ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2019

Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 3 – 10

A NOTE ON THE GENERALIZED CESÁRO MEANS OF TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES

T. AKHOBADZE, SH. ZVIADADZE

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Georgia
E-mails: *takhoba@gmail.com; sh.zviadadze@gmail.com*

Abstract. Different generalized Cesáro summation methods are compared with each other. Analogous of Hardy's theorem, concerning the order of the partial sums of trigonometric Fourier series, for generalized Cesáro means are obtained.

MSC2010 numbers: 40G05, 42A10, 42A16, 42A24.
Keywords: trigonometric Fourier series; generalized Cesáro summability; modulus of continuity.

1. Introduction

Let f be a 2π-periodic locally integrable function and

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

be its Fourier coefficients, and let

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.1}$$

be the partial sums of the Fourier series of a function f with respect to the trigonometric system.

Let (α_n) $(\alpha_n > -1)$ and (S_n), $n \in \mathbb{N}$, be sequences of real numbers, and let

$$\sigma_n^{\alpha_n} \equiv \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha_n-1} S_\nu / A_n^{\alpha_n}, \tag{1.2}$$

where

$$A_k^{\alpha_n} = (\alpha_n+1)(\alpha_n+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+k)/k!. \tag{1.3}$$

It is clear that $\sigma_n^0 = S_n$. If (α_n) is a constant sequence ($\alpha_n = \alpha,\ n \in \mathbb{N}$), then $\sigma_n^{\alpha_n}$ coincide with the usual Cesáro σ_n^{α}-means (see [18, Chapter III]). If in (1.2) instead of S_ν we substitute $S_\nu(f,x)$ (see (1.1)), then the corresponding means $\sigma_n^{\alpha_n}$ we will denote by $\sigma_n^{\alpha_n}(f,x)$.

These means, called generalized Cesáro (C,α_n)-means, were studied by Kaplan [6], where the author compared the (C,α_n) and (C,α) summability methods, and obtained necessary and sufficient conditions, in terms of the sequence (α_n), for the inclusion $(C,\alpha_n)\subset(C,\alpha)$, and sufficient conditions for the inclusion $(C,\alpha)\subset(C,\alpha_n)$. Later on Akhobadze [1] – [4] and Tetunashvili [11] – [16] have investigated problems concerning (C,α_n) summability of trigonometric Fourier series. In papers [1] – [4] the behavior of generalized Cesáro (C,α_n)-means ($\alpha_n\in(-1;d), d>0$) of trigonometric Fourier series of functions from various classes of continuous functions were studied, and the sharpness of the obtained results were shown. Lebesgue [8] proved that every function from $L[0;2\pi]$ has a Fourier series the sequence of $(C,1)$-means of which is a.e. convergent, and then M. Riesz [10] generalized this result for (C,α)-means $(\alpha>0)$.

Observe that if $\alpha_n\to 0+$, then the behavior of (C,α_n)-means for Fourier series of integrable functions is different in the sense of pointwise convergence.

In [16], Tetunashvili proved the following theorem.

Theorem 1.1. *Let the sequence (α_n) be such that for some positive number m we have*

$$\alpha_n\le\frac{c}{\ln n},$$

where $0\le c<\ln 2$ and $n>m$. Then for any series with partial sums S_n satisfying the condition:

$$\limsup_{n\to+\infty}|S_n|=+\infty,$$

the following is true:

$$\limsup_{n\to+\infty}|\sigma_n^{\alpha_n}|=+\infty.$$

Throughout the paper the letter c is used to denote positive constants depending only on the indicated parameters, the value of which can vary from line to line.

If the sequence (α_n) satisfies the condition of Theorem 1.1, then in view of Kolmogorov's well known result (see, e.g., [7], [5, Chapter V]), we can conclude that there exists an integrable function f_0 such that the sequence $\sigma_n^{\alpha_n}(f_0,x)$ diverges almost everywhere. On the other hand, in [13] Tetunashvili proved the following theorem.

Theorem 1.2. *For any function $f\in L(0;2\pi)$ and a number $\varepsilon>0$, there exist a sequence of numbers $\alpha_n\downarrow 0$ and a set $F\subset[0;2\pi]$ with $|F|>2\pi-\varepsilon$, such that*

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma_n^{\alpha_n}(f,x)=f(x)$$

at every point $x\in F$, where $|F|$ denotes the Lebesgue measure of the set F.

Observe that for the function constructed by Kolmogorov the conclusion of Theorem 1.2 is true. It is clear that in this case the sequence (α_n) does not satisfy the condition of Theorem 1.1.

The theorems that follow give important information on the pointwise convergence of (C,α_n)-means of trigonometric Fourier series in the case where $\alpha_n \to 0+$.

Theorem 1.3. *Let $0 \le \alpha_n \le \beta_n$. Then the (C,α_n) summability of a number sequence (S_n) to S implies the (C,β_n) summability of (S_n) to S.*

Theorem 1.4. *Let $f \in L(0;2\pi)$ and $\alpha_n \to 0+$ as $n \to +\infty$. Then for almost every $x \in (0;2\pi)$ we have*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \sigma_n^{\alpha_n}(f,x) = 0.$$

2. Proof of theorems 1.3 and 1.4

Proof of Theorem 1.3. To prove it we use the scheme proposed by Kaplan [6]. Let

$$\sigma_n^{\alpha_n} = \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} S_n^{\alpha_n} = \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-1} S_k.$$

We shall express $\sigma_n^{\beta_n}$ by numbers $\sigma_n^{\alpha_n}$ as their regular mean. For all $k \in \{0,1,...,n\}$ we examine the sums (see [18, Chapter III, (1.10)]):

$$S_k^{\alpha_k} = S_k^{\alpha_k-\beta_n+\beta_n} = \sum_{j=0}^{k} A_{k-j}^{\alpha_k-\beta_n-1} S_j^{\beta_n}.$$

Let us consider these expressions as a system of linear equations with respect to the variables $S_k^{\beta_n},\ k \in \{0,1,...,n\}$. Taking into account that $A_0^{\alpha_k-\beta_n-1} = 1$, we can easily obtain that the determinant of this system is equal to 1. By Cramer's rule we have

$$S_n^{\beta_n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & S_0^{\alpha_0} \\ A_1^{\alpha_1-\beta_n-1} & 1 & \dots & 0 & S_1^{\alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\beta_n-1} & A_{n-2}^{\alpha_{n-1}-\beta_n-1} & \dots & 1 & S_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \\ A_n^{\alpha_n-\beta_n-1} & A_{n-1}^{\alpha_n-\beta_n-1} & \dots & A_1^{\alpha_n-\beta_n-1} & S_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Expanding this determinant by the last n-th column, we get

$$S_n^{\beta_n} = \sum_{k=0}^{n} A_{k,n} S_k^{\alpha_k},$$

where $A_{k,n}$ is the cofactor of the element $S_k^{\alpha_k}$, $k\in\{0,1,...,n\}$. It is easy to see that

$$\sigma_n^{\beta_n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{k,n}\cdot A_k^{\alpha_k}}{A_n^{\beta_n}}\sigma_k^{\alpha_k}.$$

Therefore, denoting

$$a_{nk}:=A_{k,n}\cdot A_k^{\alpha_k}/A_n^{\beta_n},$$

we get

$$\sigma_n^{\beta_n}=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\sigma_k^{\alpha_k}. \tag{2.1}$$

Now we prove that matrix (a_{nk}) is regular.

The following equalities are well known (see, e.g., [18, Chapter III, (1.10)]):

$$A_k^{\alpha_k}=\sum_{j=0}^{k}A_{k-j}^{\alpha_k-\beta_n-1}A_j^{\beta_n},\quad k\in\{0,1,...,n\}.$$

Observe that these equalities can be considered as a system of linear equations with respect to variables $A_j^{\beta_n}$. Then arguing analogously as above, we get

$$A_n^{\beta_n}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & A_0^{\alpha_0}\\ A_1^{\alpha_1-\beta_n-1} & 1 & \dots & 0 & A_1^{\alpha_1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\beta_n-1} & A_{n-2}^{\alpha_{n-1}-\beta_n-1} & \dots & 1 & A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\\ A_n^{\alpha_n-\beta_n-1} & A_{n-1}^{\alpha_n-\beta_n-1} & \dots & A_1^{\alpha_n-\beta_n-1} & A_n^{\alpha_n}\end{vmatrix}.$$

Expanding this determinant by the last n-th column, we obtain

$$A_n^{\beta_n}=\sum_{k=0}^{n}A_{k,n}\cdot A_k^{\alpha_k}.$$

Let $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}$. Then by the previous equality we have

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{k,n}\cdot A_k^{\alpha_k}}{A_n^{\beta_n}}=1. \tag{2.2}$$

Thus, the first condition of regularity is fulfilled.

Next, we consider the cofactors $A_{k,n}$ ($k\in\{0,1,...,n\}$). It is clear that $A_{n,n}=1$. Now we estimate the cofactor $A_{n-1,n}$ in the determinant $A_n^{\beta_n}$. To this end, in the determinant $A_n^{\beta_n}$, we rewrite the last n-th column by the $(n-1)$-th column, and observe that the obtained determinant is equal to zero. Then expanding it by the last column, we get $0=A_1^{\alpha_n-\beta_n-1}\cdot A_{n,n}+A_{n-1,n}$. Since $\alpha_n\le\beta_n$ we have $A_1^{\alpha_n-\beta_n-1}\le 0$, and hence, taking into account that $A_{n,n} = 1$, from the last equality we obtain $A_{n-1,n} \geq 0$. Analogously, we can show that the cofactor $A_{n-2,n}$ is nonnegative. In particular, in the given matrix the last n-th column we can rewrite by the $(n-2)$-th column. Then the value of the corresponding determinant will be 0. If we expand the last determinant by the last column, we obtain

$$0 = A_2^{\alpha_n - \beta_n - 1} \cdot A_{n,n} + A_1^{\alpha_{n-1} - \beta_n - 1} \cdot A_{n-1,n} + A_{n-2,n}.$$

Therefore, $A_{n-2,n} \geq 0$. Repeating the above reasonings for each cofactor $A_{k,n}$ and taking into account that $A_{k+1,n}, ..., A_{n,n} \geq 0$, we get $A_{k,n} \geq 0$, $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Thus, we have

$$N_n = \sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| = A_n = 1, \qquad n \in \{0, 1, ...\}.$$

It is clear that

$$0 \leq a_{nk} \leq 1, \ \ k \in \{0, 1, ..., n\}. \tag{2.3}$$

Finally, we show that $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$. Let $\alpha'_n = \alpha_n - 1/2$ and $\beta'_n = \beta_n - 1/2$. It is clear that $\alpha'_k - \beta'_n = \alpha_k - \beta_n$, $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Therefore, the above considered cofactors depend only on the difference $\alpha_k - \beta_n$, and hence, using the above arguments applied to these new sequences, we get

$$0 \leq a'_{nk} = A_{k,n} \cdot A_k^{\alpha'_k} / A_n^{\beta'_n} \leq 1,$$

implying that $A_{k,n} \leq A_n^{\beta'_n} / A_k^{\alpha'_k}$. Using this estimation for the inequalities $0 \leq a_{nk} \leq 1$, $k \in \{0, 1, ..., n\}$, and taking into account that for fixed k, the numbers $A_k^{\alpha_k}$ and $A_k^{\alpha'_k}$ are fixed, we get

$$0 \leq a_{nk} \leq A_k^{\alpha_k} \cdot A_n^{\beta'_n} / (A_n^{\beta_n} \cdot A_k^{\alpha'_k}) = O(n^{\beta'_n} / n^{\beta_n}) = O(1/\sqrt{n}) \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Thus, we have proved that the matrix (a_{nk}) is regular. □

Proof of Theorem 1.4. We have (see [18, Chap. III, (5.4)])

$$\sigma_n^{\alpha_n}(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \chi_x(t) K_n^{\alpha_n}(t) dt + f(x),$$

where

$$\chi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

In what follows we will need the following estimates for the kernel $K_n^{\alpha_n}(t)$ (see [18, Chapter III] and [2, Lemmas 1 and 2]):

$$|K_n^{\alpha_n}(t)| \leq n + 1, \quad |K_n^{\alpha_n}(t)| \leq \frac{c}{n^{\alpha_n} t^{1+\alpha_n}}.$$

Since for almost all Lebesgue point x the value of $|f(x)|$ is finite, we have $\alpha_n f(x) \to 0$ as $n \to +\infty$. On the other hand, for such point x, we can write

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \chi_x(t) K_n^{\alpha_n}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n} \chi_x(t) K_n^{\alpha_n}(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \chi_x(t) K_n^{\alpha_n}(t)dt =$$

$$:= A_1(n,x) + A_2(n,x).$$

Besides, for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon)$ such that for all δ $(0 < \delta < \delta(\varepsilon))$

$$\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} |\chi_x(t)|dt < \varepsilon.$$

Let n_δ be a natural number for which $1/n_\delta < \delta < \delta(\varepsilon)$. Then, for $n > n_\delta$ we have

$$|A_1(n,x)| \le \frac{n+1}{2\pi}\int_0^{1/n} |\chi_x(t)|dt < \varepsilon.$$

On the other hand, using integration by parts, we get

$$|A_2(n,x)| \le \frac{c}{n^{\alpha_n}}\int_{1/n}^{\pi} |\chi_x(t)| t^{-1-\alpha_n} dt =$$

$$= \frac{c}{n^{\alpha_n}}\, t^{-1-\alpha_n}\int_0^{t} |\chi_x(u)|du\Big|_{1/n}^{\pi} + \frac{c(1+\alpha_n)}{n^{\alpha_n}}\int_{1/n}^{\pi} t^{-2-\alpha_n}\int_0^{t} |\chi_x(u)|dudt =$$

$$=: B_1(n,x) + B_2(n,x).$$

It is easy to see that

$$B_1(n,x) = O_x(1).$$

For $B_2(n,x)$ we have the estimate

$$B_2(n,x) \le \frac{c}{n^{\alpha_n}}\left(\int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) t^{-2-\alpha_n}\int_0^{t} |\chi_x(u)|dudt =: F_1(n,x) + F_2(n,x).$$

Next, the functions $F_1(n,x)$ and $F_2(n,x)$ can be estimated as follows:

$$F_1(n,x) = \frac{c}{n^{\alpha_n}}\int_{1/n}^{\delta} t^{-1-\alpha_n}\frac{1}{t}\int_0^{t} |\chi_x(u)|dudt \le \frac{c\varepsilon}{n^{\alpha_n}}\int_{1/n}^{\delta} t^{-1-\alpha_n}dt =$$

$$= \frac{c\varepsilon}{n^{\alpha_n}}\cdot\frac{1}{\alpha_n}\cdot\left(n^{\alpha_n} - \frac{1}{\delta^{\alpha_n}}\right) < \frac{c\varepsilon}{\alpha_n}$$

and

$$F_2(n,x) = \frac{c}{n^{\alpha_n}}\int_{\delta}^{\pi} t^{-2-\alpha_n}\int_0^{t} |\chi_x(u)|dudt \le$$

$$\le \frac{c}{n^{\alpha_n}\delta^{2+\alpha_n}}\int_{\delta}^{\pi}\int_0^{t} |\chi_x(u)|dudt = O_{x,\delta}\left(\frac{1}{n^{\alpha_n}}\right).$$

Therefore, $A_2(n,x) = o_x(1/\alpha_n)$, $n \to +\infty$. □

3. Appendix. The case of continuous functions

Let $C([0,2\pi])$ denote the space of 2π-periodic continuous functions with norm $||f||_{C([0,2\pi])} = \max\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$. If $f \in C([0,2\pi])$, then

$$\omega(\delta, f) = \max\{|f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| \le \delta,\ x_1, x_2 \in [0,2\pi]\}$$

is called the modulus of continuity of the function f. For a given modulus of continuity ω, by H^ω we denote the class of functions $f \in C([0,2\pi])$ for which (see [9]):

$$\omega(\delta, f) \le \omega(\delta),\ \delta \in [0,2\pi).$$

If the sequence (α_n) satisfies the condition of Theorem 1.1, then there exists a continuous function f_0 such that $\sigma_n^{\alpha_n}(f_0, x)$ diverges at a point. On the other hand, Tetunashvili [12] showed that for any continuous function there exists a sequence of numbers $\alpha_n \downarrow 0$, $n \to +\infty$, such that the (C, α_n)-means of partial sums of trigonometric Fourier series of this function converge at every point. Then, Akhobadze [2] improved this result by proving the following theorem.

Theorem 3.1. *If $f \in H^\omega$ and $\alpha_n \in (0,1]$, $n = 3, 4, \ldots$, then*

$$||\sigma_n^{\alpha_n}(\cdot, f) - f(\cdot)||_C \le c \cdot \max\left\{ \frac{n^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n \cdot n^{\alpha_n}} \omega(1/n), \frac{\alpha_n}{n} \int\limits_{\pi/n}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \right\}, \tag{3.1}$$

where c is an absolute constant.

From the last statement we can easily conclude that for any modulus of continuity ω there exists a positive sequence $\alpha_n = o(1)$ as $n \to +\infty$, such that for any function $f \in H^\omega$ the generalized Cesáro means $\sigma_n^{\alpha_n}(f, x)$ converge uniformly. Indeed, every continuous function $f \in H^\omega$, where instead of ω can be considered the modulus of continuity of f. If α_n tends to zero sufficiently "slowly", then it can easily be proved that

$$\frac{n^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n n^{\alpha_n}} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \to 0, \quad n \to +\infty.$$

On the other hand, we have (see [17, p. 91, (2;8.82)]):

$$\frac{\alpha_n}{n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} \le c_\omega \cdot \alpha_n \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln \frac{1}{\omega(1/n)} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

The last reasoning can be completed as follows. It is well known (see [18, Chapter VIII, Theorem (2.1)]) that the condition $\omega(1/n) = O(1/\ln n)$ does not imply convergence of $S_n(f, x)$ for all continuous functions from H^ω, but for the generalized Cesáro means we have different result.

Theorem 3.2. *Let $\omega(1/n) = O(1/\ln n)$ and $\alpha_n \to 0+$ as $n \to +\infty$, and let*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \cdot \ln n = +\infty,$$

then $\sigma_n^{\alpha_n}(f,x)$ uniformly converge to f for every function $f \in H^\omega$.

Список литературы

[1] T. Akhobadze, "On generalized Cesáro summability of trigonometric Fourier series", Bull. Georgian Acad. Sci., **170**, no. 1, 23 – 24 (2004).

[2] T. Akhobadze, "On the convergence of generalized Cesáro means of trigonometric Fourier series. I", Acta Math. Hungar., (1-2) **115**, 59 – 78 (2007).

[3] T. Akhobadze, "On the convergence of generalized Cesáro means of trigonometric Fourier series. II", Acta Math. Hungar., (1-2) **115**, 79 – 100 (2007).

[4] T. Akhobadze, "On a theorem of M. Satô", Acta Math. Hungar., (3) **130**, 286 – 308 (2011).

[5] N. Bary, A Treatise on Trigonometric Series, Pergamon Press, Vol. 1 (1964).

[6] I. Kaplan, "Cesáro means of variable order [in Russian]", Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **18**, no. 5, 62 – 73 (1960).

[7] A. Kolmogorov, "Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout", Fundamenta Mathematicae, **4**, 324 – 328 (1923).

[8] H. Lebesgue, "Recherches sur la convergence des series de Fourier", Math. Ann., **61**, 251 – 280 (1905).

[9] S. M. Nikol'skii, "The Fourier series with the given modulus of continuity [in Russian]", Dokladi Akad. Nauk SSSR, **53**, 191 – 197 (1946).

[10] M. Riesz, "Sur la sommation des series de Fourier", Acta Sci. Math. (Szeged), I, 104 – 113 (1923).

[11] Sh. Tetunashvili, "On iterated summability of trigonometric Fourier series", Proc. A. Razmadze Math. Inst. **139**, 142 – 144 (2005).

[12] Sh. Tetunashvili, "On the summability of Fourier trigonometric series of variable order", Proc. A. Razmadze Math. Inst. **145**, 130 – 131 (2007).

[13] Sh. Tetunashvili, "On the summability method defined by matrix of functions", Proc. A. Razmadze Math. Inst. **148**, 141 – 145 (2008).

[14] Sh. Tetunashvili, "On the summability method depending on a parameter", Proc. A. Razmadze Math. Inst. **150**, 150 – 152 (2009).

[15] Sh. Tetunashvili, "On divergence of Fourier trigonometric series by some methods of summability with variable orders", Proc. A. Razmadze Math. Inst. **155**, 130 – 131 (2011).

[16] Sh. Tetunashvili, "On divergence of Fourier series by some methods of summability", Journal of Function Spaces and Applications, vol. 2012, Article ID 542607, 9 pages.

[17] L. Zhizhiashvili, Conjugate Functions and Trigonometric Series [in Russian], Tbilisi University Press (1969).

[18] A. Zigmund, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Vol. 1 (1959).

Поступила 27 апреля 2017

После доработки 6 декабря 2017

Принята к публикации 12 января 2018

Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 11 – 26

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА-ХОПФА С НЕСИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ В ЗАКРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Л. Г. АРАБАДЖЯН

Институт математики НАН РА
Армянский Государственный Педагогический Университет им. Х. Абовяна
E-mail: *arabajyan@mail.ru*

Аннотация. Работа посвящена вопросам разрешимости интегрального уравнения Винера-Хопфа в случае, когда ядро K удовлетворяет условиям $0 \leq K \in L_1(\mathbb{R})$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)dt > 1$, $K(\pm x) \in C^{(3)}(\mathbb{R}^+)$, $(-1)^n \cdot K(\pm x)^{(n)}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $n = 1, 2, 3$. На основе вольтерровской факторизации оператора Винера-Хопфа и привлечения нелинейных функциональных уравнений строятся вещественные решения однородного и неоднородного уравнения, при вещественной и суммируемой функции g и вышеупомянутых условиях. Изучено также поведение этих решений в бесконечности.

MSC2010 number: 45A05; 45B05

Ключевые слова: интегральное уравнение Винера-Хопфа; несимметричное ядро, вольтерровская факторизация.

1. Введение

1.1. Теория интегральных уравнений вида

$$f(x) = g(x) + \int\limits_0^{\infty} K(x-t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, \infty), \tag{1.1}$$

где f - искомая функция, интенсивно развивалась, начиная с основополагающей работы Н. Винера и Е. Хопфа [1]. Основой для многочисленных исследований таких уравнений явилась существующая связь между уравнением (1.1) и его символом:

$$\rho(\omega) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{i\omega t}dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, \infty), \tag{1.2}$$

Наиболее глубокое исследование уравнений (1.1) и систем таких уравнений проведено в работах [2]–[4], где получено необходимое и достаточное условие нётеровости этих уравнений (и систем аналогических уравнений):

$$\rho(\omega) \neq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

При нарушении условия (1.3) соответствующий оператор

$$(\Lambda f)(x) = f(x) - \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

действующий в любом из пространств $L_p(\mathbb{R}^+)$, $p \geqslant 1$, $M(\mathbb{R}^+)$ и $C(\mathbb{R}^+)$, не будет ни Φ^+, ни Φ^-- оператором (см. [5, с. 108]).

Интегральными уравнениями типа (1.1) описываются многие задачи математической физики, теоретической астрофизики, газовой динамики (см. [6]–[8]). Однако, во многих из этих уравнений условие (1.3) не выполняется. Такая ситуация имеет место, в частности, в классической проблеме Милна в теории переноса излучения (см. [6], [8]).

В настоящей работе рассматриваются уравнения вида (1.1) с вещественными ядрами K, для которых условие (1.3) не выполняется.

1.2. Одно из направлений развития теории уравнений (1.1), для которых нарушается условие (1.3), есть исследования вопросов разрешимости этих уравнений в тех или иных функциональных пространствах, в зависимости от порядка нулей символа $\rho(\omega)$ (см. [4], [5]). Иной подход для изучения уравнений вида (1.1) был развит в работах [9],[10]. Он основан на вольтерровскую факторизацию интегрального оператора, с привлечением нелинейных функциональных уравнений. Этот подход позволил в указанных работах подробно изучить вопросы разрешимости и построения решений уравнения вида (1.1) при $K \in L_1(\mathbb{R})$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx \leq 1$.

Пусть в уравнении (1.1) ядро K-вещественная, неотрицательная и суммируемая на $\mathbb{R}$ функция, интеграл которого обозначим через μ:

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}), \quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx.$$

Мы будем различать следующие классы уравнения (1.1), в зависимости от значения μ:

(α) при $\mu < 1$ – класс диссипативных уравнений;

(β) при $\mu = 1$ – класс консервативных уравнений;

(γ) при $\mu > 1$ – класс закритических уравнений.

Отметим, что в консервативном случае условие (1.3) нарушается в точке $\omega = 0$. Вопросы разрешимости уравнения (1.1) для классов (α) и (β) исследованы в [9],[10].

Ниже будет рассмотрен класс закритических уравнений (1.1), когда нарушается условие (1.3).

1.3. Пусть $E(\mathbb{R}^+)$ - одно из пространств $L_p(\mathbb{R}^+)$, $p \geq 1$, $M(\mathbb{R}^+)$ или $C(\mathbb{R}^+)$, а $\mathcal{J}$ - единичный оператор в $E(\mathbb{R}^+)$.

Представим уравнение (1.1) в операторной форме:

$$(\mathcal{J} - \mathcal{K})f = g, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{K}$- интегральный оператор Винера-Хопфа, причем $0 \leq K \in L_1(\mathbb{R})$.

Пусть $\Omega^\pm$ - пространства вольтерровых операторов $\mathcal{V}_\pm$ вида

$$(\mathcal{V}_+ f)(x) = \int\limits_0^x V_+(x-t)f(t)dt, \quad (\mathcal{V}_- f)(x) = \int\limits_x^\infty V_-(t-x)f(t)dt,$$

где $x \in \mathbb{R}^+$, $V_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+)$, действующие в $E(\mathbb{R}^+)$. Рассмотрим разложение

$$\mathcal{J} - \mathcal{K} = (\mathcal{J} - \mathcal{V}_-)(\mathcal{J} - \mathcal{V}_+), \quad \mathcal{V}_\pm \in \Omega^\pm. \tag{1.5}$$

Равенство (1.5) равносильно следующей нелинейной системе (уравнений Енгибаряна):

$$\begin{cases} V_+(x) = K_+(x) + \int\limits_0^\infty V_-(t)V_+(x+t)dt, \\ V_-(x) = K_-(x) + \int\limits_0^\infty V_+(t)V_-(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{1.6}$$

где $K_\pm(x) = K(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Для четных функций K (симметрический случай) последняя система обращается в уравнение

$$V(x) = K(x) + \int\limits_0^\infty V(t)V(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{1.7}$$

В этом случае для решения (V_+, V_-) системы (1.6) имеем $V_\pm = V$.

В [9] доказана разрешимость системы (1.6), уравнения (1.7) и реализована факторизация (1.5) для классов (α) и (β) уравнения (1.1). (см. [9], §1, теорема1.2)

Ниже будет доказана возможность факторизации (1.5) для класса (γ) в случае, когда нарушается условие (1.3).

1.4. Уравнению (1.1) в случае, когда ядро K суммируемо на $\mathbb{R}$ и представлено в виде суперпозиции экспонент:

$$K_{\pm}(x) = \int\limits_a^b e^{-xp} d\sigma_{\pm}(p), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad [a,b) \subset [0,\infty), \tag{1.8}$$

где $\sigma_{\pm}$ – неубывающие непрерывные слева функции на $[a,b)$, удовлетворяющие условиям

$$\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{d\sigma_+(s)}{s} + \int\limits_a^b \frac{d\sigma_-(s)}{s} \leq 1,$$

посвящено множество теоретических и прикладных исследований (см. [6] – [8], [10] – [12]). Такие уравнения имеют наиболее важные применения в теории переноса излучения и в кинетической теории газов (см. [5]-[7]).

Уравнению (1.1) с ядрами вида (1.8) в закритическом случае $\mu > 1$ были посвящены работы [11]-[12]. В [11], используя теорию R-функций, доказана разрешимость однородного уравнения (1.1) при дополнительном условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|K(t)dt < \infty$. Задача факторизации (1.5) для интегрального оператора Винера-Хопфа при условиях $\mu > 1$ и (1.8) была подробно изучена в [12]. На основе рассматриваемой факторизации в указанной работе построены вещественные решения как однородного, так и неоднородного закритического уравнения (1.1) с ядрами вида (1.8). Закритическое уравнение (1.1), когда величина μ близка к единице, рассматривалось в [13]. Отметим, что представление (1.8) эквивалентно вполне монотонности на $\mathbb{R}^+$ функций $K_{\pm}$, т.е. выполнению условий (см. [14], стр. 255.)

$$K_{\pm} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^+) \ \text{ и } \ (-1)^n K_{\pm}^{(n)}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \ n = 1,2,3,.... \tag{1.9}$$

В работе автора [15] рассматривалась задача факторизации оператора Винера-Хопфа с симметричным ядром в закритическом случае $\mu > 1$, при более общих, чем (1.9) условиях. Результаты настоящей работы обобщают и дополняют утверждения указанной работы.

1.5. Изложим некоторые факты по разрешимости системы (1.6) и по построению факторизации (1.5), полученные в [9] для класса (β). Эти факты будут использованы в настоящей работе.

Пусть $\overset{o}{K}$- есть ядро, удовлетворяющее условиям (консервативности)

$$0 \leq \overset{o}{K} \in L_1(\mathbb{R}), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{o}{K}(t)\,dt = 1. \tag{1.10}$$

Через $(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-)$ обозначим решение системы (1.6) при $K = \overset{o}{K}$:

$$
(1.11)\qquad \begin{cases} \overset{o}{V}_+(x) = \overset{o}{K}_+(x) + \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_-(t)\, \overset{o}{V}_+(x+t)\,dt, \\ \overset{o}{V}_-(x) = \overset{o}{K}_-(x) + \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_+(t)\, \overset{o}{V}_-(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}
$$

(Здесь $\overset{o}{K}_\pm(x) = \overset{o}{K}(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$). Из [9] и [10] имеем

$$
(1.12)\qquad 0 \le \overset{o}{V}_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+) \quad \overset{o}{\gamma}_\pm \equiv \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_\pm(t)dt \le 1, \quad (1 - \overset{o}{\gamma}_-)(1 - \overset{o}{\gamma}_+) = 0,
$$

причем в случае сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|\ \overset{o}{K}(t)dt$, из $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ \overset{o}{K}(x)dx = 0$ следует $\overset{o}{\gamma}_\pm = 1$ (см. [10]). При дополнительном условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2\ \overset{o}{K}(t)dt < \infty$ имеет место $\int\limits_0^\infty t\, \overset{o}{V}_\pm(t)dt < \infty$, что равносильно суммируемости на $\mathbb{R}^+$ функций $\psi_\pm(x) = \int\limits_x^\infty \overset{o}{V}_\pm(t)dt$.

1.6. Задача факторизации (1.5) для операторов $\mathcal{K}$ с неотрицательным ядром в закритическом случае $\mu > 1$ исследована в [12],[15]. В работе [12] подробно изучена задача (1.5), когда ядро K-суммируемая на $\mathbb{R}$ вполне монотонная функция (т.е. $K_\pm(x) \equiv K(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ представляются в виде (1.8)) при $\mu > 1$.

Как было отмечено выше в консервативном случае $\mu = 1$ условие (1.3) нарушается в точке $\omega = 0$. В [15] показана, что в закритическом случае $\mu > 1$ для любого суммируемого симметричного (четного) ядра K условие (1.3) нарушается в двух точках $\omega = \pm\omega_o$, где $\omega_o \ne 0$. Нижеприведенный пример показывает, что условие (1.3) может нарушиться и для несимметричных ядер K. Именно, задача (1.5) для таких операторов $\mathcal{K}$ будет предметом изучения настоящей работы.

Пример. Для несимметричного ядра

$$
(1.13)\qquad K(x) = \begin{cases} 4e^{-2x}, & \text{при} \quad x \ge 0, \\ 3e^{x}, & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}
$$

интегрального оператора Винера-Хопфа $\mathcal{K}$ имеет место

$$
0 \le K \in L_1(\mathbb{R}), \quad \mu \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 5 \quad \text{и} \quad \rho(2\sqrt{2}) = 0,
$$

где $\rho(\omega)$ определяется согласно (1.2), (см. Замечание к теореме 2.1).

2. Факторизация оператора Винера-Хопфа с несимметрическим ядром в закритическом случае

Рассмотрим задачу (1.5) и соответствующую систему (1.6) для оператора с закритическим ядром K а также систему (1.11), где функция $\overset{o}{K}$ удовлетворяет условиям (1.10) и условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t \overset{o}{K}(t)dt = 0$. Обобщая утверждения лемм 1 и 2 работы [15], можно аналогичными рассуждениями доказать следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть функция* $\overset{o}{K}$ *удовлетворяет* (1.10), *причем* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \overset{o}{K}(x)dx < \infty$ *(тогда и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \overset{o}{K}(x)dx < \infty$*) и пусть* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \overset{o}{K}(x)dx = 0$. *Тогда для любого действительного* ω *функции* $K_\pm$ *и* $V_\pm$, *определяемые на* $\mathbb{R}^+$ *равенствами*

$$K_\pm(x) = \overset{o}{K}_\pm(x) + \omega^2 \int\limits_x^\infty dt \int\limits_t^\infty \overset{o}{K}_\pm(u)du, \quad V_\pm(x) = \overset{o}{V}_\pm(x) + i\omega \int\limits_x^\infty \overset{o}{V}_\pm(t)dt, \tag{2.1}$$

$x \in \mathbb{R}^+$, *а* $(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-)$ *– решение системы* (1.11), *будут удовлетворять системе* (1.6).

