows from Lemmas 3.1 - 3.6. □

4. Proof of Theorem 1.1

Suppose that G is a counterexample to Theorem 1.1. Then G/F has an element Ft of prime odd order, and $F\langle t\rangle$ contradicts the conclusion of Proposition 1.1.

Список литературы

[1] M. L. Lewis, Camina groups, Camina pairs, and generalization, N. S. N. Sastry and M. K. Yadav (eds.), Group theory and computation. Springer Nature Singapore Pte Ltd, 41 – 174 (2018).

[2] X. B. Wei, A. Kh. Zhurtov, D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, “Finite groups close to Frobenius groups”, accetpted by Sib. Math. J.

[3] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of Finite Groups, Clarendon Press. Oxford (1985).

[4] V. D. Mazurov, “Minimal permutation representation of finite simple classical groups”, Special linear, symplectic, and unitary groups, Algebra and Logic, **32**:3, 142 – 153 (1993).
[5] A. V. Vasil'ev, V. D. Mazurov, “Minimal permutation representations of finite simple orthogonal groups”, Algebra and Logic, **33**:6, 337 – 350 (1994).
[6] A. V. Vasil'ev, “Minimal permutation representations of finite simple exceptional groups of types G_2 and F_4”, Algebra and Logic, **35**:6, 371 – 383 (1996).
[7] A. V. Vasil'ev, “Minimal permutation representations of finite simple exceptional groups of types E_6, E_7 and E_8”, Algebra and Logic, **36**:5, 302 – 310 (1997).
[8] A. V. Vasil'ev, “Minimal permutation representations of finite simple exceptional twisted groups”, Algebra and Logic, **37**:1, 9 – 20 (1998).
[9] J. N. Bray, D. F. Holt, C. M. Roney-Dougal, The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., Cambridge University Press (2013).

Поступила 9 сентября 2019

После доработки 20 октября 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 55, номер 1, 2020

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 55, No. 1, 2020

Contents