

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2019

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Վարդանյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ НЕПРЕРЫВНЫХ С ВЕСОМ ФУНКЦИЙ

Г. М. АЙРАПЕТЯН, С. А. АГЕКЯН

Ереванский государственный университет

E-mails: hhayrapet@gmail.com; smbat.aghekyan@gmail.com

Аннотация. Пусть $C(\rho)$ класс функций f таких, что $f(x)\rho(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$. В верхней полуплоскости комплексной плоскости z рассматривается граничная задача Римана в весовом пространстве $C(\rho)$, $\rho(x) = \prod_{k=1}^m \left| \frac{x - x_k}{x + i} \right|^{\alpha_k}$, где α_k и x_k , $k = 1, 2, \dots, m$ действительные числа. Требуется определить аналитическую в верхней и нижней полуплоскостях функцию $\Phi(z)$ так, чтобы имело место $\lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi^+(x + iy) - a(x)\Phi^-(x - iy) - f(x)\|_{C(\rho)} = 0$, где $f \in C(\rho)$, $a(x) \in C^\delta[-A; A]$ для любого $A > 0$, причем $a(x) \neq 0$, существует $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a(\infty)$ и $|a(x) - a(\infty)| < C|x|^{-\delta}$, при $|x| \geq A > 0$. Устанавливается нормальная разрешимость этой задачи.

MSC2010 number: 35J25.

Ключевые слова: задача Римана; весовое пространство; интеграл типа Коши; факторизация; разложение Лорана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\overline{C}(-\infty; +\infty)$ класс непрерывных на действительной оси функций $f(x)$ для которых существуют $f(+\infty)$, $f(-\infty)$ и $f(+\infty) = f(-\infty)$. Соответственно через $\overline{C}^\delta(-\infty; +\infty)$ обозначим класс функций $f \in \overline{C}(-\infty; +\infty)$ таких, что для любого $A > 0$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\delta$ при $x_1, x_2 \in [-A, A]$. Через $\overline{C}(\rho)$ обозначим класс непрерывных на действительной оси функций f таких, что $f(x)\rho(x) \in \overline{C}(-\infty; +\infty)$, где

$$(1.1) \quad \rho(x) = \prod_{k=1}^m \left| \frac{x - x_k}{x + i} \right|^{\alpha_k},$$

α_k и x_k , $k = 1, 2, \dots, m$ действительные числа.

Далее, пусть $\Pi^\pm$ верхняя и нижняя полуплоскости комплексной плоскости C . Через A обозначим класс аналитических на $\Pi^+ \cup \Pi^-$ функций удовлетворяющих

⁰Исследование выполнено при поддержке ГКИ МОИ РА в рамках совместного научного проекта NYSU-SFU-16/1 финансируемым международным конкурсом ТКИ МОИ РА-ЕГУ-ЮФУ РФ-2016.

условно $|\Phi(z)| \leq C|z|^{m_0}$, $|Imz| \geq y > 0$, где m_0 некоторое целое число, а C постоянная, зависящая, вообще говоря, от y .

Положим

$$n_k = \begin{cases} [\alpha_k], & \text{если } \alpha_k - \text{нечетное,} \\ [\alpha_k] - 1, & \text{если } \alpha_k - \text{четное,} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

и $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$.

В настоящей работе исследуется граничная задача Римана в пространстве $\bar{C}(\rho)$. Эта задача, когда $\alpha_k \geq 0$ формулируется следующим образом:

Задача R. Пусть $f \in \bar{C}(\rho)$. Определить функцию $\Phi \in A$ так, чтобы имело место

$$(1.2) \quad \lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi^+(x + iy) - a(x)\Phi^-(x - iy) - f(x)\|_{\bar{C}(\rho)} = 0,$$

где $a(x) \in \bar{C}^1(-\infty; +\infty)$, причем $a(x) \neq 0$, существует $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a(\infty)$ и $|a(x) - a(\infty)| < C|x|^{-\delta}$, при $|x| \geq A > 0$.

В настоящей работе устанавливается, что при $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, m$ и $N + \mu \geq 0$, $\mu = \text{inda}(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ задача R нормально разрешима, т.е. однородная задача имеет $N + \mu$ линейно независимых решений. В случае $N + \mu < 0$ описаны необходимые и достаточные условия на f для того, чтобы она имела решение. Рассматривается также случай, когда α_k - произвольные действительные числа. В этом случае, когда $\alpha_k < 0$, для некоторых k , приходится изменить постановку граничной задачи. Устанавливается, что количество линейно независимых решений однородной задачи, вообще говоря, зависит также от поведения функции $a(x)$ в точках x_k .

Граничные задачи в весовых пространствах исследованы многими авторами (см. [1]-[8]). Задача R в единичном круге и в произвольной области, когда $\rho(z) \equiv 1$ исследована в работах [10], [11] и доказано что она нормально разрешима.

В случае когда $f \in L^1(\rho)$, в аналогичной постановке, задача R в единичном круге, исследована в работах [12], [13]. Аналогичные граничные задачи в классической постановке в $L^p(\rho)$, где ρ -весовая функция типа $|t - t_k|^\delta$, где $-\frac{1}{p} < \delta < p$ исследованы в работах [1], [2]. Эта же задача когда весовая функция удовлетворяет условию Макенхаута в $L^p(\rho)$ ($1 < p < \infty$) исследована в работах [3], [4].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Пусть $\mu = \text{inda}(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Определим

$$(2.1) \quad S^+(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln a_1(t) dt}{t - z}\right\}, \quad z \in \Pi^+$$

$$(2.2) \quad S^-(z) = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^\mu \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln a_1(t) dt}{t - z}\right\}, \quad z \in \Pi^-$$

где

$$a_1(t) = \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^{\mu} a(t), \quad \text{ind} a_1(t) = 0.$$

Для произвольной функции $f \in \overline{C}(\rho)$ положим

$$(2.3) \quad K(f, z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in \Pi^{\pm}.$$

где

$$R(z) = (z+i)^{-N} \prod_{k=1}^m (z-x_k)^{n_k}.$$

Тогда получаем $K(f, x+iy) - a(x)K(f, x-iy) = I_1(f, x, y) + I_2(f, x, y)$, где

$$(2.4) \quad I_1(f, x, y) = \frac{a(x)S(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^-(t)} \frac{ydt}{(t-x)^2 + y^2}$$

$$I_2(f, x, y) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{S(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} - \frac{a(x)S(x-iy)(x-iy+i)}{2\pi i R(x-iy)} \right) \cdot$$

$$(2.5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \frac{ydt}{t-x+iy}$$

Лемма 2.1. Пусть $f \in \overline{C}(\rho)$. Тогда $\|I_1(f, x, y)\|_{\overline{C}(\rho)} \leq M \|f\|_{\overline{C}(\rho)}$, где M постоянная, не зависящая от f и y .

Доказательство. Положим $\tilde{R}(x) = \prod_{k=1}^m \left| \frac{x-x_k}{x+i} \right|^{\{\alpha_k\}}$, где $\{\alpha_k\}$ дробная часть числа α_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Поскольку

$$(2.6) \quad c\tilde{R}(x) \leq \frac{\rho(x)}{|R(x)|} \leq C\tilde{R}(x),$$

то учитывая, что $S^+(z)$ ограничена, получаем

$$\begin{aligned} & |I_1(f, x, y) \cdot \rho(x)| = \\ & = \left| \frac{1}{2\pi i} S(x+iy)(x+iy+i) \tilde{R}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \frac{ydt}{(t-x)^2 + y^2} \right| \leq \\ & \leq M |\tilde{R}(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(t)R(t)}{(t+i)} \right| \frac{|x+iy+i|ydt}{(t-x)^2 + y^2} \leq I_1^{(1)}(f, x, y) + I_1^{(2)}(f, x, y) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1^{(1)}(f, x, y) &= M |\tilde{R}(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)R(t)|ydt}{(t-x)^2 + y^2} \\ I_1^{(2)}(f, x, y) &= M |\tilde{R}(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \right| \frac{|(x+iy+i) - (t+i)|ydt}{(t-x)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Имеем

$$I_1^{(1)}(f, x, y) \leq M_1 |\tilde{R}(x)| \cdot \max_{x \in (-\infty, +\infty)} \left\{ |f(x)| |\tilde{R}(x)| \right\}.$$

Поскольку $|(x + iy + i) - (t + i)| = |t - x - iy|$, получаем

$$\begin{aligned} I_1^{(2)}(f, x, y) &\leq M_2 |\tilde{R}(x)| \cdot \max_{x \in (-\infty; +\infty)} \left\{ |f(x)| |R(x)| \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y dt}{|t + i| |t - x + iy|} \leq \\ &\leq M_2 |\tilde{R}(x)| \cdot \max_{x \in (-\infty; +\infty)} \left\{ |f(x)| |R(x)| \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y dt}{|t + i|^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y dt}{|t - x + iy|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|R(x)| \cdot \tilde{R}(x) = \rho(x)$, получаем

$$I_1^{(1)}(f, x, y) \leq M_1 \|f\|_{\bar{C}(\rho)}, \quad I_1^{(2)}(f, x, y) \leq M_2 \|f\|_{\bar{C}(\rho)}.$$

Лемма 2.1 доказана. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $f \in \bar{C}(\rho)$. Тогда $\|I_2(f, x, y)\|_{\bar{C}(\rho)} \leq M \|f\|_{\bar{C}(\rho)}$, где M постоянная, не зависящая от f и y .

Доказательство. Из (2.5) имеем $I_2(f, x, y) \cdot \rho(x) = J_1(f, x, y) + J_2(f, x, y)$, где

$$\begin{aligned} J_1(f, x, y) &= \frac{\rho(x)}{2\pi i} \cdot \frac{S(x + iy)(x + iy + i) - a(x)S(x - iy)(x - iy + i)}{R(x + iy)} \cdot \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t + i)S^+(t)} \frac{y dt}{t - x + iy} \\ J_2(f, x, y) &= \frac{\rho(x)}{2\pi i} \cdot a(x)S(x - iy)(x - iy + i) \cdot \left(\frac{1}{R(x + iy)} - \frac{1}{R(x - iy)} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t + i)S^+(t)} \frac{y dt}{t - x + iy}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &S^+(x + iy)(x + iy + i) - a(x)S^-(x - iy)(x - iy + i) = \\ &= (x + i)(S^+(x + iy) - a(x)S^-(x - iy)) + iy(S^+(x + iy) + a(x)S^-(x - iy)) \end{aligned}$$

и

$$|S^+(x + iy) - a(x)S^-(x - iy)| < \frac{\Delta y}{|x + i|^{2\delta}}$$

(см. [9]) получаем

$$\begin{aligned} |J_1(f, x, y)| &\leq C |\tilde{R}(x)| \cdot \frac{y^\delta}{|x + i|^{2\delta-1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(t)R(t)}{(t + i)S^+(t)} \right| \frac{y dt}{|t - x + iy|} + \\ &+ Cy |\tilde{R}(x)| |S^+(x + iy) + a(x)S^-(x - iy)| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(t)R(t)}{(t + i)S^+(t)} \right| \frac{y dt}{|t - x + iy|}. \end{aligned}$$

Учитывая, что функции S^+ , S^- ограничены, и $a(x) \in \bar{C}^\delta(-\infty; +\infty)$, из (2.6) получаем

$$\begin{aligned} |J_1(f, x, y)| &\leq M_1 \|f\|_{\bar{C}(\rho)}, \\ |J_2(f, x, y)| &\leq C \rho(x) \cdot (|x + i| + y) \cdot \left| \frac{1}{R(x + iy)} - \frac{1}{R(x - iy)} \right|. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \right| \frac{y dt}{|t-x+iy|}.$$

Так как

$$\rho(x) \cdot \left| \frac{1}{R(x+iy)} - \frac{1}{R(x-iy)} \right| = o\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

$$\text{то } |J_2(f, x, y)| \leq M_2 \|f\|_{\overline{C}(\rho)}.$$

□

3. ЗАДАЧА R ПРИ $\alpha_k \geq 0$

Теорема 3.1. Пусть $f \in \overline{C}(\rho)$ и $\Phi(z) \in A$ является решением задачи R. Тогда
 а) Если $N + \mu \geq -1$, то $\Phi(z)$ для $z \in \Pi^\pm$ представима в виде

$$(3.1) \quad \Phi(z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{dt}{t-z} + (z+i)S(z)(R(z))^{-1} G\left(\frac{1}{z+i}\right),$$

где G - полином порядка $N + \mu$ ($N + \mu > 0$) причем $G(\omega) \equiv 0$, если $N + \mu = 0$ или $N + \mu = -1$.

б) Если $N + \mu < -1$, то $\Phi(z)$ представима в виде (3.1), где $G \equiv 0$ и функция f удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^{k+1}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -(N + \mu) - 1$$

Доказательство. а) Пусть $N + \mu > 0$. Положим

$$(3.2) \quad \Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) = f_y(x).$$

Умножая (3.2) на $R(x)S^+(x)(x+i)^{-1}$, получаем

$$\frac{R(x)\Phi^+(x+iy)}{S^+(x)(x+i)} - \frac{R(x)\Phi^-(x-iy)}{S^-(x)(x+i)} = \frac{R(x)f_y(x)}{S^+(x)(x+i)}$$

Обозначив

$$\Phi_y^+(z) = \frac{R(z)\Phi^+(z+iy)}{S^+(z)(z+i)}, \quad z \in \Pi^+,$$

$$\Phi_y^-(z) = \frac{R(z)\Phi^-(z-iy)}{S^-(z)(z+i)}, \quad z \in \Pi^-,$$

получаем

$$(3.3) \quad \Phi_y^+(x) - \Phi_y^-(x) = \frac{R(x)f_y(x)}{S^+(x)(x+i)}.$$

Если $N + \mu \geq -1$, то функция $\Phi_y^-(z)$ имеет полюс порядка $N + \mu + 1$ в точке $z = -i$.