Доказательство. Из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t \overset{o}{K}(t)dt = 0$ следует $\overset{o}{\gamma}_\pm = 1$. Рассмотрим первое из уравнений системы (1.11). Интегрируя это равенство в пределах от $x \geq 0$ до ∞ и используя теорему Фубини (см. [16, с. 317]), получаем

$$\int\limits_x^\infty \overset{o}{V}_+(t)dt = \int\limits_x^\infty \overset{o}{K}_+(t)dt + \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_-(t)dt \int\limits_{x+t}^\infty \overset{o}{V}_+(u)du,$$

откуда с учетом $\overset{o}{\gamma}_- = 1$ следует

$$\int\limits_x^\infty \overset{o}{K}_+(t)dt = \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_+(x+t)dt \int\limits_t^\infty \overset{o}{V}_-(u)du.$$

Умножив полученное равенство на $i\omega$, где ω - произвольное действительное число и сложив с первым из равенств (1.11), приходим к

$$\overset{o}{V}_+(x) = (\overset{o}{K}_+(x) - i\omega \int\limits_x^\infty \overset{o}{K}_+(t)dt) + \int\limits_0^\infty V_-(t) \overset{o}{V}_+(x+t)dt, \tag{2.2}$$

где через $V_-(x)$ обозначена функция

$$V_-(x) = \overset{o}{V}_-(x) + i\omega \cdot \int\limits_x^\infty \overset{o}{V}_-(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.3}$$

Интегрирование равенства (2.2) в пределах от $x \geq 0$ до ∞ дает

$$\int_x^\infty \overset{o}{V}_+ (t)dt = \left(\int_x^\infty \overset{o}{K}_+ (t)dt - i\omega \cdot \int_x^\infty dt \int_t^\infty \overset{o}{K}_+ (u)du \right) + \int_0^\infty V_-(t)dt \int_{x+t}^\infty \overset{o}{V}_+ (u)du.$$

Умножив последнее равенство на $i\omega$ и сложив с (2.2), получаем

$$V_+(x) = K_+(x) + \int_0^\infty V_-(t)V_+(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где

$$K_+(x) = \overset{o}{K}_+ (x) + \omega^2 \cdot \int_x^\infty dt \int_t^\infty \overset{o}{K}_+ (u)du, \quad V_+(x) = \overset{o}{V}_+ (x) + i\omega \cdot \int_x^\infty \overset{o}{V}_+ (t)dt. \tag{2.4}$$

Аналогичные преобразования второго из равенств (1.11) приводят к равенству

$$V_-(x) = K_-(x) + \int_0^\infty V_+(t)V_-(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где функции $V_\pm$ определены в (2.3) и (2.4), а

$$K_-(x) = \overset{o}{K}_- (x) + \omega^2 \cdot \int_x^\infty dt \int_t^\infty \overset{o}{K}_- (u)du, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Заметим, что при условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \overset{o}{K} (x)dx < \infty$ имеем $\int\limits_0^\infty x \overset{o}{V}_\pm (x)dx < \infty$, (см. [10, §4, n.1]) и оба эти условия обеспечивают суммируемость $K_\pm$ и $V_\pm$ на $\mathbb{R}^+$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть каждая из функций $K_\pm$ удовлетворяет условиям*

$$0 \leq K_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^{(1)}(\mathbb{R}^+), \quad K_\pm^{(1)} \leq 0 \quad \textit{на} \quad \mathbb{R}^+, \tag{2.5}$$

а $\omega \in R^+$. Тогда функции $\overset{o}{K}_\pm$, определяемые равенствами

$$\overset{o}{K}_\pm (x) = K_\pm(x) - \omega \cdot \int_0^\infty K_\pm(x+t) \sin \omega t dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.6}$$

суммируемы на $\mathbb{R}^+$, причем $\int\limits_0^\infty t \overset{o}{K}_\pm (t)dt < \infty$ и удовлетворяют соответствующим уравнениям

$$K_\pm(x) = \overset{o}{K}_\pm (x) + \omega^2 \cdot \int_x^\infty dt \int_t^\infty \overset{o}{K}_\pm (u)du, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.7}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 из [15].

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{K}$-оператор Винера-Хопфа, удовлетворяющий условиям:*

(a) *для ядра K имеет место*

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt > 1;$$

(b) *символ $\rho(\omega)$ оператора (см.(1.2)) имеет вещественный корень: $\rho(\overset{o}{\omega}) = 0$, $\overset{o}{\omega} \in \mathbb{R}$, причем $\overset{o}{\omega} \neq 0$; (это условие выполняется в частности, если ядро K есть четная функция, удовлетворяющая условиям (a))*

(c) *для функций $K_\pm(x) = K(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ имеют место*

$$K_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^{(3)}(\mathbb{R}^+), \quad (-1)^n K_\pm^{(n)} \geq 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+, \quad n = 1, 2, 3. \tag{2.8}$$

Тогда существует факторизация (1.5)*, причем ядра $V_\pm$ соответствующих операторов являются суммируемыми на $\mathbb{R}^+$ комплекснозначными функциями вида*

$$V_\pm(x) = \overset{o}{V}_\pm(x) + i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int_x^\infty \overset{o}{V}_\pm(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.9}$$

Здесь $\overset{o}{\omega}$ - вещественный корень символа $\rho(\omega)$, а вещественные функции $\overset{o}{V}_\pm$ определяются из системы (1.11)*, где $\overset{o}{K}_\pm$ выражаются через данные функции $K_\pm$ посредством равенств*

$$\overset{o}{K}_\pm(x) = K_\pm(x) - \overset{o}{\omega} \cdot \int_0^\infty K_\pm(x+t)\sin \overset{o}{\omega} t\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.10}$$

причем при выполнении (2.8) *эти функции удовлетворяют условиям консервативности*

$$0 \leq \overset{o}{K}_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \mu = \int_0^\infty \overset{o}{K}_+(t)dt + \int_0^\infty \overset{o}{K}_-(t)dt = 1 \tag{2.11}$$

и условиям $\int_0^\infty x^2\, \overset{o}{K}_\pm(x)dx < \infty$.

Доказательство. Во-первых покажем, что если $\overset{o}{\omega}$ - вещественный корень символа $\rho(\omega)$, а функции $K_\pm$ удовлетворяют условиям (2.8), то определяемые из (2.10) функции $\overset{o}{K}_\pm$ будут удовлетворять условиям (2.11), причем $\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)dt = 0$. Следовательно для решения $(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-)$ соответствующей системы (1.11) будут выполняться равенства $\overset{o}{\gamma}_\pm = 1$, где $\overset{o}{\gamma}_\pm = \int_0^\infty \overset{o}{V}_\pm(t)dt$.

Если функции $K_\pm$ удовлетворяют условиям (2.8), то очевидно, что $K_\pm(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} K_\pm(x) = 0$. Также легко убедиться, что $K_\pm^{(1)}(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} K_\pm^{(1)}(x) = 0$, ибо функции $K_\pm^{(1)}$ монотонны на R^+ и

$$\int\limits_\tau^\infty \left|K_\pm^{(1)}(t)\right| dt = -\int\limits_\tau^\infty K_\pm^{(1)}(t)\, dt = K_\pm(\tau) < +\infty,$$

при $\tau > 0$. Интегрируя по частям интегралы в правой части равенства (2.10), с учетом $K_\pm(\infty) = K_\pm^{(1)}(\infty) = 0$, последовательно получаем

$$\overset{o}{K}_\pm (x) = -\int\limits_0^\infty K_\pm^{(1)}(x+t)\cos \overset{o}{\omega}\, t dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.12}$$

и

$$\overset{o}{K}_\pm (x) = \frac{1}{\overset{o}{\omega}} \cdot \int\limits_0^\infty K_\pm^{(2)}(x+t)\sin \overset{o}{\omega}\, t dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.13}$$

Поскольку $0 \le K_\pm^{(2)} \downarrow$ на R^+, то из (2.13) для любого $x \in R^+$ имеем $\overset{o}{K}_\pm (x) \ge 0$ (см. [17, с. 544]). Из (2.12) получаем

$$\int\limits_0^\infty \overset{o}{K}_\pm (x)\, dx \le \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left|K^{(1)}(x+t)\right| dx\, dt = -\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K^{(1)}(x+t)\, dx\, dt = \int\limits_0^\infty K(x)\, dx < +\infty,$$

т.е. $\overset{o}{K}_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Интегрирование равенств (2.12) в пределах от $x \ge 0$ до ∞ с использованием теоремы Фубини дает

$$\int\limits_x^\infty \overset{o}{K}_\pm (t) dt = -\frac{1}{\overset{o}{\omega}} \cdot \int\limits_0^\infty K^{(1)}(x+t)\sin \overset{o}{\omega}\, t dt. \tag{2.14}$$

(Существование всех интегралов в правых частях (2.12) – (2.14) обеспечивают условия (2.8)).

По условию теоремы символ (1.2) оператора имеет вещественный корень $\overset{o}{\omega} \in \mathbb{R}^+$, $\overset{o}{\omega} \ne 0$. Тогда из (1.2) имеем

$$1 - \int\limits_{-\infty}^\infty K(t)\cos \overset{o}{\omega}\, t dt = 1 - \int\limits_0^\infty K_+(t)\cos \overset{o}{\omega}\, t dt - \int\limits_0^\infty K_-(t)\cos \overset{o}{\omega}\, t dt = 0 \tag{2.15}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^\infty K(t)\sin \overset{o}{\omega}\, t dt = \int\limits_0^\infty K_+(t)\sin \overset{o}{\omega}\, t dt - \int\limits_0^\infty K_-(t)\sin \overset{o}{\omega}\, t dt = 0.$$

Учитывая соотношение (2.15), из равенств (2.12) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overset{o}{K}(t)dt = \int_{0}^{\infty} \overset{o}{K}_{+}(t)dt + \int_{0}^{\infty} \overset{o}{K}_{-}(t)dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} K_{+}(t)\cos \overset{o}{\omega} t dt + \int_{0}^{\infty} K_{-}(t)\cos \overset{o}{\omega} t dt = 1.$$

Интегрирование на $\mathbb{R}^+$ равенств (2.14) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \overset{o}{K}(t)dt = \int_{0}^{\infty} t \overset{o}{K}_{+}(t)dt - \int_{0}^{\infty} t \overset{o}{K}_{-}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\overset{o}{\omega}} \int_{0}^{\infty} K_{+}(t)\sin \overset{o}{\omega} t dt - \frac{1}{\overset{o}{\omega}} \int_{0}^{\infty} K_{-}(t)\sin \overset{o}{\omega} t dt = \frac{1}{\overset{o}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\sin \overset{o}{\omega} t dt = 0.$$

Таким образом, для функций $\overset{o}{K}$ и $\overset{o}{K}_{\pm}(x) = \overset{o}{K}(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ имеем

$$0 \leq \overset{o}{K}_{\pm} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \overset{o}{K}(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t \overset{o}{K}(t)dt = 0. \tag{2.16}$$

Поэтому для решения $(\overset{o}{V}_{+}, \overset{o}{V}_{-})$ системы (1.11) имеет место $\overset{o}{\gamma}_{\pm} = \int_{0}^{\infty} \overset{o}{V}_{\pm}(t)dt = 1$ (см. [10, Теорема 4.1]).

При выполнении условий (2.8) функции $\overset{o}{K}_{\pm}$ из (2.10), в силу леммы 2.2, будут удовлетворять равенствам (2.7) при $\omega = \overset{o}{\omega}$. Откуда следует

$$\int_{x}^{\infty} dt \int_{t}^{\infty} \overset{o}{K}_{\pm}(u)du \leq (\overset{o}{\omega})^{-2} \cdot K_{\pm}(x),$$

что совместно с условием $0 \leq K_{\pm} \in L_1(\mathbb{R}^+)$ дает $\int_{0}^{\infty} x^2 \overset{o}{K}_{\pm} dx < \infty$.

Итак, при выполнении условий (a)-(c) теоремы 2.1 функции $\overset{o}{K}_{\pm}$, определяемые равенствами (2.6) удовлетворяют уравнениям (2.7). Если $(\overset{o}{V}_{+}, \overset{o}{V}_{-})$ - решение системы (1.11), соответствующий построенным функциям $\overset{o}{K}_{\pm}$, то функции $V_{\pm}$ из (2.9) в силу леммы 2.1 будут удовлетворять системе (1.6). □

Свойство 2.1. *Если оператор Винера-Хопфа удовлетворяет условиям (a)-(c) теоремы 2.1, то существует факторизация* (1.5), *где ядра операторов* $\mathcal{V}_{\pm}$ *являются комплекснозначными суммируемыми на* $\mathbb{R}^+$ *функциями* $V_{\pm}$.

Замечание 2.1. *Используя результат доказанной теоремы, мы можем построить ядра операторов $\nu_\pm$ факторизации* (1.5) *для оператора Винера-Хопфа с ядром* (1.13).

В указанном случае имеем $\overset{o}{\omega}= 2\sqrt{2}$. *Для функций* $\overset{o}{K}_\pm$ *из* (2.10) *получаем:* $\overset{o}{K}_+(x) = \frac{4}{3}e^{-2x}$, $\overset{o}{K}_-(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$, $x \in R^+$. *Далее определим решение* $\left(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-\right)$ *системы* (1.11), *имеющее вид* $\overset{o}{V}_+(x) = A \cdot e^{-2x}$, $\overset{o}{V}_-(x) = B \cdot e^{-x}$, $x \in R^+$. *Простые вычисления дают* $A = 2, B = 1$. *Итак,* $\overset{o}{V}_+(x) = 2 \cdot e^{-2x}$, $\overset{o}{V}_-(x) = e^{-x}$, $x \in R^+$. *Наконец, из равенств* (2.9) *получаем*

$$\begin{cases} V_+(x) = 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) \cdot e^{-2x}, \\ V_-(x) = \left(1 + i \cdot 2\sqrt{2}\right) \cdot e^{-x}, \quad x \in R^+, \end{cases}$$

которые вместе дают решение системы (1.6) *в случае* (1.13).

3. Уравнение Винера-Хопфа с несимметричным ядром в закритическом случае

3.1. Однородное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$S(x) = \int_0^\infty K(x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.1}$$

где ядро K удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Факторизация (1.5) сводит решение этого уравнения к последовательному решению следующих двух уравнений:

$$\varphi(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)\varphi(t)dt, \tag{3.2}$$

$$S(x) = \varphi(x) + \int_0^x V_+(x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.3}$$

где (V_+, V_-) - решение системы (1.6) и представляется в виде (2.9) посредством решения $(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-)$ соответствующей системы (1.11). Тогда решение уравнения (3.1) может быть определено из уравнения

$$S(x) = e^{-i\overset{o}{\omega}x} + \int_0^x V_+(x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.4}$$

поскольку уравнение (3.2) обладает очевидным решением $\varphi(x) = e^{-i\overset{o}{\omega}x}$. Уравнению (3.4) удовлетворяет вещественное решение соответствующего консервативного уравнения

$$S(x) = \cos \overset{o}{\omega} x + \int_0^x \overset{o}{V}_+ (x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.5}$$

Учитывая асимптотическое поведение решения S уравнения (3.5) приходим к следующей теореме (см. [15, Теорема 2]).

Теорема 3.1. *Однородное уравнение* (3.1) *в случае, когда выполняются условия (a)-(c) теоремы 2.1 обладает вещественным решением* S, *причем*

$$S(x) = O(x), \quad \textit{при} \ \ x \to \infty.$$

3.2. Неоднородное уравнение. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1.1) в случае, когда данные функции K и g принимают действительные значения, причем $g \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $0 \le K \le\in L_1(\mathbb{R})$ и нарушается условие (1.3). Если ядро K удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то существует факторизация (1.5), что позволяет получить решение уравнения (1.1) последовательным решением следующих двух вольтерровских уравнений:

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^\infty V_-(t-x)\varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.6}$$

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x V_+(x-t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.7}$$

где функции $V_\pm$ определяются посредством равенств (2.9), причем $\overset{o}{V}_\pm$ удовлетворяют условиям $\int_0^\infty \overset{o}{V}_\pm (t)dt = 1$. Поскольку в работе [15] не было рассмотрено неоднородное уравнение в закритическом случае, в этом параграфе будут рассмотрены как симметрический, так и несимметрический случаи. В симметрическом случае имеем $K_+(x) = K_-(x) = K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\overset{o}{K}_+ (x) = \overset{o}{K}_- (x) = \overset{o}{K} (x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ и $\overset{o}{V}_+ (x) = \overset{o}{V}_- (x) = \overset{o}{V} (x)$, где $\overset{o}{V}$ определяется из уравнения

$$\overset{o}{V} (x) = \overset{o}{K} (x) + \int_0^\infty \overset{o}{V} (t) \overset{o}{V} (x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Обсудим вопросы разрешимости уравнения (3.6). Наряду с этим уравнением рассмотрим соответствующее консервативное уравнение

$$\overset{o}{\varphi}(x) = \overset{o}{g}(x) + \int_x^\infty \overset{o}{V}_-(t-x)\overset{o}{\varphi}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.8}$$

и выберем функцию $\overset{o}{g}$ так, чтобы его решение $\overset{o}{\varphi}$ удовлетворяло также уравнению (3.6). В [10] доказано, что если $\overset{o}{g}$ есть вещественная суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция, то (3.8) обладает локально-интегрируемым на $\mathbb{R}^+$ решением $\overset{o}{\varphi}$, причем $\overset{o}{\varphi}\in L_1(\mathbb{R}^+)$, если $\int\limits_0^\infty x|\overset{o}{g}(x)|dx < \infty$. Это утверждение справедливо также для комплекснозначных функций $\overset{o}{g}$.

Пусть $\int\limits_0^\infty x|g(x)|\,dx < +\infty$. Интегрируя равенство (3.8) в пределах от $x \geq 0$ до ∞, получаем

$$\int_x^\infty \overset{o}{\varphi}(u)du = \int_x^\infty \overset{o}{g}(u)du + \int_0^\infty \overset{o}{V}_-(t)dt \int_{x+t}^\infty \overset{o}{\varphi}(u)du,$$

откуда с учетом $\overset{o}{\gamma}_-= 1$ следует

$$\int_x^\infty \overset{o}{g}(u)du = \int_0^\infty \overset{o}{\varphi}(x+t)dt \int_t^\infty \overset{o}{V}_-(u)du.$$

Умножив последнее равенство на $i\,\overset{o}{\omega}$ и сложив с (3.8), получаем

$$\overset{o}{\varphi}(x) = (\overset{o}{g}(x) - i\,\overset{o}{\omega}\cdot \int_x^\infty \overset{o}{g}(u)du) + \int_x^\infty V_-(t-x)\overset{o}{\varphi}(t)dt, \tag{3.9}$$

где V_- определяется вторым из равенств (2.9).

Таким образом, функцию $\overset{o}{g}$ надо выбрать так, чтобы

$$\overset{o}{g}(x) - i\,\overset{o}{\omega}\cdot \int_x^\infty \overset{o}{g}(u)du = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда получаем

$$\overset{o}{g}(x) = g(x) + i\,\overset{o}{\omega}\cdot \int_0^\infty g(x+t)e^{i\overset{o}{\omega}t}dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.10}$$

Пусть $\tilde{\varphi}$- решение уравнения

$$\tilde{\varphi}(x) = g(x) + \int_x^\infty \overset{o}{V}_-(t-x)\tilde{\varphi}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.11}$$

где g есть свободный член уравнения (1.1). (Мы полагаем, что g-вещественная и суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция). Согласно [10], это решение представляется в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = g(x) + \int_0^\infty \Phi_-(t) g(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.12}$$

где резольвентная функция Φ_- определяется из уравнения

$$\Phi_-(x) = \overset{o}{V}_-(x) + \int_0^x \overset{o}{V}_-(x-t)\Phi_-(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

В работе [10] не только доказана разрешимость последнего уравнения, но и изучены асимптотические поведения функций $\tilde{\varphi}$ и Φ_- в $+\infty$. Тогда, легко убедиться, что решением уравнения (3.8) (и решением уравнения (3.6)), где $\overset{o}{g}$ имеет вид (3.10) является функция

$$\varphi(x) = \overset{o}{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x) + i\,\overset{o}{\omega} \int_0^\infty \tilde{\varphi}(x+t) e^{i\overset{o}{\omega} t}\,dt, \tag{3.13}$$

где $\tilde{\varphi}$ -вещественная функция, которая определяется из (3.12). Поэтому решение уравнения (1.1) можно определить из уравнения (3.7), где φ имеет вид (3.13):

$$f(x) = (\tilde{\varphi}(x) + i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int_0^\infty \tilde{\varphi}(x+t) e^{i\overset{o}{\omega} t}\,dt) + \int_0^x V_+(x-t) f(t)\,dt, \tag{3.14}$$

здесь функция V_+ определяется согласно (2.9).

Наряду с (3.14) рассмотрим консервативное уравнение

$$f(x) = \varphi_*(x) + \int_0^x \overset{o}{V}_+(x-t) f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.15}$$

и выберем функцию φ_* так, чтобы его решение удовлетворяло также (3.14). Легко показать, что для этого достаточно, чтобы

$$\varphi_*(x) - i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int_0^x \varphi_*(u)\,du = \tilde{\varphi}(x) + i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int_0^\infty \tilde{\varphi}(x+t) e^{i\overset{o}{\omega} t}\,dt \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда следует

$$\varphi_*(x) = \tilde{\varphi}(x) + i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int_0^\infty \tilde{\varphi}(x+t) e^{i\overset{o}{\omega} t}\,dt + i\,\overset{o}{\omega}\, e^{i\overset{o}{\omega} x} \cdot \int_0^x e^{-i\overset{o}{\omega} t} \tilde{\varphi}(t)\,dt +$$

$$+ (\overset{o}{\omega})^2 \cdot e^{i\overset{o}{\omega} x} \cdot \int_0^x e^{-i\overset{o}{\omega} t}\,dt \int_0^\infty \tilde{\varphi}(t+u) e^{i\overset{o}{\omega} u}\,du. \tag{3.16}$$

Решение уравнения (3.15) представимо в виде (см. [10, §3, п.1])

$$f(x) = \varphi_*(x) + \int\limits_0^x \Phi_+(x-t)\varphi_*(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где Φ_+ определяется из уравнения

$$\Phi_+(x) = \overset{o}{V}_+(x) + \int\limits_0^x \overset{o}{V}_+(x-t)\Phi_+(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Решив уравнение (3.15) при функции φ_*, которая определяется посредством (3.16), получаем комплексное решение f уравнения (1.1). Поскольку K и g - вещественные функции, а уравнение (1.1) - линейное, то действительная функция $f^*(x) = Ref(x)$ также будет удовлетворять уравнению (1.1).

Учитывая асимптотическое поведение функции Φ_+ (см. [10, §3]), получаем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Если в неоднородном уравнении* (1.1) *ядро* K *удовлетворяет условиям (a)-(c) теоремы 2.1, а функция* g *- условиям*

$$g \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \int\limits_0^\infty x|g(x)|\,dx < \infty,$$

то это уравнение обладает вещественным решением f*, причем*

$$f(x) = O(x), \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Автор выражает благодарность проф. Н.Б. Енгибаряну за обсуждения результатов работы.

Abstract. The paper is devoted to the solvability questions of the following Wiener-Hopf integral equation in the case where the kernel K satisfies the conditions $0 \leq K \in L_1(\mathbb{R})$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)dt > 1$, $K_\pm \in C^{(3)}(\mathbb{R}^+)$, $(-1)^n \cdot K_\pm^{(n)}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $n = 1, 2, 3$. Based on Volterra factorization of the Wiener-Hopf operator, and invoking the technique of nonlinear functional equations, we construct real-valued solutions both for homogeneous and non-homogeneous equations, assuming that the function g is real-valued and summable, and the corresponding conditions are satisfied. The behavior at infinity of the corresponding solutions is also studied.

Список литературы

[1] N. Wiener, E. Hopf, Über eine Klasse singular Integralgleichungen", Sitzung Preuss. Akad. Wiss, 699 – 706 (1933).

[2] М. Г. Крейн, "Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргуметов", Успехи мат. наук, **13**, no. 5, 3 – 120 (1958).

[3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргуметов", Успехи мат. наук, **13**, no. 2, 3 – 72 (1958).

[4] Ф. Д. Гахов, Ю. Д. Черский, Уравнения Типа Свертки, Наука, Москва (1978).

[5] З. Прёсдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, Наука (1979).

[6] В. А. Амбарцумян, Научные Труды, Ереван (1979).

[7] К. Черчиняни, Теория и Приложения Уравнения Больцмана, Мир, Москва (1978).

[8] В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Наука, Москва (1967).

[9] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Матем. сборник, **97** (139), no. 1(5), 35 – 58 (1975).

[10] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техники", Матем. анализ **22**, 175 – 244 (1984).

[11] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, "Уравнения Винера-Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты", Изв. АН Арм ССР. Сер. математика, **17**, no. 4, 307 – 327 (1982). Изв. АН Арм ССР. Сер. математика, **17**, no. 5, 335 – 374 (1982).

[12] Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, "Интегральные уравнения свертки на полупрямой со вполне монотонными ядрами", Матем. сборник, **187**, no. 10, 53 – 72 (1996).

[13] Г. А. Григорян, "Уравнения Винера-Хопфа в закритическом случае", Изв. НАН Армении. Сер. матем., **32**, no. 1, (1997).

[14] Н. И. Ахиезер, "Классическая проблема моментов", ГИФМЛ, Москва (1961).

[15] Л. Г. Арабаджян, "Об интегральном уравнении Винера-Хопфа в закритическом случае", Матем. заметки, **76**, вып. 1, 11 – 19 (2004).

[16] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функции и Функционального Анализа, Наука, Москва (1976).

[17] Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференционального и Интегрального Исчисления, Наука, Москва, **3** (1973).

Поступила 25 декабря 2018

После доработки 25 февраля 2019

Принята к публикации 25 апреля 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 27 – 43

ULAM STABILITIES FOR NONLINEAR VOLTERRA DELAY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

K. D. KUCCHE, P. U. SHIKHARE

Shivaji University, Maharashtra, India
E-mails: *kdkucche@gmail.com; jananishikhare13@gmail.com*

Abstract. The present paper is devoted to the study of existence and uniqueness of a solution and Ulam type stabilities for Volterra delay integro-differential equations on a finite interval. Our analysis is based on the Pachpatte's inequality and Picard operator theory. Examples are provided to illustrate the stability results obtained in the case of a finite interval. Also, we give an example to illustrate that the Volterra delay integro-differential equations are not Ulam–Hyers stable on the infinite interval.

MSC2010 numbers: 45N05, 45M10, 34G20, 35A23.

Keywords: delay integro-differential equation; Ulam–Hyers stability; Ulam–Hyers–Rassias stability; integral inequality; Picard operator.

1. Introduction

The basic Ulam stability problem of functional equations, formulated by Ulam in 1940 (see [23]), has been studied and generalized by many researchers to various kinds of differential equations, integral equations, difference equations and fractional differential equations. The basic idea behind Ulam stability of any kind of equation is to deal with the existence of an exact solution near to every approximate solution. The concept of Ulam stability is applicable in various branches of mathematical analysis and is used in the cases where finding the exact solution is very difficult.

In recent years, many researchers have involved in the study on Ulam type stabilities of differential and integro-differential equations and obtained a number of remarkable results. At start, using the fixed point approach, implemented by Cadariu and Radu [1], S. M. Jung [9] has proved the Hyers–Ulam–Rassias stability of the Volterra integral equation $x(t) = \int_c^t f(s, x(s))ds$, where f is a continuous function and c is a fixed real number. Applying the fixed point arguments used in [9], Castro and Ramos [3] obtained Hyers–Ulam–Rassias stability and Hyers–Ulam stability for the following more general nonlinear Volterra integral equation:

$$x(t) = \int_a^t f(t, s, x(s))ds, -\infty < a \le t \le b < +\infty$$

both in finite and infinite intervals.

The concept of fixed point approach to study Ulam–Hyers stability has been extended by many authors. Here we mention few interesting contributions on Ulam type stabilities of different kinds of differential and integral equations. Tunc and Bicer [22] obtained results on the Hyers–Ulam–Rassias and Hyers–Ulam stability for the first order delay differential equation. Castro and Guerra [2] obtained weak conditions guaranteeing the Hyers–Ulam– Rassias stability of nonlinear Volterra integral equations with delay. Otrocol and Ilea [17] investigated Ulam stability for a delay differential equation. Using the idea of Cadariu, Radu and Jung, the Ulam–Hyers stability results for Volterra integral integro-differential equations was proved in [8] and [21]. Gachpazan and Baghani [5, 6] and Morales and Rojas [13] applied the successive approximation method to prove the Hyers–Ulam stability of a nonlinear integral equation. Using the method of successive approximation Huang and Li [7] established Ulam–Hyers stability of delay differential equations.
Recently, employing Pachpatte's inequality, Kucche and Shikhare [10] have discussed Ulam–Hyers stabilities of semilinear Volterra integro-differential equations in Banach spaces.

Motivated by the work of Rus [20] and Otrocol et al.[16, 17], in the present paper we obtain existence and uniqueness results and establish Ulam type stabilities (viz. Ulam–Hyers stability, generalized Ulam–Hyers stability, Ulam–Hyers–Rassias stability and generalized Ulam–Hyers–Rassias stability) for nonlinear Volterra delay integro-differential equation (VDIE) of the form:

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x(g(t)), \int_0^t h(t,s,x(s),x(g(s)))ds\right), \ t \in I = [0,b], \ b > 0, \tag{1.1}$$

where $f \in C\left(I \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$, $h \in C\left(I \times I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$, $g \in C\left(I, [-r,b]\right)$, $0 < r < \infty$ and $g(t) \leq t$.

We apply Picard's operator theory, the abstract Gronwall lemma and the Pachpatte's inequality to achieve our results. The results obtained in this paper are more general than the known results and include the study of [3, 9, 16, 17, 20] – [22] as special cases of (1.1). For existence, uniqueness and other qualitative properties of various forms of nonlinear delay integro-differential equations we refer the papers by Ntouyas et al. [14, 15], Dauer and Balchandran [4], Kucche et al. [11, 12] and the references cited therein.

The rest of this paper is organized as follows. In Section 2, we define the Ulam type stability concepts for equation (1.1) and state theorems, needed to obtain our main results. In Section 3, we establish different Ulam type stability results for

VDIE (1.1) on a finite interval. Further, we give some applications of the obtained results, and discuss examples illustrating the results.

2. Preliminaries

In what follows we use the notation and definitions given in [20] to discuss the Ulam type stabilities of VDIE (1.1). Consider the following nonlinear Volterra delay integro-differential equations:

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x(g(t)), \int_0^t h(t,s,x(s),x(g(s)))ds\right), \ t \in I, \tag{2.1}$$

$$x(t) = \phi(t), \ t \in [-r, 0], \tag{2.2}$$

where $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R})$.

Definition 2.1. *A function $x \in C([-r,b],\mathbb{R}) \cap C^{'}([0,b],\mathbb{R})$ that verifies the equations* (2.1) *and* (2.2) *is called a solution of the initial value problem* (2.1)*,* (2.2)*.*

For a given $\epsilon > 0$ and a positive nondecreasing continuous function $\psi \in C([-r,b],\mathbb{R}_+)$, we consider the following inequalities:

$$\left| y'(t) - f\left(t, y(t), y(g(t)), \int_0^t h(t,s,y(s),y(g(s)))ds\right)\right| \le \epsilon, \ t \in I, \tag{2.3}$$

$$\left| y'(t) - f\left(t, y(t), y(g(t)), \int_0^t h(t,s,y(s),y(g(s)))ds\right)\right| \le \psi(t), \ t \in I, \tag{2.4}$$

$$\left| y'(t) - f\left(t, y(t), y(g(t)), \int_0^t h(t,s,y(s),y(g(s)))ds\right)\right| \le \epsilon\psi(t), \ t \in I. \tag{2.5}$$

Definition 2.2. *The equation* (2.1) *is said to be Ulam–Hyers stable if there exists a real number $C > 0$ such that for each $\epsilon > 0$ and for each solution $y \in C^{'}([-r,b],\mathbb{R})$ of* (2.3) *there exists a solution $x \in C^{'}([-r,b],\mathbb{R})$ of* (2.1) *with $|y(t) - x(t)| \le C\,\epsilon$ for $t \in [-r,b]$.*

Definition 2.3. *The equation* (2.1) *is said to be generalized Ulam–Hyers stable if there exists $\theta_f \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $\theta_f(0) = 0$ such that for each solution $y \in C^{'}([-r,b],\mathbb{R})$ of* (2.3) *there exists a solution $x \in C^{'}([-r,b],\mathbb{R})$ of* (2.1) *with $|y(t) - x(t)| \le \theta_f(\epsilon)$ for $t \in [-r,b]$.*

Definition 2.4. *The equation* (2.1) *is said to be Ulam–Hyers–Rassias stable with respect to the positive nondecreasing continuous function $\psi : [-r,b] \to \mathbb{R}_+$ if there exists $C_\psi > 0$ such that for each $\epsilon > 0$ and for each solution $y \in C^{'}([-r,b],\mathbb{R})$ of* (2.5) *there exists a solution $x \in C^{'}([-r,b],\mathbb{R})$ of* (2.1) *with $|y(t) - x(t)| \le C_\psi \epsilon\,\psi(t)$ for $t \in [-r,b]$.*

Definition 2.5. *The equation* (2.1) *is said to be generalized Ulam–Hyers–Rassias stable with respect to the positive nondecreasing continuous function* $\psi : [-r, b] \to \mathbb{R}_+$ *if there exists* $C_\psi > 0$ *such that for each solution* $y \in C^{'}([-r, b], \mathbb{R})$ *of* (2.4) *there exists a solution* $x \in C^{'}([-r, b], \mathbb{R})$ *of* (2.1) *with* $|y(t) - x(t)| \leq C_\psi \, \psi(t)$ *for* $t \in [-r, b]$.

Remark 2.1. Observe that a function $y \in C^{'}(I, \mathbb{R})$ is a solution of the inequality (2.3) if there exists a function $q_y \in C(I, \mathbb{R})$ (which depends on y) such that

(i) $|q_y(t)| \leq \epsilon, \ t \in I$;
(ii) $y^{'}(t) = f\left(t, y(t), y(g(t)), \int_0^t h(t, s, y(s), y(g(s)))ds\right) + q_y(t), \ t \in I.$

Similar arguments hold for the inequalities (2.4) and (2.5).

Remark 2.2. If $y \in C^{'}(I, \mathbb{R})$ satisfies the inequality (2.3), then y is a solution of the following integral inequality:

(2.6)
$$\left| y(t) - y(0) - \int_0^t f\left(s, y(s), y(g(s)), \int_0^s h(s, \tau, y(\tau), y(g(\tau)))d\tau\right) ds \right| \leq \epsilon t, \ t \in I.$$

Indeed, if $y \in C^{'}(I, \mathbb{R})$ satisfies the inequality (2.3), then by Remark 2.1, we have

$$y^{'}(t) = f\left(t, y(t), y(g(t)), \int_0^t h(t, s, y(s), y(g(s)))ds\right) + q_y(t), \ t \in I.$$

This gives

$$\begin{aligned} \left| y(t) - y(0) - \int_0^t f\left(s, y(s), y(g(s)), \int_0^s h(s, \tau, y(\tau), y(g(\tau)))d\tau\right) ds \right| &\leq \int_0^t |q_y(s)| ds \\ &\leq \epsilon t, \ t \in I. \end{aligned}$$

Similar estimates can also be obtained for the inequalities (2.4) and (2.5).

We use the following inequality to obtain our main results.

Theorem 2.1 (Pachpatte's inequality (see [18], p. 39))**.** *Let* $u(t)$, $f(t)$ *and* $q(t)$ *be nonnegative continuous functions defined on* $\mathbb{R}_+$, *and let* $n(t)$ *be a positive and nondecreasing continuous function defined on* $\mathbb{R}_+$ *for which the inequality*

$$u(t) \leq n(t) + \int_0^t f(s) \left[u(s) + \int_0^s q(\tau) u(\tau) d\tau \right] ds,$$

holds for $t \in \mathbb{R}_+$. *Then*

$$u(t) \leq n(t) \left[1 + \int_0^t f(s) \exp\left(\int_0^s [f(\tau) + q(\tau)] d\tau \right) ds \right],$$

for $t \in \mathbb{R}_+$.

Now we give the definition of the Picard operator and state the abstract Gronwall lemma (see Rus [19]), which are used in our subsequent analysis.

Definition 2.6 (Picard operator [19])**.** *Let (X,d) be a metric space. An operator $A : X \to X$ is said to be a Picard operator if there exists $x^* \in X$ such that:*

(i) *$F_A = \{x^*\}$, where $F_A = \{x \in X : A(x) = x\}$ is the fixed point set of A;*

(ii) *the sequence $(A^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converges to x^* for all $x_0 \in X$.*

Lemma 2.1 (Gronwall lemma [19])**.** *Let $(X,d,\le)$ be an ordered metric space and let $A : X \to X$ be an increasing Picard operator ($F_A = x_A^*$). Then for $x \in X$, $x \le A(x)$ implies $x \le x_A^*$, while $x \ge A(x)$ implies $x \ge x_A^*$.*

3. Ulam type stabilities for VDIE on $I = [0,b]$

3.1. **The main results.** The following assumptions are needed to state and prove our main results.

(H1) (i) Let $f \in C\left([0,b] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$, $h \in C\left([0,b] \times [0,b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ and $g \in C\left([0,b], [-r,b]\right)$ be such that $g(t) \le t$.

(ii) There exist constants L_f, $L_h > 0$ such that

$$|f(t,u_1,u_2,u_3) - f(t,v_1,v_2,v_3)| \le L_f\left(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| + |u_3 - v_3|\right);$$
$$|h(t,s,u_1,u_2) - h(t,s,v_1,v_2)| \le L_h\left(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|\right)$$

for all $t, s \in I,\ u_i, v_i \in \mathbb{R}\ (i = 1,2,3)$.

(H2) The function $\psi : [-r,b] \to \mathbb{R}_+$ is positive, nondecreasing and continuous and there exists $\lambda > 0$ such that

$$\int_0^t \psi(s)ds \le \lambda\psi(t),\ t \in [0,b].$$

Theorem 3.1. *Let the functions f and h in (2.1) satisfy (H1) and assume that (H2) holds. If $bL_f\left[2 + L_h b\right] < 1$, then the following assertions hold:*

(i) *the initial value problem (2.1), (2.2) has a unique solution $x \in C\left([-r,b], \mathbb{R}\right) \cap C'\left([0,b], \mathbb{R}\right)$;*

(ii) *the equation (2.1) is Ulam–Hyers–Rassias stable with respect to the function ψ.*

Proof. (i) Observe first that in view of assumption (H1)(i), the initial value problem (2.1), (2.2) is equivalent to the following integral equations:

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t f\left(s, x(s), x(g(s)), \int_0^s h(s,\tau,x(\tau),x(g(\tau)))d\tau\right) ds,\ t \in I,$$
$$x(t) = \phi(t),\ t \in [-r,0].$$

Consider the Banach space $X = C([-r,b],\mathbb{R})$ with Chebyshev norm $\|\cdot\|_C$, and define the operator $B_f : X \to X$ by

$$B_f(x)(t) = \phi(0) + \int_0^t f\left(s, x(s), x(g(s)), \int_0^s h(s,\tau,x(\tau),x(g(\tau)))d\tau\right) ds,\ t \in I,$$
$$B_f(x)(t) = \phi(t),\ t \in [-r,0].$$

Now using the contraction principle we show that B_f has a fixed point. Note that

$$|B_f(x)(t) - B_f(y)(t)| = 0, \quad x, y \in C([-r,b],\mathbb{R}), \quad t \in [-r,0]. \tag{3.1}$$

Next, for any $t \in I$, we can write

$$\begin{aligned}
&|B_f(x)(t) - B_f(y)(t)| \\
&\le \int_0^t L_f \{|x(s)-y(s)| + |x(g(s)) - y(g(s))| \\
&\qquad + \int_0^s L_h [|x(\tau) - y(\tau)| + |x(g(\tau)) - y(g(\tau))|] d\tau\right\} ds \\
&\le \int_0^t L_f \left\{\max_{0\le\sigma_1\le s} |x(\sigma_1) - y(\sigma_1)| + \max_{0\le\sigma_1\le s} |x(g(\sigma_1)) - y(g(\sigma_1))| \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^s L_h \left[\max_{0\le\sigma_2\le\tau} |x(\sigma_2) - y(\sigma_2)| + \max_{0\le\sigma_2\le\tau} |x(g(\sigma_2)) - y(g(\sigma_2))|\right] d\tau \right\} ds \\
&\le \int_0^t L_f \left\{\max_{-r\le\sigma_1\le b} |x(\sigma_1) - y(\sigma_1)| + \max_{-r\le\tau_1\le b} |x(\tau_1) - y(\tau_1)| \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^s L_h \left[\max_{-r\le\sigma_2\le b} |x(\sigma_2) - y(\sigma_2)| + \max_{-r\le\tau_2\le b} |x(\tau_2) - y(\tau_2)|\right] d\tau \right\} ds \\
&\le \int_0^t L_f \left\{2\|x-y\|_C + 2\int_0^s L_h \|x-y\|_C d\tau\right\} ds \\
&\le bL_f(2 + L_h b)\|x-y\|_C .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

From (3.1) and (3.2), it follows that

$$\|B_f(x) - B_f(y)\|_C \le bL_f(2 + L_h b)\|x-y\|_C,\ x, y \in C([-r,b],\mathbb{R}).$$

Since $bL_f(2 + L_h b) < 1$, the operator B_f is a contraction on the complete space X. Hence by Banach contraction principle the operator B_f has a fixed point $x^* : [-r,b] \to \mathbb{R}$, which is a solution of the problem (2.1), (2.2).

(ii) Let $y \in C([-r,b],\mathbb{R}) \cap C^{'}([0,b],\mathbb{R})$ be a solution of the inequality (2.5). Denote by $x \in C([-r,b],\mathbb{R}) \cap C^{'}([0,b],\mathbb{R})$ the unique solution of the problem:

$$x^{'}(t) = f\left(t, x(t), x(g(t)), \int_0^t h(t,s,x(s),x(g(s)))ds\right),\ t \in I,$$
$$x(t) = y(t),\ t \in [-r,0].$$

Then assumption (H1)(i) allows to write the following (equivalent to the above problem) integral equation:

$$x(t) = y(0) + \int_0^t f\left(s, x(s), x(g(s)), \int_0^s h(s,\tau,x(\tau),x(g(\tau)))d\tau\right) ds,\ t \in I, \tag{3.3}$$

$$x(t) = y(t),\ t \in [-r,0]. \tag{3.4}$$

If $y \in C([-r,b],\mathbb{R}) \cap C^{'}([0,b],\mathbb{R})$ satisfies the inequality (2.5), then using assumption (H2) and Remarks 2.1 and 2.2, we obtain

$$\begin{aligned} &\left|y(t) - y(0) - \int_0^t f\left(s, y(s), y(g(s)), \int_0^s h(s,\tau,y(\tau),y(g(\tau)))d\tau\right) ds\right| \\ &\quad \le \int_0^t |q_y(s)|\, ds \le \int_0^t \epsilon\psi(s)ds \le \lambda\epsilon\psi(t),\ t \in I. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Note that $|y(t) - x(t)| = 0$ for $t \in [-r,0]$. Next, using assumption (H1)(ii), the equation (3.3) and the estimate in (3.5), for any $t \in I$, we can write

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= \left|y(t) - y(0) - \int_0^t f\left(s, x(s), x(g(s)), \int_0^s h(s,\tau,x(\tau),x(g(\tau)))d\tau\right) ds\right| \\ &\le \left|y(t) - y(0) - \int_0^t f\left(s, y(s), y(g(s)), \int_0^s h(s,\tau,y(\tau),y(g(\tau)))d\tau\right) ds\right| \\ &\quad + \int_0^t \left| f\left(s, y(s), y(g(s)), \int_0^s h(s,\tau,y(\tau),y(g(\tau)))d\tau\right)\right. \\ &\qquad \left. - f\left(s, x(s), x(g(s)), \int_0^s h(s,\tau,x(\tau),x(g(\tau)))d\tau\right)\right| ds \\ &\le \epsilon\lambda\psi(t) + \int_0^t L_f \Big\{ |y(s) - x(s)| + |y(g(s)) - x(g(s))| \\ &\qquad + \int_0^s L_h\left[|y(\tau) - x(\tau)| + |y(g(\tau)) - x(g(\tau))|\right] d\tau \Big\}\, ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

According to (3.6), we consider operator $A : C([-r,b],\mathbb{R}_+) \to C([-r,b],\mathbb{R}_+)$ defined by

$$A(u)(t) = 0,\quad t \in [-r,0],$$

$$A(u)(t) = \epsilon\lambda\psi(t) + L_f \int_0^t \left\{u(s) + u(g(s)) + L_h \int_0^s \left[u(\tau) + u(g(\tau))\right] d\tau\right\} ds,\quad t \in [0,b].$$

Next, we prove that A is a Picard operator (see Definition 2.6). To this end, observe first that for any $u, v \in C([-r,b],\mathbb{R}_+)$ we have $|A(u)(t) - A(v)(t)| = 0$, $t \in [-r,0]$.

Using hypothesis (H1)(ii), for all $t \in I$, we can write

$$
\begin{aligned}
&|A(u)(t) - A(v)(t)| \\
&\leq L_f \int_0^t \left\{ |u(s) - v(s)| + |u(g(s)) - v(g(s))| + L_h \int_0^s \left[|u(\tau) - v(\tau)| + |u(g(\tau)) - v(g(\tau))| \right] d\tau \right\} ds \\
&\leq \int_0^t L_f \left\{ \max_{0 \leq \sigma_1 \leq s} |u(\sigma_1) - v(\sigma_1)| + \max_{0 \leq \sigma_1 \leq s} |u(g(\sigma_1)) - v(g(\sigma_1))| \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^s L_h \left[\max_{0 \leq \sigma_2 \leq \tau} |u(\sigma_2) - v(\sigma_2)| + \max_{0 \leq \sigma_2 \leq \tau} |u(g(\sigma_2)) - v(g(\sigma_2))| \right] d\tau \right\} ds \\
&\leq \int_0^t L_f \left\{ \max_{-r \leq \sigma_1 \leq b} |u(\sigma_1) - v(\sigma_1)| + \max_{-r \leq \tau_1 \leq b} |u(\tau_1) - v(\tau_1)| \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^s L_h \left[\max_{-r \leq \sigma_2 \leq b} |u(\sigma_2) - v(\sigma_2)| + \max_{-r \leq \tau_2 \leq b} |u(\tau_2) - v(\tau_2)| \right] d\tau \right\} ds \\
&\leq \int_0^t L_f \left\{ 2 \left\| u - v \right\|_C + 2 \int_0^s L_h \left\| u - v \right\|_C d\tau \right\} ds \leq b L_f \left(2 + L_h b \right) \left\| u - v \right\|_C .
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
\left\| A(u) - A(v) \right\|_C \leq b L_f \left(2 + L_h b \right) \left\| u - v \right\|_C, \text{ for all } u, v \in C\left([-r, b], \mathbb{R}_+ \right).
$$

Since $b L_f \left(2 + L_h b \right) < 1$, A is a contraction on $C\left([-r, b], \mathbb{R}_+ \right)$, using Banach contraction principle, we conclude that A is a Picard operator and $F_A = \{u^*\}$. Then, for $t \in I$, we have

$$
u^*(t) = \epsilon \lambda \psi(t) + L_f \int_0^t \left\{ u^*(s) + u^*(g(s)) + L_h \int_0^s \left[u^*(\tau) + u^*(g(\tau) \right] d\tau \right\} ds.
$$

Note that u^* is increasing and $\left(u^*\right)' \geq 0$ on I. Therefore $u^*(g(t)) \leq u^*(t)$ for $g(t) \leq t, \ t \in I$, and hence

$$
u^*(t) \leq \epsilon \lambda \psi(t) + \int_0^t 2 L_f \left(u^*(s) + \int_0^s L_h u^*(\tau) d\tau \right) ds.
$$

Next, applying Pachpatte's inequality given in Theorem 2.1, we obtain

$$
\begin{aligned}
u^* &\leq \epsilon \lambda \psi(t) \left[1 + \int_0^t 2 L_f \exp\left(\int_0^s \left[2 L_f + L_h \right] d\tau \right) ds \right] \\
&\leq \epsilon \lambda \psi(t) \left\{ 1 + 2 L_f \left(\frac{\exp(2 L_f + L_h) b - 1}{2 L_f + L_h} \right) \right\}. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Taking $C_\psi = \lambda \left\{ 1 + 2 L_f \left(\frac{\exp(2L_f + L_h) b - 1}{2 L_f + L_h} \right) \right\}$, from inequality (3.7) we get

$$
u^*(t) \leq C_\psi \, \epsilon \, \psi(t), \quad t \in [-r, b].
$$

For $u(t) = |y(t) - x(t)|$ the inequality (3.6) gives that $u(t) \leq A(u)(t)$. So, we have proved that $A : C\left([-r, b], \mathbb{R}_+ \right) \to C\left([-r, b], \mathbb{R}_+ \right)$ is an increasing Picard operator such that for $u \in C\left([-r, b], \mathbb{R}_+ \right)$, $u(t) \leq Au(t)$ and $F_A = \{u^*\}$. Hence, applying the abstract Gronwall lemma (Lemma 2.1), we obtain $u(t) \leq u^*(t),\ t \in [-r,b]$, implying that

$$|y(t) - x(t)| \leq C_\psi \, \epsilon \, \psi(t), \quad \forall\, t \in [-r,b]. \tag{3.8}$$

Thus, the equation (2.1) is Ulam–Hyers–Rassias stable with respect to the function ψ. Theorem 3.1 is proved. □

Corollary 3.1. *Let the functions f and h in (2.1) satisfy (H1) and assume that (H2) holds. If $bL_f\,[2 + L_h b] < 1$, then the problem (2.1), (2.2) has a unique solution and the equation (2.1) is generalized Ulam–Hyers–Rassias stable with respect to the function ψ.*

Proof. By taking $\epsilon = 1$ in the proof of Theorem 3.1, we obtain (cf. (3.8)):

$$|y(t) - x(t)| \leq C_\psi \, \psi(t), \quad \forall\, t \in [-r,b],$$

showing that the equation (2.1) is generalized Ulam–Hyers–Rassias stable with respect to the function ψ. □

Using arguments similar to those applied in the proof of Theorem 3.1, one can prove Ulam–Hyers stability of equation (2.1).

Observing that for $\psi(t) = 1,\ \forall\, t \in [-r,b]$ the assumption (H2) holds, we can state the following corollary of Theorem 3.1.

Corollary 3.2. *Let the functions f and h in (2.1) satisfy the hypothesis (H1). If $bL_f\,[2 + L_h b] < 1$, then the problem (2.1), (2.2) has a unique solution and the equation (2.1) is Ulam–Hyers stable.*

Proof. By taking $\psi(t) = 1,\ \forall\, t \in [-r,b]$ in the proof of Theorem 3.1, we obtain (cf. (3.8)):

$$|y(t) - x(t)| \leq C \, \epsilon, \quad \forall\, t \in [-r,b],$$

and the result follows. □

Corollary 3.3. *Let the functions f and h in (2.1) satisfy the hypothesis (H1). If $bL_f\,[2 + L_h b] < 1$, then the problem (2.1), (2.2) has a unique solution and the equation (2.1) is generalized Ulam–Hyers stable.*

Proof. The result follows from Corollary 3.2, by taking $\theta_f(\epsilon) = C\,\epsilon$. □

3.2. **Applications.** In this section we consider some important special cases of the problem (2.1), (2.2).

Fix any $r > 0$, and define $g_1(t) = t - r,\ t \in [0, b]$. Then we get the following special case of the problem (2.1), (2.2):

$$x'(t) = f_1\left(t, x(t), x(t-r), \int_0^t h_1(t, s, x(s), x(s-r))ds\right),\ t \in [0, b], \tag{3.9}$$

$$x(t) = \phi(t),\ t \in [-r, 0], \tag{3.10}$$

which is an initial value problem for a nonlinear Volterra integro-differential difference equation. Consider the following inequality:

$$\left| y'(t) - f_1\left(t, y(t), y(t-r), \int_0^t h_1(t, s, y(s), y(s-r))ds\right)\right| \le \epsilon\psi(t),\ t \in [0, b],$$

where ϵ, ψ and ϕ are as specified in Section 2 (Preliminaries).

As an application of Theorem 3.1, we have the following theorem for the problem (3.9), (3.10).

Theorem 3.2. *Suppose that the following assumptions are fulfilled:*

(A1) (i) $f_1 \in C\left([0, b] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right),\ h_1 \in C\left([0, b] \times [0, b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ *and* $g_1 \in C([0, b], [-r, b])$ *be such that* $g_1(t) \le t$;

(ii) *there exist constants* $L_{f_1},\ L_{h_1} > 0$ *such that*

$$|f_1(t, u_1, u_2, u_3) - f_1(t, v_1, v_2, v_3)| \le L_{f_1}\left(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| + |u_3 - v_3|\right);$$

$$|h_1(t, s, u_1, u_2) - h_1(t, s, v_1, v_2)| \le L_{h_1}\left(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|\right);$$

for all $t, s \in [0, b],\ u_i, v_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, 3)$;

(A2) *the function* $\psi : [-r, b] \to \mathbb{R}_+$ *is positive, nondecreasing and continuous, and there exists* $\lambda > 0$ *such that* $\int_0^t \psi(s)ds \le \lambda\psi(t),\ t \in [0, b]$;

(A3) $bL_{f_1}[2 + L_{h_2}b] < 1$.

Then the problem (3.9), (3.10) *has a unique solution* $x \in C([-r, b], \mathbb{R}) \cap C'([0, b], \mathbb{R})$, *and the equation* (3.9) *is Ulam–Hyers–Rassias stable with respect to the function* ψ.

Another special case of the problem (2.1), (2.2) we obtain by taking the delay $g_2(t) = t^2,\ t \in I = [0, 1]$. Then we have

$$x'(t) = f_2\left(t, x(t), x(t^2), \int_0^t h_2(t, s, x(s), x(s^2))ds\right),\ t \in I = [0, 1], \tag{3.11}$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0], \tag{3.12}$$

which is an initial value problem for a nonlinear Volterra integro-differential equation. Consider the following inequality:

$$\left| y'(t) - f_2\left(t, y(t), y(s^2), \int_0^t h_2(t, s, y(s), y(s^2))ds\right)\right| \le \epsilon\psi(t),\ t \in [0, 1].$$

where ϵ, ψ and ϕ are as specified in Section 2 (Preliminaries).

As an application of Theorem 3.1, we have the following theorem for the problem (3.11), (3.12).

Theorem 3.3. *Suppose that the following assumptions are fulfilled:*

(B1) (i) $f_2 \in C\left([0,1]\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$, $h_2 \in C\left([0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ *and* $g_2 \in C([0,1],[-r,1])$ *be such that* $g_2(t) \le t$*;*

(ii) *there exist constants* $L_{f_2},\ L_{h_2} > 0$ *such that*

$$|f_2(t,u_1,u_2,u_3) - f_2(t,v_1,v_2,v_3)| \le L_{f_2}\left(|u_1-v_1| + |u_2-v_2| + |u_3-v_3|\right);$$
$$|h_2(t,s,u_1,u_2) - h_2(t,s,v_1,v_2)| \le L_{h_2}\left(|u_1-v_1| + |u_2-v_2|\right);$$

for all $t,s\in[0,1],\ u_i,v_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,3)$*;*

(B2) *the function* $\psi : [-r,1]\to\mathbb{R}_+$ *is positive, nondecreasing and continuous, and there exists* $\lambda>0$ *such that* $\int_0^t \psi(s)ds \le \lambda\psi(t)$, $t\in[0,1]$;

(B3) $L_{f_2}\left[2+L_{h_2}\right] < 1$.

Then the problem (3.11), (3.12) *has a unique solution* $x\in C([-r,1],\mathbb{R})\cap C^{'}([0,1],\mathbb{R})$*, and the equation* (3.11) *is Ulam–Hyers–Rassias stable with respect to the function* ψ.

Other Ulam type stability results for equations (3.9) and (3.11) can be obtained by using the corresponding results from Section 3.1.

3.3. **Examples.** In this section, we present concrete examples to illustrate our main results obtained in Section 3.1.

Example 1. *Consider the following nonlinear delay Volterra integro-differential equations:*

(3.13)
$$x^{'}(t) = 1 + \frac{t\cos(x(t))}{140} - \frac{3x(t)}{140} + \frac{t\cos(x(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left\{\sin(x(s)) - \sin(x(g(s)))\right\}ds,\ \ t\in[0,5],$$

(3.14)
$$x(t) = 0,\ \ t\in[-1,0],$$

where $g(t) = \frac{t}{2},\ t\in[0,5]$. Clearly we have $g(t)\le t,\ t\in[0,5]$.

(i) Define $h : [0,5]\times[0,5]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ by

$$h\left(t,s,x(s),x(g(s))\right) = \frac{t}{70}\left[\sin(x(s)) - \sin(x(g(s)))\right],\quad t,s\in[0,5].$$

Then, for any $t,s\in[0,5]$ and $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned}|h(t,s,x_1,x_2) - h(t,s,y_1,y_2)| &\le \frac{t}{70}\left\{|\sin x_1 - \sin y_1| + |\sin x_2 - \sin y_2|\right\}\\ &\le \frac{5}{70}\left\{|x_1-y_1| + |x_2-y_2|\right\}.\end{aligned}$$

(ii) Define $f : [0,5] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$f\left(t, x(t), x(g(t)), \int_0^t h(t,s,x(s),x(g(s)))ds\right)$$
$$= 1 + \frac{t\cos(x(t))}{140} - \frac{3x(t)}{140} + \frac{t\cos(x(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(x(s)) - \sin(x(g(s)))\right]ds,\ t \in [0,5]$$
$$= 1 + \frac{t\cos(x(t))}{140} - \frac{3x(t)}{140} + \frac{t\cos(x(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t h\left(t,s,x(s),x(g(s))\right)ds.$$

Then, for any $t \in [0,5]$ and $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, we have

$$|f(t,x_1,x_2,x_3) - f(t,y_1,y_2,y_3)|$$
$$\leq \left\{\frac{t}{140}|\cos x_1 - \cos y_1| + \frac{3}{140}|x_1 - y_1|\right\} + \frac{t}{70}|\cos x_2 - \cos y_2| + \frac{1}{20}|x_3 - y_3|.$$

Next, for any $x, y \in \mathbb{R}$ with $x < y$, by mean value theorem, there exists $p,\ x < p < y$ such that $\frac{\cos x - \cos y}{x-y} = -\sin p \Rightarrow |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$. Therefore, we have

$$|f(t,x_1,x_2,x_3) - f(t,y_1,y_2,y_3)| \leq \left\{\frac{5}{140}|x_1 - y_1| + \frac{3}{140}|x_1 - y_1|\right\} + \frac{5}{70}|x_2 - y_2| + \frac{1}{20}|x_3 - y_3|$$
$$\leq \frac{5}{70}\left\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|\right\}.$$

Hence the above defined functions f and h verify the assumptions (H1) and (H2) with $L_f = \frac{5}{70},\ L_h = \frac{5}{70},\ b = 5$. Further, we see that $bL_f(2+bL_h) = 5\frac{5}{70}\left[2 + \frac{5}{70}5\right] = 0.84183673 < 1$. Therefore, by Corollary 3.2, the problem (3.13), (3.14) has a unique solution on $[-1,5]$ and the equation (3.13) is Ulam–Hyers stable on $[0,5]$. Other stability results for the equation (3.13) can be discussed similarly.

In fact, we see that the function

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \in [0,5], \\ 0 & \text{if } t \in [-1,0] \end{cases} \tag{3.15}$$

is the unique solution of the problem (3.13), (3.14). The verification is given below. For $x(t) = t,\ t \in [0,5]$ and $g(t) = \frac{t}{2},\ t \in [0,5]$, we have

$$1 + \frac{t\cos(x(t))}{140} - \frac{3x(t)}{140} + \frac{t\cos(x(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(x(s)) - \sin(x(g(s)))\right]ds$$
$$= 1 + \frac{t\cos(t)}{140} - \frac{3t}{140} + \frac{t\cos(\frac{t}{2})}{70} + \frac{1}{140}\int_0^t t\left[\sin(s) - \sin\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds = 1 = x^{'}(t).$$

Next, we discuss the Ulam–Hyers stability of the equation (3.13) with fixed delay $g(t) = \frac{t}{2},\ t \in [0,5]$ by finding the exact solution $x(t)$ of equation (3.13) corresponding to given values of ϵ and given solutions $y(t)$ of the inequalities.

(i) Take $\epsilon = 0.7$ and $y_1(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{if } t \in [0,5], \\ 0 & \text{if } t \in [-1,0]. \end{cases}$ Then for $t \in [0,5]$, we have

$$\left| y_1^{'}(t) - \left(1 + \frac{t\cos(y_1(t))}{140} - \frac{3y_1(t)}{140} + \frac{t\cos(y_1(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_1(s)) - \sin(y_1(g(s)))\right] ds\right)\right|$$
$$= \left| y_1^{'}(t) - 1 - \frac{t\cos(y_1(t))}{140} + \frac{3y_1(t)}{140} - \frac{t\cos(y_1(g(t)))}{70} - \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_1(s)) - \sin(y_1(g(s)))\right] ds\right|$$
$$\leq \left| \frac{1}{2} - 1 - \frac{t\cos(\frac{t}{2})}{140} + \frac{3\left(\frac{t}{2}\right)}{140} - \frac{t\cos(\frac{t}{4})}{70} - \frac{1}{140}\int_0^t t\left[\sin\left(\frac{s}{2}\right) - \sin\left(\frac{s}{4}\right)\right] ds\right| \leq 0.667499 < \epsilon.$$

For the solution $x(t)$ of the problem (3.13), (3.14) given in (3.15) and the constant $C = 4$, we have $|y_1(t) - x(t)| = \left|\frac{t}{2} - t\right| \leq 2.5 < C\epsilon,\ t \in [0,5]$, and $|y_1(t) - x(t)| = 0,\ t \in [-1,0]$. Therefore

$$|y_1(t) - x(t)| < C\epsilon,\ t \in [-1,5].$$

(ii) Let $y_2(t) = 0, t \in [-1,5]$ and $\epsilon = 1.2$. Then, for $t \in [0,5]$, we have

$$\left| y_2^{'}(t) - \left(1 + \frac{t\cos(y_2(t))}{140} - \frac{3y_2(t)}{140} + \frac{t\cos(y_2(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_2(s)) - \sin(y_2(g(s)))\right] ds\right)\right|$$
$$= \left| y_2^{'}(t) - 1 - \frac{t\cos(y_2(t))}{140} + \frac{3y_2(t)}{140} - \frac{t\cos(y_2(g(t)))}{70} - \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_2(s)) - \sin(y_2(g(s)))\right] ds\right|$$
$$= \left| -1 - \frac{t}{140} - \frac{t}{70}\right| \leq \frac{155}{140} < 1.2 = \epsilon.$$

For the solution $x(t)$ of the problem (3.13), (3.14) given in (3.15) and the constant $C = 6$, we have

$$|y_2(t) - x(t)| = |0 - t| \leq 5 < C\epsilon,\ t \in [0,5].$$

Further, $|y_2(t) - x(t)| = 0 < C\epsilon,\ t \in [-1,0]$. Therefore corresponding to $y_2(t) = 0, t \in [-1,5]$ and $\epsilon = 1.2$ we have the solution $x(t)$ given in (3.15) and the constant $C = 6$ that satisfy

$$|y_2(t) - x(t)| < C\epsilon,\ t \in [-1,5].$$

(iii) For $\epsilon = 1.5$ and $y_3(t) = \begin{cases} \frac{t}{10} & \text{if } t \in [0,5], \\ 0 & \text{if } t \in [-1,0], \end{cases}$ we have

$$\left| y_3^{'}(t) - \left(1 + \frac{t\cos(y_3(t))}{140} - \frac{3y_3(t)}{140} + \frac{t\cos(y_3(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_3(s)) - \sin(y_3(g(s)))\right] ds\right)\right|$$
$$= \left| y_3^{'}(t) - 1 - \frac{t\cos(y_3(t))}{140} + \frac{3y_3(t)}{140} - \frac{t\cos(y_3(g(t)))}{70} - \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_3(s)) - \sin(y_3(g(s)))\right] ds\right|$$
$$\leq 1.0557 < \epsilon.$$

The solution $x(t)$ of the problem (3.13), (3.14) given in (3.15) and the constant $C = 3$ verify

$$|y_3(t) - x(t)| \leq 4.5 = C\epsilon,\ t \in [-1,5].$$

(iv) Take $\epsilon = 10$ and $y_4(t) = \begin{cases} t^2 & \text{if } t \in [0,5], \\ 0 & \text{if } t \in [-1,0]. \end{cases}$ Then, for $t \in [0,5]$, we have

$$\left| y_4'(t) - \left(1 + \frac{t\cos(y_4(t))}{140} - \frac{3y_4(t)}{140} + \frac{t\cos(y_4(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_4(s)) - \sin(y_4(g(s)))\right] ds\right)\right|$$
$$= \left| y_4'(t) - 1 - \frac{t\cos(y_4(t))}{140} + \frac{3y_4(t)}{140} - \frac{t\cos(y_4(g(t)))}{70} - \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_4(s)) - \sin(y_4(g(s)))\right] ds\right| < \epsilon.$$

Further, for the solution $x(t)$ of the problem (3.13), (3.14) given in (3.15) and the constant $C = 2$, we have

$$|y_4(t) - x(t)| \leq 20 = C\epsilon, \ t \in [-1,5].$$

(v) Finally, we take $\epsilon = 77$ and $y_5(t) = \begin{cases} t^3 & \text{if } t \in [0,5], \\ 0 & \text{if } t \in [-1,0], \end{cases}$ to obtain

$$\left| y_5'(t) - \left(1 + \frac{t\cos(y_5(t))}{140} - \frac{3y_5(t)}{140} + \frac{t\cos(y_5(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_5(s)) - \sin(y_5(g(s)))\right] ds\right)\right|$$
$$= \left| y_5'(t) - 1 - \frac{t\cos(y_5(t))}{140} + \frac{3y_5(t)}{140} - \frac{t\cos(y_5(g(t)))}{70} - \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y_5(s)) - \sin(y_5(g(s)))\right] ds\right| < \epsilon.$$

For the solution $x(t)$ of the problem (3.13), (3.14) given in (3.15) and the constant $C = 2$, we have

$$|y_5(t) - x(t)| \leq 120 < C\epsilon, \ t \in [-1,5].$$

Remark 3.1. If $y(t)$ is a solution of the inequality

$$\left| y'(t) - \left(1 + \frac{t\cos(y(t))}{140} - \frac{3y(t)}{140} + \frac{t\cos(y(g(t)))}{70} + \frac{1}{20}\int_0^t \frac{t}{70}\left[\sin(y(s)) - \sin(y(g(s)))\right] ds\right)\right| < \epsilon,$$

and $x(t)$ is the exact solution of the problem (3.13), (3.14), then from the inequality $|y(t) - x(t)| \leq C\epsilon, \ t \in [-1,5]$, it follows that $y(t) \to x(t)$ as $\epsilon \to 0$.

The same fact can be observed from the example given above and Figure 1 below.

Рис. 1

Remark 3.2. The equation (2.1) is not Ulam–Hyers stable on the infinite interval $I = [0, \infty)$.

The next example supports the assertion of Remark 3.2.