Представим (3.3) в виде

$$(3.4) \quad \Phi_y^+(x) - \bar{\Phi}_y^-(x) = \frac{R(x)f_y(x)}{S^+(x)(x+i)} + G_y(x),$$

где $G_y(z)$ главная часть разложения Лорана функции $\Phi_y^-(z)$ в точке $z = -i$

$$G_y(z) = \frac{A_1(y)}{z+i} + \dots + \frac{A_{N+\mu+1}(y)}{(z+i)^{N+\mu+1}},$$

а $\bar{\Phi}_y^-(z) = \Phi_y^-(z) - G_y(z)$. Из (3.4) имеем

$$(3.5) \quad \Phi^+(z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_y(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{dt}{t-z} + \\ + (z+i)S(z)(R(z))^{-1}[G(z) + P_y(z)], \quad z \in \Pi^+$$

где $P_y(z)$ некоторый полином. Докажем, что $P_y \equiv 0$. Действительно, имеем

$$\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) = I_1(f, x, y) - I_2(f, x, y) + \\ + (x+iy+i)S^+(x+iy)G\left(\frac{1}{x+iy+i}\right) - (x-iy+i)S^-(x-iy)G\left(\frac{1}{x-iy+i}\right) + \\ + (x+iy+i)S^+(x+iy)P_y(x+iy) - (x-iy+i)S^-(x-iy)P_y(x-iy) = f_y(x),$$

где I_1, I_2 определяются из (2.4) и (2.5).

Учитывая, что (см. [9]) для некоторой постоянной A

$$\left\| \frac{S^+(x+iy)}{(x+iy+i)^k} - a(x) \frac{S^-(x-iy)}{(x-iy+i)^k} \right\|_C \leq A y, \quad k \geq 1,$$

и

$$\left\| \frac{1}{R(x+iy)} - \frac{1}{R(x-iy)} \right\|_C \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow +0,$$

получаем

$$(3.6) \quad \left\| \frac{S^+(x+iy)}{R(x+iy)(x+iy+i)^k} - a(x) \frac{S^-(x-iy)}{R(x-iy)(x-iy+i)^k} \right\|_C \leq A y, \quad k \geq 1.$$

Так, как $f \in \overline{C}(\rho)$, то в силу лемм 2.1 и 2.2 и (3.6) $P_y \equiv 0$.

Переходя к пределу в (3.5) при $y \rightarrow +0$, для $z \in \Pi^{\pm}$ будем иметь

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{dt}{t-z} + (z+i)S(z)(R(z))^{-1}G(z),$$

где $G(z)$ главная часть разложения Лорана функции $R(z)\Phi^-(z)(S^-(z)(z+i))^{-1}$ в точке $z = -i$.

б) Если $N+\mu < -1$ то $\Phi_y^-(z)$ голоморфна в Π^- , поэтому ее главная часть обращается в нуль, т.е. $G(z) \equiv 0$. С другой стороны, функция $R(z)\Phi^-(z)(S^-(z)(z+i))^{-1}$ имеет ноль порядка $|N+\mu-1|$ в точке $z = -i$. Следовательно $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^{k+1}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -(N+\mu)-1$$

Теорема 3.1 доказана. $\square$

Через $\overline{C}^{\delta}(\rho)$ обозначим класс функций на $(-\infty, +\infty)$ таких, что $f\rho \in \overline{C}^{\delta}(-\infty, +\infty)$.

Теорема 3.2. Пусть $f \in \overline{C}^1(\rho)$. Тогда

а) Если $N + \mu \geq -1$, то общее решение задачи R можно представить в виде

$$(3.7) \quad \Phi(z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{dt}{t-z} + \\ + (z+i)S(z)(R(z))^{-1} G\left(\frac{1}{z+i}\right), \quad z \in \Pi^\pm$$

где $G(z)$ полином порядка $N + \mu$, если $N + \mu > 0$, $G(\omega) \equiv 0$ при $N + \mu = 0$, или $N + \mu = -1$.

б) Если $N + \mu < -1$, то задача разрешима тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^{k+1}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -(N + \mu) - 1$$

Общее решение можно представить в виде (3.7), где $G(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f_n(x) \in \overline{C}^5(\rho)$ последовательность финитных функций таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)} = 0$$

Для любого n и $z \in \Pi^\pm$ положим

$$\Phi_n(z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{dt}{t-z} + (z+i)S(z)(R(z))^{-1} G\left(\frac{1}{z+i}\right),$$

Докажем, что

$$(3.8) \quad \lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\|_{\overline{C}(\rho)} = 0.$$

Из формулы Сохоцкого-Племеля имеем

$$(3.9) \quad \Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) = f_n(x), \quad x \in (-A, A)$$

Если $|x| > A$, то учитывая что

$$\begin{aligned} & \Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) = \\ & = \frac{S^+(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{ydt}{(t-x)^2 + y^2} + \\ & + \left(\frac{S(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} - \frac{a(x)S(x-iy)(x-iy+i)}{2\pi i R(x-iy)} \right) \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \frac{ydt}{t-x+iy} + J(x, y), \end{aligned}$$

где

$$J(x, y) = \sum_{k=1}^{\mu} c_k \left[\frac{S^+(x+iy)}{R(x+iy)(x+iy+i)^k} - \frac{S^-(x-iy)}{R(x-iy)(x-iy+i)^k} \right],$$

получаем

$$\max_{|z|>A} \rho(x) |\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)| \leq J_1(x, y) + J_2(x, y) + J_3(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} J_1(x, y) &= \max_{|z|>A} \rho(x) \left| \frac{S^+(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{ydt}{(t-x)^2+y^2} \right| \\ J_2(x, y) &= \max_{|z|>A} \rho(x) \left| \left(\frac{S(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} - \frac{a(x)S(x-iy)(x-iy+i)}{2\pi i R(x-iy)} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \frac{ydt}{t-x+iy} \right| \\ J_3(x, y) &= \max_{|z|>A} \rho(x) |(x+iy+i)S^+(x+iy)(R(x+iy))^{-1} G\left(\frac{1}{x+iy+i}\right) - \\ &\quad - (x-iy+i)S^-(x-iy)(R(x-iy))^{-1} G\left(\frac{1}{x-iy+i}\right)| \end{aligned}$$

Учитывая, что $f_n(x) = 0, |x| > A$, и $\frac{\rho(z)}{|R(z)|} = O(1), z \in \Pi^+ \cup \Pi^-$, будем иметь

$$\begin{aligned} J_1(x, y) &\leq C \max_{|z|>A} \{y|x+iy+i| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f_n(t)}{S^+(t)(t+i)} \right| \frac{ydt}{(t-x)^2+y^2} \} \leq \\ &\leq C \|f_n\|_C \max_{|z|>A} \{y|x+iy+i| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-x)^2} \} = C_1 \|f_n\|_C \max_{|z|>A} \left\{ \frac{y|x+iy+i|}{|x^2-A^2|} \right\}, \end{aligned}$$

где $C = \text{const}$. Следовательно, $J_1(x, y)$ стремится к нулю при $y \rightarrow +0$.

Аналогично доказательству леммы 2.2 получаем, что $J_2(x, y)$ тоже стремится к нулю, при $y \rightarrow +0$. Учитывая оценку (3.6) для $J_3(x, y)$, и равенство (3.9), получаем (3.8). Используя леммы 2.1 и 2.2 и (3.8), будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)} &\leq \|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\|_{\overline{C}(\rho)} + \\ &+ \|f_n(x) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)} + \|[\Phi_n^+(x+iy) - \Phi^+(x+iy)] - a(x)[\Phi_n^-(x-iy) - \Phi^-(x-iy)]\|_{\overline{C}(\rho)} \leq \\ &\leq \|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\|_{\overline{C}(\rho)} + 2\|f_n(x) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)}. \end{aligned}$$

При $y \rightarrow +0$, получаем $\lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)} = 0$.

Теорема 3.2 доказана. $\square$

4. ЗАДАЧА R ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ α_k

Положим

$$\rho_y(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{если } \alpha_k > 0, k = 1, 2, \dots, m \\ |x+i|^{-\beta} \prod_{k=1}^p |x-x_k|^{\alpha_k} \cdot \prod_{k=1}^q |x+iy-x_k|^{\overline{\alpha}_k}, \end{cases}$$

где $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m, p+q = m, \alpha_k > 0$ и $\overline{\alpha}_k < 0$.

Функцию $a(x)$ отнесем к классу R^α ($a(x) \in R^\alpha$), если

$$(4.1) \quad \lim_{y \rightarrow +0} \|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)\|_{\overline{C}(\rho_R)} = 0.$$

К примеру, пусть

$$a(x) = \cos^\theta \left(\frac{\pi}{2} \left(\prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x_k(x - \bar{z}_0)}{e^{i\alpha}(x - z_0)} \right)^{\lambda_k} \right) \right)$$

где θ произвольное целое число, а λ_k неотрицательные целые числа. Имеем $\theta = \text{inda}(x)$ и, если $\lambda_k > -n_k - 1$, то $(a(x) \in R^\alpha)$. Действительно, пусть $\theta \geq 0$, тогда $S^+(z) \equiv 1$ и

$$\begin{aligned} S^-(z) &= \cos^{-\theta} \left(\frac{\pi}{2} \left(\prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x_k(z - \bar{z}_0)}{e^{i\alpha}(z - z_0)} \right)^{\lambda_k} \right) \right), \\ |S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| &\leq \\ &\leq \left| \cos^\theta \left(\frac{\pi}{2} \left(\prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x_k(x-iy-\bar{z}_0)}{e^{i\alpha}(x-iy-z_0)} \right)^{\lambda_k} \right) \right) - \cos^\theta \left(\frac{\pi}{2} \left(\prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x_k(x-\bar{z}_0)}{e^{i\alpha}(x-z_0)} \right)^{\lambda_k} \right) \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \prod_{k=1}^m \left(\frac{e^{i\alpha}(x-iy-z_0)}{(x-iy-\bar{z}_0)} - x_k \right)^{\lambda_k} - \prod_{k=1}^m \left(\frac{e^{i\alpha}(x-z_0)}{(x-\bar{z}_0)} - x_k \right)^{\lambda_k} \right|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \rho_y(x) &\leq \\ &\leq Cy |x_k - x - iy|^{\lambda_k} \left| \frac{e^{i\alpha}(x-iy-z_0)}{(x-iy-\bar{z}_0)} - x_k \right|^{n_k-1} |x_k - x|^{\alpha_k - n_k} \end{aligned}$$

Так как $\lambda_k + n_k > -1$, то $a(x) \in R^\alpha$. Аналогично устанавливается, что $a(x) \in R^\alpha$ при $\theta < 0$.

Лемма 4.1. Пусть $a(x) \in R^\alpha$ и $\alpha_k \leq -2$, $k \in 1, 2, \dots, m$. Если

$$P(z) = A_1(x_k - z) + A_2(x_k - z)^2 + \dots + A_{-n_k-1}(x_k - z)^{-n_k-1}$$

удовлетворяет условиям

$$\lim_{y \rightarrow +0} \max_{|x-x_k| < \delta} \{|S^+(x+iy)P(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)P(x-iy)| \rho_y\} = 0$$

для некоторых $0 < \delta < \min |x_k - x_j|$, $k \neq j$ то $P(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как

$$S^+(x+iy)P(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)P(x-iy) = I_1(x, y) + I_2(x, y),$$

где

$$I_1(x, y) = (S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy))P(x+iy),$$

$$I_2(x, y) = a(x)S^-(x-iy)(P(x+iy) - P(x-iy)),$$

то из условий леммы 4.1 имеем

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|I_1(x, y)\|_{C(\rho_y)} = 0.$$

Пусть $A_1 \neq 0$ тогда имеем $|P(x + iy) - P(x - iy)| > y$, где $|x - x_k| < Cy, C > 0$. Поэтому

$$\max_{x \in (-\infty, +\infty)} \{|I_2(x, y)|\rho_y\} \geq \max_{|x_k - (x + iy)| < cy} \frac{y}{|x_k - (x + iy)|^{-n_k} |x_k - x|^{n_k - \alpha_k}}.$$

Так как $|x_k - (x + iy)| = O(y)$ при $|x_k - x| < Cy$, получаем

$$\max_{|x_k - (x + iy)| < cy} \{|I_2(x, y)|\rho_y\} \geq y^{n_k+1} \max_{0 < x < Cy} |x_k - x|^{n_k - \alpha_k} \geq y^{n_k+1} y^{\alpha_k - n_k}.$$

Учитывая, что $\alpha_k \leq -2, k \in 1, 2, \dots, m$ получаем $A_1 = 0$.