Example 2. Consider the following Volterra delay integro-differential equations:
(3.16)
$$x^{'}(t) = \frac{17}{30} + \frac{1}{60}\sin(x(t)) - \frac{1}{15}\cos(x(g(t))) - \frac{1}{12}\int_0^t \frac{1}{10}\left[\cos(x(s)) + \sin(x(g(s)))\right] ds, t \in [0, \infty),$$
(3.17)
$$x(t) = 0, \ t \in [-1, 0],$$

where $g(t) = \frac{t}{4} \le t, \ t \in [0, \infty)$.

(i) Define the function $h : [0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by
$$h\left(t, s, x(s), x(g(s))\right) = \frac{1}{10}\left[\cos(x(s)) + \sin(x(g(s)))\right], \ t, s \in [0, \infty), \ t \ge s.$$

Then, for any $t, s \in [0, \infty)$ and $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, we have
$$|h(t, s, x_1, x_2) - h(t, s, y_1, y_2)| \le \frac{1}{10}\left\{|\cos x_1 - \cos y_1| + |\sin x_2 - \sin y_2|\right\}$$
$$\le \frac{1}{10}\left\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\right\}.$$

(ii) Define $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by
$$f\left(t, x(t), x(g(t)), \int_0^t h(t, s, x(s), x(g(s)))ds\right)$$
$$= \frac{17}{30} + \frac{1}{60}\sin(x(t)) - \frac{1}{15}\cos(x(g(t))) - \frac{1}{12}\int_0^t \left[\cos(x(s)) + \sin(x(g(s)))\right] ds$$
$$= \frac{17}{30} + \frac{1}{60}\sin(x(t)) - \frac{1}{15}\cos(x(g(t))) - \frac{1}{12}\int_0^t h\left(t, s, x(s), x(g(s))\right) ds.$$

Then, for any $t \in [0, \infty)$ and $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, we have
$$|f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3)| \le \frac{1}{60}|\sin x_1 - \sin y_1| + \frac{1}{15}|\cos x_2 - \cos y_2| + \frac{1}{12}|x_3 - y_3|$$
$$\le \frac{1}{12}\left\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|\right\}.$$

The above defined functions f and h verify the assumptions (H1) and (H2) with $L_f = \frac{1}{12}$ and $L_h = \frac{1}{10}$. Further, one can easily verify that the function
$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{if } t \in [0, \infty), \\ 0 & \text{if } t \in [-1, 0] \end{cases}$$
is the solution of the initial value problem (3.16), (3.17). Now, choose any $\epsilon > \frac{1}{2}$ and let
$$y(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{if } t \in [0, \infty), \\ 0 & \text{if } t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Then, for any $t \in [0, \infty)$, we have

$$\left|y^{'}(t) - \left(\frac{17}{30} + \frac{1}{60}\sin(y(t)) - \frac{1}{15}\cos(y(g(t))) - \frac{1}{12}\int_0^t \frac{1}{10}\left[\cos(y(s)) + \sin(y(g(s)))\right] ds\right)\right|$$
$$= \left|\frac{1}{3} - \frac{17}{30} - \frac{1}{60}\sin\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{15}\cos\left(\frac{t}{12}\right) + \frac{1}{120}\int_0^t \left[\cos\left(\frac{s}{3}\right) + \sin\left(\frac{s}{12}\right)\right] ds\right| \le \frac{19}{120} < \epsilon.$$

But for any solution $x(t)$ of equation (3.16) we have

$$|x(t) - y(t)| = \left|x(t) - \frac{t}{3}\right| \le |x(t)| + \frac{t}{3} \to \infty \quad as \quad t \to \infty.$$

Therefore, the equation (3.16) is not Ulam–Hyers stable on the infinite interval $I = [0, \infty)$.

Acknowledgments. The authors would like to thank an associate editor and an anonymous referee for valuable comments and useful suggestions.

Список литературы

[1] L. Cadariu, V. Radu, "On the stability of the Cauchy functional equation: a fixed point approach", Grazer Math. Ber., **346**, 43 – 52 (2004).
[2] L. P. Castro, R. C. Guerra, "Hyers–Ulam–Rassias stability of Volterra integral equation within weighted spaces", Libertas Mathematica, **33**, 21 – 35 (2013).
[3] L. P. Castro, A. Ramos, "Hyers–Ulam–Rassias stability for a class of nonlinear Volterra integral equations", Banach J. Math. Anal., **3**(1), 36 – 43 (2009).
[4] J. P. Dauer, K. Balachandran, " Existence of solutions of nonlinear neutral integro-differential equations in Banach spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, **251**, 93 – 105 (2000).
[5] M. Gachpazan, O. Baghani, "Hyers–Ulam stability of nonlinear integral equation", Fixed Point Theory and Applications, Volume 2010, Article ID 927640, 6 pages.
[6] M. Gachpazan, O. Baghani, "Hyers–Ulam stability of Volterra integral equation", Int. J. Nonlinear Anal. Appl., **1**(2), 19 – 25 (2010).
[7] J. Huang, Y. Li, "Hyers–Ulam stability of delay differential equations of first order", Math. Nachr., **289**(1), 60 – 66 (2016).
[8] M. Janfada, G. Sadeghi, "Stability of the Volterra integro-differential equation", Folia Mathematica, **18**(1), 11 – 20 (2013).
[9] S. M. Jung, "A fixed point approach to the stabilty of a Volterra integral equations", Fixed point Theory and Applications, Volume 2007, Article ID 57064, 9 pages.
[10] K. D. Kucche, P. U. Shikhare, "Ulamв Hyers Stability of integro-differential Equations in Banach Spaces via Pachpattes Inequality", Asian-European Journal of Mathematics, **11**(2), 1850062 (19 pages) (2018).
[11] K. D. Kucche and M. B. Dhakne, " On existence results and qualitative properties of mild solution of semilinear mixed Volterra–Fredholm functional integro-differential equations in Banach spaces", Appl. Math. Comput. **219**, 10806 – 10816 (2013).
[12] K. D. Kucche, M. B. Dhakne, "Existence of solution via integral inequality of Volferra-Predholm neutral functional integro-differential equations with infinite delay", Int. J. Diff. Eqs., Article ID 784956, 13 pages (2014).
[13] J. R. Morales, E. M. Rojas, "Hyers–Ulam and Hyers–Ulam–Rassias stability of nonlinear integral equations with delay", Int. J. Nonlinear Anal. Appl., **2**(2), 1 – 6 (2011).
[14] S. K. Ntouyas, "Initial and boundary value problems for functional differential equations via the topological transversality method: A survey", Bull. Greek Math. Soc., **40**, 3 – 41 (1998).
[15] S. K. Ntouyas and P. Ch. Tsamatos, " Global existence for functional semilinear volterra integro-differential equations in Banach space", Act. Math. Hungar., **80**(1–2), 67 – 82 (1998).
[16] D. Otrocol, "Ulam stablities of differential equations with abstract Volterra operator in a Banach space", Nonlinear Functional Analysis and Application, **15**(4), 613–619 (2010).

[17] D. Otrocol, V. Ilea, "Ulam stablity for a delay differential equations", Cen. Eur. J. Math., **11**(7), 1296 – 1303 (2013).
[18] B. G. Pachpatte, Inequalities For Differential and Integral Equations, Academic Press, New York (1998).
[19] I. Rus, "Gronwall lemmas: ten open problems", Sci. Math. Jpn., **70**, 221 – 228 (2009).
[20] I. Rus, "Ulam stability of ordinary differential equations", "BABES-BOLYAI", Mathematica, **54**(4), 125 – 133 (2009).
[21] S. Sevgin, H. Sevli, "Stability of a nonlinear Volterra integro-differential equation via a fixed point approach", J. Nonlinear Sci. Appl., **9**, 200 – 207 (2016).
[22] C. Tunc, E. Bicer, "Hyers–Ulam–Rassias stability for a first order functional differential equation", J. Math. Fund. Sci., **47**(2), 143 – 153 (2015).
[23] S. M. Ulam, Problems in Modern Mathematics, Chapter 6, John Wiley and Sons, New York, NY, USA (1960).

Поступила 15 июня 2017

После доработки 30 октября 2017

Принята к публикации 12 января 2018

Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 44 – 52

MEROMORPHIC FUNCTIONS SHARING THREE POLYNOMIALS WITH THEIR DIFFERENCE OPERATORS

ZHEN LI

China University of Petroleum Qingdao, Shandong, P.R. China[1]
E-mail: *lizhenffx@126.com*

Abstract. In this paper, we focus on a conjecture concerning uniqueness problem of meromorphic functions sharing three distinct polynomials with their difference operators, which is mentioned in Chen and Yi (Result Math v. 63, pp. 557-565, 2013), and prove that it is true for meromorphic functions of finite order. Also, a result of Zhang and Liao, obtained for entire functions (Sci China Math v. 57, pp. 2143-2152, 2014), we generalize to the case of meromorphic functions.

MSC2010 numbers: 34M05, 30D35, 39A10, 39B32.
Keywords: uniqueness problem; meromorphic function; difference operators; share polynomial.

In Nevanlinna theory, the study of relationship between two meromorphic functions that share several values CM or IM is an important topic, resulting from the Nevanlinna's famous five and four values theorems (see [5]). In 1976, Rubel and Yang [7] showed that if a non-constant entire function f and its first derivative f' share two distinct values CM, then they are identical. This result was extended by Mues and Steinmetz [4] in 1979 from sharing values CM to IM, and by Yang [8] in 1990 from first derivative to the k-th derivatives.

The difference analogues of Nevanlinna's theory have been studied more recently and become very popular (see [2]). In 2013, under the restriction on the order of meromorphic functions, Chen and Yi [1] deduced a uniqueness theorem of meromorphic functions sharing three distinct values with their difference operator $\Delta_c f = f(z+c) - f(z)$, where c is a non-zero constant. More precisely, in [1] was proved the following theorem.

Theorem A. *Let f be a transcendental meromorphic function such that its order of growth $\rho(f)$ is finite but is not an integer, and let $c(\neq 0) \in C$. If f and $\Delta_c f(\not\equiv 0)$ share three distinct values e_1, e_2, ∞ CM, then $f(z+c) = 2f(z)$.*

[1]The research was supported by NNSF of China Project No. 11601521, and the Fundamental Research Fund for Central Universities in China Project No. 15CX05061A, 15CX05063A and 15CX08011A

In [1], Chen and Yi conjectured that the conclusion of Theorem A still holds if the restriction imposed on $\rho(f)$ in Theorem A is omitted. In 2014, Zhang and Liao [11] considered the difference analogue of the result by Rubel and Yang and proved that the conjecture is true if f is an entire function of finite order. They obtained the following result.

Theorem B. *Let f be a transcendental entire function of finite order, and let a, b be two distinct constants. If f and $\Delta f = f(z+1) - f(z)(\not\equiv 0)$ share a, b CM, then $\Delta f = f$.*

In 2016, Lü and Lü [3] proved that the above conjecture holds if the meromorphic function is of finite order.

Theorem C. *Let f be a transcendental meromorphic function of finite order, and let $c(\neq 0)$ be a finite number. If $\Delta_c f$ and f share three distinct values e_1, e_2, ∞ CM, then $f = \Delta_c f$.*

In this paper, we continue the study of the above conjecture for meromorphic functions of finite order, and show that it remains true if the constants e_1, e_2, ∞ are replaced by the polynomials P_1, P_2, ∞ .

The next theorem is the main result of this paper.

Theorem 1. *Let f be a transcendental meromorphic function of finite order, and let $c(\neq 0)$ be a finite number. If $\Delta_c f$ and f share three distinct polynomials P_1, P_2, ∞ CM, then $f = \Delta_c f$.*

Remark. Obviously, Theorem 1 is an improvement of Theorem C.

We assume that the reader is familiar with the standard notation of Nevanlinna theory (see [9, 10]). In this paper, for two meromorphic functions f and g, we use the notation $f - g \not\equiv 0$ to denote that $f - g$ is not the zero function.

Next, we recall Nevanlinna's Lemma, which plays an important role in the proof of Theorem 1.

Nevanlinna's lemma [6]. *Let $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ be linearly independent meromorphic functions satisfying $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_p = 1$. Then, for $j = 1, 2, \cdots, p$, we have*

$$T(r, \varphi_j) \leq \sum_{k=1}^{p} N(r, \frac{1}{\varphi_k}) - \sum_{k=1, k\neq j}^{p} N(r, \varphi_k) + N(r, W) - N(r, \frac{1}{W}) + S(r),$$

where $W = W(\varphi_1, \varphi_2 \cdots, \varphi_p)$ is the Wronskian of $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$, and

$$S(r) = O(\log r) + O(\log max_{1\leq k\leq p} T(r, \varphi_j)) \quad as \quad r \to \infty,\ r \notin E,$$

for a set $E \subset (0, \infty)$ of finite Lebesgue measure. If all φ_k have finite order, then E can be chosen to be the empty set.

Proof of Theorem 1. Observe first that if P_1, P_2 are constants, then the theorem becomes Theorem C above. So, below we assume that one of P_1, P_2 is not constant, and, without loss of generality, we assume that $\deg P_2 \geq \deg P_1$. Our proof of the theorem is based on an idea from [3].

Since f, $\Delta_c f$ share P_1, P_2, ∞ CM and f is of finite order, then there exist two polynomials α, β such that

$$\frac{f - P_1}{\Delta_c f - P_1} = e^{\alpha}, \quad \frac{f - P_2}{\Delta_c f - P_2} = e^{\beta}. \tag{1}$$

If $e^{\alpha} = 1$ or $e^{\beta} = 1$, then $f = \Delta_c f$. If $e^{\alpha} = e^{\beta}$, then

$$\frac{f - P_1}{\Delta_c f - P_1} = \frac{f - P_2}{\Delta_c f - P_2},$$

implying that $f = \Delta_c f$.

On the contrary, suppose that $f \not\equiv \Delta_c f$. Then

$$e^{\alpha} \not\equiv 1, \quad e^{\beta} \not\equiv 1, \quad e^{\alpha} \not\equiv e^{\beta}.$$

Our aim below is to get a contradiction.

By (1), one has

$$f = P_1 + (P_2 - P_1)\frac{e^{\beta} - 1}{e^{\gamma} - 1}, \quad \Delta_c f = P_2 + (P_2 - P_1)\frac{1 - e^{-\alpha}}{e^{\gamma} - 1}, \tag{2}$$

where $\gamma = \beta - \alpha$.

It follows from (2) that

$$T(r, f) \leq T(r, e^{\beta}) + T(r, e^{\gamma}) + S(r, f). \tag{3}$$

Since $\Delta_c f = f(z + c) - f(z)$, we can write

$$\begin{aligned} \Delta_c f &= P_2(z) + [P_2(z) - P_1(z)]\frac{1 - e^{\gamma(z) - \beta(z)}}{e^{\gamma(z)} - 1} \\ &= [P_1(z + c) - P_1(z)] + [P_2(z + c) - P_1(z + c)]\frac{\beta_1(z)e^{\beta(z)} - 1}{\gamma_1(z)e^{\gamma(z)} - 1} \\ &\quad - [P_2(z) - P_1(z)]\frac{e^{\beta(z)} - 1}{e^{\gamma(z)} - 1}, \end{aligned} \tag{4}$$

where $\beta_1(z) = e^{\beta(z+c) - \beta(z)}$ and $\gamma_1(z) = e^{\gamma(z+c) - \gamma(z)}$.

Next, we prove that $\deg \beta = \deg \gamma$ by considering two cases.

Case 1. Assume that $\deg \beta < \deg \gamma$.

Then e^{β} is a small function of e^{γ}, and hence, we have

$$\deg[\beta(z + c) - \beta(z)] \leq \deg \beta(z) < \deg \gamma(z), \ \deg[\gamma(z + c) - \gamma(z)] < \deg \gamma(z),$$

implying that β_1, γ_1 are also small functions of e^{γ}. Suppose that z_0 is a zero of $\gamma_1 e^{\gamma} - 1$, and is not a zero of $\beta_1 e^{\beta} - 1$. If z_0 is not a zero of $e^{\gamma} - 1$, then by (4) it would be a pole of $\Delta_c f$. However, the equation (2) would imply that $\Delta_c f$ is analytic at z_0, yielding a contradiction. If z_0 is a zero of $e^\gamma - 1$, then $\gamma_1(z_0)e^{\gamma(z_0)} - 1 = 0$ and $e^{\gamma(z_0)} - 1 = 0$ imply $\gamma_1(z_0) - 1 = 0$. If $\gamma_1(z) - 1 \not\equiv 0$, then the second main theorem gives

$$\begin{aligned} T(r, e^\gamma) &\le \overline{N}(r, \frac{1}{\gamma_1 e^\gamma - 1}) + \overline{N}(r, \frac{1}{e^\gamma}) + \overline{N}(r, e^\gamma) + S(r, e^\gamma) \\ &\le N(r, \frac{1}{\beta_1 e^\beta - 1}) + N(r, \frac{1}{\gamma_1 - 1}) + S(r, e^\gamma) = S(r, e^\gamma), \end{aligned}$$

which is impossible. Thus, $\gamma_1(z) = e^{\gamma(z+c)-\gamma(z)} = 1$, which means that $\deg \gamma = 1$. Noting that by assumption $\deg \beta < \deg \gamma$, we conclude that β is a constant.

Next, by (4), we get

$$\begin{aligned} \Delta_c f &= [P_1(z+c) - P_1(z)] + [P_2(z+c) - P_1(z+c)]\frac{\beta_1 e^{\beta(z)} - 1}{\gamma_1 e^{\gamma(z)} - 1} \\ &- [P_2(z) - P_1(z)]\frac{e^{\beta(z)} - 1}{e^{\gamma(z)} - 1} \\ &= [P_1(z+c) - P_1(z)] + [P_2(z+c) - P_1(z+c) - P_2(z) + P_1(z)]\frac{e^{\beta(z)} - 1}{e^{\gamma(z)} - 1}. \end{aligned}$$

On the other hand, by (2) we have

$$\begin{aligned} \Delta_c f &= P_2(z) + [P_2(z) - P_1(z)]\frac{1 - e^{-\alpha(z)}}{e^{\gamma(z)} - 1} \\ &= P_2(z) + [P_1(z) - P_2(z)]e^{-\beta(z)} + [P_1(z) - P_2(z)]\frac{e^{-\beta(z)} - 1}{e^{\gamma(z)} - 1}, \end{aligned}$$

where $\gamma(z) = \beta(z) - \alpha(z)$. Here, by careful calculation, it can be shown that $degP_2(z) < degP_1(z)$, which is a contradiction.

Case 2. Let $\deg \beta > \deg \gamma$.

Then e^γ is a small function of e^β, and, as in the Case 1, we can conclude that β_1, γ_1 also are small functions of e^β. Assume that a_0 is a zero of $e^\beta - 1$ and is not a zero of $e^\gamma - 1$. Then, a_0 is a zero of $f - P_1$. Note that f and $\Delta_c f$ share P_1 CM. So a_0 is also a zero of $\Delta_c f - P_1$. Putting a_0 into the last form of $\Delta_c f$ in (4), we get

$$P_1(a_0) = [P_1(z+c) - P_1(z)] + [P_2(z+c) - P_1(z+c)]\frac{\beta_1(z) - 1}{\gamma_1(z)e^{\gamma(z)} - 1}|_{a_0}.$$

Next, we show that

$$P_1(z) = [P_1(z+c) - P_1(z)] + [P_2(z+c) - P_1(z+c)]\frac{\beta_1(z) - 1}{\gamma_1(z)e^{\gamma(z)} - 1}. \tag{5}$$

Indeed, otherwise, by the second main theorem, we would have

$$T(r,e^{\beta})\le \overline{N}(r,\frac{1}{e^{\beta}-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{e^{\beta}})+\overline{N}(r,e^{\beta})+S(r,e^{\beta})$$
$$\le N(r,\frac{1}{e^{\gamma}-1})+N(r,\frac{1}{[P_1(z+c)-P_1(z)]+[P_2(z+c)-P_1(z+c)]\frac{\beta_1-1}{\gamma_1e^{\gamma}-1}-P_1(z)})$$
$$+S(r,e^{\beta})=S(r,e^{\beta}),$$

which is absurd.

Now we rewrite (5) in the following form

$$[P_2(z+c)-P_1(z+c)]e^{\beta(z+c)-\beta(z)}-[P_2(z+c)-P_1(z+c)]$$
$$=[2P_1(z)-P_1(z+c)]e^{\gamma(z+c)}-[2P_1(z)-P_1(z+c)], \tag{6}$$

and show that γ is a constant. Suppose that $\deg\gamma\ge 1$. Then, combining (6) and the assumption $\deg\beta>\deg\gamma$, we get

$$\begin{aligned}&[P_2(z+c)-P_1(z+c)]e^{\beta(z+c)-\beta(z)}=[2P_1(z)-P_1(z+c)]e^{\gamma(z+c)},\\&P_2(z+c)-P_1(z+c)=2P_1(z)-P_1(z+c),\end{aligned}\tag{7}$$

implying that $\beta_1(z)=e^{\beta(z+c)-\beta(z)}=e^{\gamma(z+c)}$.

Next, rewriting (1.4) in the form

$$[P_2(z)-P_1(z+c)+P_1(z)](\gamma_1e^{\gamma}-1)(e^{\gamma}-1)e^{\beta}+[P_2(z)-P_1(z)](\gamma_1e^{\gamma}-1)(e^{\beta}-e^{\gamma})$$
$$=[P_2(z+c)-P_1(z+c)](\beta_1e^{\beta}-1)e^{\beta}(e^{\gamma}-1)-[P_2(z)-P_1(z)](e^{\beta}-1)(\gamma_1e^{\gamma}-1)e^{\beta},$$

after a routine computation, we get

$$a_0e^{2\beta}+a_1e^{\beta}+a_2=0,$$

where $a_0=[P_2(z+c)-P_1(z+c)](e^{\gamma(z)}-1)\beta_1(z)-[P_2(z)-P_1(z)](\gamma_1(z)e^{\gamma(z)}-1)$, and a_1,a_2 are small functions of e^{β}. The above equation shows that $a_0=0$, and hence, we have

$$[P_2(z+c)-P_1(z+c)](e^{\gamma(z)}-1)\beta_1(z)=[P_2(z)-P_1(z)](\gamma_1(z)e^{\gamma(z)}-1). \tag{8}$$

We put $\beta_1(z)=e^{\gamma(z+c)}$ into (7) to obtain

$$[P_2(z+c)-P_1(z+c)]e^{\gamma(z+c)+\gamma(z)}-[P_2(z+c)-P_1(z+c)-P_2(z)+P_1(z)]e^{\gamma(z+c)}$$
$$+[P_2(z)-P_1(z)]=0,$$

implying that γ is a constant, say $\gamma=A$. Thus, we have proved that γ is a constant. In addition, the form of f shows that f is an entire function. Then, by (4), we can get

$$\begin{aligned}\Delta_c f =& [P_1(z+c)-P_1(z)]+[P_2(z+c)-P_1(z+c)]\frac{\beta_1(z)e^{\beta(z)}-1}{\gamma_1(z)e^{\gamma(z)}-1}\\ &-[P_2(z)-P_1(z)]\frac{e^{\beta(z)}-1}{e^{\gamma(z)}-1}\\ &=\frac{e^{\beta(z)}}{e^A-1}\{[P_2(z+c)-P_1(z+c)]\beta_1(z)-[P_2(z)-P_1(z)]\}\\ &+\frac{1}{e^A-1}[P_2(z)-P_1(z)-P_2(z+c)+P_1(z+c)]+[P_1(z+c)-P_1(z)].\end{aligned}$$

Note that by (2)

$$\Delta_c f = P_2(z)+[P_2(z)-P_1(z)]\frac{1-e^{-\alpha(z)}}{e^{\gamma(z)}-1}=P_2(z)+[P_2(z)-P_1(z)]\frac{1-e^Ae^{-\beta(z)}}{e^A-1}.$$

Combining the above equations, we get

$$h_0e^{2\beta}+h_1e^{\beta}+h_2=0,$$

where h_i $(i=0,1,2)$ are small functions of e^β and $h_2=[P_2(z)-P_1(z)]\frac{-e^A}{e^A-1}$. Obviously, $h_2=0$, which shows that $P_1(z)=P_2(z)$, and we get a contradiction.

Thus, we have proved that $\deg\beta=\deg\gamma$. We can assume that

$$\deg\beta=\deg\gamma:=n\geq 1,$$

since f is a transcendental function.

Note that $\beta_1(z)=e^{\beta(z+c)-\beta(z)}$ and $\gamma_1(z)=e^{\gamma(z+c)-\gamma(z)}$ are two small functions of e^β and e^γ. Multiplying both sides of equation (4) by the factor $e^\beta(e^\gamma-1)(\gamma_1e^\gamma-1)$, we get

(9)

$$\begin{aligned}&[P_2(z)-P_1(z+c)+P_1(z)](\gamma_1e^\gamma-1)(e^\gamma-1)e^\beta+[P_2(z)-P_1(z)](\gamma_1e^\gamma-1)(e^\beta-e^\gamma)\\ &=[P_2(z+c)-P_1(z+c)](\beta_1e^\beta-1)e^\beta(e^\gamma-1)-[P_2(z)-P_1(z)](e^\beta-1)(\gamma_1e^\gamma-1)e^\beta.\end{aligned}$$

From (9) we obtain

$$b_0e^{2\gamma}+b_1e^{\beta+2\gamma}+b_2e^{\beta+\gamma}+b_3e^{2\beta}+b_4e^{2\beta+\gamma}+b_5e^\beta+b_6e^\gamma=0,$$

where

$$\begin{cases} b_0=[P_1(z)-P_2(z)]\gamma_1(z),\\ b_1=[P_2(z)+P_1(z)-P_1(z+c)]\gamma_1(z),\\ b_2=[P_1(z+c)-P_1(z)-P_2(z)]\gamma_1(z)+P_2(z+c)-P_2(z)-P_1(z),\\ b_3=[P_2(z+c)-P_1(z+c)]\beta_1(z)-P_2(z)+P_1(z),\\ b_4=[P_1(z+c)-P_2(z+c)]\beta_1(z)+[P_2(z)-P_1(z)]\gamma_1(z),\\ b_5=P_1(z)+P_2(z)-P_2(z+c),\\ b_6=P_2(z)-P_1(z).\end{cases}$$

Obviously, b_i $(i = 0, 1, \cdots, 6)$ are small functions of e^{β} and e^{γ}. The equation (9) can be written as follows:

$$\sum_{i=0}^{6} b_i e^{g_i} = 0, \tag{10}$$

where

$$\begin{cases} g_0 = 2\gamma, \quad\quad g_1 = \beta + 2\gamma, \quad g_2 = \beta + \gamma, \\ g_3 = 2\beta, \ g_4 = 2\beta + \gamma, \ \ g_5 = \beta, \ \ g_6 = \gamma. \end{cases}$$

We claim that $\deg(\gamma - \beta) = n$. On the contrary, suppose that $\deg(\gamma - \beta) < n$. Then $e^{\gamma-\beta}$ is a small function of e^{β} and e^{γ}. We denote by $N_E(r)$ the counting function of the common zeros of $e^{\beta} - 1$ and $e^{\gamma} - 1$. Assume that c_0 is a common zero of $e^{\beta} - 1$ and $e^{\gamma} - 1$. Then c_0 is a zero of $e^{\gamma-\beta} - 1$. Notice $e^{\beta} \neq e^{\gamma}$, then $e^{\gamma-\beta} - 1 \neq 0$. Therefore

$$N_E(r) \leq N(r, \frac{1}{e^{\gamma-\beta} - 1}) = S(r, e^{\gamma}).$$

Since e^{γ} is of finite order, we have $S(r + |c|, e^{\gamma}) = S(r, e^{\gamma})$. Assume that d_0 is a zero of $\gamma_1 e^{\gamma} - 1$, and is not a zero of $\beta_1 e^{\beta} - 1$. Similarly as above, we can conclude that d_0 is also a zero of $e^{\gamma} - 1$. Furthermore, d_0 is a zero of $\gamma_1 - 1$. If $\gamma_1 - 1 \neq 0$, then, it follows from the second main theorem that

$$\begin{aligned} T(r, e^{\gamma}) &\leq \overline{N}(r, \frac{1}{\gamma_1 e^{\gamma} - 1}) + \overline{N}(r, \frac{1}{e^{\gamma}}) + \overline{N}(r, e^{\gamma}) + S(r, e^{\gamma}) \\ &\leq N_E(r + |c|) + N(r, \frac{1}{\gamma_1 - 1}) + S(r, e^{\gamma}) \\ &\leq T(r, \frac{1}{\gamma_1 - 1}) + S(r + |c|, e^{\gamma}) + S(r, e^{\gamma}) = S(r, e^{\gamma}), \end{aligned}$$

which is a contradiction. Thus, $\gamma_1(z) = e^{\gamma(z+c)-\gamma(z)} = 1$, which implies that $e^{\gamma(z+c)} = e^{\gamma(z)}$ and $\deg \gamma = 1$. As a consequence, noting that $\deg(\beta - \gamma) < 1$, we see that $\beta - \gamma$ is a constant, say A_1. Recall $e^{\gamma(z+c)} = e^{\gamma(z)}$. One has $e^{\beta(z+c)-\beta(z)} = e^{\beta(z+c)-\gamma(z+c)-(\beta(z)-\gamma(z))} = e^{A_1-A_1} = 1$. So $e^{\beta(z+c)} = e^{\beta(z)}$. By (4), we can get

$$\Delta_c f = [P_1(z + c) - P_1(z)] + [P_2(z + c) - P_1(z + c) - P_2(z) + P_1(z)]\frac{e^{\beta(z)} - 1}{e^{\gamma(z)} - 1},$$

where $\deg \beta \geq 1$. But in view of (2), we have $\deg(-\alpha) = \deg(\gamma - \beta) < 1$, yielding a contradiction. Thus, we have shown that $\deg(\gamma - \beta) = n$.

Furthermore, one has $\deg(g_2 - g_j) = n$, for $j = 0, 1, 3, 4, 5, 6$, because

$$\begin{cases} g_2 - g_0 = \beta - \gamma, \ g_2 - g_1 = -\gamma, \ g_2 - g_3 = \gamma - \beta, \\ g_2 - g_4 = -\beta, \quad\quad g_2 - g_5 = \gamma, \quad\quad g_2 - g_6 = \beta. \end{cases}$$

We assume that $b_2 = [P_1(z+c)-P_1(z)-P_2(z)]\gamma_1(z)+P_2(z+c)-P_2(z)-P_1(z) \not\equiv 0$.

Then, we consider $\psi_j = b_j e^{g_j} (j = 0, \cdots, 6)$. From (10) we deduce that there exist a set $I \subset \{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$ and complex numbers $\lambda_j \neq 0 (j \in I)$ such that

$\psi_2 = \sum_{j\in I} \lambda_j \psi_j$, and ψ_j $(j \in I)$ are linearly independent. Rewriting this in the form:

$$\sum_{j\in I} \lambda_j \frac{b_j}{b_2} e^{g_j - g_2} = 1,$$

we can apply Nevanlinna's lemma to the functions

$$\varphi_j = \lambda_j \frac{b_j}{b_2} e^{g_j - g_2}, j \in I,$$

which are linearly independent and satisfy $\sum_{j\in I} \varphi_j = 1$.

We use the fact that the zeros and poles of φ_j and their Wronskians can come only from the zeros and poles of functions b_j whose Nevanlinna characteristic is

$$T(r, b_j) = O(r^{n-1}) = S(r, \varphi_j),$$

since $\deg(g_2 - g_j) = n$ for $j \in I$. So, by Nevanlinna's lemma we obtain that

$$T(r, \varphi_j) \leq S(r),$$

for all $j \in I$ with $S(r)$ as above. This is a contradiction. Thus, $b_2 \equiv 0$. Now, we consider the case

$$b_2 = [P_1(z+c) - P_1(z) - P_2(z)]\gamma_1(z) + P_2(z+c) - P_1(z) - P_2(z) = 0.$$

If $P_1(z+c) - P_1(z) - P_2(z) = 0$, then $P_2(z+c) - P_2(z) - P_1(z) = 0$. We can obtain $P_1(z+c) = P_2(z+c)$, which is a contradiction. Thus, $P_1(z+c) - P_1(z) - P_2(z) \not\equiv 0$, and we can get

$$\gamma_1(z) = \frac{P_2(z+c) - P_2(z) - P_1(z)}{P_1(z+c) - P_1(z) - P_2(z)}. \tag{11}$$

Note that γ_1 is not a constant function. This contradicts the fact that $\gamma_1(z)$ is an entire function. Thus, γ_1 is a constant, which implies that $\deg \gamma = n = 1$. So, we have $\deg \beta = n = 1$ and γ_1 is a constant. Suppose that

$$\deg(\gamma + \beta) = n = 1, \quad \deg(\gamma - 2\beta) = n = 1.$$

Then, one has $\deg(g_6 - g_j) = n$, for $j = 0, 1, 3, 4, 5$, because

$$g_6 - g_0 = -\gamma, g_6 - g_1 = -\gamma - \beta, g_6 - g_2 = \gamma - 2\beta, g_6 - g_4 = -2\beta, g_6 - g_5 = \gamma - \beta.$$

Again applying Nevanlinna's Lemma and replacing g_2 by g_6 in the above discussion, we get a contradiction.

Now, we assume that either $\gamma + \beta$ or $\gamma - 2\beta$ is constant. If $\gamma + \beta$ is constant, then for the functions g_j with some constants c_j, we have

$$g_0 = -2\beta + c_0,\ g_1 = -\beta + c_1,\ g_3 = 2\beta + c_3,\ g_4 = \beta + c_4,\ g_5 = \beta + c_5,$$

and b_j are polynomials (since β_1 and γ_1 are constants). So, the identity (10) gives

$$b_0^* e^{-2\beta} + b_1^* e^{-\beta} + b_3^* e^{2\beta} + b_4^* e^{\beta} = 0,$$

with certain polynomials b_j^*. This identity obviously implies that all b_j^* are 0, where $b_3^* = \{[P_2(z+c) - P_1(z+c)]\beta_1 + P_1(z) - P_2(z)\}e^{c_3}$.

If $b_3^* \equiv 0$, we can get $[P_2(z+c) - P_1(z+c)]\beta_1(z) + P_1(z) - P_2(z) = 0$. Say $P_3(z) = P_2(z) - P_1(z)$, so $[P_3(z+c) - P_3(z)]\beta_1(z) = P_3(z)(1 - \beta_1(z))$. We show that $P_3(z)$ is a constant. Indeed, assume the opposite that $degP_3(z) \geq 1$. Then, we can get $\beta_1(z) = 1$ and $P_3(z+c) - P_3(z) = 0$, implying that $P_3(z)$ is a constant, which is a contradiction. Thus, $P_3(z)$ is a constant, say $c(\neq 0)$. This implies that $P_1(z) = P_2(z) + c$. By (11) we can get that $\gamma_1(z) = 1 + \frac{c}{P_2(z+c)-2P_2(z)}$, showing that $\gamma_1(z)$ has a pole. Taking into account that $\gamma_1(z)$ is an entire function, we get a contradiction. Thus, we have $b_3^* \not\equiv 0$. This rules out the case where $\gamma + \beta$ is constant. The case where $\gamma - 2\beta$ is constant can be treated in the same way. This completes the proof of the theorem. □

Acknowledgment. The author would like to thank a referee and an associate editor for valuable suggestions and comments.

Список литературы

[1] Z. X Chen, H. X. Yi, "On sharing values of meromorphic functions and their differences", Result. Math. **63**, 557 – 565 (2013).

[2] R. G Halburd, R. J. Korhonen, "Nevanlinna theory for the difference operator", Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31**, 463 – 478 (2006).

[3] F. Lü, W. R. Lü, Meromorphic Functions Sharing Three Values with their Difference Operators. Comput. Methods Funct. Theory (2016) doi:10.1007/s40315-016-0188-5.

[4] E. Mues, N. Steinmetz, "Meromorphic Funktionen,die mit ihrer Ableitung Werte teilen", Manuscripta Math. **29**, 195 – 206 (1979).

[5] R. Nevanlinna, "Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der Meromorphen Funktionen", Acta. Math. **48**, 367 – 391 (1926).

[6] R. Nevanlinna, Le Thé or éme de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions Méromorphes, Gauthier-Villars, Paris (1929).

[7] L. A. Rubel, C. C. Yang, "Values shared by an entire function and its derivative", Complex Analysis, Lecture Notes in Math. **559**, Springer-Verlag, Berlin, 101 – 103 (1976).

[8] L. Z. Yang, "Entire functions that share finite values with their derivative", Bull. Austral. Math. Soc. **41**, 337 – 342 (1990).

[9] C. C. Yang, H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Science Press, Beijing (2006).

[10] L. Yang, Value Distribution Theory, Berlin, Springer-Verlag and Science Press (1993).

[11] J. Zhang, L. W. Liao, "Entire functions sharing some values with their difference operators", Sci. China Math. **57**, 2143 – 2152 (2014).

Поступила 30 мая 2017

После доработки 27 сентября 2017

Принята к публикации 12 января 2018

Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 53 – 69

МЕТОД ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

А. Г. МИНАСЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *arsh.minasyan@gmail.com*

Аннотация. В статье доказывается сходимость последовательной процедуры известной как покоординатный спуск к оценке максимального правдоподобия для обобщенных линейных моделей. Покоординатный спуск для линейной регрессии известен как метод чередующихся наименьших квадратов. Оптимизационная задача в случае экспоненциального семейства остается вогнутой и свойство концентрации вокруг истинного параметра позволяет использовать разложение Тейлора до второго порядка. Численные примеры иллюстрируют доказанную сходимость с последующим обсуждением начального значения.

MSC2010 number: 62L12, 62F12, 49M05.

Ключевые слова: обобщенная линейная модель; экспоненциальное семейство; чередующая максимизация.

1. Введение

Многие статистические задачи можно рассматривать как задачи полу параметрического оценивания, когда неизвестное распределение данных описывается параметром высокой или бесконечной размерности, в то время как параметр, который нас интересует имеет низкую размерность. Типичными примерами являются функциональная оценка, оценка функции в точке или просто оценка данного подвектора вектора параметров. Классическая статистическая теория обеспечивает общее решение этой задачи: оценивать полный вектор параметра методом максимального правдоподобия и проекцировать полученную оценку на целевое подпространство. Этот подход известен как профильный метод максимального правдоподобия и является эффективным при достаточно общих условиях, которые в случае обобщенных линейных моделей выполнены. Для более общего случая, например, М-оценок, эти технические условия следует вводить отдельно и проверять, выполнены ли они или нет. Мы ссылаемся на [8], [6] и [10] для подробного изложения теории и дальнейших ссылок.

В этом исследовании рассмотрена задача полупараметрической оценки профильного параметра (см. [4], [5] и ссылки внутри этих статей). Одной из таких задач, о которой стоит упомянуть, является задача выбора модели. В большинстве случаев практических задач нереалистично ожидать, что модельные предположения будут выполнены, даже если используются богатые непараметрические модели. Это означает, что истинное распределение данных $\mathbb{P}$ не принадлежит к рассматриваемому параметрическому семейству, в нашем случае – экспоненциальному семейству. Применимость общей полупараметрической теории в таких случаях сомнительна. Важной особенностью представленного подхода является то, что он в равной степени применим при неправильной спецификации модели.

Пусть $\mathcal{Y}$ это распределение, из которого идут наблюдаемые данные и статистическая модель предполагает, что неизвестное распределение данных $\mathbb{P}$ принадлежит заданному параметрическому семейству $(\mathbb{P}_v)$:

$$\mathcal{Y} \sim \mathbb{P} = \mathbb{P}_{v^*} \in (\mathbb{P}_{\mathbf{v}}, v \in \Theta), \tag{1.1}$$

где Θ некое параметрическое пространство.

Метод максимального правдоподобия в параметрической оценке позволяет оценить весь вектор параметров v путем максимизации соответствующего логарифмического правдоподобия

$$L(v) = \log \frac{d\mathbb{P}_v}{d\mu_0}$$

для некоторой доминирующей меры μ_0. Определим оценку максимального правдоподобия $\tilde{v}$ векторного параметра v следующим образом

$$\tilde{v} \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_{v \in \Theta} L(v). \tag{1.2}$$

Неправильная спецификация модели означает $\mathbb{P} \notin (\mathbb{P}_v, v \in \Theta)$. Другими словами, $L(v)$ есть функция квази максимального правдоподобия на Θ. Истинный параметр v^* определяется следующим образом

$$v^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_{v \in \Theta} \mathbb{E}L(v). \tag{1.3}$$

В случае допущения, что истинная модель не принадлежит нашему параметрическому семейству v^* определяет наилучшее параметрическое соответствие $\mathbb{P}$ рассматриваемым семейством. Относительно аналогичных результатов см. [1]. Сначала Кнайп начал работу в этом направлении, введя упорядоченные линейные функционалы (см. [9]). Для общих результатов чередующейся максимизации (минимизации) см. [2].

Ключевой момент данной работы заключается в том, что покоординатный спуск дает лишь небольшой выигрыш, или вовсе даже не дает, в сложности вычисления оптимальной точки для линейных моделей (см. [12]) при некоторых условиях на размерность параметров. В случае же с нелинейными моделями выигрыш ощутимый. В нелинейных моделях в большинстве случаев решения в явной форме нет, в некоторых случаях даже численные решения условий первого порядка могут быть очень сложными для реализации в полной размерности параметра. Метод, известный метод как покоординатного спуска (максимизации или минимизации) [3], помогает в таких ситуациях и эффективно оценивет вектор параметров.

Рассматриваемая модель имеет параметр v, размерность которого $p+q$, где p - размерность интересующегося нами параметра, а q - размерность остального вектора. Обычно p невелика, потому что мы также заботимся о пригодности и интерпретируемости нашей модели, но q может быть и очень большим, хотя оценивание этого параметра является второстепенной задачей, но для полноты модели мы не можем его исключить. Основные сложности с вычислениями происходят для случая больших размерностей, т. е. в случаях, когда $p+q$ достаточно велика, то обратить матрицу $(p+q) \times (p+q)$ становиться вычислительно невозможным.

Метод покоординатного спуска является частным случаем EM-алгоритма. EM-алгоритм является популярным алгоритмом, который впервые был получен в [7]. В [7] также описано, как EM-алгоритм можно реализовать в разных облостях. Мы ссылаемся на [11] за краткое введение в разработку EM-алгоритма и ограничиваемся ссылкой на известный результат сходимости [13], который по-прежнему является самым современным в большинстве случаев. К сожалению, результат описанный в [13], как и большинство результатов сходимости по этим итеративным процедурам, обеспечивает только локальную сходимость. В этой работе рассматривается один из особых случаев, когда можно доказать фактическую сходимость метода.

Остальная часть статьи имеет следующую структуру. Параграф 2 содержит предварительные сведения об обобщенных линейных моделях в классе случайных величин, называемых экспоненциальным семейством. Параграф 3 содержит основные результаты о сходимости покоординатного спуска для обобщенных линейных моделей. Параграф 4 иллюстрирует численную работу алгоритма, что подтверждает результат теоремы из параграфа 3.

2. Введение в обобщенные линейные модели

В этом разделе мы введем класс обобщенно линейных моделей с немного другой точки зрения. Этот параграф является подготовительным для параграфа 3.

Пусть Y_i независимые случайные величины, $X_i \in \mathbb{R}^p$ и $Y_i \sim P_i \in (\mathcal{P}_v)$, что означает $\exists v_i : P_i = P_{v_i}$, где $(\mathcal{P}_v)$ предполагается экспоненциальным семейством распределений с каноническим параметром. Экспоненциальное семейство будет обсуждено далее в этом параграфе. Обобщенные линейные модели могут быть записаны следующим образом $Y_i \sim P_{v(X_i)}$. В случае гауссовского распределения мы получаем $Y_i = v(X_i) + \varepsilon_i$ с произвольной функцией $v(\cdot)$.

Функция $v(x)$ может быть записана как

$$v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \psi_j(x).$$

Тогда, линейное параметрическое предположение дает

$$v(x) = \sum_{j=1}^{p+q} \theta_j \psi_j(x) = \sum_{j=1}^{p} \theta_j \psi_j(x) + \sum_{j=p+1}^{p+q} \theta_j \psi_j(x) \tag{2.1}$$

для заданного базиса $\psi_j(\cdot)$. Обозначим $\eta_i = \theta_{p+i}$ и вектор столбец $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q)^T \in \mathbb{R}^q$.

$$Y_i \sim P_{v_i}, \;\; v_i = \Psi_i^T \theta + \Phi_i^T \eta, \tag{2.2}$$

где $\Psi_i = (\psi_1(x), \ldots, \psi_p(x))^T \in \mathbb{R}^p$, $\Phi_i = (\psi_{p+1}(x), \ldots, \psi_{p+q}(x))^T \in \mathbb{R}^q$ и $\theta \in \mathbb{R}^p$, $\eta \in \mathbb{R}^q$.

Логарифм правдоподобия в данном случае равен

$$\log \frac{dP_\theta}{d\mu_0^n}(\mathcal{Y}) = \sum_{i=1}^{n} (v_i Y_i - g(\nu_i)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\Psi_i^T \theta Y_i + \Phi_i^T \eta Y_i - g(\Psi_i^T \theta + \Phi_i^T \eta) \right),$$

что следует из эквивалентности семейства (2.10), а функция $g(\cdot)$ может быть выведена из (2.8). Эквивалентно, имеем

$$L(\theta, \eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} S^T \theta + R^T \eta - A(\theta, \eta), \tag{2.3}$$

где

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} Y_i \Psi_i \in \mathbb{R}^p, \;\; R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} Y_i \Phi_i \in \mathbb{R}^q, \;\; A(\theta, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} g(\Psi_i^T \theta + \Phi_i^T \eta).$$

Обозначим логарифм правдоподобия через $L(\theta, \eta)$ или $L(v)$, где $v \stackrel{\text{def}}{=} (\theta, \eta)$.

Тогда, в терминах v получаем

$$L(v) = \Upsilon^T v - A(v),$$

где $\Upsilon = \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{p+q}$. Матрица информации Фишера определяется как $\mathcal{D}^2 \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla^2 \mathbb{E} L(v^*) = F(v^*)$, где $v = \begin{pmatrix} \theta \\ \eta \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{p+q}$, а ∇ это оператор дифференцирования. Матрица Гессе в точке v записывается следующим образом

$$\mathbb{F}(v) = -\nabla^2 \mathbb{E} L(v) = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\theta\theta}(v) & \mathbb{F}_{\theta\eta}(v) \\ \mathbb{F}_{\eta\theta}(v) & \mathbb{F}_{\eta\eta}(v) \end{pmatrix}.$$

Далее мы докажем, что функция $g(\cdot)$ выпукла, откуда будет следовать положительная определенность матрицы информации Фишера $\mathbb{F}$.

Определим вектор $\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \nabla L(v^*)$, а так же стандартизированную версию этого вектора $\breve{\xi}$ следующим образом

$$\breve{\xi} = \mathcal{D}^{-1} \nabla.$$

Параметры $\tilde{v} = (\tilde{\theta}, \tilde{\eta})$ зависят от данных, следовательно являются случайными, в то время как $v^* = (\theta^*, \eta^*)$ истинное значение параметра, которое не является случайной величиной. В реальности истинное распределение Y неизвестно, но мы делаем параметрическое предположение на класс распределений.

Запишем определения (1.2) и (1.3) таким образом

$$\tilde{v} = (\tilde{\theta}, \tilde{\eta}) = \arg\max_{\theta, \eta} L(\theta, \eta), \;\; v^* = (\theta^*, \eta^*) = \arg\max_{\theta, \eta} \mathbb{E} L(\theta, \eta). \tag{2.4}$$

Из определения v^* следует, что $\nabla \mathbb{E} L(v^*) = 0$ откуда вытекает

$$\mathbb{E} \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix}^T = \nabla A(\theta^*, \eta^*)$$

или

$$\mathbb{E} \Upsilon = \nabla A(v^*).$$

Важное свойство экспоненциального семейства заключается в том, что стохастическая компонента $\zeta(\theta, \eta)$ логарифма правдоподобия линейна по θ и η. Пусть

$\varepsilon_i = Y_i - \mathbb{E}Y_i$ и $\zeta = L - \mathbb{E}L$ тогда

$$\zeta(\theta,\eta) = (S^T - \mathbb{E}S^T)\theta + (R^T - \mathbb{E}R^T)\eta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\Psi_i^T\theta + \Phi_i^T\eta),$$

$$\nabla\zeta(\theta,\eta) = \begin{pmatrix} S - \mathbb{E}S & R - \mathbb{E}R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Psi_i & \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Phi_i \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим следующее эллиптическое множество

$$\Omega_\circ(r) \overset{\text{def}}{=} \{v : \|\mathcal{D}(v - v^*)\| \le r\}. \tag{2.5}$$

Множество $\Omega_\circ(r)$ называется локальной окрестностью v^* для $\mathcal{D}^2 = -\nabla^2\mathbb{E}L(v^*) = \mathbb{F}(v^*)$ и $\mathcal{V}^2 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}ov(\nabla L(v^*))$.

Запишем ковариационную матрицу в блочной форме

$$\mathcal{V}^2 = \begin{pmatrix} V^2 & E \\ E^T & Q^2 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Матрица информации Фишера $\mathbb{F}(v^*) = -\nabla^2\mathbb{E}L(v^*)$ в блочной форме

$$\mathbb{F}(v) = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{\theta\theta}(v) & \mathbb{F}_{\theta\eta}(v) \\ \mathbb{F}_{\eta\theta}(v) & \mathbb{F}_{\eta\eta}(v) \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Для центральной точки v^* разложение в блочной форме

$$\mathcal{D}^2 = \mathbb{F}(v^*) = \begin{pmatrix} D^2 & A \\ A^T & H^2 \end{pmatrix},$$

где $D^2 = \mathbb{F}_{\theta\theta}(v^*)$, $A = \mathbb{F}_{\theta\eta}(v^*)$ и $H^2 = \mathbb{F}_{\eta\eta}(v^*)$. Разложим так же вектор $\nabla \overset{\text{def}}{=} \nabla L(v^*)$ следующим образом

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_\theta \\ \nabla_\eta \end{pmatrix}.$$

2.1. **Экспоненциальное семейство с каноническим параметром.** В этой части мы формально определяем экспоненциальное семейство распределений. Стоит отметить, что экспоненциальное семейство представляет собой довольно широкий класс распределений. Этот класс содержит такие распределения как нормальное, биномиальное, пуассоновское, гамма, мультиномиальное и другие. Простейшими примерами распределений, не принадлежащими к экспоненциальному семейству, являются распределения Стьюдента и равномерное. Красота и удобство экспоненциального семейства состоит в том, что логарифмическая функция правдоподобия имеет простой вид и может быть записана явно. В общем случае мы говорим, что случайная величина с функцией плотности вероятности $f(\cdot)$ принадлежит экспоненциальному классу, если функция плотности вероятности может быть выражена следующим образом

$$f(x|\eta) = h(x)\exp\{\eta^T T(x) - A(\eta)\} \tag{2.8}$$

где η вектор параметров, $T(X)$ *достаточная статистика*, а $A(\cdot)$ *функция ссылки (link function).*

Как уже упомянулось выше, существует огромное число известных распределений, функции плотности вероятности которых могут быть выражены в виде (2.8). Чтобы убедиться в этом можно выразить функцию плотности нормального распределения в форме (2.8) или функции распределения Бернулли, Пуассона задав заранее соответсвующие области определения параметра.

2.1.1. *Обобщенные линейные модели.* Пусть Y является зависимым вектором от двух множеств независимых переменных Ψ и Φ. Рассмотрим модель

$$Y \sim P \in (\mathcal{P}_v)_{v\in\mathbb{R}} \ll \mu_0, \tag{2.9}$$

где $(\mathcal{P}_v)_{v\in\mathbb{R}}$ экспоненциальное семейство распределений с каноническим параметром, а μ_0 некоторая доминирующая мера. Итак,

$$\log\frac{dP_v}{d\mu_0}(y) = y\cdot v - g(v) \text{ для некоторой функции } g(\cdot). \tag{2.10}$$

Лемма 2.1. *Пусть $(\mathcal{P}_\nu)$ экпоненциальное семейство рапределений. Тогда,*

$$\mathbb{E}_\nu Y = g'(\nu),\ \ \mathbb{V}ar_\nu(Y) = \mathbb{E}_\nu[Y - g'(\nu)]^2 = g''(\nu) \tag{2.11}$$

Следовательно, функция $g(\cdot)$ выпукла вверх.

Замечание 2.1. Для простаты доказательство приведено для одномерной функции $g(\cdot)$, но данный результат верен и в случае многомерных функций и переменных. Одним из различий это то, что вместо дисперсии будет ковариационная матрица, которая в свою очередь является положительно определенной.

2.2. **Концентрация меры.** Напомним, что из свойств обобщенных линейных моделей следует, что стохастическая компонента логарифмической функции правдоподобия $\zeta(\theta,\eta)$ является линейной по θ и η, а детерминировання часть $\mathbb{E}L(v)$ — вогнутой по v.

Рассмотрим эллиптическое множество определенным в (2.5). В [12] доказано, что существует такое эллиптическое множество $\Omega_\circ(\mathrm{r})$ вокруг v такое что $\tilde{v}$ принадлежит этому множеству с большой вероятностью. Далее мы предполагаем, что x фиксированная и достаточно большая величина, чем и определяется уровень доминирующей вероятности. Мы называем случайное множество $\Omega_0(x)$ доминирующей вероятностью, если

$$\mathbb{P}\left(\Omega_0(x)\right) \geq 1 - \mathcal{C}e^{-x}.$$

Значение x может зависеть от n и стремиться к бесконечности с ростом n. Возможные значения x это $x \asymp n^{1/2}$ и $x \asymp \log n$, которые дают $\mathbb{P}\left(\Omega_0(x)\right) \geq 1 - \mathcal{C}/n$. Единственное требование к последовательности $\{x_n\}$ это, чтобы она не росла слишком быстро, формально, $x \leq x_c \overset{\text{def}}{\asymp} n^{1/2}$.

Все результаты, полученные ниже, считаются верными на случайном множестве $\Omega_\circ(x)$ и, поскольку это множество доминирующей вероятности, тогда все результаты верны с большой вероятностью. Мы всегда помним об этом факте, но для удобства и простоты обозначений мы исключаем его из формулировки теорем.

2.3. **Локальная квадратичная аппроксимация функции логарифмического правдоподобия.** Напомним, что функция $L(\theta, \eta)$ может быть переписана в терминах v как $L(v)$. В этой части мы покажем, что аппроксимация функции $L(v)$ до второго порядка с помощью разложения Тейлора является корректной в окрестности v^*. Положим $L(v_1, v_2) = L(v_1) - L(v_2)$ и напомним, что $\tilde{v}$ случайная оценка зависищая от данных. Формально,

$$\tilde{v} = \arg\max_v L(v), \quad v^* = \arg\max_v \mathbb{E}L(v).$$

Далее имеем,

$$L(v, v^*) = \nabla L(v^*)(v - v^*) - \frac{1}{2}\|\mathcal{D}^2(v - v^*)\|^2 + \alpha'(v, v^*), \tag{2.12}$$

где $\alpha'(\cdot)$ определена в (2.12).
Аналогичным образом, мы аппроксимируем функцию $L(v)$ в окрестности $\tilde{v}$ используя тот факт, что $\nabla L(\tilde{v}) = 0$, следовательно

$$L(v, \tilde{v}) = -\frac{1}{2}\|\mathcal{D}^2(v - \tilde{v})\|^2 + \alpha(v, \tilde{v}). \tag{2.13}$$

Замечание 2.2. Свойство концентрации позволяет использовать разложение Тейлора до второго порядка, которая хорошо аппроксимирует изначальную функцию $L(\cdot)$. Идея заключается в том, что вогнутая функция в окрестности максимума имеет квадратичную форму, т.е. разложение Тейлора до второго порядка не влечет большие ошибки аппроксимации.

3. Метод чередующихся наименьших квадратов для обобщенных линейных моделей

Этот параграф обобщает обычный метод наименьших квадратов для линейных моделей (см. [12]) с помощью покоординатного спуска и доказывает аналогичный результат в случае обобщенных линейных моделей. Задача нетривиальна, поскольку оценки для большинства моделей нельзя получить в явной форме. Вместо этого, мы аппроксимируем функцию правдоподобия с помощью квадратичной функции на случайном множестве, где наблюдается концентрация меры.

Обобщенные линейные модели часто используются во многих моделях и имеют ряд приложений в самых разных областях. Например, в категориальном анализе данных, задачах классификации, Пуассоновской регресии, и т.д. В теории статистического обучения и оценивания плотности вероятности в первую очередь рассматриваются именно обобщенные линейные модели. Линейные модели порой слишком простые, чтобы описать всю модель, поэтому во многих случаях целесообразно использовать обобщенные линейные модели.

Далее мы обсудим покоординатный спуск для функции квази-правдоподобия, полученной в предыдущей главе. В общем случае процедура чередования максимизации (минимизации) используется в тех случаях, когда прямые вычисления полной размерности невозможны или очень трудно реализуемы.

Пусть $L(v)$ функция правдоподобия, где вектор $v = (\theta, \eta)$ может быть разложен как *целевой* параметр θ и параметр η, который нас не интересует. Метод чередующейся максимизации это итеративный алгоритм начинающийся с какого-то начального значения $v^{\circ} \in \mathbb{R}^{p+q}$ и правилом обновления как показано ниже

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{k,k} &\stackrel{\text{def}}{=} (\hat{\theta}_k, \hat{\eta}_k) = \left(\hat{\theta}_k, \operatorname*{argmax}_{\eta \in \mathbb{R}^q} \mathcal{L}(\hat{\theta}_k, \eta)\right), \\ \tilde{v}_{k+1,k} &\stackrel{\text{def}}{=} (\hat{\theta}_{k+1}, \hat{\eta}_k) = \left(\operatorname*{argmax}_{\theta \in \mathbb{R}^p} \mathcal{L}(\theta, \hat{\eta}_k), \hat{\eta}_k\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

В этом разделе мы постараемся ответить на некоторые естественные вопросы, возникающие с описанной выше итерационной процедурой: Сходиться ли последовательность $\left(\hat{\theta}_k\right)$? Какова скорость сходимости? При каких условиях эта последовательность сходиться к оценке максимального правдоподобия $\tilde{v}$?

3.1. **Сходимость к оценке максимального правдоподобия.** Одним из основных результатов является следующая теорема про сходимость предложенной процедуры к оценке максимального правдоподобия для обобщенных линейных моделей.

Теорема 3.1. *Пусть модель задана как в* (2.2) *и положим* $\upsilon = (\theta, \eta) \in \mathbb{R}^{p+q}$. $L(\upsilon)$ *определена в* (2.3) *и* $\mathcal{D}^2 = -\nabla^2 \mathbb{E} L(\upsilon^*)$ *матрица Гессе для логарифмической функции правдоподобия* $L(\upsilon)$ *в блочно-матричной форме* $\begin{pmatrix} D^2 & A \\ A^T & H^2 \end{pmatrix}$ *в точке* $\tilde{\upsilon}$. *Предположим, что* $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \|D^{-1} A H^{-1}\|_{op}^2 < 1$ *и условие* $\|\mathcal{D}^{-1} \nabla^2 \mathbb{E} L(\upsilon) \mathcal{D}^{-1} - I_{p+q}\| \le \delta(r) \le \delta$ *выполнено, где* I_{p+q} *– единичная матрица.*

Тогда, последовательность оценок полученных методом чередующейся максимизации сходиться к $\tilde{\theta} = \Pi_\theta \tilde{\upsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_\theta \arg\max_\upsilon L(\upsilon)$, *а* Π_θ *проектор вектора на свой подвектор* θ.

Замечание 3.1. Обозначение $\tilde{\upsilon}_{k(+1),k}$ используется в случаях, когда результат верен для $\tilde{\upsilon}_{k,k}$ и $\tilde{\upsilon}_{k+1,k}$.

Доказательство. Запишем (2.13) в терминах θ и η

$$L(\upsilon, \tilde{\upsilon}) =$$

$$-\frac{1}{2}\|D^2(\theta - \tilde{\theta})\|^2 - \frac{1}{2}\|H^2(\eta - \tilde{\eta})\|^2 - (\theta - \tilde{\theta})^T A(\eta - \tilde{\eta}) + \alpha(\upsilon, \tilde{\upsilon}). \tag{3.2}$$

Пусть θ° есть начальное значение и используя метод опианный в (3.1) получаем

$$\hat{\eta}_0 = \tilde{\eta}(\theta^\circ) =$$

$$\operatorname*{argmin}_\eta \left[\frac{1}{2}\|D^2(\theta^\circ - \tilde{\theta})\|^2 + \frac{1}{2}\|H^2(\eta - \tilde{\eta})\|^2 + (\theta^\circ - \tilde{\theta})^T A(\eta - \tilde{\eta}) + \alpha(\upsilon, \tilde{\upsilon}) \right].$$

Тогда, условие первого порядка дает нам следующее соотношение

$$H^2(\hat{\eta}_0 - \tilde{\eta}) = A^T(\tilde{\theta} - \theta^\circ) + \nabla_\eta \alpha(\tilde{\upsilon}_{0,0}, \tilde{\upsilon}).$$

Аналогичным образом, решение $\hat{\theta}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\theta}(\hat{\eta}_0)$ имеет следующую форму

$$D^2(\hat{\theta}_1 - \tilde{\theta}) = A(\tilde{\eta} - \hat{\eta}_0) + \nabla_\theta \alpha(\tilde{\upsilon}_{1,0}, \tilde{\upsilon}).$$

Тогда итерационный процесс чередующейся максимизации дает нам следующую рекурсивную систему уравнений, зависящую от начального значения:

$$\begin{cases} H^2(\hat{\eta}_k - \tilde{\eta}) = A^T(\tilde{\theta} - \hat{\theta}_k) + \nabla_\eta \alpha(\tilde{\upsilon}_{k,k}, \tilde{\upsilon}) \\ D^2(\hat{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}) = A(\tilde{\eta} - \hat{\eta}_k) + \nabla_\theta \alpha(\tilde{\upsilon}_{k+1,k}, \tilde{\upsilon}). \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} H^2(\hat{\eta}_k - \tilde{\eta}) = A^T(\tilde{\theta} - \hat{\theta}_k) + \nabla_\eta \alpha(\tilde{\upsilon}_{k,k}, \tilde{\upsilon}) \\ D(\hat{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}) = D^{-1} A(\tilde{\eta} - \hat{\eta}_k) + D^{-1} \nabla_\theta \alpha(\tilde{\upsilon}_{k+1,k}, \tilde{\upsilon}). \end{cases} \tag{3.3}$$

Далее мы выражаем $(\tilde{\eta} - \hat{\eta}_k)$ использую второе уравнение (3.3) и подставляем в первое уравнение. В итоге, получим

$$D(\hat{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}) = D^{-1}AH^{-2}A^T(D^{-1}D)(\hat{\theta}_k - \tilde{\theta}) + D^{-1}\left[\nabla_\theta \alpha(v, \tilde{v}) - AH^{-2}\nabla_\eta \alpha(v, \tilde{v})\right].$$

Теперь определим $M_\circ \stackrel{\text{def}}{=} D^{-1}AH^{-2}A^T D^{-1}$ и

$$\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k}) \stackrel{\text{def}}{=} D^{-1}\left[\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k+1,k}, \tilde{v}) - AH^{-2}\nabla_\eta \alpha(\tilde{v}_{k,k}, \tilde{v})\right]$$

дает следующую рекурсивную формулу

$$D(\hat{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}) = M_\circ \cdot D(\hat{\theta}_k - \tilde{\theta}) + \Xi(\tilde{v}_{k(+1),k}). \tag{3.4}$$

Следовательно, суммируя для всех k, начиная с начального значения, взяв норму и используя неравенство треугольника, получим следующий результат

$$\|D(\hat{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta})\| \le \|M_\circ\| \cdot \|D(\hat{\theta}_k - \tilde{\theta})\| + \|\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k})\| \le \|M_\circ\|^k \cdot \|D(\theta^\circ - \tilde{\theta})\| + \sum_{\ell=0}^{k-1} \|M_\circ\|^\ell \cdot \|\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k})\| = \|M_\circ\|^k \cdot \|D(\theta^\circ - \tilde{\theta})\| + \|\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k})\| \cdot \frac{1 - \|M_\circ\|^k}{1 - \|M_\circ\|}.$$

Используя предположение $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \|D^{-1}AH^{-1}\| < 1$ легко видеть, что первый член стремиться к нулю, когда k стремиться к бесконечности.

Далее нужно показать, что $\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k})$ уменьшается с ростом k.

Для $D^{-1}\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k+1,k}, \tilde{v})$ Теорема C.1 в [2] дает нужную верхнюю оценку, которая стремиться к 0 с ростом k. Заметим, что используя эту теорему можно построить верхние оценки для оставшихся членов $\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k})$, которые, в свою очередь, дают верхнюю оценку для $\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k})$ целиком.

Следовательно, используя Теорему C.1 из [2] и неравенство треугольника получим нужную оценку для $\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k})$. Итого, получается

$$\|\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k})\| \le \|D^{-1}\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k+1,k}, \tilde{v})\| + \|D^{-1}AH^{-2}\nabla_\eta \alpha(\tilde{v}_{k,k}, \tilde{v})\| \to 0 \text{ когда } k \to \infty.$$

Объединив все полученные свойства, получим, что

$$\|D(\hat{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta})\| \le s_k \to 0 \text{ as } k \to \infty. \tag{3.5}$$

Используя те же выкладки ясно, как получить свойство сходимости для параметра η, что и завершает доказательство теоремы. □

Замечание 3.2. Последовательность s_k из (3.5) может быть интерпретирована как радиус эллиптического множества вокруг $\tilde{\theta}$, куда оценка $\hat{\theta}_{k+1}$ попадает с большой вероятностью.

Замечание 3.3. Результат Теоремы 3.1 говорит о том, что единственным условием для сходимости последовательности $\left(\hat{\theta}_k\right)$ является $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \|M_\circ\| < 1$ и$\|\mathcal{D}^{-1}\nabla^2\mathbb{E}L(v)\mathcal{D}^{-1} - I_{p+q}\| \le \delta$. Более того, наблюдается линейная сходимость к оценке максимального правдоподобия $\tilde{\theta}$, которую во многих случаях вычислительно трудно посчитать.

3.2. **Чередующаяся оценка.** Выше мы показали, что последовательность оценок, полученных с использованием метода чередующихся наименьших квадратов сходится к соответствующей оценке максимального правдоподобия. Это сильный и принципиально важный для практики результат. Как было сказано выше, есть две основные проблемы, которые делают проблему нетривиальной. Первая из них – невозможность получить явное решение в большинстве случаев, а вторая – большая размерность не интересующегося нас параметра, что делает невозможным непосредственное применение известного метода Ньютона-Рафсона. Альтернативный метод максимизации преодолел эти проблемы, а недопустимые ранее оценки поменялись на оценки "приближенные"к оценке максимального правдоподобия.

Далее в этом разделе мы покажем, что чередующаяся оценка близка к истинной оценке (θ^*, η^*). Напомним, что

$$v^* = (\theta^*, \eta^*) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_v \mathbb{E}L(v).$$

Следующая теорема известна как разложение Фишера и мы формулируем ее в рамках обобщенных линейных моделей. Вспоминая определения, приведенные в предыдущем параграфе, теперь мы готовы сформулировать и доказать разложение Фишера.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия Теоремы* (3.1) *и* $\breve{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} D^{-1}\breve{\nabla}$, *где* $\breve{\nabla} = \nabla_\theta - AH^{-2}\nabla_\eta$.