Пусть $A_j \neq 0, A_1 = A_2 = \dots = A_{j-1} = 0$. Тогда

$$|P(x + iy) - P(x - iy)| > y|x_k - x|^{j-1}, \text{ при } ky^2 < |x_k - (x + iy)| < Cy.$$

Поэтому

$$\max_{|x - x_k| < \delta} \{|I_2(x, y)|\rho_y\} \geq \max_{|x_k - (x + iy)| < cy} \frac{Cy|x_k - x|^{j + \alpha_k - n_k - 1}}{|x_k - (x + iy)|^{-n_k}} \geq Cy^{n_k+1} \delta^{j + \alpha_k - n_k - 1}.$$

Так как $n_k + 1 < 0$ и учитывая, что $\delta > 0$ постоянное число, получаем

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|I_2(x, y)\|_{C(\rho_y)} > 0.$$

Лемма 4.1 доказана. □

В дальнейшем предполагаем, что $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m, \alpha_m \leq -1$.

Лемма 4.2. Пусть $k_j \geq n_j, j = 1, 2, \dots, m$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|S^+(x + iy) \prod_{j=1}^m |x_j - (x + iy)|^{k_j} - a(x)S^-(x - iy) \prod_{j=1}^m |x_j - (x - iy)|^{k_j}\|_{C(\rho)} = 0$$

Доказательство. Имеем

$$S^+(x + iy) \prod_{j=1}^m |x_j - (x + iy)|^{k_j} - a(x)S^-(x - iy) \prod_{j=1}^m |x_j - (x - iy)|^{k_j} = I_1(x, y) + I_2(x, y)$$

где

$$I_1(x, y) = (S^+(x + iy) - a(x)S^-(x - iy)) \prod_{j=1}^m |x_j - (x + iy)|^{k_j}$$

$$I_2(x, y) = a(x)S^-(x - iy) \left(\prod_{j=1}^m |x_j - (x + iy)|^{k_j} - \prod_{j=1}^m |x_j - (x - iy)|^{k_j} \right)$$

Учитывая, что $|S^+(x + iy) - a(x)S^-(x - iy)| < Cy^\delta, \delta > 0$, получаем

$$\max_{x \in (-\infty, +\infty)} \{|I_1(x, y)|\rho_y(x)\} \leq Cy^\delta \prod_{j=1}^m \max_{\{x_j\}} \left\{ \frac{|x_j - (x + iy)|^{k_j} |x - x_j|^{\alpha_j - n_j}}{|x_j - (x + iy)|^{-n_j}} \right\}.$$

Так как $k_j \geq -n_j$ и $\alpha_j - n_j > 0$, то

$$\frac{|x_j - (x + iy)|^{k_j} |x - x_j|^{\alpha_j - n_j}}{|x_j - (x + iy)|^{-n_j}} \leq C.$$

Получаем: $\lim_{y \rightarrow +0} \|I_1(x, y)\|_{C(\rho)} = 0$. Далее имеем

$$\left| \prod_{j=1}^m |x_j - (x + iy)|^{k_j} - \prod_{j=1}^m |x_j - (x - iy)|^{k_j} \right| \leq \\ \leq \left| |x_j - (x + iy)|^k - |x_j - (x - iy)|^k \right| < Cy |x_j - (x + iy)|^{k-1},$$

где $k = \min\{k_j\}$. Поэтому

$$\max_{x \in (-\infty, +\infty)} \{|I_2(x, y)| \rho_y(x)\} \leq Cy \sum_{j=1}^m \max_{\{x_j\}} \left\{ \frac{|x_j - (x + iy)|^{k-1} |x - x_j|^{\alpha_j - n_j}}{|x_j - (x + iy)|^{-n_j}} \right\}$$

учитывая, что

$$\frac{|x_j - (x + iy)|^{k-1}}{|x_j - (x + iy)|^{-n_j}} = o\left(\frac{1}{y}\right)$$

при $y \rightarrow \infty$, получаем $\lim_{y \rightarrow +0} \|I_2(x, y)\|_{C(\rho)} = 0$. □

Лемма 4.3. Пусть $\alpha_k \leq -2$, $1 \leq k \leq m$, $a(t) \in R^\alpha$ и

$$\Phi_k(z) = |x_k - z|^{-n_k} \prod_{j=1}^m |x_j - z|^{n_j}.$$

Если функция

$$\varphi_k(z) = \left(\frac{A_1}{(x_k - z)} + \frac{A_2}{(x_k - z)^2} + \dots + \frac{A_{-n_k}}{(x_k - z)^{-n_k}} \right) \Phi_k(z)$$

удовлетворяет условию

$$\max_{x \in (-\infty, +\infty)} \{|S^+(x + iy) \phi_k^+(x + iy) - a(x) S^-(x - iy) \phi_k^-(x - iy)| \rho_y(x)\} \rightarrow 0,$$

то $\varphi_k(z)$ можно представить в виде $\varphi_k(z) = A_0 + (x_k - z)^{-n_k} \Phi_0(z)$, где $\Phi_0(z)$ аналитическая функция в точке x_k , а A_0 некоторое комплексное число.

Доказательство. Из леммы 4.2 имеем

$$\max_{|x_k - x| < \varepsilon} \{|(x_k - (x + iy))^{-n_k} S^+(x + iy) \varphi_k^+(x + iy) - \\ - a(x) (x_k - (x - iy))^{-n_k} S^-(x - iy) \varphi_k^-(x - iy)| \rho_y(x)\} \rightarrow 0, \text{ при } y \rightarrow +0.$$

Заключаем, что функция

$$\phi_k(z) = \varphi_k'(x_k) + \dots + \frac{\varphi_k^{-n_k-1}(x_k) (x_k - z)^{-n_k-1}}{(-n_k)!}$$

также удовлетворяет условию

$$\max_{|x_k - x| < \varepsilon} \{|S^+(x + iy) \phi_k^+(x + iy) - a(x) S^-(x - iy) \phi_k^-(x - iy)| \rho_y(x)\} \rightarrow 0.$$

Используя лемму 4.1 числа $A_1, A_2, \dots, A_{-n_k-1}$ можно однозначно определить. Выбираем произвольное число A_{-n_k} , остальные числа $A_1, A_2, \dots, A_{-n_k-1}$ можно однозначно определить. Учитывая леммы 4.1 и 4.2, получаем доказательство леммы 4.3. $\square$

Теорема 4.1. Пусть существует k такое, что $1 \leq k \leq m$, $\sigma_k < 0$ и $u(x) \in R^n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $N + \mu \geq 0$, то общее решение задачи R можно представить в виде

$$(4.2) \quad \Phi(z) = K(f, z) + S(z) \left(A_0 + \frac{P(z)}{R(z)} \right),$$

где $K(f, z)$ определяется формулой (2.3), A_0 - произвольное комплексное число, когда $\mu > 0$ и $A_0 = 0$ при $\mu \leq 0$. $P(z)$ полином порядка $N + \mu - 1$.

б) если $N + \mu < 0$ и $\mu > 0$, то общее решение задачи R представимо в виде $\Phi(z) = K(f, z) + A_0 S(z)$, где A_0 - произвольное число и $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$(4.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^{k+1}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -(N + \mu) - 1$$

в) если $N + \mu < 0$ и $\mu \leq 0$, то решение задачи R единственное, представимо в виде $\Phi(z) = K(f, z) + A_0 \Phi_0(z)$, где $\Phi_0(z)$ - решение однородной задачи R

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^{N+1}}$$

и $f(t)$ удовлетворяет условиям (4.3) если $\mu \neq -N - 1$.

Доказательство. а) Предположим, что $\Phi(z)$ решение задачи R при заданной $f \in \overline{C}(\rho)$. Тогда из (1.2) имеем

$$\lim_{y \rightarrow +0} \max_{x \in (-\infty, +\infty)} \left| \frac{\Phi^+(x + iy)}{S^+(x)} - \frac{\Phi^-(x - iy)}{S^-(x)} - \frac{f(x)}{S^+(x)} \right| |R(x)| = 0$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi_y^+(z) &= \frac{R(z)\Phi^+(z + iy)}{S^+(z)}, & z \in \Pi^+ \\ \Phi_y^-(z) &= \frac{R(z)\Phi^-(z - iy)}{S^-(z)}, & z \in \Pi^- \end{aligned}$$

получаем

$$(4.4) \quad \Phi_y^+(x) - \Phi_y^-(x) = \frac{R(x)f_y(x)}{S^+(x)},$$

где $\Phi_y^+(z)$ имеет полюс порядка $-n_k$ в точке $z = x_k - iy$. Пусть

$$G_{ky}(z) = \frac{A_1^k(y)}{(t_k + iy - z)} + \frac{A_2^k(y)}{(t_k + iy - z)^2} + \dots + \frac{A_{-n_k}^k(y)}{(t_k + iy - z)^{-n_k}}$$

главная часть разложения Лорана функции $\Phi_y^+(z)$ в окрестности точки $x_k + iy$. Тогда будем иметь

$$(4.5) \quad \Phi_y^+(x) - \left(\Phi_y^-(x) - \sum_{k=1}^m G_{ky}(x) \right) = f_y(x) + \sum_{k=1}^m G_{ky}(x)$$

Пусть теперь $N + \mu \geq 0$. Тогда

$$\Phi_y(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_y(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{t-z} + \sum_{k=1}^m G_{ky}(z) + P_y(z),$$

где $P_y(z)$ некоторый полином порядка $N + \mu - 1$, если $N + \mu > 0$ и $P_y(z) \equiv 0$, если $N + \mu = 0$. Так как $f_y(x) \rightarrow f(x) \cdot R(x)(S^+(x))^{-1}$ в C , то

$$\Phi(z) = K(f, z) + R(z)S(z) \sum_{k=1}^m G'_k(z) + P(z)$$

где

$$G_k(z) = \frac{C_1^k}{(t_k - z)} + \frac{C_2^k}{(t_k - z)^2} + \dots + \frac{C_{-n_k}^k}{(t_k - z)^{-n_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Так как функция $\frac{S(z)P(z)}{R(z)}$ удовлетворяет (1.2) при $\rho = \rho_y$, то $\frac{1}{R(z)} \sum_{k=1}^m G_k(z)$ также удовлетворяет условию (1.2). В силу леммы 4.1, получаем

$$\Phi(z) = K(f, z) + S(z) \left(A_0 + \frac{P(z)}{R(z)} \right),$$

Пусть теперь $N + \mu < 0$, $\mu > 0$. Так как $a(x) \in R^\alpha$ то $A_0 S(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.2). Поэтому общее решение задачи R представимо в виде $\Phi(z) = K(f, z) + A_0 S(z)$. $\square$

Задачу R называют нетеровой, если количество линейно независимых решений N_0 однородной задачи и количество условий P на f , при которых задача R имеет решение, конечны. Разница $N_0 - P$ называется индексом задачи R . Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что если $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, m$ то $N_0 = N + \mu$ при $N + \mu \geq 0$ и $P = -N - \mu$ при $N + \mu < 0$. Это означает, что при $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, m$ числа N_0 и P зависят только от α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ и $\mu = \text{ind}_a(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Отметим, что для произвольных α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ числа N_0 и P зависят не только от α_k и μ . В случае, когда $a(x) \in R^\alpha$ и $N + \mu \geq 0$, мы имеем $N_0 = N + \mu + 1$. Можно привести примеры, когда $a(x) \notin R^\alpha$ и $N_0 = N + \mu$.

Теорема 4.2. Пусть $\alpha_k \leq -2$, $k = 1, 2, \dots, m$ и $a(x) \notin R^\alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) если $N + \mu \geq 0$, то общее решение задачи R можно представить в виде (4.1), где $A_0 = 0$.

(б) если $N + \mu < 0$, то задача R разрешима тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям (4.3). Решение единственно и $\Phi(z) = K(f, z)$.

Abstract. Let $C(\rho)$ be the class of functions f such that $f(x)p(x)$ is continuous on $(-\infty, +\infty)$. In the upper half-plane of complex plane z we consider the Riemann boundary value problem in the weighted space $C(\rho)$ with $\rho(x) = \prod_{k=1}^m \left| \frac{x - x_k}{x + i} \right|^{\alpha_k}$, where α_k and x_k , $k = 1, 2, \dots, m$, are real numbers. The problem is to determine an analytic in the upper and lower half-planes function $\Phi(z)$ to satisfy $\lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi^+(x + iy) - a(x)\Phi^-(x - iy) - f(x)\|_{C(\rho)} = 0$, where $f \in C(\rho)$, $a(x) \in C^0[-A; A]$ for any $A > 0$, $a(x) \neq 0$, the limit $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a(\infty)$ exists and $|a(x) - a(\infty)| < C|x|^{-\beta}$ for $|x| \geq A > 0$. The normal solvability of this problem is established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. В. Хведелидзе, "О разрешимой задаче Римана-Ниванова для непрерывных функций", Сообщение АН Груз. ССР., **17**, no. 10, 865 – 872 (1956).
- [2] Б. В. Хведелидзе, "Методы интегралов типа Коши в разрешимых граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной", Союзные проблемы математики, **7**, М: Наука, 5 – 162 (1975).
- [3] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform", Trans. Amer. Math. Soc., **176**, 227 – 251 (1973).
- [4] M. Rosenblum, "Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$ ", Trans. Amer. Math. Soc., **165**, 325 – 342 (1962).
- [5] К. Казарян, Н. Ситковский, Ф. Сорня, "Краевая задача Римана в пространствах с весом", ДАН России, **357**(6), 717 – 719 (1997).
- [6] K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", Studia Math., **86**, no. 3, 311 – 317 (1987).
- [7] A. P. Soldatov, "A Function theory method in elliptic problems in the plane", Russian Acad. Sci. Izv. Math., **40**, no. 3, 529 – 563 (1993).
- [8] N. E. Tsvmasyan, Non-Regular Dirichlet Equations of Electromagnetic Fields, Word Scientific, Singapore (1998).
- [9] S. A. Aghekyan, "On a Hilbert problem in the half-plane in the class of continuous functions", Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, no. 2, 9 – 14 (2016).
- [10] Г. М. Айрапетян, В. А. Бабалян, "Граничная задача Римана-Гильберта в пространстве непрерывных функций", Научные ведомости Белгород. госуд. универс., **19**(162), вып. 32, 22 – 32 (2013).
- [11] Г. М. Айрапетян, В. А. Бабалян, "О задаче Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций", Научные ведомости Белгород. госуд. универс., **17**(112), вып. 21, 5 – 15 (2011).
- [12] Г. М. Айрапетян, В. П. Петросян, "Граничная задача Гильберта в полуплоскости в смысле L^1 -сходимости", Изв. НАН Армении, Математика, **32**, no. 5 (1997).
- [13] H. M. Naygarpetian, "Dirichlet problem in the half-plane for RO-varying weight functions", Topics in Analysis and its Applications, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, **147**, 311 – 317 (2004).