Тогда

$$\|D(\tilde{\theta}_k - \theta^*) - \breve{\xi}\| \to 0, \text{ *когда* } k \to \infty.$$

Доказательство. Основано на идеях доказательства Теоремы (3.1). Здесь мы разлагаем логарифмическую функцию правдоподобия вокруг v^*.

Сначала мы используем условия первого порядка и получаем

$$D(\tilde{\theta}_k - \theta^*) = D^{-1}\nabla_\theta L(v^*) - D^{-1}A(\tilde{\eta}_k - \eta^*) + D^{-1}\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k,k}, v^*)$$

$$H(\tilde{\eta}_k - \eta^*) = H^{-1}\nabla_\eta L(v^*) - H^{-1}A^T(\tilde{\theta}_{k-1} - \theta^*) + H^{-1}\nabla_\eta \alpha(\tilde{v}_{k-1,k}, v^*) \tag{3.6}$$

Основываясь на [2] мы можем ограничить $D^{-1}\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k,k}, v^*)$ и$H^{-1}\nabla_\eta \alpha(\tilde{v}_{k-1,k}, v^*)$. Для системы уравнений (3.6) верно

$$D(\tilde{\theta}_k - \theta^*) = D^{-1}\nabla_\theta L(v^*) - D^{-1}[AH^{-2}\nabla_\eta L(v^*) - AH^{-2}A^T(\tilde{\theta}_{k-1} - \theta^*) + AH^{-2}\nabla_\eta \alpha(\tilde{v}_{k-1,k}, v^*)] + D^{-1}\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k,k}, v^*),$$

отсюда следует

$$D(\tilde{\theta}_k - \theta^*) = M_\circ D(\tilde{\theta}_{k-1} - \theta^*) + D^{-1}\left[\nabla_\theta L(v^*) - AH^{-2}\nabla_\eta L(v^*)\right] + D^{-1}\left\{\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k,k}, v^*) - AH^{-2}\nabla_\eta \alpha(\tilde{v}_{k-1,k}, v^*)\right\}. \tag{3.7}$$

Заметим, что используя определение $\breve{\xi}$, (3.7) может быть переписан следующим образом

$$D(\tilde{\theta}_k - \theta^*) - \breve{\xi} = M_\circ D(\tilde{\theta}_{k-1} - \theta^*) + D^{-1}\left\{\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k,k}, v^*) - AH^{-2}\nabla_\eta \alpha(\tilde{v}_{k-1,k}, v^*)\right\}$$

Далее суммируя по всем k начиная с начального значения, после того, как взяли нормы от обеих сторон и использую предположение $\rho = \|M_\circ\| < 1$, получаем

$$\|D(\tilde{\theta}_k - \theta^*) - \breve{\xi}\| \le \mathcal{C}(\rho) \cdot D^{-1}\left\{\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k,k}, v^*) - AH^{-2}\nabla_\eta \alpha(\tilde{v}_{k-1,k}, v^*)\right\}, \tag{3.8}$$

где $\mathcal{C}(\rho)$ это константа зависящая только от ρ. Остальные члены можно оценить используя Теоремы С.1 из [2].

Напомним, что для того чтобы получить верхнюю границу для $D^{-1}\nabla_\theta \alpha(\tilde{v}_{k,k}, v^*)$ нужно условие $\|\mathcal{D}^{-1}\nabla^2 \mathbb{E}L(v)\mathcal{D}^{-1} - I_{p+q}\| \le \delta$ для некоторой константы $\delta > 0$.

Наконец,

$$\|D(\tilde{\theta}_k - \theta^*) - \breve{\xi}\| \le \breve{s}_k \to 0, \text{ когда } k \to \infty. \tag{3.9}$$

□

Отметим, что математическое ожидание случайной величины $\breve{\xi}$ равна нулю, более того, $\mathbb{V}ar(\breve{\xi}) = D^{-1}V^2D^{-1}$.

Замечание 3.4. Стоит так же отметить, что разложение Фишера остается верным даже в случае конечного k. Тогда, соответсвующая норма ограничена не нулем, а последовательностью $\breve{s}_k$ стремящемуся к нулю.

Замечание 3.5. Случайный вектор $\breve{\xi} \in \mathbb{R}^p$ в случае правильной спецификации модели имеет нормальное распределение, следовательно $\|\breve{\xi}\|^2$ имеет хи-квадрат χ^2_p распределение с p степенями свободы. В случае же неверной спецификации модели распределение $\|\breve{\xi}\|^2$ неизвестно в конечномерном случае, но ассимптотически оно имеет хи-квадрат распределение с p степенями свободы.

3.3. **Выбор начального значения.** Начальное значение может сыграть решающую роль в сближении чередующегося метода, и если мы "преуспеем"с ним, тогда выигрыш будет двояким. Первое – условия Теоремы (3.1) могут быть ослаблены и второе – число итераций для сходимости может быть сильно снижено по сравнению с "плохой"начальной точкой. Хорошие начальные значения θ° относятся к первому условию Теоремы (3.1), т.е. $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \|D^{-1}AH^{-1}\|^2 < 1$.

Обозначим через $\mathcal{V}$ векторное пространство собственных векторов матрицы $M_{\circ}$ соответсвующие собственным значениям которые больше 1. Формально, $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_l)$, где

$$M_{\circ} v_i = \lambda_i v_i, \forall i \in \{1, \ldots, l\} \quad \text{и} \ |\lambda_i| \geq 1.$$

Лемма 3.3. *Если θ° выбран так, что*

$$u \perp \mathcal{V}, \tag{3.10}$$

где $u \stackrel{\text{def}}{=} D(\theta^{\circ} - \tilde{\theta})$, тогда имеет место сходимость.

Доказательство этой леммы основано на простом линейной алгебры, тем не менее, кратко объясним идею. Заметим, что предположение $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \|D^{-1}AH^{-1}\|^2 < 1$ означает, что все собственные значения находятся внутри единичного круга, так что процесс будет сходиться. Это верно независимо от первоначального значения. Тем не менее, мы можем ослабить этот результат "хорошим"выбором начальных значений. Если матрица $M_{\circ}$ имеет собственные значения, находящиеся вне единичного круга, то начальное предположение могло бы помочь обратить их в нуль, будучи ортогональным пространству соответствующих собственных векторов.

Стоит также отметить, что условие Теоремы 3.1

$$\|\mathcal{D}^{-1}\nabla^2 \mathbb{E}L(v)\mathcal{D}^{-1} - I_{p+q}\| \leq \delta(r) \leq \delta$$

никак не относиться к выбору начальной точки и нужно, чтобы ограничить член $\Xi(\tilde{v}_{k(+1),k})$. Следовательно, это условие не может быть ослаблено в зависимости от начальной точки θ°.

4. Численный пример

В этом параграфе мы приведем численный пример и проиллюстрируем его сходимость согласно теореме 3.2. Предположим, что на столе лежат n монет и кто-то случайным образом выбирает одну из монет и подбрасывает k раз. Пусть в дальнейшем $n = 2$. Пусть у первой монеты вероятность появления орла p_1, а для второй — p_2. В этом случае параметр, оценить который является второстепенной задачей будет π – вероятность выбора первой монеты.

Предполагая, что при каждом выборе монета подбрасывается 10 раз и таких выборов 10, получается 50 наблюдений, 2 параметра, которые нас интересуют и один параметр π, оценка которой нам не интересна.

Пусть имеем

$$\text{Монета 2: } H, T, H, T, T, H, T, H, H, T.$$

$$\text{Монета 1: } H, H, H, H, H, H, T, H, H, H.$$

$$\text{Монета 1: } H, T, H, T, H, H, H, H, H, H.$$

$$\text{Монета 2: } H, T, H, T, T, T, T, H, H, T.$$

$$\text{Монета 1: } H, H, H, T, H, H, T, H, H, T.$$

Информация про монеты задана лишь для получения оценок максимального правдоподобия, но алгоритм этого не знает. Понятно, что

$$\tilde{p}_1 = \frac{24}{24+6} = 0.8 \qquad \tilde{p}_2 = \frac{9}{9+11} = 0.45.$$

Пусть $p_1^\circ = 0.6$ и $p_2^\circ = 0.5$ начальные значения параматров p_1, p_2. Проводя аналогию с параграфом 3 видим, что θ это вектор(p_1, p_2), а η — π. Вероятность получить k орлов в 10 подбрасываниях, где $c \in \{1, 2\}$ равна

$$p_c(k) = C_k^{10} p_c^k (1 - p_c)^{10-k}. \tag{4.1}$$

Заметим, что биномиальный коэффициент для обеих монет одинаковый, следовательно, остается только отношение таких факторов $p_c^k(1 - p_c)^{10-k}$ для некоторых k. Используя начальные значения и (4.1) получаем следующую таблицу

Первая итерация			
π	$1-\pi$	Монета 1	Монета 2
0.45	0.55	$\approx 2.2H, 2.2T$	$\approx 2.8H, 2.8T$
0.80	0.20	$\approx 7.2H, 0.8T$	$\approx 1.8H, 0.2T$
0.73	0.27	$\approx 5.9H, 1.5T$	$\approx 2.1H, 0.5T$
0.35	0.65	$\approx 1.4H, 2.1T$	$\approx 2.6H, 3.9T$
0.65	0.35	$\approx 4.5H, 1.9T$	$\approx 2.5H, 1.1T$
		$\approx 21.3H, 8.6T$	$\approx 11.7H, 8.4T$

И тогда, в следующей итерации мы получаем

$$\hat{p}_1^{(1)} = \frac{21.3}{21.3 + 8.6} = 0.71 \qquad \hat{p}_2^{(1)} = \frac{11.7}{8.4 + 11.7} = 0.58. \tag{4.2}$$

Число итераций до сходимости зависит от начальных условий и насколько далеко мы находимся от оценок максимального правдоподобия. При заданных начальных значениях $p_1^\circ = 0.6$ и $p_2^\circ = 0.5$ получаем следующую последовательность оценок. Так же в Таблице 1 представлены оценки полученные в случае со случайными начальными значениями.

Таблица 1. Сходимость с фиксированным и случайным начальным значением

Итерация	фиксированный старт		случайный старт	
	$\hat{p}_1^{(i)}$	$\hat{p}_2^{(i)}$	$\hat{p}_1^{(i)}$	$\hat{p}_2^{(i)}$
1	0.600000000	0.500000000	0.935954410	0.0659086863
2	0.713012235	0.581339308	0.759177699	0.434881703
3	0.745292036	0.569255750	0.78052855	0.485752725
4	0.768098834	0.549535914	0.79025212	0.505705724
5	0.7831645	0.534617454	0.794205962	0.513867055
6	0.791055245	0.52628116	0.795774011	0.517227986
7	0.794532537	0.522390437	0.79639082	0.518613125
8	0.79592866	0.520729878	0.796632802	0.519183793
9	0.796465637	0.520047189	0.796727694	0.519418794
10	0.796668307	0.519770389	0.796764932	0.519515523
11	0.796744149	0.519658662	0.796779561	0.51955532
12	0.796772404	0.519613607	0.796785317	0.519571692
13	0.796782900	0.519595434		

В обоих случаях сходимость к оценке максимального правдоподобия происходит с большой точностью.

Замечание 4.1. Заметим, что распределение Бернулли (подбрасывание монет) можно легко распространить, например, до нормального распределения. Пусть $X_1, \ldots, X_\ell \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $X_{\ell+1}, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Идея довольно общая и может быть применена и в случае n разных распределений $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$,$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ с разными вероятностями (p_i) принадлежности классу $i \in \{1, \ldots, n\}$. Более того, вместо нормальных распределений может быть использовано любое удобное для данной задачи распределение.

Abstract. We derived a convergence result for a sequential procedure known as alternating maximization (minimization) to the maximum likelihood estimator for a pretty large family of models - Generalized Linear Models (GLMs). Alternating procedure for linear regression becomes to the well-known algorithm of Alternating

Least Squares (ALS), because of the quadraticity of log-likelihood function $L(\mathbf{v})$. In GLMs framework we lose quadraticity of $L(\mathbf{v})$, but still have concavity due to the fact that error-distribution is from exponential family (EF). Concentration property makes the Taylor approximation of $L(\mathbf{v})$ up to the second order accurate and makes possible the use of alternating minimization (maximization) technique. Examples and experiments confirm convergence result followed by the discussion of the importance of initial guess.

Список литературы

[1] A. Andresen, "Finite sample analysis of profile M-estimation in the single index model", Electronic Journal of Statistics, **9**(2): 2528 – 2641 (2015).

[2] A. Andresen, V. Spokoiny, "Two convergence results for an alternation maximization", (2015) arXiv: 1501.01525.

[3] J. Bezdek, R. Hathaway, "Convergence of alternating optimization", Neural, Parallel & Pacific Computations **11**, 351 — 368 (2003).

[4] L. Cavalier, G. K. Golubev, D. Picard, A. B. Tsybakov, "Oracle inequialities for inverse problems",. The Annals of Statistics, **30** (3), 843 — 874 (2002).

[5] X. Chen, Large Sample Sieve Estimation of Semi-Nonparametric Models, Handbook of Econometrics, (2007) 6:55495632.

[6] V. Chernozhukov, D. Chetverikov, K. Kato, "Anti-concentration and honest, adaptive confidence bands", The Annals of Statistics, **34** (4), 1653 — 1677 (2014).

[7] A. P. Dempster, N. M. Laird, D. B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm", Journal of the Royal Statistical Society, Series B, **39**, 1 – 38 (1977).

[8] I. A. Ibragimov, R. Z. Khas'minskij, Statistical Estimation. Asymptotic Theory, Translation from Russian by Samuel Kotz, New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag (1981).

[9] A. Kneip, "Ordered linear smoothers", The Annals of Statistics, **22**(2), 835 – 866 (1994).

[10] M. R. Kosorok, Introduction to Empirical Processes and Semiparametric Inference, Springer in Statistics (2005).

[11] G. J. McLachlan and T. Krishman, The EM Algorithm and Extensions, Wiley, New York (1997).

[12] V. Spokoiny, T. Dickhaus, Basics of Modern Mathematical Statistics, Springer Texts in Statistics (2015).

[13] C. F. J. Wu, "On the convergence properties of the EM algorithm", Annals of Statistics, **11**, 95 – 103 (1983).

Поступила 26 октября 2018

После доработки 1 февраля 2019

Принята к публикации 25 апреля 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 70 – 81

ON THE ALMOST EVERYWHERE CONVERGENCE OF MULTIPLE FOURIER-HAAR SERIES

G. ONIANI, F. TULONE

*Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia**
University of Palermo, Palermo, Italy
E-mails: *oniani@atsu.edu.ge; francescotulone@hotmail.it*

Abstract. The paper deals with the question of convergence of multiple Fourier-Haar series with partial sums taken over homothetic copies of a given convex bounded set $W \subset \mathbb{R}^n_+$ containing the intersection of some neighborhood of the origin with $\mathbb{R}^n_+$. It is proved that for this type sets W with symmetric structure it is guaranteed almost everywhere convergence of Fourier-Haar series of any function from the class $L(\ln^+ L)^{n-1}$.

MSC2010 numbers: 42C10, 40A05.

Keywords: almost everywhere convergence; multiple Fourier-Haar series; lacunar series.

1. Definitions and notation

We use the following notation: $\mathbb{I}$ is the unit interval $[0,1]$; $\mathbb{Z}_0$ is the set of all nonnegative integers; Δ^i_k and $\widehat{\Delta}^i_k$ ($k \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$) are dyadic intervals $(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$ and $[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}]$, respectively; $\overline{p,q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $p \le q$) is the set $[p,q] \cap \mathbb{Z}$.

Recall (see [1]) that the Haar orthonormal system $h = (h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ consists of the functions defined on $\mathbb{I}$ in the following way: $h_1(x) = 1$ ($x \in \mathbb{I}$); if $m = 2^k + i$ ($k \in \mathbb{Z}_0$, $i \in \overline{1, 2^k}$), then $h_m(x) = 2^{k/2}$ when $x \in \Delta^{2i-1}_{k+1}$, $h_m(x) = -2^{k/2}$ when $x \in \Delta^{2i}_{k+1}$, $h_m(x) = 0$ when $x \notin \widehat{\Delta}^i_k$, at the inner points of discontinuity h_m is defined as the average of the limits from the right and from the left, and at the endpoints of $\mathbb{I}$ as the limits from inside of the interval.

In what follows, if something else is not said, we will assume that the dimension n is greater than 1. Let $\theta^{(1)} = (\theta^{(1)}_m)_{m\in\mathbb{N}}, \dots, \theta^{(n)} = (\theta^{(n)}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ be systems of functions on $\mathbb{I}$. Their product $\theta^{(1)} \times \dots \times \theta^{(n)}$ is defined as the system of functions $\theta_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \theta^{(1)}_{m_1}(x_1) \dots \theta^{(n)}_{m_n}(x_n)$, where $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ and $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$. The multiple Haar system is defined as the product $h \times \dots \times h$.

Let $E \subset \mathbb{N}$ and $\lambda > 1$. A set E is said to be λ-*lacunar* if for every $m, m^* \in E$ with $m < m^*$ we have $m^*/m \ge \lambda$. A set $E \subset \mathbb{N}^n$ is called λ-*lacunar* if there are one-dimensional λ-lacunar sets $E_1, \dots, E_n \subset \mathbb{N}$ such that $E \subset E_1 \times \dots \times E_n$. A

*The research is supported by Shota Rustaveli National Science Foundation (project no. 217282).

set $E \subset \mathbb{N}^n$ is said to be *lacunar* if E is λ-lacunar for some $\lambda > 1$. A sequence $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n}$ or a series $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{m}}$ is said to be *lacunar* (resp. λ-*lacunar*) if the set $E = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : a_{\mathbf{m}} \neq 0\}$ is lacunar (resp. is λ-lacunar).

By $H(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$) we denote the *spectrum* of the multiple Haar system at a point $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$, that is, the set $\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \neq 0\}$. By $\mathbb{I}_{\mathrm{d}}$ we denote the set of all dyadic-irrational numbers of $\mathbb{I}$.

From the definition of Haar system it easily follows that: *if $x \in \mathbb{I}_{\mathrm{d}}$, then $H(x)$ is a $3/2$-lacunar set*, and hence, taking into account that $H(\mathbf{x}) = H(x_1)\times\cdots\times H(x_n)$, we have that *$H(\mathbf{x})$ is $3/2$-lacunar at every $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n_{\mathrm{d}}$.*

Let $k \in \mathbb{N}$ and $\lambda > 1$. A set $E \subset \mathbb{N}$ we call (k,λ)-*sparse* if there are disjoint λ-lacunar sets $E_1,\dots,E_k \subset \mathbb{N}$ such that $E = E_1 \cup \cdots \cup E_k$. Obviously, the notion of $(1,\lambda)$-sparse set coincides with that of λ-lacunar set. A set $E \subset \mathbb{N}^n$ we call (k,λ)-*sparse* if there are (k,λ)-*sparse* one-dimensional sets $E_1,\dots,E_n \subset \mathbb{N}$ such that $E \subset E_1 \times \cdots \times E_n$. A set $E \subset \mathbb{N}^n$ we call *sparse* if it is (k,λ)-*sparse* for some $k \in \mathbb{N}$ and $\lambda > 1$.

It is easy to see that *if $x \in \mathbb{I}\backslash\mathbb{I}_{\mathrm{d}}$, then $H(x)$ is a $(2,3/2)$-sparse set.* Consequently, taking into account that $H(\mathbf{x}) = H(x_1)\times\cdots\times H(x_n)$, we have that *$H(\mathbf{x})$ is $(2,3/2)$-sparse at every $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n \setminus \mathbb{I}^n_{\mathrm{d}}$.* Thus, for arbitrary point $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ it is guaranteed $(2,3/2)$-sparseness of the spectrum $H(\mathbf{x})$.

A point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ we call *dyadic-irrational* if $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n_{\mathrm{d}}$, that is, if each coordinate of $\mathbf{x}$ is a dyadic-irrational number.

A sequence $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n}$ or a series $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{m}}$ we will call *sparse* (resp. (k,λ)-*sparse*) if the set $E = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : a_{\mathbf{m}} \neq 0\}$ is sparse (resp. is (k,λ)-sparse).

Let $W \subset \mathbb{R}^n_+$, where $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. For a series $\sigma = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{m}}$ by $S_W(\sigma)$ we denote its *partial sum by the set* W, that is, $S_W(\sigma) = \sum_{\mathbf{m}\in W} a_{\mathbf{m}}$. Note that the sum by empty set of indices we assume to be 0.

The convergence of partial sums $S_{rW}(\sigma)$ as $r \to \infty$ will be referred as W-*convergence* of the series σ. Here rW denotes the homothetic copy of the set W by a coefficient $r > 0$, that is, $rW = \{r\mathbf{x} : \mathbf{x} \in W\}$.

For the cases $W = \mathbb{I}^n$ and $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$, the W-convergence is called *cubical convergence* and *spherical convergence*, respectively.

A set $W \subset \mathbb{R}^n_+$ we call *standard* if it is bounded and contains an intersection of some neighborhood of the origin with $\mathbb{R}^n_+$.

A set $E \subset \mathbb{R}^n$ we call *symmetric with respect to k-th variable* if E is symmetric with respect to hyperplane $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_k = 0\}$.

We will say that a standard convex set $W \subset \mathbb{R}^n_+$ is of *symmetric type* if there exists a symmetric with respect to each variable convex set $E \subset \mathbb{R}^n$ for which $W = E \cap \mathbb{R}^n_+$.

Recall that a sequence $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n}$ is called *convergent* if $a_{\mathbf{m}}$ tends to a limit as $\min(m_1,\dots,m_n) \to \infty$, and a series $\sigma = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{m}}$ is called *convergent in the Pringsheim sense* if the sequence of its rectangular partial sums $S_{\mathbf{m}}(\sigma) = \sum_{i_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{m_n} a_{\mathbf{i}}$ $(\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n)$ is convergent.

By a *section of a multiple sequence* $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n}$ we shall mean the sequence obtained from $(a_{\mathbf{m}})$ by fixing some coordinates of the index $\mathbf{m}$, and by a *section of a series* $\sigma = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{m}}$ we shall mean a series composed by some section of the sequence $(a_{\mathbf{m}})$.

A multiple numerical series is said to *converge regularly* to a number s if it converges to s in the Pringsheim sense and if each of its sections is convergent in the Pringsheim sense (for one-dimensional sections ordinary convergence is considered). This type of convergence for double series was studied by Hardy [2] and Moricz [3]. For the briefness of formulations, for one-dimensional series the regular convergence will be identified with the ordinary convergence.

2. Results

A rectangular partial sum of a multiple Fourier-Haar series at a dyadic-irrational point $\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n$ is represented by an integral mean over an appropriate dyadic interval containing $\mathbf{x}$. From this connection and the well-known theorems by Lebesgue, Jessen, Marcinkiewicz and Zygmund (see [4, Ch. 2]) it follows that:

1) For every function $f\in L(\mathbb{I}^n)$, the Fourier-Haar series of f cubically converges to $f(\mathbf{x})$ at almost every point $\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n$;

2) For every function $f\in L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$, the Fourier-Haar series of f converges in the Pringsheim sense to $f(\mathbf{x})$ at almost every point $\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n$.

The optimality of the class $L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$ in the last assertion was shown by Zerekidze in [5], where it was proved that in any integral class $\varphi(L)(\mathbb{I}^n)$, wider than $L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$, there exists a function f with almost everywhere divergent Fourier-Haar series in the Pringsheim sense. As it was proved by Karagulyan [6] (see also [7]) a similar result is valid for Fourier series with respect to arbitrary product-system $\theta\times\cdots\times\theta$, where θ is a complete orthonormal system on $\mathbb{I}$ consisting of bounded functions.

Kemkhadze [8] proved that for every function $f\in L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$, the Fourier-Haar series of f spherically converges to $f(\mathbf{x})$ at almost every point $\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n$. The optimality of the class $L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$ in this result was established in [9] (for $n=2$) and in [10] (for arbitrary $n \geq 2$).

The following theorem shows that similar to spherical partial sums, almost everywhere W-convergence of Fourier-Haar series in the class $L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$ is valid for quite general type sets W.

Theorem 2.1. *Let $W \subset \mathbb{R}_+^n$ be a standard convex set of symmetric type. Then for every function $f \in L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$ the Fourier-Haar series of f is W-convergent to $f(\mathbf{x})$ at almost every point $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$.*

We obtain Theorem 2.1 from the following two results.

Theorem 2.2 ([11])**.** *For every function $f \in L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$ the Fourier-Haar series of f is regularly convergent to $f(\mathbf{x})$ at almost every point $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$. Furthermore, if $f \in L(\ln^+ L)^k(\mathbb{I}^n)$, where $0 \leq k \leq n-2$, then each $(k+1)$-dimensional section of Fourier-Haar series of f is regularly convergent at almost every point $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$.*

Theorem 2.3. *Let $W \subset \mathbb{R}_+^n$ be a standard convex set of symmetric type. Then for an arbitrary function $f \in L(\mathbb{I}^n)$ and a point $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ the following implication holds: (the Fourier-Haar series of f regularly converges to $f(\mathbf{x})$ at the point $\mathbf{x}$) $\Rightarrow$ (the Fourier-Haar series of f W-converges to $f(\mathbf{x})$ at the point $\mathbf{x}$).*

The next assertion is a corollary of Theorems 2.2 and 2.3.

Theorem 2.4. *Let $W \subset \mathbb{R}_+^n$ be a standard convex set of symmetric type. Then for an arbitrary function $f \in L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$ the following implication holds: (the Fourier-Haar series of f converges in the Pringsheim sense to $f(\mathbf{x})$ at every point $\mathbf{x}$ from a set E) $\Rightarrow$ (the Fourier-Haar series of f W-converges to $f(\mathbf{x})$ at almost every point $\mathbf{x}$ from E).*

Taking into account sparseness of Fourier-Haar series at every point $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$, we obtain Theorem 2.3 from the following result.

Theorem 2.5. *Let $W \subset \mathbb{R}_+^n$ be a standard convex set of symmetric type. Then for an arbitrary sparse numerical series $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n} a_{\mathbf{m}}$ the following implication holds: (σ is regularly convergent to a number s) $\Rightarrow$ (σ is W-convergent to s).*

Remark 2.1. For the case of lacunar series and spherical convergence, Theorem 2.4 was proved in [11]. For two-dimensional case, more complete results were obtained in [12].

3. Proof of Theorem 2.5

Let $W \subset \mathbb{R}_+^n$ be a standard set. Denote by $t_i(W)$ $(i \in \overline{1,n})$ the supremum of the i-th coordinates of those points of W which belong to the axes Ox_i. Obviously, $t_i(W) > 0$. Let us consider two intervals $I(W)$ and $J(W)$ associated with W, defined as follows:

$$I(W) = [0, t_1(W)] \times \cdots \times [0, t_n(W)],$$
$$J(W) = \left[0, \frac{t_1(W)}{2n}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{t_n(W)}{2n}\right].$$

Lemma 3.1. *Let $W \subset \mathbb{R}_+^n$ be a standard convex set of symmetric type. Then $J(W) \subset W \subset I(W)$.*

Proof. We first prove the inclusion $W \subset I(W)$. Assume the opposite, that is, $W \setminus I(W) \neq \emptyset$. Let E be a convex set which is symmetric with respect to each variable and such that $E \cap \mathbb{R}_+^n = W$. Observe that for each point $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ from the set $W \setminus I(W)$ there is $i \in \overline{1,n}$ for which $x_i > t_i(W)$. Without loss of generality, we can assume that

$$x_n > t_n(W). \tag{3.1}$$

Taking into account the symmetry of E, we have $(-x_1, \dots, -x_{n-1}, x_n) \in E$. The point $(0, \dots, 0, x_n)$ is a midpoint of the segment joining $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ and $(-x_1, \dots, -x_{n-1}, x_n)$. Therefore, by convexity of E we conclude that $(0, \dots, 0, x_n) \in E$, and consequently, we have

$$(0, \dots, 0, x_n) \in W. \tag{3.2}$$

The relations (3.1) and (3.2) contradict the definition of the number $t_n(W)$, and the obtained contradiction proves the inclusion $W \subset I(W)$.

Now, we prove the second inclusion $J(W) \subset W$. For every $i \in \overline{1,n}$, by $\mathbf{x}_i$ we denote the point lying on the axes Ox_i and having i-th coordinate equal to the number $t_i(W)/2$. From the properties of W it follows that all points $O, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ belong to W (here O denotes the origin). Then we consider the convex hull of the points $O, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ which we denote by $\mathrm{Conv}(O, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. From the convexity of W it follows that

$$\mathrm{Conv}(O, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \subset W. \tag{3.3}$$

As it is well-known, the convex hull of points $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ has the following representation $\{\sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{y}_i : \lambda_0, \dots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1\}$. Consequently, we have

$$\mathrm{Conv}(O, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \right\}. \tag{3.4}$$

Let $\mathbf{x}$ be an arbitrary point from the interval $J(W)$. For each $i \in \overline{1,n}$, we take the number λ_i equal to the ratio of x_i and $t_i(W)/2$. Then we have

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \le \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{t_i(W)}{2n} \div \frac{t_i(W)}{2} \right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i.$$

From (3.3) and (3.4) we conclude that $\mathbf{x} \in W$. Consequently, $J(W) \subset W$. □

Let $W \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \overline{1,n}$ and $t \in \mathbb{R}$. Consider the section of W by hyperplane $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = t\}$, that is, the set $W[i,t] = W \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = t\})$. Denote by $W(i,t)$ the projection of $W[i,t]$ onto $\mathbb{R}^{n-1}$ taken by the variables $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. We will refer the sets $W(i,t)$ as sections of W.

Lemma 3.2. *Let $n \ge 3$ and $W \subset \mathbb{R}^n_+$ be a standard convex set of symmetric type. Then for every $i \in \overline{1,n}$ and $t \in (0, t_i(W))$ the section $W(i,t) \subset \mathbb{R}^{n-1}_+$ is an $(n-1)$-dimensional standard convex set of symmetric type.*

Proof. Without loss of generality we assume that $i = n$. Let $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ be the standard algebraic basis in $\mathbb{R}^n$. Suppose $\mathbf{x} = t\mathbf{e}_n$, $\mathbf{x}_i = \frac{t_i(W)}{2}\mathbf{e}_i$ $(i = 1, \dots, n-1)$ and $\mathbf{x}_n = t^*\mathbf{e}_n$, where t^* is some number from the interval $(t, t_n(W))$. From the properties of W it follows that the points $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ belong to W.

For each $i = 1, \dots, n-1$ let us consider the point $\mathbf{y}_i = \alpha\mathbf{x}_n + (1-\alpha)\mathbf{x}_i$, where $\alpha = t/t^*$. Using convexity of W we have $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-1} \in W$. Besides, the n-th coordinate of each point $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-1}$ is equal to t. From these facts it follows that the section $W(n,t)$ is a standard set in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Observe that the set $W \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$ is convex as an intersection of two convex sets. Consequently, $W(n,t)$ is a convex subset of $\mathbb{R}^{n-1}$.

Let E be the convex set that is symmetric with respect to each variable for which $E \cap \mathbb{R}^n_+ = W$. It is easy to see that $E \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$ is symmetric with respect to variables $x_1, \dots, x_{n-1}$. Consequently, $E(n,t)$ is a subset of $\mathbb{R}^{n-1}$ that is symmetric with respect to each variable. Now, taking into account the equality $E(n,t) \cap \mathbb{R}^{n-1}_+ = W(n,t)$, we conclude that $W(n,t)$ is a standard convex set of symmetric type. □

Lemma 3.3. *Let $W \subset \mathbb{R}^n_+$ be a standard convex set of symmetric type. Then for every $i = 1, \dots, n-1$ and $t_1, \dots, t_i > 0$, the set*

$$W \cap ([0,t_1] \times \cdots \times [0,t_i] \times \mathbb{R}^{n-i}_+)$$

is also a standard convex set of symmetric type.

Proof. Denote $V = [0,t_1] \times \cdots \times [0,t_i] \times \mathbb{R}^{n-i}_+$. It is easy to see that V is a convex set of symmetric type and the intersection of two convex sets of symmetric type is also similar one. Consequently, $W \cap V$ is a convex set of symmetric type. On the other hand, taking into account that W is standard we can conclude that $W \cap V$ is a standard set. $\square$

Let us introduce the following notation. We denote:
by $\mathbb{M}_n$ the class of all subsets of $\overline{1,n}$;
by $|M|$ the number of elements of a set M;
by $\pi(n, M)$ $(M \in \mathbb{M}_n)$ the bijection $\pi(n, M) : \overline{1,n} \to \overline{1,n}$ with the following properties:

- $\pi(n, M)$ is increasing on the set $\overline{1,|M|}$ and maps this set onto M,
- $\pi(n, M)$ is increasing on $\overline{|M|+1,n}$ and maps this set onto $\overline{1,n} \setminus M$;

by $(\mathbf{t}, \mathbf{h}, M)$ $(M \in \mathbb{M}_n, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{|M|}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n-|M|})$ the point $\mathbf{x}$ of $\mathbb{R}^n$ such that $x_{\pi(n,M)(i)} = t_i$ if $i \in \overline{1,|M|}$ and $x_{\pi(n,M)(i)} = h_{i-|M|}$ if $i \in \overline{|M|+1,n}$;
by $A \times^M B$ $(M \in \mathbb{M}_n, A \subset \mathbb{R}^{|M|}, B \subset \mathbb{R}^{n-|M|})$ the product of the sets A and B corresponding to the set M, that is, the set $\{(\mathbf{t}, \mathbf{h}, M) : \mathbf{t} \in A, \mathbf{h} \in B\}$ (it is clear that $A \times^M B = B \times^{\overline{1,n} \setminus M} A$);
by $\mathbf{\Delta}(n, M)$ $(M \in \mathbb{M}_n, 1 \le |M| < n)$ the class of "M-dimensional" intervals Δ of type $([0, p_1] \times \ldots [0, p_{|M|}]) \times^M \{(q_1, \ldots, q_{n-|M|})\}$, where $p_1, \ldots, p_{|M|}, q_1, \ldots, q_{n-|M|} \in \mathbb{N}$; and by $l(\Delta)$ the largest among numbers q_i from the definition of an interval $\Delta \in \mathbf{\Delta}(n, M)$.

By $C(a_1, \ldots, a_m)$ will be denoted positive constants depending on parameters $a_1, \ldots, a_m$. For a standard set $W \subset \mathbb{R}^n_+$ we denote $t(W) = \min\{t_1(W), \ldots, t_n(W)\}$. Obviously, we have $t(W) > 0$.

Lemma 3.4. *Let $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 1$, $E \subset \mathbb{N}^n$ be a (k, λ)-sparse set, and let $W \subset \mathbb{R}^n_+$ be a standard convex set of symmetric type. Then the set $E \cap W$ may be decomposed in the following way:*

$$E \cap W = (E \cap J(W)) \cup \bigcup_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} (E \cap \Delta),$$

where $\mathbf{\Delta} \subset \bigcup\{\mathbf{\Delta}(n, M) : M \in \mathbb{M}_n, 1 \le |M| < n\}$, $|\mathbf{\Delta}| \le C(n, k, \lambda)$, the intervals $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ are disjoint and they do not intersect $J(W)$, $\Delta \subset W$ and $l(\Delta) > t(W)/2n$ for every $\Delta \in \mathbf{\Delta}$.

Proof. For $i \in \overline{1,n}$, $t \in \mathbb{R}$, an one-dimensional interval I and a standard convex set V, we denote

$$\Gamma_i(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = t\}, \;\; \Gamma_i(I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \in I\},$$
$$Q_i(V) = \left\{q \in \left(\frac{t_i(V)}{2n}, t_i(V)\right] \cap \mathbb{N} : E \cap \Gamma_i(q) \neq \emptyset\right\}.$$

Then we have the decomposition:

$$V = \left(V \cap \Gamma_i\left(\left[0, \frac{t_i(V)}{2n}\right]\right)\right) \cup \left(V \cap \Gamma_i\left(\left(\frac{t_i(V)}{2n}, t_i(V)\right]\right)\right). \tag{3.5}$$

Also, by virtue of (k, λ)-sparseness of the set E, the following inequality holds:

$$|Q_i(V)| \leq k(1 + \log_\lambda(2n)). \tag{3.6}$$

Let us introduce the following sets

$$W_i = W \cap \left(\left[0, \frac{t_1(W)}{2n}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{t_i(W)}{2n}\right] \times \mathbb{R}_+^{n-i}\right) \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Also, we define $W_0 = W$ and $W_n = J(W)$. Obviously, we have $W = W_0 \supset W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_{n-1} \supset W_n = J(W)$. Observe that by Lemma 3.3 each W_i is a standard convex set of symmetric type.

Taking into account (3.5), it is easy to see that for the cases $V = W, k = 1$; $V = W_1, k = 2; \ldots, V = W_{n-1}, k = n$, the following decompositions hold:

$$E \cap W = (E \cap W_1) \cup \bigcup_{q \in Q_1(W)} (E \cap W \cap \Gamma_1(q)), \tag{3.7_1}$$

$$E \cap W_1 = (E \cap W_2) \cup \bigcup_{q \in Q_2(W_1)} (E \cap W_1 \cap \Gamma_2(q)), \tag{3.7_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E \cap W_{n-1} = (E \cap J(W)) \cup \bigcup_{q \in Q_n(W_{n-1})} (E \cap W_{n-1} \cap \Gamma_n(q)). \tag{3.7_n}$$

Consequently, we have

$$E \cap W = (E \cap J(W)) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{q \in Q_i(W_{i-1})} (E \cap W_{i-1} \cap \Gamma_i(q)). \tag{3.8}$$

In each of decompositions (3.7_i) the components $W_{i-1} \cap \Gamma_i(q)$ $(q \in Q_i(W_{i-1}))$ and W_i are disjoint, and hence, we conclude that:

$$\begin{gathered}\text{The components } J(W) \text{ and } W_{i-1} \cap \Gamma_i(q) \quad (i \in \overline{1,n}, \ \ q \in Q_i(W_{i-1})) \\ \text{in decomposition (3.8) are disjoint.}\end{gathered} \tag{3.9}$$

By (3.6) for every $i \in \overline{1,n}$ we have

$$|Q_i(W_{i-1})| \leq k(1 + \log_\lambda(2n)). \tag{3.10}$$

It is easy to see that for every $i \in \overline{1,n}$

$$t_i(W_{i-1}) = t_i(W), \ \ \ldots, \ \ t_n(W_{i-1}) = t_n(W).$$

Consequently, for every $i \in \overline{1,n}$ and $q \in Q_i(W_{i-1})$ we have

$$q > \frac{t_i(W_{i-1})}{2n} = \frac{t_i(W)}{2n} \geq \frac{t(W)}{2n}. \tag{3.11}$$

The representation (3.8) gives a possibility to prove the lemma by induction with respect to n.

Taking into account that W_i are standard convex sets of symmetric type and using the properties (3.9)–(3.11), we easily conclude the validity of the lemma in the case $n = 2$.

Let us perform the induction step from $n-1$ to n.

Consider the projections of the sets $E \cap \Gamma_i(q)$ and $W_{i-1} \cap \Gamma_i(q)$ $(i \in \overline{1,n}, q \in Q_i(W_{i-1}))$ to the space $\mathbb{R}^{n-1}$, taken with respect to variables $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. These projections are denoted by $E(i,q)$ and $W_{i-1}(i,q)$, respectively. It is easy to see that $E(i,q)$ is a (k,λ)-sparse subset of $\mathbb{N}^{n-1}$. On the other hand, by Lemma 3.2, $W_{i-1}(i,q)$ is an $(n-1)$-dimensional standard convex set of symmetric type. Using the induction hypothesis for the sets $E(i,q)$ and $W_{i-1}(i,q)$, we obtain a decomposition of the set $E(i,q) \cap W_{i-1}(i,q)$ by means of the family $\mathbf{\Delta}(i,q) \subset \bigcup\{\mathbf{\Delta}(n-1,M) : M \in \mathbb{M}_{n-1}, 1 \le |M| < n-1\}$ of lower-dimensional intervals, that is,

$$E(i,q) \cap W_{i-1}(i,q) = (E \cap J(W_{i-1}(i,q))) \cup \bigcup_{\Delta \in \mathbf{\Delta}(i,q)} (E(i,q) \cap \Delta),$$

where the family $\mathbf{\Delta}(i,q)$ has the properties stated in the lemma.

Next, for every $i \in \overline{1,n}$ and $q \in Q_i(W_{i-1})$, let us consider the family $\widetilde{\mathbf{\Delta}}(i,q)$ of the intervals $\{q\} \times^{\{i\}} \Delta$, where $\Delta \in \mathbf{\Delta}(i,q)$ or $\Delta = J(W_{i-1}(i,q))$. Then we have

$$E \cap W = (E \cap J(W)) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{q \in Q_i(W_{i-1})} \bigcup_{\Delta \in \widetilde{\mathbf{\Delta}}(i,q)} (E \cap \Delta).$$

Finally, taking into account the properties (3.9)–(3.11), we easily see that the family

$$\mathbf{\Delta} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{q \in Q_i(W_{i-1})} \widetilde{\mathbf{\Delta}}(i,q)$$

possesses all the properties of the desired decomposition of the set $E \cap W$. $\square$

Remark 3.1. If for every number $r > 0$ we use Lemma 3.4 for E and rW, then we can conclude that the intervals Δ from the decomposition of $E \cap rW$ satisfy the inequality $l(\Delta) > rt(W)/2n$. To prove this we have to take into account the following evident equality $t(rW) = rt(W)$.

For $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ denote $||\mathbf{x}|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

The following lemma was proved in [9] (see [9], Lemma 2).

Lemma 3.5. *Let $\sigma = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\mathbf{i}}$ be a numerical series, $M \in \mathbb{M}_n$, $1 \le |M| < n$, $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{|M|}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{n-|M|}$ and $\Delta = ([0,p_1] \times \dots [0,p_{|M|}]) \times^M \{\mathbf{q}\}$. Then*

$$S_\Delta(\sigma) = \sum_{\mathbf{d} \in \{0,1\}^{n-|M|}} (-1)^{||\mathbf{d}||} S_{(\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{d},M)}(\sigma).$$

Remark 3.2. For the general term of a series $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{i}}$ the following well-known representation holds: $a_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{d}\in\{0,1\}^n}(-1)^{||\mathbf{d}||}S_{\mathbf{m}-\mathbf{d}}(\sigma)$.

For any $n \in \mathbb{N}$ assume that $\mathbf{\Delta}(n, \emptyset) = \{\{\mathbf{q}\} : \mathbf{q} \in \mathbb{N}^n\}$, and denote

$$\mathbf{\Delta}(n) = \bigcup_{M\in\mathbb{M}_n, |M|<n} \mathbf{\Delta}(n, M).$$

Also, for $\Delta = \{\mathbf{q}\} \in \mathbf{\Delta}(n, \emptyset)$ by $l(\Delta)$ we denote the maximal among the coordinates of $\mathbf{q}$.

Lemma 3.6. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $\sigma = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{i}}$ be a regularly convergent numerical series. Then*

$$\lim_{\Delta\in\mathbf{\Delta}(n),\, l(\Delta)\to\infty} S_\Delta(\sigma) = 0.$$

Proof. For the one-dimensional case the lemma is obvious. Let us perform the induction step from $n-1$ to n.

For an arbitrary given $\varepsilon > 0$ we must find a natural number N such that

$$|S_\Delta(\sigma)| < \varepsilon \tag{3.12}$$

for every $\Delta \in \mathbf{\Delta}(n)$ with $l(\Delta) \geq N$.

Taking into account convergence of σ in the Pringsheim sense, we can find a natural number N_1 such that

$$|S_{\mathbf{m}}(\sigma) - s| < \varepsilon/2^n \tag{3.13}$$

for every $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$ having all coordinates not less than N_1. Here s denotes the sum of the series σ.

For every $k \in \overline{1,n}$ and $t \in \overline{1,N_1}$ let us consider the section $\sigma(k,t)$ of the series $\sigma = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{i}}$ which we derive by n-tuples $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ having k-th coordinate equal to t. Using induction hypothesis for each $(n-1)$-dimensional series $\sigma(k,t)$ $(k \in \overline{1,n},\ t \in \overline{1,N_1})$ we can find a natural number $N(k,t)$ such that

$$|S_\Delta(\sigma(k,t))| < \varepsilon/N_1 \tag{3.14}$$

for every $\Delta \in \mathbf{\Delta}(n-1)$ with $l(\Delta) \geq N(k,t)$.

Let N_2 be the maximal among the numbers $N(k,t)$ $(k \in \overline{1,n},\ t \in \overline{1,N_1})$. Define the number N as follows $N = N_1 + N_2$.

Now, we proceed to prove the inequality (3.12). Suppose, $\Delta \in \mathbf{\Delta}(n)$ and $l(\Delta) \geq N$. Note that: 1) for the case $\Delta \in \mathbf{\Delta}(n,M)$, $1 \leq |M| < n$, Δ has the form: $([0,p_1] \times \ldots [0,p_{|M|}]) \times^M \{(q_1, \ldots, q_{n-|M|})\}$; 2) for the case $\Delta \in \mathbf{\Delta}(n,\emptyset)$, Δ has the form: $\{(q_1, \ldots, q_n)\}$.

Case 1. Each among the numbers p_j and q_j from the definition of Δ is greater than N_1.

We use Lemma 3.5 and Remark 3.2 to estimate $|S_\Delta(\sigma)|$ by a sum of $|S_{\mathbf{m}}(\sigma) - S_{\mathbf{m}'}(\sigma)|$ type expressions, where all coordinates of $\mathbf{m}$ and $\mathbf{m}'$ are not less than N_1. Observe that the number of such expressions is not greater than 2^{n-1}. Hence, taking into account (3.13), we obtain $|S_\Delta(\sigma)| < 2^{n-1}(\varepsilon/2^n + \varepsilon/2^n) = \varepsilon$. Thus, in this case the inequality (3.12) is proved.

Case 2. At least one among the numbers p_j and q_j from the definition of Δ is not greater than N_1.

Suppose that for a k-th dimension the above mentioned inequality is fulfilled and that for a m-th dimension $l(\Delta) = q_m$. Obviously, $k \neq m$. The interval Δ will be decomposed by sections $\Delta[k,1], \ldots, \Delta[k,N_1]$. Note that if a section $\Delta[k,t]$ is non-empty, then $\Delta(k,t) \in \mathbf{\Delta}(n-1)$ and $\Delta(k,t)$ is derived from Δ by omitting its k-th dimension. Consequently, taking into account that $k \neq m$, we have $l(\Delta(k,t)) = q_m = l(\Delta) \geq N_2$. From the last estimation, using (3.14) and the definition of the number N_2, for every $k \in \overline{1,n}$ and $t \in \overline{1,N_1}$ with $\Delta[k,t] \neq \emptyset$, we obtain $\big|\sum_{\mathbf{i}\in\Delta[k,t]} a_{\mathbf{i}}\big| < \varepsilon/N_1$. Consequently, we have

$$|S_\Delta(\sigma)| = \Big|\sum_{\mathbf{i}\in\Delta} a_{\mathbf{i}}\Big| \leq \sum_{t=1}^{N_1}\Big|\sum_{\mathbf{i}\in\Delta[k,t]} a_{\mathbf{i}}\Big| < N_1\frac{\varepsilon}{N_1} = \varepsilon.$$

This completes the proof of inequality (3.12). $\square$

Now, we proceed directly to the proof of Theorem 2.5.

By E denote the set $\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : a_{\mathbf{m}} \neq 0\}$. According to the condition of the theorem, the set E is (k,λ)-sparse for some $k \in \mathbb{N}$ and $\lambda > 1$.

Let $\mathbf{\Delta}_r \subset \mathbf{\Delta}(n)$ $(r > 0)$ be a family of lower-dimensional intervals constituting a decomposition of the set $E \cap rW$ according to Lemma 3.4. Then, in view of properties of $\mathbf{\Delta}_r$ (see Lemma 3.4), we have

$$S_{rW}(\sigma) = S_{rJ(W)}(\sigma) + \sum_{\Delta\in\mathbf{\Delta}_r} S_\Delta(\sigma),$$
$$|\mathbf{\Delta}_r| \leq C(n,k,\lambda), \quad l(\Delta) > rt(W)/2n.$$

From the last two estimates and Lemma 3.6 we obtain

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{\Delta\in\mathbf{\Delta}_r} S_\Delta(\sigma) = 0.$$

On the other hand, from the convergence of σ in the Pringsheim sense it follows that $\lim\limits_{r\to\infty} S_{rJ(W)}(\sigma) = s$. Thus, $\lim\limits_{r\to\infty} S_{rW}(\sigma) = s$. Theorem 2.5 is proved. $\square$

Список литературы

[1] B. S. Kashin and A. A. Saakyan, Orthogonal Series, Nauka, Moscow (1984); English transl., Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1989).

[2] G. H. Hardy, "On the convergence of certain multiple series", Proc. Cambridge Philos. Soc., **19**, 86 – 95 (1916-1919).

[3] F. Moricz, “On the convergence in a restricted sense of multiple series”, Anal. Math., **5**(2), 135 – 147 (1979).
[4] M. de Guzmán, Differentiation of Integrals in $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Math., **481**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).
[5] T. Sh. Zerekidze, “Convergence of multiple Fourier-Haar series and strong differentiablity of integrals [in Russian]”, Trudy Tbilis. Mat. Inst. Razmadze, **76**, 80 – 99 (1985).
[6] G. A. Karagulyan, “Divergence of double Fourier series in complete orthonormal systems [in Russian]”, Izv. Akad. Nauk Arm. SSR. Ser. Mat., **24**, no. 2, 147 – 159 (1989); translation in: Soviet J. Contemporary Math. Anal. **24**, no. 2, 44 – 56 (1989).
[7] G. Gat and G. Karagulyan, “On convergence properties of tensor products of some operator sequences”, The Journal of Geometric Analysis, **26**, no. 4, 3066 - 3089 (2016).
[8] G. G. Kemkhadze, “Convergence of spherical partial sums of multiple Fourier-Haar series [in Russian]”, Trudy Tbilis. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR, **55**, 27 – 38 (1977).
[9] G. E. Tkebuchava, “On the divergence of spherical sums of double Fourier-Haar series”, Anal. Math. **20** (2), 147 – 153 (1994).
[10] G. G. Oniani, “On the divergence of multiple Fourier-Haar series”, Anal. Math., **38** (3), 227 – 247 (2012).
[11] G. G. Oniani, “On the convergence of multiple Haar series”, Izv. RAN: Ser. Mat., **78** (1), 99 – 116 (2014); translation in Izv. Math. **78** (1), 90 – 105 (2014).
[12] G. G. Oniani, “The convergence of double Fourier-Haar series over homothethic copies of sets”, Mat. Sb. **205** (7), 73 – 94 (2014); translation in Sb. Mat. **205** (7), 983 – 1003 (2014).

Поступила 24 октября 2017

После доработки 16 апреля 2018

Принята к публикации 25 апреля 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 82 – 89

О ПОВЕДЕНИИ ДВУХ ТИПОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Г. С. СУКИАСЯН, М. Е. АЛАЕИ

Институт математики НАН РА, Ереван, Армения
E-mails: *haik@instmath.am*; *m_e_alaei@yahoo.com*

Аннотация. В статье изучаются функции, зависящие от реализации случайной величины с логарифмически нормальным распределением и двух типов математических ожиданий. Даются интерпретации этих функций и математических ожиданий в терминах актуарной математики. Проведен сравнительный анализ двух типов математических ожиданий с использованием формул Блэка-Шоулза. Выработаны критерии подчинения случайной величины стохастическому уравнению диффузии. Полученные критерии проверены на численном примере изменения цены на нефть и могут быть использованы для прогнозирования финансовых кризисов.

MSC2010 number: 60G51

Ключевые слова: стохастическое уравнение диффузии; формула Блэка-Шоулза; лог-нормальное распределение.

1. Введение

Пусть зафиксирована реализация $f(t)$ случайной величины $S(t)$ на конечном дискретном множестве точек $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$, т.е. имеем выборку $f(t_0), f(t_1),\dots, f(t_n)$. Исследуется следующая задача: по значениям выборки $f(t_0), f(t_1),\dots, f(t_n)$ определить подчиняется ли $S(t)$ стохастическому уравнению диффузии. Так как стохастическое уравнение диффузии служит моделью многих случайных процессов изучаемых в финансовой математике, то становится ясным актуальность и важность данной задачи.

В статье изучаются функции, зависящие от выборки $f(t_0), f(t_1),\dots, f(t_n)$ и двух типов математических ожиданий. Найдены соотношения между этими функциями, выполняемые при условии, что выборка $f(t_0), f(t_1),\dots, f(t_n)$ взята из реализации случайной величины $S(t)$ подчиняющейся стохастическому уравнению диффузии.

Теоретические результаты проверены на примере изменения цены на нефть за период с 1.12.2006 по 28.2.2009. Проведенное численное сравнение подтвердило справедливость полученных свойств изученных функций от реализаций.

2. Предварительные сведения из теории стохастических уравнений

Моделью многих случайных процессов изучаемых в актуарной математике служит стохастическое уравнение диффузии

$$dS(t) = r(t)S(t)\, dt + \sigma(t)S(t)\, dW(t), \tag{2.1}$$

где случайная величина $S(t)$ с непрерывным аргументом t моделирует поведение цены какого-либо товара в момент времени t, функция $r(t)$ показывает скорость изменения банковской ставки (инфляция), $W(t)$ – броуновское движение (случайный гауссовский процесс с независимыми приращениями). Роль дисперсии играет функция $\sigma(t)$, называемая волатильностью процесса.

Известная лемма Ито [1] устанавливает правило дифференцирования функций от случайных величин, удовлетворяющих стохастическому уравнению (2.1): для любой дважды дифференцируемой функции $F(S,t)$ имеем

$$dF(S,t) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\, dt.$$

Если принять $F(S,t) = \ln S$, то получим $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ и уравнение (2.1) сводится к следующему стохастическому уравнению

$$d\ln S(t) = \left(r(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\right)\, dt + \sigma(t)\, dW(t). \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. [1] *В случае отсутствия инфляции $r(t) = 0$ и постоянной волатильности σ решением стохастического уравнения (2.2) с начальным условием $S(0) = S_0$ является случайная величина $S(t)$, у которой $\ln S(t)$ имеет нормальное распределение $N(a(t),\sigma(t))$ со средним $a(t) = \ln S_0 - \sigma^2 t/2$ и дисперсией $\sigma(t) = \sigma^2 t$.*

Теорема 2.1 служит мотивацией для рассмотрения в настоящей статье случайной величины $S(t)$, распределение которой предполагается логарифмически нормальным, т.е. случайная величина $\ln S(t)$ для каждого t имеет нормальное распределение $N(a(t),\sigma(t))$ со средним $a(t)$ и дисперсией $\sigma^2(t)$.

3. Два типа математических ожиданий и формулы Блэка-Шоулза

Мы исследуем математическое ожидание следующей функции от $S(t)$:

$$\mathbf{M}_e(t,K) = E[S(t)-K]_+,$$

где K – произвольная положительная константа и

$$X_+ = \begin{cases} X, & \text{если } X \geq 0, \\ 0 & \text{если } 0 \geq X. \end{cases}$$

Пусть $\vec{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$ - последовательность моментов времени $t_1 < t_2 < ... < t_m$. Поведение величины $\mathbf{M}_e$ мы будем сравнивать при тех же значениях параметров K и t с математическим ожиданием похожей функции от той же случайной величины $S(t)$:

$$\mathbf{M}_a\left(\vec{t}, K\right) = E[G\left(m, \vec{t}\right) - K]_+,$$

где $G\left(m, \vec{t}\right)$ есть среднее геометрическое m случайных величин $S(t_i)$, $i = 1, 2, ..., m$, т.е.

$$G\left(m, \vec{t}\right) = \left[S(t_1) \cdot S(t_2) \cdots S(t_m)\right]^{1/m}, \quad \vec{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$$

Эти математические ожидания представляют интерес в финансовой математике, так как если принять, что случайная величина $S(t)$ моделирует поведение цены какого-либо товара в момент времени t, то $\mathbf{M}_e$ можно интерпретировать как ожидаемую цену европейского опциона, а $\mathbf{M}_a$ можно интерпретировать как ожидаемую цену азиатского опциона (см. [1]).

Обозначим через $\Phi(.)$ функцию распределения стандартной нормальной случайной величины $N(0,1)$.

Теорема 3.1. (Формула Блэка-Шоулза для европейского опциона) *Пусть $S(t)$ – случайная величина, у которой $\ln S(t)$ имеет нормальное распределение $N(a,\sigma)$ со средним $a(t) = \ln S_0 - \sigma^2 t/2$ и дисперсией $\sigma(t) = \sigma^2 t$. Тогда*

$$\mathbf{M}_e(t,K) = E[S(t)-K]_+ = S_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \tag{3.1}$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\ln S_0 - \ln K + \frac{\sigma^2 t}{2}\right),$$
$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\ln S_0 - \ln K - \frac{\sigma^2 t}{2}\right).$$

Заметим, что если случайная величина $S(t)$, моделирует поведение цены какого-либо товара в момент времени t, то (не случайную) величину S_0 можно интерпретировать как цену товара в момент времени $t = 0$.

Теорема 3.2. (Формула Блэка-Шоулза для азиатского опциона) *Пусть $S(t)$ – случайная величина, у которой $\ln S(t)$ имеет нормальное распределение $N(a,\sigma)$ со средним $a(t) = \ln S_0 - \sigma^2 t/2$ и дисперсией $\sigma(t) = \sigma^2 t$. Тогда*

(3.2)

$$\mathbf{M}_a\left(\vec{t}, K\right) = E[G\left(m, \vec{t}\right) - K]_+ = \exp\left(-\frac{m-1}{2m^2}T\sigma^2\right) S_0\Phi(d_1(m)) - K\Phi(d_2(m)),$$

где

$$d_1(m) = \frac{m}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln S_0 - \ln K + \frac{T\sigma^2}{2m^2}(2-m)\right),$$

$$d_2(m) = \frac{m}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln S_0 - \ln K - \frac{T\sigma^2}{2m}\right), \quad T = t_1 + t_2 + ... + t_m.$$

Формула (3.1) хорошо известна, см. например, [1], [2]. Формула же (3.2) менее известна, в [1] она приведена без доказательства. Доказательство формулы (3.2) приведено в [3] и [4].

4. Основные результаты

Сравнивая формулы (3.1) и (3.2), нетрудно видеть, что при $m = 1$, $T = t_1 = t$ получаем

$$\mathbf{M}_e(t,K) = \mathbf{M}_a(t,K), \quad \text{для всех } t, K > 0,$$

что согласуется с равенством случайных величин $S(t)$ и $G(1,t)$.

Рассмотрим теперь среднее геометрическое $G(2,t_1,t_2)$ двух случайных величин $S(t_1)$ и $S(t_2)$. Обозначим $dt = t_2 - t_1$.

Теорема 4.1. Пусть случайная величина $S(t)$ подчиняется стохастическому уравнению диффузии. Тогда для всех $t, K > 0$ при $dt \to 0$ имеет место

$$\mathbf{M}_a(t,K) = E[G(2, t-dt, t) - K]_+ = \mathbf{M}_e(t,K) + O(dt),$$

Доказательство. И меем

$$G(2, t-dt, t) = \sqrt{S(t-dt)\cdot S(t)} = \sqrt{[S(t-dt) - S(t) + S(t)]\cdot S(t)}.$$

Разлагая по степеням $dS = |S(t-dt) - S(t)|$, получим

$$G(2,t,t+dt) = S(t)\sqrt{1 + \frac{dS}{S(t)}} = S(t)\left(1 + \frac{dS}{2S(t)}\right) + o(dS). \tag{4.1}$$

Так как случайная величина $S(t)$ имеет логарифмически нормальное распределение с конечной дисперсией, то можем поменять местами операции предельного перехода и усреднения и при $dt \to 0$ имеем

$$\lim_{dt\to 0} E|S(t-dt) - S(t)| = 0.$$

Отсюда в силу (4.1) получаем

$$E|G(2,t,t+dt)-S(t)|=O(dt).$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}_a(t,K)=E[G(2,t-dt,t)-K]_+=E[S(t)-K]_++O(dt)=\mathbf{M}_e(t,K)+O(dt).$$

Теорема 4.1 доказана.

Пусть зафиксирована реализация $f(t)$ случайной величины $S(t)$ на конечном дискретном множестве точек $t_0=0<t_1<...<t_n=t$, т.е. имеем выборку $f(t_0)=S_0$, $f(t_1)$,...,$f(t_n)$. Числа $t_0,t_1,...,t_n$ полагаем целыми, а числа $f(t_i)$ полагаем положительными. Для фиксированной реализации $f(t)$ рассмотрим (неслучайную) функцию от K и t

$$L_e(t,K)=\mathbf{M}_e(t,K)-[f(t)-K]_+.$$

Отметим, что $L_e(t,K)$ можно интерпретировать как величину прибыли (или убытков) от европейского опциона, купленного когда цена товара была S_0, при условии, что в момент времени t цена товара стала $f(t)$.

Для фиксированной реализации $f(t)$ поведение функции $L_e(t,K)$ мы будем сравнивать при тех же значениях аргументов K и t с аналогичной функцией

$$L_a(t,K)=\mathbf{M}_a(t,K)-\left[G(m,f(\vec{t}))-K\right]_+,$$

где $G\left(m,f(\vec{t})\right)$ есть среднее геометрическое m значений $f(t_i)$, $i=1,2,...,m$, т.е.

$$G\left(m,f(\vec{t})\right)=[f(t_1)\cdot f(t_2)\cdots f(t_m)]^{1/m}\,,\quad \vec{t}=(t_1,t_2,...,t_m)$$

Отметим, что $L_a(t,K)$ можно интерпретировать как величину прибыли (или убытков) от азиатского опциона, купленного когда цена товара была S_0, при условии, что в моменты времени t_i цена товара становилась $f(t_i)$, $i=1,2,...,m$.

Рассмотрим случай $m=2$. Назовем *скачком* в точке t разность

$$dJ(t)=f(t+dt)-f(t).$$

Теорема 4.2. Пусть случайная величина $S(t)$ подчиняется стохастическому уравнению диффузии. Тогда для всех $t,K>0$ разность $L_e(t,K)-L_a(t,K)$ представима в виде суммы двух слагаемых, причем при $dt\to 0$ одно слагаемое имеет порядок $O(dt)$, а второе имеет порядок $O(dJ)$:

$$L_e(t,K)-L_a(t,K)=O(dt)+O(dJ).$$

Доказательство. Имеем

$$G(2,t,t+dt) = \sqrt{f(t+dt)\cdot f(t)} = \sqrt{dJ(t)f(t)+(f(t))^2}.$$

Разлагая по степеням dJ, получим

$$G(2,t,t+dt) = f(t)\sqrt{1+\frac{dJ}{f(t)}} = f(t)\left(1+\frac{dJ}{2f(t)}\right)+o(dJ).$$

Следовательно,

$$|G(2,t,t+dt)-f(t)| = O(dJ). \tag{4.2}$$

Учитывая положительность чисел $f(t)$, имеем

$$L_e(t,K)-L_a(t,K) = \mathbf{M}_e(t,K)-\mathbf{M}_a(t,K)-[f(t)-K]_+ + [G(2,t,t+dt)-K]_+$$

$$= \mathbf{M}_e(t,K)-\mathbf{M}_a(t,K)+G(2,t,t+dt)-f(t).$$

Отсюда в силу соотношения (4.2) и Теоремы 4.1, следует утверждение Теоремы 4.2.

Скачок dJ назовем малым, если он имеет порядок $O(dt)$, т.е. $dJ \approx dt$. Скачок dJ назовем большим, если $dt = o(dJ)$. Из Теоремы 4.2 сразу следует:

Предложение 4.1. Малый скачок $dJ \approx dt$ влечет малость разности

$$|L_e(t,K)-L_a(t,K)| = O(dt).$$

Предложение 4.2. Большой скачок $dJ >> dt$ влечет большую разность

$$|L_e(t,K)-L_a(t,K)| = O(dJ) >> dt.$$

Отметим, что Предложения 4.1, 4.2 справедливы при условии, что выборка $f(t_0)$, $f(t_1)$,..., $f(t_n)$ взята из реализации случайной величины $S(t)$ подчиняющейся стохастическому уравнению диффузии (2.2).

В силу того, что при увеличении числа m случайных величин $S(t_i)$, $i = 1,2,...,m$ увеличивается их разброс от среднего геометрического $G\left(m,\vec{t}\right)$ получаем следующее утверждение.

Предложение 4.3. Увеличение величины $m > 1$ влечет увеличение разности $|\mathbf{M}_e(t,K)-\mathbf{M}_a(t,K)|$.

5. Численный пример

Предложения 4.1 – 4.3 проверены на примере изменения цены на нефть за период с 1.12.2006 по 28.2.2009 для $K = 65$, $t = 20$ (см. [5]). На рис. 1 дате

1.12.2006 соответствует точка 0 на оси абсцисс, а дате 28.2.2009 соответствует точка 609.

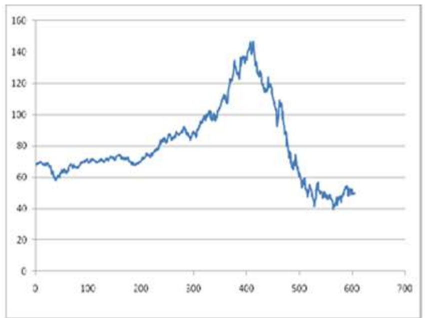

Рис. 1

Проведенное численное сравнение (см. Таблицы 1 и 2) подтвердило в основном справедливость Предложений 4.1 – 4.3.

T	t_0	S_0	$Jumps$	$\|L_e - L_a\|$
2007/02/07	53	62.97	1.00	0.36
2007/08/03	176	72.49	0.29	0.18
2007/12/31	279	88.87	0.04	0.05
2008/03/03	321	99.15	0.62	0.15
2008/03/04	322	96.09	3.06	1.75
2008/03/14	330	101.75	0.79	0.88
2008/03/17	331	97.83	3.92	2.45
2008/03/18	332	102.18	4.35	6.32
2008/04/01	341	96.03	0.51	0.39
2008/05/01	363	107.04	0.59	0.68
2008/05/02	364	110.98	3.94	1.54
2008/05/20	376	130.16	3.97	1.71
2008/05/21	377	134.42	4.26	1.81
2008/06/05	387	127.40	4.79	1.09
2008/06/10	390	131.12	1.91	2.30
2008/07/29	424	124.06	2.50	1.54
2008/08/21	441	123.71	6.16	2.06
2008/08/29	447	117.38	0.32	0.74
2008/09/12	456	103.36	0.44	0.03
2008/09/18	460	98.57	0.96	0.33
2008/10/13	477	83.63	3.41	1.01
2008/10/31	491	71.18	1.95	4.25

Таблица 1.

T	$Jumps$	$\lvert\mathbf{M}_e - \mathbf{M}_a\rvert$ $for: m = 10$	$\lvert\mathbf{M}_e - \mathbf{M}_a\rvert$ $for: m = 6$	$\lvert\mathbf{M}_e - \mathbf{M}_a\rvert$ $for: m = 4$	$\lvert\mathbf{M}_e - \mathbf{M}_a\rvert$ $for: m = 2$
2008/10/31	1.95	9.6	9.2	8.2	5.2
2008/11/10	1.18	9.5	8.6	7.5	4.8
2008/11/14	1.64	7.5	7.0	6.2	3.9

Таблица 2.

Заключение. В обычных условиях стохастическое уравнение (2.1) хорошо описывает поведение цены на нефть. В условиях финансового кризиса цена на нефть не подчиняется стохастическому уравнению (2.1).