Поступила 27 февраля 2018

После доработки 13 июля 2018

Принята к публикации 13 сентября 2018

О ТОЧКАХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

А. А. АКОПЯН, Д. С. ВОСКАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: hakop@ysu.am, ysudav@gmail.com

Аннотация. Мы доказываем, что множество X , $\#X = m$, $m \leq n$, является множеством точек пересечения некоторых двух плоских алгебраических кривых степеней m и n , соответственно, тогда и только тогда когда выполнены следующие два условия: а) любая кривая степени $m + n - 3$, содержащая все, кроме одной точки из X , содержит все точки множества X ; б) ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки множества X . Отметим, что необходимость условий а) и б) следует из теорем Кэли-Бахараса и Нетера, соответственно.

MSC2010 number: 14H50; 41A05.

Ключевые слова: плоская кривая; точка пересечения; двумерная интерполяция; фундаментальный многочлен; n -корректное множество; n -независимое множество.

1. ВВЕДЕНИЕ, n -НЕЗАВИСИМОСТЬ

Пусть $\Pi_n := \Pi_n^2$ есть пространство всех многочленов от двух переменных, суммарная степень которых меньше или равна n . Для его размерности имеем:

$$N := \dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}.$$

Плоская алгебраическая кривая является нулевым множеством некоторого двумерного многочлена степени ≥ 1 . Чтобы упростить обозначения, мы будем использовать ту же букву, скажем p , для обозначения многочлена p и кривой, заданной уравнением $p(x, y) = 0$. Точнее, предположим, что p является многочленом без кратных множителей. Тогда алгебраическую кривую, определенную уравнением $p(x, y) = 0$ также будем обозначать через p .

Таким образом, прямые, коники и кубики эквивалентны многочленам степени 1, 2 и 3 соответственно; приводимая коника представляет собой пару прямых, и приводимая кубика представляет собой тройку прямых или состоит из прямой и неприводимой коники.

Следующая лемма является простым фактом линейной алгебры:

Лемма 1.1. *Через любые $N - 1 = (1/2)n(n + 3)$ точек проходит алгебраическая кривая степени n .*

Предположим, что задан набор из k различных точек:

$$X_k = \{(x_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, k\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Задача нахождения многочлена $p \in \Pi_n$, удовлетворяющего условиям

$$(1.1) \quad p(x_i, y_i) = c_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

называется *задачей интерполяции*.

Определение 1.1. *Множество точек X_k называется n -корректным, если для любого данного набора чисел $(c_1, \dots, c_k)$, существует единственный многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям (1.1).*

Необходимым условием для n -корректности является $k = \#X_k = \dim \Pi_n = N$.

Многочлен $p \in \Pi_n$ называется *n -фундаментальным* многочленом точки $A \in X$, если $p(A) = 1$ и $p|_{X \setminus \{A\}} = 0$, где $p|_X$ означает ограничение p на X . Этот многочлен мы будем обозначать через $p_{A,X}^*$.

Иногда мы будем называть n -фундаментальным также многочлен из Π_n , который обращается в нуль во всех точках X , кроме точки A , так как этот многочлен равен $cp_{A,X}^*$, где $c \neq 0$ константа. Фундаментальный многочлен может быть описан также как плоская кривая, содержащая все точки X , кроме одной.

Далее мы рассмотрим важное понятие n -независимости и n -зависимости множеств точек (см. [1], [3] - [7]).

Определение 1.2. *Множество точек X называется n -независимым, если каждая его точка имеет n -фундаментальный многочлен. В противном случае, X называется n -зависимым.*

Определение 1.3. *Множество точек X называется существенно n -зависимым, если ни одна из его точек не имеет n -фундаментальный многочлен.*

Если для некоторой точки $A \in X$ не существует n -фундаментальный многочлен то для любого многочлена $p \in \Pi_n$ мы имеем

$$p|_{X \setminus \{A\}} = 0 \quad \implies \quad p(A) = 0.$$

Таким образом, множество X является существенно k -зависимым, означает, что любая плоская кривая степени k , содержащая все, кроме одной точки X , содержит все точки X .

Поскольку фундаментальные многочлены линейно независимы, мы получаем следующее необходимое условие n -независимости:

$$\#X \leq \dim \Pi_n = N.$$

Легко видеть, что n -независимость X_k эквивалентно разрешимости задачи интерполяции (1.1), означающая, что для любых данных $\{c_1, \dots, c_k\}$ существует (не обязательно единственный) многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям интерполяции (1.1).

В случае $k = N$, т.е. для множества точек X_N n -независимость означает n -корректность. Мы имеем следующее

Предложение 1.1 ([6], лемма 2.2). *Предположим, что множество точек X n -независимо, и каждая точка множества Y имеет n -фундаментальный многочлен относительно множества $X \cup Y$. Тогда последнее множество точек есть также n -независимое.*

Следствие 1.1 ([6], предложение 2.3). *Предположим, что кривая σ_k , степени k содержит n -независимое множество точек X . Предположим также, что множество Y находится вне кривой σ_k и является $(n - k)$ -независимой. Тогда множество $X \cup Y$ есть n -независимый.*

Ниже мы приводим характеристику n -зависимости множеств точек, состоящих не более чем из $3n$ точек.

Теорема 1.1 ([6], теорема 5.1). *Множество X , состоящее не более чем из $3n$ точек, является n -зависимым, тогда и только тогда когда выполняется одно из следующих условий:*

- a) $n + 2$ точек коллинеарны,
- b) $2n + 2$ точек принадлежат (возможно, приводимой) конике,
- c) $\#X = 3n$, и существуют коника $\sigma_3 \in \Pi_3$ и кривая $\sigma_n \in \Pi_n$ такие, что $X = \sigma_3 \cap \sigma_n$.

Приведем три следствия этого результата.

Следствие 1.2. *Множество X , состоящее не более чем из $2n + 1$ точек, является n -зависимым, тогда и только тогда когда $n + 2$ точек коллинеарны.*

Обобщение этого результата с учетом кратностей точек может быть найдено в ([2], теорема 9). Из следствия 1.2 мы немедленно получаем следующий результат Севери [9]:

Следствие 1.3 ([9]). *Любое множество X , состоящее не более чем из $n + 1$ точек, является n -зависимым.*

Следствие 1.4. *Любое множество X , состоящее не более чем из $3n - 1$ точек, является n -зависимым, тогда и только тогда когда выполняется одно из следующих условий:*

- a) $n + 2$ точек коллинеарны,
- b) $2n + 2$ точек принадлежат (возможно, приводимой) кривке.

Частный случай приведенного выше результата, когда $\#X \leq 2n + 2$, можно найти в [1], предложение 1.

Лемма 1.2. *Предположим, что множество X существенно k -зависимо, а σ_n является кривой степени n . Предположим также, что множество точек $Y := X \setminus \sigma_n$ не пусто. Тогда множество Y существенно $(k - n)$ -зависимо.*

Доказательство. Предположим наоборот, что точка $A \in Y$ имеет $(k - n)$ -фундаментальный многочлен $p_{A,Y}^A$. Тогда легко видеть, что многочлен $p = p_{A,Y}^A \sigma_n$ является k -фундаментальным многочленом точки A во множестве X , что является противоречием. $\square$

Предположим, что кривая σ_n степени n приводима, т. е.

$$(1.2) \quad \sigma_n = \sigma_{n_1} \cdots \sigma_{n_s},$$

где компонент σ_{n_i} имеет степень n_i .

Обозначим через X_i , $i = 1, \dots, s$, множество точек из $X \cap \sigma_{n_i}$, которые не принадлежат другим компонентам σ_{n_j} , $j \neq i$, т.е.

$$(1.3) \quad X_i = X \setminus \left(\bigcup_{j=1, j \neq i}^s \sigma_{n_j} \right).$$

Скажем что компонента σ_{n_i} не пуста по отношению к X если $X_i \neq \emptyset$.

Лемма 1.3. *Предположим, что множество $X \subset \sigma_n$ существенно k -зависимое, где кривая σ_n степени n приводима, согласно (1.2). Предположим также, что все компоненты не пусты относительно X . Тогда каждое множество X_i , указанное в (1.3), есть существенно $(k - n + n_i)$ -зависимое.*

Доказательство. Действительно, предположим, что для некоторого i , $1 \leq i \leq s$, множество X_i не является существенно $(k - n + n_i)$ -зависимым, т. е., существует точка $A \in X_i$ имеющий $(k - n + n_i)$ -фундаментальный многочлен: p_i . Тогда легко видеть, что многочлен $p = p_i \prod_{j \neq i}^s \sigma_{n_j}$ является k -фундаментальным многочленом точки A во множестве X , что является противоречием. $\square$

2. Полнота точечных множеств на плоских кривых

Определение 2.1. Пусть σ_k - плоская кривая степени k без критич. компонент. Тогда множество точек $X \subset \sigma_k$ называется n -полным на кривой σ_k , если выполняется следующее условие:

$$p \in \Pi_n, p|_X = 0 \Rightarrow p = q\sigma_k, \text{ где } q \in \Pi_{n-k}.$$

В случае $k > n$ n -полнота означает что $p \in \Pi_n, p|_X = 0 \Rightarrow p = 0$. Итак верна следующая

Лемма 2.1. Пусть $k > n$. Тогда множество $X \subset \sigma_k$ является n -полным на σ_k , тогда и только тогда когда X содержит n -корректное подмножество X_0 .

Рассмотрим следующие два линейные пространства многочленов:

$$\mathcal{P}_{n,X} = \{p \in \Pi_n : p|_X = 0\}, \quad \mathcal{P}_{n,\sigma_k} = \{p\sigma_k : p \in \Pi_{n-k}\},$$

где X есть множество точек и $\sigma_k \in \Pi_k$. Заметим что

$$(2.1) \quad \mathcal{P}_{n,X} \supset \mathcal{P}_{n,\sigma_k}, \text{ если } X \subset \sigma_k.$$

Мы имеем также что

$$(2.2) \quad \mathcal{P}_{n,X} = \mathcal{P}_{n,\sigma_k} \iff X \subset \sigma_k \text{ является } n\text{-полным на кривой } \sigma_k.$$

Теперь мы легко заключаем из (2.1) и (2.2), что

$$(2.3) \quad \dim \mathcal{P}_{n,X} = \dim \mathcal{P}_{n,\sigma_k} \iff X \subset \sigma_k \text{ является } n\text{-полным на кривой } \sigma_k.$$

Очевидно, мы имеем что

$$(2.4) \quad \dim \mathcal{P}_{n,\sigma_k} = \dim \Pi_{n-k}.$$

Для $\dim \mathcal{P}_{n,X}$ имеет место следующее (см. [3], [6])

Предложение 2.1. Пусть X_0 - максимальное n -независимое подмножество X , т.е. X_0 есть n -независимый и $X_0 \cup \{A\}$ есть n -зависимый, для любой точки $A \in X \setminus X_0$. Тогда имеем

$$(2.5) \quad \dim \mathcal{P}_{n,X} = \dim \mathcal{P}_{n,X_0} = \dim \Pi_n - \#X_0.$$

Обозначим $d(k, n) := \dim \Pi_n - \dim \Pi_{n-k}$. Легко видеть, что $d(k, n) = (n+1) + n + \dots + (n-k+2) = \frac{1}{2}k(2n-k+3)$, если $k \leq n+2$. Наконец, с учетом (2.2)-(2.4), мы получаем следующий простой критерий полноты:

Предложение 2.2 ([8], предложение 3.1). Пусть $k \leq n+2$ и σ_k -плоская кривая степени k . Тогда множество точек $X \subset \sigma_k$ является n -полным в σ_k тогда и только тогда, когда X содержит n -независимые подмножество $X_0 \subset X$ с $\#X_0 = d(k, n)$.

Отметим, что в случаях $k = n+1, n+2$, ввиду того, что $d(k, n) = \dim \Pi_k$, предложение следует из леммы 2.1.