Откуда можно сделать важный практический вывод: Ситуация “большой скачок $J(t)$ в сочетании с малой разностью $|L_e(t,K) - L_a(t,K)|$” является предвестником острого финансового кризиса.

Abstract. The paper considers some functions depending on the realizations of a random process with log-normal distribution and two types of expectations. The interpretations of these functions and expectations are given in terms of actuarial mathematics. The comparison of the behavior of these two types of expectations is given using the Black-Scholes formulas. Criteria for a random process to obey a stochastic equation of diffusion are elaborated. The obtained criteria are verified on a numerical example on the change in the price of oil, and can be used to predict financial crises.

Список литературы

[1] J. C. Hull, Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, London (2008).

[2] F. Black, M. Scholes, “The pricing of options and corporative Liabilities”, Journal of Political Economy, **4**, 637 – 659 (1973).

[3] M. E. Alaei, “Black-Scholes Formula for Asian Option with Several Futures”, Armen. J. Math., **9** (2), 84 – 92 (2017).

[4] M. E. Alaei, “On numerical comparison between European and Asian options”, Caspian Journal of Computational & Mathematical Engineering, **1**, 44 – 57 (2017).

[5] К. Р. Енокян, М. Е. Алаеи, Г. С. Сукиасян, “Об автоматическом построении кусочно-линейной аппроксимации с нерегулярной решеткой”, Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН, **70** (4), 255 – 262 (2017).

Поступила 15 февраля 2019

После доработки 25 июня 2019

Принята к публикации 21 августа 2019

Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 90 – 100

ON INTERPOLATION BY A HOMOGENEOUS POLYNOMIALS IN $\mathbb{R}^2$

P. V. MANH AND T. V. LONG

Hanoi National University of Education, Hanoi, Vietnam
E-mail: *manhpv@hnue.edu.vn*; *tagvan.long@gmail.com*

Abstract. In this paper, we study bivariate homogeneous interpolation polynomials. We show that the homogeneous Lagrange interpolation polynomial of a sufficiently smooth function converges to a homogeneous Hermite interpolation polynomial when the interpolation points coalesce.

MSC2010 numbers: 41A05, 41A63, 41A08.
Keywords: Homogeneous Lagrange interpolation; Homogeneous Hermite interpolation:

1. Introduction

The aim of this paper is to study bivariate homogeneous interpolation polynomials. Let $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2)$ be the space of all homogeneous polynomials of degree n in $\mathbb{R}^2$. It is well-known that $\{x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n\}$ is a basis for $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2)$ and $\dim \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2) = n+1$. A set $X = \{\mathbf{x}_i = (a_i, b_i) : i = 0, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ is said to be pairwise projectively distinct (PPD for short) if $\mathbf{x}_i$ and $\mathbf{x}_j$ are linearly independent, or equivalently $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, for every $0 \leq i < j \leq n$. Let f be a function defined on X. Bialas-Ciez and Calvi [1] pointed out that there exists a unique polynomial $h \in \mathcal{H}_d(\mathbb{R}^2)$ interpolating f at X, that is,

$$h(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Moreover, the following equality holds:

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} f(\mathbf{x}_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x b_j - y a_j}{a_i b_j - b_i a_j}, \quad \mathbf{x} = (x, y).$$

The polynomial h is called the homogeneous Lagrange interpolation polynomial of f at X, and is denoted by $\mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X; f]$. Here we are concerned with the following problem.

Problem. Let $\{X^k\}$ be a sequence of PPD sets in $\mathbb{R}^2$ with $\mathrm{card}(X^k) = n+1$ for $k \geq 1$. Assume that X^k coalesces to a set A when $k \to \infty$. The natural questions are the following.

(1) Does the sequence $\{\mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X^k; f]\}$ converge for every suitably defined function f?

(2) If yes, what is the limit? can it be understood as a Hermite-type interpolation polynomial of f at A?

Positive answers to the above questions can be expected since Hermite interpolation is usually the result of the collapsing of points in Lagrange interpolation. Note that analogous problems have been studied by many authors. For instance, in [2, 5], the authors found sufficient conditions that guarantee the convergence of multivariate Lagrange interpolation polynomials of sufficiently smooth functions to the Taylor polynomials. Phung [8] showed that the limit of bivariate Lagrange interpolation polynomials at Bos configurations on circles is a Hermite interpolation polynomial at the center of the circles when the radii of the circles tend to 0. In [6], based on a beautiful result of Bos and Calvi [4], Calvi and Phung proved that the limit of Lagrange projectors at Bos configurations on the irreducible algebraic curves in $\mathbb{C}^2$ are the Hermite projectors introduced by Bos and Calvi [4].

To investigate the above problem, we restrict our attention to the case where X^k lies on the right half of the unit circle, that is,

$$X^k \subset \mathcal{C}^+ = \{\mathbf{x} = (x, y) : \|\mathbf{x}\| = 1, x > 0\}, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

This assumption does not lose of generality since $h(t\mathbf{x}) = t^n h(\mathbf{x})$ for $h \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2)$, $t \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

In Theorem 3.1 below, we give a Hermite type interpolation scheme for $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2)$ in which the interpolation points lie on $\mathcal{C}^+$. From this we infer that the Hermite interpolation polynomial of a suitably defined function exists uniquely. In Theorem 4.1, we prove that when f is of class C^n, then the homogeneous Hermite interpolation polynomial of f at A is the limit of the sequence of polynomials $\{\mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X^k; f]\}$ when X^k coalesces to A. Finally, we establish a continuity property of homogeneous Hermite interpolation with respect to the interpolation points.

By $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ we denote the vector space of all univariate polynomials of degree less than or equal to n. Each vector space $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2)$ is endowed with a norm. The set of all natural numbers is denoted by $\mathbb{N}$.

2. Univariate Hermite interpolation

Let $t_1, \ldots, t_\lambda$ be distinct real numbers, and let $\nu_1, \ldots, \nu_\lambda$ be positive integers such that $n + 1 = \nu_1 + \cdots + \nu_\lambda$. The following theorem is well-known.

Theorem 2.1. *Given a function f for which $f^{(\nu_i - 1)}(t_i)$ exists for $i = 1, \ldots, \lambda$. Then there exists a unique $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ such that*

$$p^{(j)}(t_i) = f^{(j)}(t_i), \quad \forall 1 \leq i \leq \lambda, \ 0 \leq j \leq \nu_i - 1.$$

The polynomial p in Theorem 2.1 is denoted by $\mathrm{H}[\{(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)\};f]$ and is called the Hermite interpolation polynomial. The coefficient of t^n in $\mathrm{H}[\{(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)\};f]$, denoted by $f[(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)]$, is called the divided difference. A formula for Hermite interpolation polynomial can be found in [3, Theorem 1.1]. Using this, we can prove the following factorization property of generalized Vandermonde determinants (see [8] for details of the proof.)

Lemma 2.1. *Let $t_1,\dots,t_\lambda$ be pairwise distinct real numbers, and let $\nu_1,\dots,\nu_\lambda$ be positive integers such that $n+1=\nu_1+\dots+\nu_\lambda$. Let $T=\{(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)\}$, and let $\mathcal{F}=\{f_0,\dots,f_n\}$ be a set of sufficiently differentiable functions at the t_j's. We denote by $\mathrm{VDM}(\mathcal{F};T)$ the determinant of the generalized Vandermonde matrix:*

$$\mathrm{V}(\mathcal{F};T)=\begin{bmatrix} f_0(t_1) & f_1(t_1) & \cdots & f_{n-1}(t_1) & f_n(t_1)\\ f_0'(t_1) & f_1'(t_1) & \cdots & f_{n-1}'(t_1) & f_n'(t_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ f_0^{(\nu_1-1)}(t_1) & f_1^{(\nu_1-1)}(t_1) & \cdots & f_{n-1}^{(\nu_1-1)}(t_1) & f_n^{(\nu_1-1)}(t_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ f_0(t_\lambda) & f_1(t_\lambda) & \cdots & f_{n-1}(t_\lambda) & f_n(t_\lambda)\\ f_0'(t_\lambda) & f_1'(t_\lambda) & \cdots & f_{n-1}'(t_\lambda) & f_n'(t_\lambda)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ f_0^{(\nu_\lambda-1)}(t_\lambda) & f_1^{(\nu_\lambda-1)}(t_\lambda) & \cdots & f_{n-1}^{(\nu_\lambda-1)}(t_\lambda) & f_n^{(\nu_\lambda-1)}(t_\lambda) \end{bmatrix}.$$

Then we have

$$\mathrm{VDM}(\mathcal{F};T)=\Big(\prod_{k=1}^{\lambda}\prod_{i=0}^{\nu_k-1} i!\Big)\prod_{1\le i<j\le\lambda}(t_j-t_i)^{\nu_i\nu_j}\,\mathrm{D}(\mathcal{F};T),$$

where

$$\mathrm{D}(\mathcal{F};T)=\begin{vmatrix} f_0[t_1] & f_1[t_1] & \cdots & f_n[t_1]\\ f_0[(t_1,2)] & f_1[(t_1,2)] & \cdots & f_n[(t_1,2)]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_0[(t_1,\nu_1)] & f_1[(t_1,\nu_1)] & \cdots & f_n[(t_1,\nu_1)]\\ f_0[(t_1,\nu_1),(t_2,1)] & f_1[(t_1,\nu_1),(t_2,1)] & \cdots & f_n[(t_1,\nu_1),(t_2,1)]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_0[(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)] & f_1[(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)] & \cdots & f_n[(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)] \end{vmatrix}.$$

Here the factor $\prod_{1\le i<j\le\lambda}(t_j-t_i)^{\nu_i\nu_j}$ does not appear when $\lambda=1$.

The following result gives a useful formula for Hermite interpolation polynomial which contains the terms $\mathrm{D}(\cdot;\cdot)$.

Proposition 2.1. *Let $t_1,\dots,t_\lambda$ be pairwise distinct real numbers, and let $\nu_1,\dots,\nu_\lambda$ be positive integers such that $n+1=\nu_1+\dots+\nu_\lambda$. Let $T=\{(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)\}$,*

$\mathcal{M} = \{1, t, \dots, t^n\}$, *and let* f *be a well-defined function. Then*

$$\mathrm{H}[\{(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)\}; f](t) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow f(t)]; T) t^i.$$

Here $\mathcal{M}[t^i \leftarrow f(t)]$ *means that we substitute* $f(t)$ *for* t^i *in* $\mathcal{M}$.

Proof. For convenience, we set $f_i(t) = t^i$ for $0 \le i \le n$, and write

$$\mathrm{H}[\{(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)\}; f](t) = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i(t).$$

It follows from the interpolation conditions that

$$\sum_{i=0}^{n} c_i f_i^{(k)}(t_j) = f^{(k)}(t_j), \quad 1 \le j \le \lambda,\ 0 \le k \le \nu_j - 1. \tag{2.1}$$

The determinant of the matrix of coefficients corresponding to the above system of linear equations is $\mathrm{VDM}(\mathcal{M}; T)$. A result in [3, p. 3] shows that

$$\mathrm{VDM}(\mathcal{M}; T) = \Big(\prod_{k=1}^{\lambda}\prod_{i=0}^{\nu_k - 1} i!\Big) \prod_{1 \le i < j \le \lambda} (t_j - t_i)^{\nu_i \nu_j}.$$

Using the Cramer rule in (2.1) and Lemma 2.1, we obtain

$$c_i = \frac{\mathrm{VDM}(\mathcal{M}[f_i \leftarrow f]; T)}{\mathrm{VDM}(\mathcal{M}; T)} = \mathrm{D}(\mathcal{M}[f_i \leftarrow f]; T), \quad 0 \le i \le n,$$

The proof is complete. $\square$

When working with Hermite interpolation and the divided difference, it is convenient to use interpolation sets in which elements may be repeated. For example, if $A = \{1, -2, 3, -2, 1, -4, 1\}$, then we can write $A = \{(1,3), (-2,2), (3,1), (-4,1)\}$. More generally, any set $\{s_0, \dots, s_n\}$ can be identified with $\{(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)\}$. Here, t_i are pairwise distinct and the notation (t_i, ν_i) means that t_i is repeated ν_i times. Hence, we can write $\mathrm{H}[\{s_0,\dots,s_n\}; f]$ (resp. $f[s_0,\dots,s_n]$) for $\mathrm{H}[\{(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)\}; f]$ (resp. $f[(t_1,\nu_1),\dots,(t_\lambda,\nu_\lambda)]$). It is important to note that the divided difference is continuous with respect to interpolation points (see [3, Corollary 1.5]).

Lemma 2.2. *Let* $I \subset \mathbb{R}$ *be an interval and* $g \in \mathrm{C}^n(I)$. *Then the map*

$$(s_0, \dots, s_n) \in I^{n+1} \longmapsto g[s_0, \dots, s_n]$$

is continuous.

3. Bivariate homogeneous Hermite interpolation

In this section, we first give some results concerning vanishing of derivatives of functions, which are used to prove that the homogeneous Hermite interpolation problem in $\mathbb{R}^2$ has a unique solution.

3.1. **Vanishing of derivatives of functions.**

Lemma 3.1. *Let k be a natural number, and let g and h be k-times differentiable functions at $t_0 \in \mathbb{R}$. If $g(t_0) \neq 0$ and $(gh)^{(i)}(t_0) = 0$ for $i = 0, \ldots, k$, then $h^{(i)}(t_0) = 0$ for $i = 0, \ldots, k$.*

Proof. Since by assumption $g(t_0)h(t_0) = 0$ and $g(t_0) \neq 0$, we have $h(t_0) = 0$. Assume that the assertion holds for $i = 0, \ldots, j-1$ with $j \leq k$, and prove it for j. By the Leibnitz formula, we obtain

$$0 = (gh)^{(j)}(t_0) = g(t_0)h^{(j)}(t_0) + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} g^{(i)}(t_0)h^{(j-i)}(t_0) = g(t_0)h^{(j)}(t_0).$$

Hence, $h^{(j)}(t_0) = 0$, and the result follows. □

Lemma 3.2. *Let g be a k-times differentiable functions at $\theta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Then*

$$\frac{d^i}{d\theta^i} g(\tan\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \forall i = 0, \ldots, k$$

if and only if

$$g^{(i)}(\tan\theta_0) = 0 \quad \forall i = 0, \ldots, k.$$

Proof. We first assume that $\frac{d^i}{d\theta^i} g(\tan\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0$ for every $i = 0, \ldots, k$. We prove the lemma by induction on k. The assertion is trivial for $k = 0$. Assuming that the assertion holds for $k-1$, we prove it for k. For convenience, we set $\varphi(\theta) = \tan\theta$. Using Faa di Bruno's formula from [9], we obtain

$$\frac{d^k}{d\theta^k} g(\varphi(\theta))\Big|_{\theta=\theta_0} = \sum \frac{k!}{n_1! \cdots n_k!} g^{(n)}(\varphi(\theta_0)) \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\varphi^{(j)}(\theta_0)}{j!}\right)^{n_j}. \tag{3.1}$$

where $n = n_1 + \cdots + n_k$ and the sum is over all values of $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ such that $n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k = k$. Note that $n \leq k$ and $n = k$ only if $n_1 = n = k$ and $n_2 = \cdots = n_k = 0$. Hence, it follows from the induction hypothesis and (3.1) that

$$0 = \frac{d^k}{d\theta^k} g(\varphi(\theta))\Big|_{\theta=\theta_0} = g^{(k)}(\tan\theta_0) \frac{1}{\cos^{2k}(\theta_0)}.$$

Thus, $g^{(k)}(\tan\theta_0) = 0$.

Conversely, from (3.1) we see that $\frac{d^k}{d\theta^k} g(\varphi(\theta))\Big|_{\theta=\theta_0}$ is a linear combination of $k+1$ derivatives $g(\varphi(\theta_0)), g'(\varphi(\theta_0)), \ldots, g^{(k)}(\varphi(\theta_0))$. Hence, if these $k+1$ numbers are equal to 0, then $\frac{d^i}{d\theta^i} g(\tan\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0$ for every $i = 0, \ldots, k$. □

Corollary 3.1. *Let f and g be k-times differentiable functions at $\theta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Then*

$$\frac{d^i}{d\theta^i} f(\tan\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{d^i}{d\theta^i} g(\tan\theta)\Big|_{\theta=\theta_0}, \quad \forall i = 0, \ldots, k,$$

if and only if

$$f^{(i)}(\tan\theta_0) = g^{(i)}(\tan\theta_0), \quad \forall i = 0, \dots, k.$$

3.2. **Homogeneous Hermite interpolation.**

Theorem 3.1. *Let $n, \nu_1, \dots, \nu_\lambda$ be positive integers such that $\nu_1 + \cdots + \nu_\lambda = n+1$, and let $\{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_\lambda\}$ be a set of distinct points on $\mathcal{C}^+$ with $\mathbf{n}_i = (\cos\alpha_i, \sin\alpha_i)$, $\alpha_j \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Then, for any given data $\{c_{ik}\}$, there exists a unique polynomial $h \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2)$ such that*

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} h(\cos\alpha, \sin\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_i} = c_{ik}, \quad 1 \le i \le \lambda, \ \ 0 \le k \le \nu_i - 1. \tag{3.2}$$

Proof. Since the relation (3.2) consists of $n+1$ interpolation conditions and $\dim \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2) = n+1$, it suffices to show that if $h \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2)$ satisfies the following conditions

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} h(\cos\alpha, \sin\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_i} = 0, \quad 1 \le i \le \lambda, \ \ 0 \le k \le \nu_i - 1, \tag{3.3}$$

then $h = 0$. We write

$$h(\cos\alpha, \sin\alpha) = (\cos^n\alpha) h(1, \tan\alpha) = (\cos^n\alpha) q(\tan\alpha),$$

where $q(t) = h(1,t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. From (3.3), we have

$$\frac{d^k}{d\alpha^k}\Big((\cos^n\alpha) q(\tan\alpha)\Big)\Big|_{\alpha=\alpha_i} = 0, \quad 1 \le i \le \lambda, \ \ 0 \le k \le \nu_i - 1.$$

Since $\alpha_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, Lemma 3.1 gives

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} q(\tan\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_i} = 0, \quad 1 \le i \le \lambda, \ \ 0 \le k \le \nu_i - 1.$$

Using Lemma 3.2, we obtain

$$q^{(k)}(\tan\alpha_i) = 0, \quad 1 \le i \le \lambda, \ \ 0 \le k \le \nu_i - 1.$$

The uniqueness of univariate Hermite interpolation in Theorem 2.1 implies that $q = 0$ since $\deg p \le n$. Hence, $h(x,y) = x^n q(\frac{y}{x}) = 0$. □

Corollary 3.2. *Under the assumptions of Theorem 3.1, if f is a function defined on $\mathcal{C}^+$ such that the function $\alpha \mapsto f(\cos\alpha, \sin\alpha)$ is $(\nu_i - 1)$-times differentiable at α_i for $i = 1, \dots, \lambda$, then there exists a unique polynomial $h = \mathbf{H}^{\mathrm{h}}[\{(\mathbf{n}_1, \nu_1), \dots, (\mathbf{n}_\lambda, \nu_\lambda)\}; f] \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2)$ satisfying*

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} h(\cos\alpha, \sin\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_i} = \frac{d^k}{d\alpha^k} f(\cos\alpha, \sin\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_i}, \quad 1 \le i \le \lambda, \ \ 0 \le k \le \nu_i - 1.$$

4. Limit of homogeneous Lagrange interpolation polynomials

In this section, we give a formula for homogeneous Lagrange interpolation polynomials, and then use it to respond the proposed problem.

Proposition 4.1. *Let $X = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n\}$ be a set of distinct points on $\mathcal{C}^+$ with $\mathbf{x}_i = (\cos\alpha_i, \sin\alpha_i)$, $\alpha_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, and let f be a function defined on X. Then*

$$\mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X; f](\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T) x^{n-i} y^i,$$

where $\mathcal{M} = \{1, t, \dots, t^n\}$, $T = \{\tan\alpha_0, \dots, \tan\alpha_n\}$ and the function $\hat{f}$ is defined by $\hat{f}(\tan\alpha) = \frac{f(\cos\alpha, \sin\alpha)}{\cos^n \alpha}$.

Proof. Since $\mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X; f] \in \mathcal{H}_d(\mathbb{R}^2)$, we can write $\mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X; f](\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^{n-i} y^i$. By definition, we have

$$\sum_{i=0}^{n} d_i \cos^{n-i}\alpha_k \sin^i \alpha_k = f(\cos\alpha_k, \sin\alpha_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Dividing both sides by $\cos^n \alpha_k$, we obtain

$$\sum_{i=0}^{n} d_i \tan^i \alpha_k = \frac{f(\cos\alpha_k, \sin\alpha_k)}{\cos^n \alpha_k} = \hat{f}(\tan\alpha_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

By Cramer's rule, the coefficients d_i's are given by

$$d_i = \frac{\mathrm{VDM}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T)}{\mathrm{VDM}(\mathcal{M}, T)} = \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T), \quad 0 \le i \le n,$$

where Lemma 2.1 is used in the case of pairwise distinct points to reduce the last fraction. □

Theorem 4.1. *Let $n, \nu_1, \dots, \nu_\lambda$ be positive integers such that $\nu_1 + \dots + \nu_\lambda = n+1$, and let $X^k = \{\mathbf{x}_0^k, \dots, \mathbf{x}_n^k\}$, $k \ge 1$, be sets of distinct points on $\mathcal{C}^+$ such that*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_j^k = \mathbf{n}_1 \quad \textit{for} \quad 0 \le j \le \nu_1 - 1$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_j^k = \mathbf{n}_m \quad \textit{for} \quad \nu_1 + \dots + \nu_{m-1} \le j \le \nu_1 + \dots + \nu_m - 1,\ 2 \le m \le \lambda,$$

where $\mathbf{n}_i$'s are pairwise distinct points on $\mathcal{C}^+$. Then, for any function f of class C^n on $\mathcal{C}^+$, we have

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X^k; f] = \mathbf{H}^{\mathrm{h}}[\{(\mathbf{n}_1, \nu_1), \dots, (\mathbf{n}_\lambda, \nu_\lambda)\}; f].$$

Proof. Let us define $\alpha_i^k = \arg(\mathbf{x}_i^k)$ for $0 \le i \le n$ and $\alpha_i = \arg(\mathbf{n}_i)$ for $1 \le i \le \lambda$. The hypothesis gives

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_j^k = \alpha_1 \quad \text{for} \quad 0 \le j \le \nu_1 - 1 \tag{4.1}$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_j^k = \alpha_m \quad \text{for} \quad \nu_1+\cdots+\nu_{m-1} \le j \le \nu_1+\cdots+\nu_m - 1,\ 2\le m\le\lambda. \tag{4.2}$$

Without loss of generality, we can assume that $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \cdots < \alpha_\lambda < \frac{\pi}{2}$. Since the interpolation polynomial is independent of the ordering of the interpolation points, the relations (4.1) and (4.2) allow us to assume that $-\frac{\pi}{2} < \alpha_0^k < \alpha_1^k < \cdots < \alpha_n^k < \frac{\pi}{2}$. Evidently, the setting $\hat{f}(\tan\alpha) := \frac{f(\cos\alpha,\sin\alpha)}{\cos^n\alpha}$ with $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ is equivalent to

$$\hat{f}(t) = (t^2+1)^{\frac{n}{2}} f\big(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\big), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Hence, $\hat{f} \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R})$. By Proposition 4.1, we can write

$$\mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X^k; f](\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} d_i^k x^{n-i} y^i, \tag{4.3}$$

where

$$d_i^k = \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T^k), \quad 0\le i\le n,$$

and $\mathcal{M} = \{1, t, \dots, t^n\}$, $T^k = \{\tan\alpha_0^k, \dots, \tan\alpha_n^k\}$. Let us set

$$T = \{\big(\tan\alpha_1, \nu_1\big), \dots, \big(\tan\alpha_\lambda, \nu_\lambda\big)\} = \{\tan\beta_0, \tan\beta_1, \dots, \tan\beta_n\}, \quad \beta_0 \le \cdots \le \beta_n.$$

By relations (4.1) and (4.2), we have

$$\lim_{k\to\infty} \tan\alpha_i^k = \tan\beta_i, \quad 0\le i\le n.$$

From the formula for $\mathrm{D}(\cdot;\cdot)$ in Lemma 2.1, we see that the (l,m)-entries of the matrices corresponding to $\mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T^k)$ and $\mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T)$ are

$$g[\tan\alpha_0^k, \dots, \tan\alpha_{l-1}^k] \quad \text{and} \quad g[\tan\beta_0, \dots, \tan\beta_{l-1}],$$

where $g \in \{1, \dots, t^{i-1}, \hat{f}, t^{i+1}, \dots, t^n\}$. It follows from Lemma 2.2 that

$$\lim_{k\to\infty} g[\tan\alpha_0^k, \dots, \tan\alpha_{l-1}^k] = g[\tan\beta_0, \dots, \tan\beta_{l-1}].$$

Therefore, we have

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T^k) = \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T),$$

and consequently,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X^k; f](\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T) x^{n-i} y^i =: H(x,y).$$

To complete the proof, it remains to verify that $H = \mathbf{H}^{\mathrm{h}}[\{(\mathbf{n}_1, \nu_1), \dots, (\mathbf{n}_\lambda, \nu_\lambda)\}; f]$. We have

$$H(1,t) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T) t^i = \mathbf{H}^{\mathrm{H}}\big[\{\big(\tan\alpha_1, \nu_1\big), \dots, \big(\tan\alpha_\lambda, \nu_\lambda\big)\}; \hat{f}\big](t),$$

where we use Proposition 2.1 in the second relation. It follows that, for $1 \le i \le \lambda$, $0 \le k \le \nu_i - 1$,

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dt^k} H(1,t)\Big|_{t=\tan\alpha_i} &= \frac{d^k}{dt^k}\Big(\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\big[\{\big(\tan\alpha_1,\nu_1\big),\dots,\big(\tan\alpha_\lambda,\nu_\lambda\big)\};\hat{f}\big](t)\Big)\Big|_{t=\tan\alpha_i}\\ &= \frac{d^k}{dt^k}\hat{f}(t)\Big|_{t=\tan\alpha_i}.\end{aligned}$$

Corollary 3.1 now yields

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} H(1,\tan\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_i} = \frac{d^k}{d\alpha^k}\hat{f}(\tan\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_i}, \quad 1 \le i \le \lambda,\ \ 0 \le k \le \nu_i - 1.$$

In other words,

$$\frac{d^k}{d\alpha^k}\frac{H(\cos\alpha,\sin\alpha)}{\cos^n\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_i} = \frac{d^k}{d\alpha^k}\frac{f(\cos\alpha,\sin\alpha)}{\cos^n\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_i}, \quad 1 \le i \le \lambda,\ \ 0 \le k \le \nu_i - 1.$$

Using Lemma 3.1, we get

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} H(\cos\alpha,\sin\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_i} = \frac{d^k}{d\alpha^k} f(\cos\alpha,\sin\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_i}, \quad 1 \le i \le \lambda,\ \ 0 \le k \le \nu_i - 1.$$

It follows that H must be identical with $\mathbf{H}^{\mathrm{h}}[\{(\mathbf{n}_1,\nu_1),\dots,(\mathbf{n}_\lambda,\nu_\lambda)\};f]$. □

The next example shows that Theorem 4.1 does not hold when $f \notin \mathrm{C}^n(\mathcal{C}^+)$.

Example 4.1. For simplicity, we work with $n = 1$. The equation (4.3) gives

$$\mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X^k;f](\mathbf{x}) = \mathrm{D}(\mathcal{M}[1 \leftarrow \hat{f}(t)];T^k)x + \mathrm{D}(\mathcal{M}[t \leftarrow \hat{f}(t)];T^k)y,$$

where $\mathcal{M} = \{1,t\}$, $T^k = \{\tan\alpha_0^k, \tan\alpha_1^k\}$. Let us define $f : \mathcal{C}^+ \to \mathbb{R}$ by

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}},\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\Big) = \frac{\hat{f}(t)}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

with

$$\hat{f}(t) = \begin{cases}\sqrt[3]{t^2}\sin\frac{1}{t} & \text{if} \quad t \neq 0\\ 0 & \text{if} \quad t = 0.\end{cases}$$

Since $\hat{f}$ is continuous in $\mathbb{R}$ but not differentiable at 0, the function f does not belong to $\mathrm{C}^1(\mathcal{C}^+)$. If we take $\alpha_0^k = \arctan(-s_k)$ and $\alpha_1^k = \arctan(s_k)$ with $s_k = \frac{1}{\pi/2+2k\pi}$, then $\mathbf{x}_0^k$ and $\mathbf{x}_1^k$ tend to $(1,0)$. For the coefficient of y in $\mathbf{L}^{\mathrm{h}}[X^k;f]$, we have

$$\hat{f}[\tan\alpha_0^k,\tan\alpha_1^k] = \frac{\hat{f}(s_k)-\hat{f}(-s_k)}{s_k-(-s_k)} = \frac{1}{\sqrt[3]{s_k}} \to +\infty.$$

Let $X = \big\{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\big\}$ be a set of not necessarily distinct points on $\mathcal{C}^+$. Then we can write $X = \{(\mathbf{n}_1,\nu_1),\dots,(\mathbf{n}_\lambda,\nu_\lambda)\}$ with $\nu_1+\cdots+\nu_\lambda = n+1$. Hence we can identify $\mathbf{H}^{\mathrm{h}}[X;f]$ with $\mathbf{H}^{\mathrm{h}}[\{(\mathbf{n}_1,\nu_1),\dots,(\mathbf{n}_\lambda,\nu_\lambda)\};f]$. Note that $\mathbf{H}^{\mathrm{h}}[X;f]$ does not depend on the ordering of points in X.

Corollary 4.1. *Let n be a positive integer, and let $X^k = \{\mathbf{x}_0^k, \dots, \mathbf{x}_n^k\}$, $k \ge 0$, be sets of not necessarily distinct point on $\mathcal{C}^+$ such that*

$$\lim_{k\to\infty} \|X^k - X^0\| = 0,$$

where

$$\|X^k - X\| = \max\{\|\mathbf{x}_i^k - \mathbf{x}_i^0\| : i = 0, \dots, n\}.$$

Then, for any function f of class C^n on $\mathcal{C}^+$, we have

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}^{\mathrm{h}}[X^k; f] = \mathbf{H}^{\mathrm{h}}[X^0; f].$$

Proof. We can find α_i^k in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ such that $\alpha_i^k = \arg(\mathbf{x}_i^k)$ for $0 \le i \le n$ and $k \ge 0$. By hypothesis, we have

$$\lim_{k\to\infty} \max\{|\alpha_i^k - \alpha_i^0| : i = 0, \dots, n\} = 0. \tag{4.4}$$

Since the homogeneous Hermite interpolation polynomials are independent of the ordering of the nodes, we can rearrange α_i^k's, if necessary, to get the ordering

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha_0^k \le \alpha_1^k \le \cdots \le \alpha_n^k < \frac{\pi}{2}, \quad k \ge 0,$$

and (4.4) still holds true. This enables us to group consecutive identical angles so that the orderings in the $(\alpha_i^k)_{i=0}^m$ do not change. From the proof of Theorem 4.1, we have

$$\mathbf{H}^{\mathrm{h}}\left[X^k; f\right] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T^k) x^{n-i} y^i, \quad T^k = \{\tan\alpha_0^k, \dots, \tan\alpha_n^k\}.$$

Since $\lim_{k\to\infty} \tan\alpha_i^k = \tan\alpha_i^0$ for $i = 0, \dots, n$, it follows from Lemma 2.2 that the (l, m)-entry of the matrix corresponding to $\mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T^k)$ converges to the (l, m)-entry of the matrix corresponding to $\mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T^0)$ for every $1 \le l, m \le n+1$. Therefore, we have

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T^k) = \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T^0),$$

and consequently,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}^{\mathrm{h}}\left[X^k; f\right] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{D}(\mathcal{M}[t^i \leftarrow \hat{f}(t)]; T^0) x^{n-i} y^i = \mathbf{H}^{\mathrm{h}}\left[X^0; f\right].$$

The proof is complete. $\square$

Acknowledgements. We thank an anonymous referee for a very careful reading of the manuscript.

Список литературы

[1] L. Bialas-Ciez and J.-P. Calvi, "Homogeneous minimal polynomials with prescribed interpolation conditions", Trans. Amer. Math. Soc., **368**, 8383 – 8402 (2016).

[2] T. Bloom and J-.P. Calvi, "A continiuty property of Mulivariate Lagrange interpolation", Math. Comp., **66**, 1561 – 1577 (1997).

[3] B. Bojanov, H. Hakopian and A. Sahakian, Spline Functions and Multivariate Interpolations, Springer-Verlag (1993).

[4] L. Bos and J.-P.Calvi, "Taylorian points of an algebraic curve and bivariate Hermite interpolation", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci, **7**, 545 – 577 (2008).

[5] J.-P. Calvi and Phung V. M., "On the continuity of multivariate Lagrange interpolation at natural lattices", L.M.S. J. Comp. Math., **6**, 45 – 60 (2013).

[6] J.-P. Calvi and Phung V. M., "Can we define Taylor polynomials on algebraic curves?", Ann. Polon. Math., **118**, 1 – 24 (2016).

[7] V. M. Phung, "On bivariate Hermite interpolation and the limit of certain bivariate Lagrange projectors", Ann. Polon. Math., **115**, 1 – 21 (2015).

[8] V. M. Phung, "Harmonic interpolation of Hermite type based on Radon projections in two directions", J. Math. Anal. Appl., **454** , 481 – 501 (2017).

[9] S. Roman, "The formula of Faa di Bruno", Amer. Math. Monthly, **87**, 805 – 809 (1980).

Поступила 24 октября 2017

После доработки 2 февраля 2018

Принята к публикации 16 апреля 2018

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 54, номер 5, 2019

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 54, No. 5, 2019

Contents