Теорема 2.1 (Кэли-Бахарах). Предположим, что множество X , $\#X = mn$, является множеством точек пересечения некоторых двух кривых σ_m и σ_n , степеней m и n , соответственно: $X = \sigma_m \cap \sigma_n$. Тогда имеем

- a) множество X существенно k -зависимое,
- b) множество X $(k+1)$ -независимое,
- c) для любой точки $A \in X$ множество $X \setminus \{A\}$ есть k -независимое.

Теорема 2.2 (Нетер). Предположим, что множество X , $\#X = mn$, является множеством точек пересечения некоторых двух кривых σ_m и σ_n , степеней m и n , соответственно: $X = \sigma_m \cap \sigma_n$. Тогда для любого многочлена $p_k \in \Pi_k$ с $p|_X = 0$, имеем

$$(2.6) \quad p_k = A_{k-m}\sigma_m + B_{k-n}\sigma_n,$$

где $A_{k-m} \in \Pi_{k-m}$ and $B_{k-n} \in \Pi_{k-n}$.

Следствие 2.1. Предположим, что множество X , $\#X = mn$, $m \leq n$, является множеством точек пересечения некоторых двух алгебраических кривых σ_m и σ_n , степеней m и n , соответственно: $X = \sigma_m \cap \sigma_n$. Тогда ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки X .

Доказательство. Действительно, предположим наоборот, что кривая p степени меньше m содержит все точки X . Тогда из (2.6) мы получаем $p = 0$, что является противоречием. □

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Положим в этом разделе $\kappa = \kappa(m, n) = m + n - 3$.

Теорема 3.1. Множество X с $\#X = mn$, $m \leq n$, есть множество точек пересечения некоторых двух кривых степеней m и n соответственно, тогда и только тогда когда выполнены следующие условия:

- a) любая кривая степени k , содержащая все, кроме одной точки X , содержит все точки X ,
- b) ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки X .

Отметим, что необходимость условий a) и b) вытекает из теорем 2.1 и 2.2 соответственно. Отметим также, что приведенное выше условие a) означает, что множество точек X существенно k -зависимо, а условие b) означает, что множество X содержит $(m-1)$ -корректное подмножество. Далее мы докажем часть достаточности теоремы когда $m = 1, 2, 3$.

Доказательство теоремы 3.1 в случаях $m = 1, 2, 3$. *Случай $m = 1$.* В этом случае задано существенно $(n-2)$ -зависимое множество n точек X . Из следствия 1.2 получаем, что все точки X коллинеарны, то есть принадлежат некоторой прямой σ_1 . Отсюда получаем, что $X = \sigma_1 \cap \sigma_n$, где σ_n имеет n различных линейных компонент, пересекающих прямую σ_1 в рассматриваемых n точках X , соответственно.

Случай $m = 2$. В этом случае задано существенно $(n-1)$ -зависимое множество $2n$ точек X . Из следствия 1.4 получаем, что либо $n+1$ точки из X коллинеарны, т. е., принадлежат некоторой прямой σ_1 , либо $2n$ точек из X принадлежат некоторой конике σ_2 . Предположим сначала, что $n+1$ точка принадлежит прямой σ_1 . Затем, обозначив $Y = X \setminus \sigma_1$, получаем, что $\#Y \leq n-1$. По условию b) имеем, что $Y \neq \emptyset$. Теперь из леммы 1.2 получаем, что множество Y существенно $(n-2)$ -зависимо, что противоречит следствию 1.3.

Далее, предположим, что все точки X принадлежат конике σ_2 . Сначала рассмотрим случай, когда коника σ_2 неприводима. Тогда получаем, что $X = \sigma_2 \cap \sigma_n$, где σ_n имеет n различных линейных компонент, пересекающих σ_2 в n непаресекающихся пар рассматриваемых точек, соответственно. Наконец, предположим, что коника σ_2 приводима, т.е. есть пара прямых $\sigma_2 = \sigma_1 \sigma_1'$. Сначала докажем, что каждая из этих прямых содержит ровно n точек из X , и, следовательно, точка пересечения прямых σ_1 и σ_1' не принадлежит X . Действительно, предположим наоборот, скажем прямая σ_1 содержит $n+1$ точек из X . Тогда обозначив $Y = X \setminus \sigma_1$, получаем, что $\#Y \leq n-1$. По условию b) имеем, что $Y \neq \emptyset$. Теперь из

леммы 1.2 получаем, что множество Y существенно $(n-2)$ -зависимо, что противоречит следствию 1.3. Следовательно, заключаем, что $X = \sigma_2 \cap \sigma_n$, где σ_n имеет n различных линейных компонент, пересекающихся σ_1 и σ'_1 в n непересекающихся пар рассматриваемых точек, одна из σ_1 , а другая из σ'_1 .

Случай $n = 3$. В этом случае дано существенно n -зависимое множество $3n$ точек X . По теореме 1.1 получаем, что либо $n+2$ точек из X принадлежат некоторой прямой σ_1 , либо $2n+2$ точек из X принадлежат некоторой конике σ_2 , либо $X = \sigma_3 \cap \sigma_n$, где $\sigma_i \in \Pi_2$. Здесь нам достаточно исключить первые две возможности.

Предположим сначала, что $n+2$ точек принадлежат прямой σ_1 . Тогда, обозначив $Y = X \setminus \sigma_1$, получаем, что $\#Y \leq 2n-2$. По условию б) имеем, что $Y \neq \emptyset$. Теперь из леммы 1.2 получаем, что множество Y существенно $(n-1)$ -зависимо. Следовательно, по следствию 1.2 получаем, что $n+1$ точек из Y принадлежат прямой σ'_1 . Тогда, обозначая $Z = X \setminus (\sigma_1 \cup \sigma'_1)$, получаем, что $\#Z \leq n-3$. По условию б) имеем, что $Z \neq \emptyset$. Теперь из леммы 1.2 заключаем, что множество Z существенно $(n-2)$ -зависимо, что противоречит следствию 1.3.

Далее, предположим, что $2n$ точек из X принадлежат конике σ_2 . Тогда, обозначив $Y = X \setminus \sigma_2$, получаем, что $\#Y \leq n$, $Y \neq \emptyset$. Теперь из леммы 1.2 получаем, что множество Y существенно $(n-2)$ -зависимо. Далее, из следствия 1.2 получаем, что множество Y имеет ровно n коллинеарных точек, принадлежащих некоторой прямой σ_1 . Тогда, обозначив $Z = X \setminus \sigma_1$, имеем, что $\#Z \leq 2n$, $Z \neq \emptyset$. Затем из леммы 1.2 заключаем, что множество Z существенно $(n-1)$ -зависимо. Сейчас мы легко находим, как выше, из следствия 1.4, что Z содержит ровно $2n$ точек, а в случае, когда коника σ_2 имеет две линейные компоненты, каждая из прямых содержит ровно n точек из X .

Теперь из предложения 2.2 мы получаем, что X не является n -полным на $\sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2$. Следовательно, существует многочлен σ_n , обращающийся в нуль во всех точках X , но не на всем σ_3 , в частности $X \subset \sigma_3 \cap \sigma_n$. Осталось проверить, что σ_3 и σ_n не имеют общих компонент.

Действительно, пусть σ является общей компонентой высшей степени. Предположим, что $\sigma \in \Pi_2$. Тогда имеем, что $\sigma_n = \sigma \sigma_{n-2}$, где $\sigma_{n-2} \in \Pi_{n-2}$. Теперь рассмотрим линейную компоненту σ_1 кривой σ_3 , которая не является компонентой σ . На этой компоненте мы имеем ровно n точек из X , которые находятся вне σ . Следовательно, эти n точек принадлежат кривым σ_1 и σ_{n-2} , что противоречит теореме Безу, так как эти кривые не имеют общей компоненты.

Наконец, предположим, что $\sigma \in \Pi_1$. Тогда имеем, что $\sigma_n = \sigma\sigma_{n-1}$, где $\sigma_{n-1} \in \Pi_{n-1}$. Рассмотрим компоненту $\sigma_k \in \Pi_k$, $k \leq 2$ в σ_n отличную от σ . На этой компоненте мы имеем ровно kn точек, которые находятся вне σ . Следовательно, эти kn точки принадлежат кривым σ_k и σ_{n-1} , что противоречит теореме Безу, так как эти кривые не имеют общей компоненты.

Доказательство теоремы 3.1 в случае $m \geq 4$.

Доказательство части достаточности теоремы 3.1 будет завершено в теореме 3.5, в конце раздела.

Начнем обсуждение со случая неприводимой кривой.

Теорема 3.2. *Предположим, что неприводимая кривая σ_m степени m содержит множество X состоящее из mn точек. Тогда верны следующие утверждения:*

- (a) *Если множество точек X является κ -независимым, то оно является n -полным на кривой σ_m .*
- (b) *Предположим, что $3 \leq m \leq n+2$. Тогда если множество X является n -полным на σ_m , то оно является κ -независимым.*

Доказательство. Часть а): Предположим, что множество $X \subset \sigma_m$ не является n -полным на σ_m . Следовательно, существует многочлен $\sigma_n \in \Pi_n$, обращающийся в нуль во всех точках X , но не на всем σ_m . Тогда, поскольку кривая σ_m неприводима, то из теоремы Безу заключаем, что $X = \sigma_m \cap \sigma_n$. Теперь из теоремы 2.1, а), мы получаем, что X является κ -зависимым. Точнее, из теоремы 2.1, а), получаем, что X существенно κ -зависимое, а из пункта с) получаем, что для любой точки $A \in X$ множество точек $X \setminus \{A\}$ есть κ -независимое.

Часть б): Предположим, что множество точек X является n -полным на σ_m . Тогда согласно предложению 2.2 мы имеем, что X содержит n -независимое подмножество Y состоящее из $d(m, n)$ точек. Так как $m \leq n+2$, то число точек в $Z = X \setminus Y$ равно $mn - d(m, n) = mn - \frac{1}{2}m(2n - m + 3) = \frac{1}{2}m(m-3)$. Таким образом, в случае $m=3$ имеем, что $X=Y$ является $\kappa=n$ -независимым. Теперь предположим, что $m > 3$.

Ввиду леммы 1.1 найдется кривая σ_{m-3} степени $m-3$, содержащая все точки Z . Обозначим через $\tilde{Z}$ множество всех точек X на σ_{m-3} . Поскольку кривая σ_m неприводима, то она не имеет общей компоненты с σ_{m-3} . Далее мы имеем, что $\tilde{Z} \subset \sigma_m \cap \sigma_{m-3}$. Поэтому по теореме 2.1, б), множество $\tilde{Z}$ является $m+(m-3)-2 = (2m-5)$ -независимым. С другой стороны, имеем что $\kappa = m+n-3 \geq 2m-5$.

Следовательно множество Z является k -независимым. Тогда множество $X \setminus Z \subset X \setminus Z = Y$ является n -независимым. По следствию 1.1 множество X является $k = (m + n - 3)$ -независимым. $\square$

Сейчас из доказательства части а) (последнее предложение там) сразу получаем:

Следствие 3.1. *Предположим, что неприводимая кривая σ_m степени m содержит множество X состоящее из m точек, которое не является n -полным. Тогда множество X есть существенно k -зависимое и для любой точки $A \in X$ множество $X \setminus \{A\}$ есть k -независимое.*

Из доказательства части b) теоремы 3.2 получаем следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Предположим, что (не обязательно неприводимая) кривая σ_m степени m , $m \geq 3$, содержит множество X состоящее из $\leq m$ точек, которое является n -полным. Тогда множество X не является существенно k -зависимым.*

Доказательство. Доказательство части b) теоремы 3.2 показывает, что существует кривая σ_{m-3} степени $m - 3$, проходящая через все точки множества $Z = X \setminus Y$. В случае $m = 3$ мы имеем что множество $X = Y$, и следовательно, есть $k = n$ -независимый. Теперь предположим, что $m > 3$. Покажем, что σ_{m-3} не содержит все множество X . Действительно, если $X \subset \sigma_{m-3}$, то многочлен σ_{m-3} обращается в нуль во всех точках множества X , но не на всем σ_m . Следовательно, X не является n -полным на кривой σ_m , что является противоречием. Затем выберем точку $A \in X \setminus \sigma_{m-3}$. Так как $A \in Y$, рассмотрим фундаментальный многочлен $p_{A,Y}^*$. Теперь заметим, что $p := \sigma_{m-3} p_{A,Y}^*$ является k -фундаментальным многочленом точки A в множестве X . Следовательно, множество X не является существенно k -зависимым. $\square$

Теорема 3.3. *Предположим, что $m \leq n + 2$. Тогда любой набор точек X , с $\#X \leq m(k + 3 - m) - 1 = mn - 1$, на неприводимой кривой σ_m , является k -независимым.*

Доказательство. Случай $m = 1$ и $m = 2$ очевидны. Предположим, что $m \geq 3$. Добавим одну точку $A \in \sigma_m \setminus X$ в X . Если полученное множество $Y = X \cup \{A\}$ является k -независимым то $X \subset Y$ также является k -независимым, и теорема

доказана. Теперь предположим, что множество Y является k -зависимым. Заметим, что согласно теореме 3.2, (b), оно не является n -полным на σ_m . Тогда из следствия 3.1 получаем, что Y существенно k -зависимое и $X = Y \setminus \{A\}$ является k -независимым. $\square$

Теорема 3.4. *Предположим, что кривая σ_m степени m , содержит множество точек X и $\#X \leq mn - 1 = m(\kappa + 3 - m) - 1$, где $m \leq n + 2$. Предположим, также что σ_m либо неприводима, либо приводима, так что все ее неприводимые компоненты не пусты относительно X . Тогда множество X не является существенно k -зависимым.*

Доказательство. Случаи $m = 1$ и $m = 2$ очевидны. Предположим, что $m \geq 3$. Случай, когда σ_m неприводимо, непосредственно следует из теоремы 3.3. Теперь предположим, что кривая σ_m приводима, т.е. $\sigma_m = \sigma_{m_1} \cdots \sigma_{m_s}$, где компоненты σ_{m_i} неприводимы и имеют степень m_i .

Предположим от противного, что множество X существенно k -зависимо. Рассмотрим множество X_i , $i = 1, \dots, s$, определенное в (1.2). По условию имеем, что $X_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, s$. Так как X существенно k -зависимо, из леммы 1.3 получаем, что множество X_i существенно $(\kappa - m + m_i)$ -зависимо. Далее мы применяем теорему 3.3. Заметим, что условие $m \leq n + 2$ здесь сводится к $m_i \leq (\kappa - m + m_i) - m_i + 5$, что выполняется, поскольку оно в свою очередь сводится к $m_i \leq \kappa - m + 5 = n + 2$. Теперь из теоремы 3.3 мы заключаем, что $\#X_i \geq m_i[(\kappa - m + m_i) - m_i + 3] = m_i(\kappa - m + 3)$. Отсюда, суммируя, получаем $\#X \geq m(\kappa - m + 3) = mn$, что является противоречием. $\square$

Предложение 3.2. *Предположим, что $m \leq n$. Если множество точек X , с $\#X \leq mn$, существенно k -зависимо, то все его точки лежат на кривой степени m или $n - 3$.*

Доказательство. Случаи $n = 1, 2, 3$, очевидны. Итак, предположим, что $n \geq 4$. Предположим обратное, что нет кривой степени m , содержащей все точки X . Тогда существует m -корректное подмножество $Y \subset X$ (с $(1/2)m(m + 3) + 1$ точками).

Положим $Z = X \setminus Y$. Далее собираемся показать, что

$$(3.1) \quad \#Z \leq \dim \Pi_{n-3} - 1.$$

Имеем, что $\nu := \#Z - \dim \Pi_{n-3} + 1 \leq mn - (1/2)m(m+3) - 1 - (1/2)n(n-3) - 1 = (1/2)m(2n - m - 3) - 1 - (1/2)m(2n - m - 3) - (1/2)n(n-3) - 1 = -(1/2)(n - m - 3)(n - m) - 1$.

Теперь очевидно, что $\nu < 0$ если $n = m$ или $n \geq m + 3$, в то время как $\nu = 0$ если $n = m + 1$ или $n = m + 2$. Итак (3.1) доказана.

По лемме 1.1 существует кривая σ_{n-3} степени $n-3$, проходящая через все точки Z . Мы утверждаем, что $X \subset \sigma_{n-3}$. Предположим противное, что существует точка $A \in X \setminus \sigma_{n-3}$. Вспомним, что множество Y является m -коррестным, так что можем рассмотреть m -фундаментальный многочлен $p_{A,Y}^*$. Теперь остается заметить, что $\mu = \sigma_{n-3} p_{A,Y}^*$ является n -фундаментальным многочленом точки A во множестве X , что является противоречием. $\square$

Предложение 3.3. *Предположим, что $m \leq n$. Если множество X состоящее из mn точек существенно κ -зависимо, то все точки X лежат на кривой степени m .*

Доказательство. Предположим от противного что X не лежит на кривой степени m . Сначала докажем, что существует число $m_0 > m$ такое, что

- 1) $m_0 \leq \frac{\kappa+3}{2}$, т.е. $m_0 \leq n_0 := \kappa + 3 - m_0$,
- 2) все точки множества X лежат на кривой степени m_0 ,
- 3) ни одна кривая степени меньше чем m_0 не содержит все точки X .

Для этого применим теорему 3.2 для X и $m = m' = \lceil \frac{\kappa+3}{2} \rceil$. Если $m' = \frac{\kappa+3}{2}$ тогда получаем, что все точки множества X лежат на кривой $\sigma_{m'}$ степени m' или на кривой $\sigma_{n'-3}$ степени $n' - 3$, где $n' := \kappa + 3 - m' = m'$. Отсюда заключаем, что все точки множества X лежат на кривой $\sigma_{m'}$.

Мы приходим к этому же заключению и в случае если $m' = \frac{\kappa+3}{2} - \frac{1}{2}$.

В обоих случаях имеем, что $m' \leq \frac{\kappa+3}{2}$, так что все точки множества X лежат на кривой $\sigma_{m'}$ степени m' где $m' \leq n'$.

Обозначим теперь через m_0 минимально возможный m' удовлетворяющий описанным выше условиям 1), 2) и 3), а через σ_{m_0} -соответствующую кривую степени m_0 . Очевидно, что $m_0 > m$.

Теперь проверим, что $mn \leq m_0 n_0 - 1$. Для этого рассмотрим параболу $y = x(\kappa + 3 - x)$. Легко увидеть, что

$$(3.2) \quad mn = m(\kappa - m + 3) < m_0(\kappa - m_0 + 3),$$

так как $y(m) = y(n)$ and $m < m_0 < n$.

Далее, предположим, что кривая σ_{m_0} неприводима. Ввиду (3.2) из теоремы 3.3 заключаем, что множество X является k -независимым, что противоречит условию теоремы. Заметим, что здесь $m_0 \leq n_0$.

Наконец, предположим, что σ_{m_0} является приводимой кривой, т.е. $\sigma_{m_0} = \sigma_{m_1} \cdots \sigma_{m_s}$, где компонента σ_{m_i} имеет степень m_i , и неприводима. Ввиду вышеуказанного условия 3) ни одна компонента не является пустой относительно множества точек X . Теперь по теореме 3.4 мы получаем, что X не является существенно k -зависимым, что является противоречием. $\square$

Замечание 3.1. Предположим, что $m \leq n$ и множество X состоящее из mn точек существенно k -зависимо. Предположим также, что ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки X . Пусть σ_m - кривая степени m из предложения 3.3, содержащая все точки X . Тогда, если эта кривая приводима: $\sigma_m = \sigma_{m_1} \cdots \sigma_{m_s}$, где компонента σ_{m_i} имеет степень m_i и неприводима, то ни одна точка X не является точкой пересечения компонент, и каждая компонента σ_{m_i} содержит ровно $m_i(k - m + 3)$ точек из X , которые являются существенно $(k - m + m_i)$ -зависимыми.

Действительно, доказательство совпадает с последним абзацем доказательства предложения 3.3, где вместо m_0 берем m .

Теорема 3.5. Предположим что для множества X с $\#X = mn$, $m \leq n$, выполнены следующие условия:

- любая плоская кривая степени k , содержащая все, кроме одной точки X , содержит все точки X ,
- ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки X .

Тогда X есть множество точек пересечения некоторых двух плоских алгебраических кривых степеней m и n , соответственно $X = \sigma_m \cap \sigma_n$.

Доказательство. Случай $m = 1, 2, 3$, уже доказаны. Итак предположим что $m \geq 4$. Из предложения 3.3 имеем, что все точки множества X лежат на кривой σ_m степени m . Затем из предложения 3.1 получаем, что множество X не является n -полным на кривой σ_m . Поэтому существует многочлен σ_n степени n , обращающийся в нуль во всех точках X , но не на всем σ_m . Остается показать, что кривые σ_m и σ_n не имеют общей компоненты. Предположим обратное, что $\sigma_m = \sigma_1 \sigma_{m-1}$ и $\sigma_n = \sigma_1 \sigma_{n-1}$, где σ_1 имеет степень 1 и кривые σ_{m-1} , σ_{n-1} не имеют общей компоненты.

Обозначим через $\mathcal{Y} := \sigma_{m-1} \cap \sigma_{n-1} \cap \mathcal{X}$. С учетом условия б) имеем, что $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Пусть $A \in \mathcal{Y}$. По теореме Коли-Бахараха точка A имеет фундаментальный многочлен $p_{A,\mathcal{Y}}^*$ степени $m+n-2l-2$ во множестве $\mathcal{Y}$. Теперь заметим, что многочлен $p = \sigma p_{A,\mathcal{Y}}^*$ степени $m+n-l-2 \leq m+n-3$ есть фундаментальный многочлен точки A во множестве $\mathcal{X}$, что противоречит условию а). Теорема 3.5 доказана. $\square$

Следствие 3.2. *Предположим что для множества $\mathcal{X}$ с $\#\mathcal{X} = mn$, $m \leq n$, выполняются следующие условия:*

- а) множество $\mathcal{X}$ является существенно k -зависимым,*
- б) множество $\mathcal{X}$ содержит $(m-1)$ -коррекционное подмножество.*

Тогда для любой точки $A \in \mathcal{X}$ множество точек $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ есть k -независимым.

Abstract. We prove that a set $\mathcal{X}$, $\#\mathcal{X} = mn$, $m \leq n$, is the set of intersection points of some two plain algebraic curves of degrees m and n , respectively, if and only if the following conditions are satisfied: а) Any curve of degree $m+n-3$ containing all but one point of $\mathcal{X}$, contains all of $\mathcal{X}$, б) No curve of degree less than m contains all of $\mathcal{X}$. The conditions а) and б) in the “only if” direction of this result follow from the Ceyley-Bacharach and Noether theorems, respectively.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Eisenbud, M. Green, J. Harris, “Cayley-Bacharach theorems and conjectures”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **33**(3), 295 – 324 (1996).
- [2] H. Hakopian, “On a class of Hermite interpolation problems”, *Adv. Comput. Math.*, **12**, 303 – 309 (2000).
- [3] H. Hakopian, K. Jetter, G. Zimmermann, “Vandermonde matrices for intersection points of curves”, *Jaén J. Approx.*, **1**, 67 – 81 (2009).
- [4] H. Hakopian, K. Jetter, G. Zimmermann, “A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 4$ ”, *J. Approx. Theory*, **159**, 224 – 242 (2009).
- [5] H. Hakopian, K. Jetter, G. Zimmermann, “The Gasca-Maeztu conjecture for $n = 5$ ”, *Numer. Math.*, **127**, 685 – 713 (2014).
- [6] H. Hakopian and A. Malinyan, “Characterization of n -independent sets with no more than $3n$ points”, *Jaén J. Approx.*, **4**, 119 – 134 (2012).
- [7] H. Hakopian and A. Malinyan, “On n -independent sets located on quartics”, *Proceedings of YSU, Phys. and Math. Sci.*, **1**, 6 – 12 (2013).
- [8] L. Rafayelyan, “Poised nodes set constructions on algebraic curves”, *East J. Approx.*, **17**, 285 – 298 (2011).
- [9] F. Severi, *Vorlesungen über Algebraische Geometrie*, Teubner, Berlin (1921). (Перевод на немецкий - E. Löffler)

Поступила 19 ноября 2018

После доработки 10 января 2019

Принята к публикации 24 января 2019

МЕДИАЛЬНЫЕ В ЦЕЛОМ СИСТЕМЫ КВАЗИГРУПП

А. Р. ГЕВОРГЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: albert.gevorgyan@gmail.com

Аннотация. В статье обобщается теорема Белоусова о линейности обратимых алгебр с $\forall\exists(\forall)$ тождествами. Полученные результаты могут быть использованы для классификации медальных сверхтождеств.

MSC2010 number: 03C05; 03C85; 20N05.

Ключевые слова: квазигруппа; сверхтождество; изотопность; медальная в целом система квазигрупп; квазнавтоморфизм группы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Систему всех квазигрупп определенных на заданном множестве M обозначим через Ω_M . В [2] даны следующие определения:

Определение 1.1. Систему квазигрупп $\Sigma \subset \Omega_M$ назовем слабо ассоциативной в целом слева (справа) или $\overline{LA}(\overline{RA})$ -системой, если для любой пары $A, B \in \Sigma$ существуют $A', B' \in \Omega_M$ такие, что для любых $a, b, c \in M$ имеет место равенство

$$(1.1) \quad A[a, B(b, c)] = A'[B'(a, b), c](A[B(a, b), c] = A'[a, B'(b, c)])$$

Определение 1.2. Систему квазигрупп $\Sigma \subset \Omega_M$ назовем ассоциативной в целом слева (справа) или $LA(RA)$ -системой, если для любой пары $A, B \in \Sigma$ существуют $A', B' \in M$ такие, что для любых $a, b, c \in M$ имеет место равенство

$$(1.2) \quad A[B(a, b), c] = A'[a, B'(b, c)](A[a, B(b, c)] = A'[B'(a, b), c])$$

Если система ассоциативна в целом и слева и справа, то она называется ассоциативной в целом системой или A -системой.

Определение 1.3. Операции A и B назовем изотопными, если существуют подстановки α, β, γ , множества M такие, что для любых $a, b \in M$

$$(1.3) \quad \alpha B(a, b) = A(\beta a, \gamma b)$$

Определение 1.4. Систему квазигруппы $\Sigma \in \Omega_M$ назовем медиальной в целом, если для любых $A, B, C \in \Sigma$ существуют $A', B', C' \in \Sigma$ такие, что для любых $a, b, c, d \in M$ имеет место равенство:

$$(1.4) \quad A[B(a, b), C(c, d)] = A'[B'(a, c), C'(b, d)]$$

В [2] доказано, что если имеется медиальная в целом система Σ , то на множестве M можно определить абелеву группу $M(+)$ таким образом, что для любой операции A существуют автоморфизмы φ и ψ группы $M(+)$, а также $t \in M$ такое, что $A(a, b) = \varphi a + t + \psi b$. В параграфе 3 настоящей статьи мы усилим указанный результат Белоусова. Мы будем изучать следующие $\forall\exists(\mathcal{V})$ тождества:

$$(1.5) \quad \forall A, B \exists A', B', C' \forall a, b, c, d A[B(a, b), B(c, d)] = A'[B'(a, c), C'(b, d)]$$

$$(1.6) \quad \forall A, B \exists A', B', C' \forall a, b, c, d B[A(a, b), B(c, d)] = A'[B'(a, c), C'(b, d)]$$

$$(1.7) \quad \forall A, B \exists A', B', C' \forall a, b, c, d B[B(a, b), A(c, d)] = A'[B'(a, c), C'(b, d)]$$

$$(1.8) \quad \forall A, B \exists A', B' \forall a, b, c, d A[A(a, b), A'(c, d)] = B[B'(a, c), B(b, d)]$$

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для дальнейших результатов нам понадобятся вспомогательные результаты, доказанные в [1] – [3].

Теорема 2.1. ([1]) Если группы $M(\cdot)$ и $M(\circ)$ изотопны, то они изоморфны.

Лемма 2.1. ([2]) Если квазигруппы A, A', B, B' связаны ассоциативным соотношением (1.1), то все они изотопны одной и той же группе.

Определение 2.1. Пусть дана группа $M(\cdot)$. Подстановку группы M назовем квазиавтоморфизмом группы $M(\cdot)$, если для всех $a, b \in M$ имеем

$$(2.1) \quad \alpha(a \cdot b) = \sigma a \cdot \alpha^{-1}(e) \cdot \sigma b,$$

где e – единица группы $M(\cdot)$.

Лемма 2.2. ([2]) Если в группе $M(\cdot)$ для любых $a, b, c \in M$ имеет место равенство

$$(2.2) \quad \beta(\alpha(a \cdot b) \cdot c) = \gamma a \cdot \delta(\sigma b \cdot \tau c),$$

то все перестановки $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \tau$ являются квазиавтоморфизмами группы $M(\cdot)$.

Лемма 2.3. ([2]) Если $\Sigma \in \Omega_M$ является линейной и слева и справа, то можно определить группу $M(\cdot)$ так, что для любого $A \in \Sigma$ $A(a, b) = \varphi a \cdot \sigma b$, где φ и σ являются автоморфизмами группы $M(\cdot)$.

Лемма 2.4. ([2]) Пусть A_i , $i = 1, \dots, 6$ линейны на группе $M(\cdot)$ и имеет место равенство

$$(2.3) \quad A_1[A_2(a, b), A_3(c, d)] = A_4[A_5(a, c), A_6(b, d)].$$

Тогда группа $M(\cdot)$ - абелева.

Лемма 2.5. ([3]) 1) Если для квазигрупп A, B, C для всех $a, b, c \in M$ имеет место равенство

$$(2.4) \quad A(A(a, b), c) = B(a, C(b, c)),$$

то существует группа, на которой A является линейной слева. 2) Если для квазигрупп A, B, C для всех $a, b, c \in M$ имеет место равенство

$$(2.5) \quad A(a, A(b, c)) = B(C(a, b), c),$$

то существует группа, на которой A является линейной справа.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теперь перейдем к доказательствам основных теорем этой статьи.

Теорема 3.1. Если в системе $\Sigma \in \Omega_M$ имеет место тождество (1.8), то существует абелева группа $M(\cdot)$ такая, что система является линейной над $M(\cdot)$.

Доказательство. Докажем, что является $\overline{LA}$ -системой. Пусть $A, B \in \Sigma$. Если зафиксировать $c_0 \in M$ получим:

$$(3.1) \quad A[B(a, b), d] = A'[a, C'(b, d)], \quad \text{где } \alpha d = B(c_0, d), \beta a = B'(a, c_0).$$

Обозначая $A''(a, b) = A'(\beta a, b)$ и $C''(b, d) = C'(b, \lambda^{-1}d)$ получаем

$$(3.2) \quad A[B(a, b), d] = A''[a, C''(b, d)],$$

что означает, что система является $\overline{LA}$ -системой. Аналогично (фиксируя b) можно получить, что Σ также является $(\overline{RA})$ -системой. Тогда, согласно лемме 2.3 система Σ является линейной над некоторой группой $M(\cdot)$. Но с другой стороны, согласно лемме 2.4 - эта группа абелева. $\square$

Теорема 3.2. Если в системе M имеет место тождество (1.6), то существует абелева группа $M(\cdot)$ такая, что система является линейной над $M(\cdot)$.

Доказательство. Аналогично рассуждениям предыдущей теоремы можно получить, что система M является $\overline{LA}$ -системой. Докажем, что система также является линейной справа. Действительно, пусть $A, B \in \Sigma$. В (1.6) зафиксируем $b_0 \in M$ и введем обозначения: $\lambda a = A(a, b_0)$, $\mu d = C'(b_0, d)$. Тогда получаем

$$(3.3) \quad B[a, B(c, d)] = A_j[B_j(a, c), \mu d].$$

Обозначая $A''(x, y) = A'(x, \mu y)$, $B''(x, y) = B'(1a, c)$, получим

$$(3.4) \quad B[a, B(c, d)] = A''[B''(a, c), d].$$

Поскольку система M является линейной слева, то существует группа $M(\cdot)$ такая, что $B(x, y) = \varphi x \cdot \sigma y$, где φ является автоморфизмом группы $M(\cdot)$, а σ — перестановка множества M . С другой стороны, согласно лемме 2.1, квазигруппы A'' , B'' , B изотопны одной и той же группе $M(\cdot)$. Поскольку изотопность транзитивна, A'' и B'' изотопны B , которая в свою очередь изотопна группе $M(\cdot)$. Следовательно, (3.4) можно переписать следующим образом:

$$(3.5) \quad \varphi a \cdot \sigma(\varphi c \cdot \sigma d) = \alpha(\beta(\gamma_1 a \cdot \gamma_2 c) \cdot \gamma_3 d)$$

где $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ являются перестановками множества M . Делая замену переменных: $a \rightarrow (\gamma_1)^{-1}a$, $c \rightarrow (\gamma_2)^{-1}c$, $d \rightarrow (\gamma_3)^{-1}d$, получаем

$$(3.6) \quad \varphi((\gamma_1)^{-1}a) \cdot \sigma(\varphi((\gamma_2)^{-1}c) \cdot \sigma((\gamma_3)^{-1}d)) = \alpha(\beta(a \cdot c) \cdot d)$$

Согласно лемме 2.2, φ является квазиавтоморфизмом группы $M(\cdot)$. Следовательно, $\sigma x = t \cdot \varphi x$, где $t = \sigma e$, — автоморфизм группы $M(\cdot)$. Получаем, что $B(a, b) = a \cdot t \cdot b$. Согласно лемме 2.4, группа $M(\cdot)$ является абелевой. Поскольку B была произвольной, то теорема 3.2 доказана. $\square$

Теорема 3.3. Если в системе $\Sigma \in \Omega_M$ имеет место тождество (1.7), то существует абелева группа $M(\cdot)$ такая, что система является линейной над $M(\cdot)$.

Доказательство. Аналогично рассуждениям предыдущей теоремы можно получить, что система является $\overline{RL}$ -системой. Однако, на самом деле Σ также является линейной слева. Действительно, пусть $A, B \in \Sigma$. В (1.7) зафиксируем $c_0 \in M$ и введем обозначения: $d = A(c_0, d)$, $\mu a = C'(a, c_0)$. Тогда получаем

$$(3.7) \quad B[B(a, b), d] = A'[\mu a, B'(b, d)]$$

Обозначая $A''(x, y) = A'(\mu x, y)$, $B''(x, y) = B'(a, (\lambda_1)^{-1}c)$ получим

$$(3.8) \quad B[B(a, b), d] = A''[a, B''(b, d)]$$

Поскольку система Σ является линейной слева, то существует группа $M(\cdot)$ такая, что $B(x, y) = \varphi x \cdot \psi y$, где ψ является автоморфизмом группы $M(\cdot)$, а φ - перестановка множества M . Аналогично рассуждениям предыдущей теоремы можно получить что, φ является квазиавтоморфизмом группы $M(\cdot)$. Следовательно, $\varphi x = \psi x \cdot t$, где $t = \varphi e$, а ψ - автоморфизм группы $M(\cdot)$. Получается, что $B(a, b) = \psi a \cdot t \cdot \sigma b$. Согласно, лемме 2.4, группа $M(\cdot)$ является абелевой. Поскольку B была произвольной, теорема доказана. $\square$

Теорема 3.4. Если в системе $\Sigma \in \Omega_M$ имеет место тождество (1.8), то существует абелева группа $M(\cdot)$ такая, что система является линейной над $M(\cdot)$.

Доказательство. Для начала зафиксируем $c_0 \in M$. Подставляя $c = c_0$, $B = A$ в (1.8) получаем

$$(3.9) \quad A(A(a, b), d) = A(\mu a, A(b, d)),$$

где $\lambda d = A'(c_0, d)$ и $\mu a = B'(a, c_0)$. Если обозначить $C_1(x, y) = A(x, \lambda^{-1}y)$ и $B_1(x, y) = A(\mu x, y)$, то получаем

$$(3.10) \quad A(A(a, b), d) = B_1(a, C_1(b, d)),$$

откуда согласно лемме 2.5 следует, что A является линейной слева. Теперь обозначая $B_2(x, y) = A(x, \lambda y)$ и $C_2(x, y) = A(\mu^{-1}x, y)$, получаем

$$(3.11) \quad A(a, A(b, d)) = B_2(C_2(a, b), d),$$

откуда согласно лемме 2.5 следует, что A является линейной справа. Поскольку A является линейной и слева и справа, то она является линейной согласно лемме 2.3. Зафиксируем $B \in \Sigma$. Пусть она является линейной над группой $M(\cdot)$. Подставим $c = c_0$ в (1.8), получим

$$(3.12) \quad A(A(a, b), d) = B(\mu a, B(b, d)), \quad \text{где } \lambda d = A'(c_0, d) \text{ и } \mu a = B'(a, c_0).$$

Обозначая $A''(x, y) = A(x, \lambda y)$ и $B''(x, y) = B(\mu x, y)$ получаем

$$A''(A(a, b), d) = B''(a, B(b, d))$$

Мы доказали, что A является линейной над некоторой группой $M(o)$. С другой стороны, согласно лемме 2.1, операции A и B изотопны. Отсюда следует, что группы $M(\cdot)$ и $M(o)$ изотопны. Следовательно, согласно теореме 2.1, эти группы

изоморфны. Пусть α - изоморфизм групп $M(\cdot)$ и $M(\circ)$, то есть $x\circ y = \alpha^{-1}(\alpha x \cdot \alpha y)$. Пусть $B(x, y) = \varphi x \cdot \psi y$, где φ и ψ являются квазиавтоморфизмами группы $M(\cdot)$, а $A(x, y) = \varphi_1 x \circ \psi_1 y$, где φ_1 и ψ_1 являются квазиавтоморфизмами группы $M(\circ)$. Подставляя это в (3.12) получаем

$$\alpha^{-1}(\alpha\varphi_1\alpha^{-1}(\alpha\varphi_1a \cdot \alpha_1\varphi_1b) \cdot \alpha_1\psi_1\lambda d) = \varphi\mu \cdot \psi(\varphi b \cdot \psi d)$$

После замены переменных получим следующее тождество:

$$\alpha^{-1}(\alpha\varphi_1\alpha^{-1}(a \cdot b) \cdot d) = \varphi\mu\varphi^{-1}\alpha^{-1}a \cdot \psi(\varphi(\psi_1)^{-1}\alpha^{-1}b \cdot \psi\lambda^{-1}(\psi_1)^{-1}\alpha^{-1}d).$$

Согласно лемме 2.2, α^{-1} , $\alpha\varphi_1\alpha^{-1}$ и $\varphi(\psi_1)^{-1}\alpha^{-1}$ являются квазиавтоморфизмами группы $M(\cdot)$. Поскольку, множество квазиавтоморфизмов группы является группой, то α , φ_1 , ψ_1 являются квазиавтоморфизмами группы $M(\cdot)$. Следовательно, $A(x, y) = \varphi_1 x \circ \psi_1 y = \alpha^{-1}(\alpha\varphi_1 x \cdot \alpha\psi_1 y) = \varphi_1 x \cdot (\alpha^{-1}\alpha)^{-1} \cdot \psi_1 y$ является линейной на группе $M(\cdot)$, так как φ_1 и ψ_1 являются квазиавтоморфизмами группы $M(\cdot)$. Поскольку выбор A - произвольный, то мы доказали, что все операции являются линейными над группой $M(\cdot)$. С другой стороны, $M(\cdot)$ является абелевой согласно лемме 2.4. $\square$

Замечание 3.1. Теоремы 3.1 – 3.4, доказанные в данной статье обобщают результаты Белоусова в нескольких направлениях: во первых, в теоремах Белоусова необходимо существование $A', B', C' \in \Sigma$, а в теоремах данной статьи достаточно существование таких квазигрупп из M . Во вторых, разрешается любое из равенств $A = B$, $B = C$, $C = A$. Эти результаты могут быть использованы для классификации медиальных сверхгиперидентностей, так как с помощью этих теорем задача классификации сводится к изучению абелевых групп.

Abstract. In this paper we generalize Belousov's theorem on linearity of invertible algebras with $\forall\exists(\forall)$ identities. The obtained results can be used for classification of medial hyperidentities.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. A. Albert, "Quasigroups. I", Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 507 – 519 (1943).
- [2] V. D. Belousov, "Globally associative systems of quasigroups", Mat. Sb. (N. S.), **55**(97), no. 2, 221 – 236 (1961).
- [3] Yu. M. Movsisyan, "Hyperidentities and related concepts, II", Arm. J. Math. **4**, 1 – 85 (2018).

Поступила 27 августа 2018

После доработки 5 октября 2018

Принята к публикации 24 января 2019

О КВАЗИ-ГРИДИ КОНСТАНТАХ ДЛЯ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМЫ ХААРА В $L^1(0, 1)$

С. ГОГЯН, Н. СРАПИОНЯН

Институт Математики НАН Армении, Ереванский Государственный Университет¹
E-mails: gogyan@instmath.sci.am, nerses.srapionyan@gmail.com

Аннотация. В данной работе исследуется значение квази-гриды константы для квази-гриды подсистем системы Хаара в $L^1(0, 1)$. В работе [4] были описаны все подсистемы системы Хаара, которые являются квази-гридой системами в $L^1(0, 1)$. В описании подсистем используется длина цепей в подсистеме, введенная в [5]. В [4] была получена оценка $G(H) \leq C \cdot 2^H$, где H – длина самой длинной цепи в подсистеме. В данной работе мы улучшаем эту оценку и показываем, что $\frac{H}{16} \leq G(H) \leq 2H + 1$.

MSC2010 number: 41A65, 46B20.

Ключевые слова: подсистема Хаара; квази-гриды константа; жадный алгоритм в $L^1(0, 1)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для нормированного базиса $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в Банаховом пространстве X и для любого $f \in X$ имеем разложение

$$(1.1) \quad f = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f, \Psi) \psi_k,$$

где $\lim c_k(f, \Psi) = 0$. Положим $\Lambda_0 = \emptyset$ и индуктивным образом определим множества натуральных чисел Λ_m удовлетворяющие условиям $|\Lambda_m| = m$, $\Lambda_{m-1} \subset \Lambda_m$, а также

$$\min_{k \in \Lambda_m} |c_k(f, \Psi)| \geq \max_{k \notin \Lambda_m} |c_k(f, \Psi)|.$$

В определении множеств Λ_m нет однозначности, но в рамках наших рассуждений это обстоятельство не является существенным. Функция

$$G_m(f) = \sum_{k \in \Lambda_m} c_k(f, \Psi) \psi_k$$

называется m -членным жадным аппроксимантом функции f по системе Ψ . (см. [6] и [7] для подробностей). Для безусловного базиса Ψ имеем, что

$$(1.2) \quad \|G_m(f)\| \leq C \cdot \|f\|$$

где константа C не зависит от f и m .

¹Работа выполнена при финансовой ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18-1A081.

Определение 1.1. Базис $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ называется *квази-гриди базисом* в X , если существует постоянная C такая, что для любых $f \in X$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство (1.2). Называется *числом* C , при котором выполняется это неравенство, называется *квази-гриди постоянный* системы Ψ .

В [4] была доказана следующая теорема.

Теорема А. Нормированный базис Ψ является квази-гриди базисом тогда и только тогда, когда существует число $C \geq 1$ такое, что для любых $m \geq 1$ и $f \in X$ имеет место соотношение (1.2).

В [1] было доказано, что существует квази-гриди базис в $L^1(0, 1)$. Система Хаара является безусловным базисом в $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, но не является квази-гриди базисом в $L^1(0, 1)$ (см. [2]). Все квази-гриди подсистемы системы Хаара в $L^1(0, 1)$ были описаны в [4]. Теперь напомним определение системы Хаара. Пусть $\Delta_1 = \Delta_0^{(0)} = [0, 1]$. Интервалы

$$\Delta_{2^i+j} = \Delta_i^{(j)} = \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i} \right),$$

при $j = 1, 2, \dots, 2^i$ и $i = 0, 1, 2, \dots$ называются *двоичными интервалами*. Множество всех двоичных интервалов обозначим через $\mathcal{D}$. Каждый двоичный интервал является объединением двух двоичных интервалов, а именно $\Delta_n = \Delta_{2n-1} \cup \Delta_{2n}$. Эти два интервала назовем соответственно *левыми* и *правыми половинами* интервала Δ_n . Любому двоичному интервалу Δ_n , $n \geq 2$ соответствует одна функция системы Хаара, а именно

$$h_n(t) = h_i^{(j)}(t) = h_{\Delta_n}(t) = \begin{cases} 2^i, & t \in \Delta_{2n-1}, \\ -2^i, & t \in \Delta_{2n}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Также положим $h_1 = h_{\Delta_1} \equiv 1$. Множество функций $H = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *системой Хаара*. Для любого $f \in L^1(0, 1)$ коэффициенты разложения $c_n(f, H)$ вычисляются согласно формулам

$$(1.3) \quad c_1(f, H) = c_{\Delta_1}(f, H) = \int_{[0,1]} f$$

и

$$(1.4) \quad c_n(f, H) = c_{\Delta_1}(f, H) = \int_{\Delta_{2n-1}} f - \int_{\Delta_{2n}} f, \quad n \geq 2$$

Мы будем использовать свойство монотонности системы Хаара в $L^1(0, 1)$, т. е. для любых натуральных m и n , с $m \geq n$ выполняется неравенство

$$(1.5) \quad \|S_m(f)\| \geq \|S_n(f)\|,$$

где $S_k(f) = \sum_{i=1}^k c_i(f) h_i$. Для множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ обозначим $H_{\mathcal{A}} = \{h_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ и $L_{\mathcal{A}} = \text{span}(H_{\mathcal{A}})$, где замыкание берется по норме $L^1(0, 1)$. Через $l(\mathcal{A})$ длину самой длинной цепи в $\mathcal{A}$ (см. [5]). Следующая теорема была доказана в [4].

Теорема 1.1. Для множества A , $A \subset \mathcal{D}$ подсистема Хаара H_A будет квази-гриди базисом в L_A тогда и только тогда, когда $H(A) < +\infty$. Более того, для любого $m \in \mathbb{N}$ и $f \in L_A$ имеет место $\|G_m(f)\| \leq 2^{H(A)} \|f\|$.

В этой работе мы улучшаем эту оценку для квази-гриди константы системы H_A .

Теорема 1.2. Пусть подсистема системы Хаара H_A является квази-гриди базисом в L_A . Тогда для постоянной квази-гриди G_A справедлива следующая оценка

$$\frac{H(A)}{16} \leq G_A \leq 2H(A) + 1.$$

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для $f \in L^1(0, 1)$ будем писать:

$$\|f\|_\Delta = \int_\Delta |f|$$

и $\|f\|$, если $\Delta = [0, 1]$. Также сделаем следующие обозначения:

$$\text{пр}(f) = \{\Delta : c_\Delta(f) \neq 0\}, \quad P_J(f) = f - \sum_{j \in J} c_j(f) h_j, \quad \text{для любого } J \in \mathcal{D}$$

Заметим, что функция $P_J(f)$ постоянна на множестве J и совпадает с f вне J . Для конечного множества двоичных интервалов δ , $\delta = \{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ положим $P_\delta(f) = P_{J_1}(P_{J_2}(\dots(P_{J_k}(f))\dots))$. Заметим также, что функция $P_\delta(f)$ не зависит от того, каким порядком применяются операторы P_{J_i} , $1 \leq i \leq k$. Для любого $f \in L^1(0, 1)$ и двоичного интервала $\Delta_n = [a, b)$ положим

$$C_1(f, \Delta_n)(t) = \begin{cases} f(t) & : t \notin \Delta_n \\ f(t - \frac{b-a}{2}) & : t \in \Delta_n \end{cases}$$

и

$$C_2(f, \Delta_n)(t) = \begin{cases} f(x) & : x \notin [a, \frac{a+b}{2}) \\ f(x + \frac{b-a}{2}) & : x \in [a, \frac{a+b}{2}) \end{cases}$$

Фактически операторы $C_1(f, \Delta_n)$ и $(C_2(f, \Delta_n))$, введенные в [3] копируют функцию f с левой (правой) половины интервала Δ_n на правую (левую).

Ниже сформулируем несколько лемм из [5], которые будут нами использованы.

Лемма 2.1. ([5], Лемма 1) Для любых $J \in \mathcal{D}$ и $f \in L^1(0, 1)$ имеем $\|f\|_J \geq |c_J(f)|$.

Лемма 2.2. ([5], (8)) Пусть $f \in L^1(0, 1)$ и $|c_\Delta(f)| \leq 1$ для любого $\Delta \in \mathcal{D}$. Тогда для любого $J \in \mathcal{D}$ справедливо $\|P_J(f)\|_J \leq 1$.

Лемма 2.3. ([5], Лемма 2) Пусть $f, g \in L^1(0, 1)$ такие что $\|f + g\| > 0$ и пусть $\|f\| = B\|f + g\|$. Тогда будет выполняться одно из этих неравенств

$$(2.1) \quad \|C_1(f, \Delta_n)\| \leq B\|C_1(f + g, \Delta_n)\|,$$

$$(2.2) \quad \|C_2(f, \Delta_n)\| \leq B \|C_2(f+g, \Delta_n)\|,$$

для любого интервала $\Delta_n = [a, b]$, $n > 1$. Более того, равенства в (2.1) и (2.2) выполняются одновременно.

Для любого $f, g \in L^1(0, 1)$, $\|f+g\| > 0$ и Δ_n положим

$$(2.3) \quad C(f, g) = \begin{cases} (C_1(f, \Delta_n), C_1(f, \Delta_n)), & \text{если выполнено (2.1) и } C_1(f+g, \Delta_n) \neq 0 \\ (C_2(f, \Delta_n), C_2(g, \Delta_n)), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 2.4. ([5], Лемма 3) Пусть даны $f, g \in L^1(0, 1)$, $\Delta_n \in \mathcal{D}$ и пусть выполняются следующие условия

- i) $\Delta_n \notin \text{sp}(f)$, $\Delta_n \notin \text{sp}(g)$,
- ii) $\text{sp}(f) \cap \text{sp}(g) = \emptyset$,
- iii) $\|f\| > 0$, $\|f+g\| > 0$,
- iv) $H(\text{sp}(f+g)) < \infty$.

Тогда для функции $(f', g') = C((f, g), \Delta_n)$, выполняются следующие условия

- a) $\Delta_n \notin \text{sp}(f')$, $\Delta_n \notin \text{sp}(g')$,
- b) $c_k(f') = c_k(f)$ и $c_k(g') = c_k(g)$ для любого $k \in \Delta_k \not\subset \Delta_n$, где Δ_n — половина интервала Δ_k куда копируются значения функций f и g ,
- c) $c_J(f') = c_{J+\frac{n(\Delta_n)}{2}}(f')$ и $c_J(g') = c_{J+\frac{n(\Delta_n)}{2}}(g')$, для всех $J \subset \Delta_{2n-1}$,
- d) $\text{sp}(f') \cap \text{sp}(g') = \emptyset$,
- e) $H(\text{sp}(f'+g')) \leq H(\text{sp}(f+g))$,
- f) $\|f'\| > 0$, $\|f'+g'\| > 0$,
- g) $\frac{\|f'\|}{\|f'+g'\|} \geq \frac{\|f\|}{\|f+g\|}$.

Теперь мы готовы сформулировать основную лемму этого параграфа.

Лемма 2.5. Пусть p и q многочлены по системе Хаара, удовлетворяющие следующим соотношениям

- i) $\text{sp}(p) \cap \text{sp}(q) = \emptyset$,
- ii) функция q постоянна на всех двоичных интервалах, на которых постоянна p ,
- iii) $\|p\| > 0$ и $\|p+q\| > 0$
- iv) $H = H(\text{sp}(p+q)) < \infty$
- v) $|c_J(p)| \geq 1$ для любого $J \in \text{sp}(p)$,
- vi) $|c_J(q)| \leq 1$ для любого $J \in \text{sp}(q)$,
- vii) $p|_{J_+} = p|_{J_-}$ и $q|_{J_+} = q|_{J_-}$ для любого J , $J \notin \text{sp}(p+q)$.

Тогда для любого $J \notin \text{sp}(p+q)$ имеет место

$$(2.4) \quad \|p\|_J \leq (2H+1) \cdot \|p+q\|_J + 1, \quad p|_J = \text{const},$$

$$(2.5) \quad \|p\|_J \leq (2H+1) \cdot \|p+q\|_J - (2H-2), \quad p|_J \neq \text{const}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех двоичных интервалов $\mathcal{J}$, для которых $c_{\mathcal{J}}(p+q) = 0$, а также функция $p+q$ не постоянна на двоичном интервале, которая чьей левой или правой половиной является $\mathcal{J}$. По индукции по $\text{ord}(\mathcal{J}, \mathcal{S})$, $\mathcal{J} \in \mathcal{S}$ (см. определение в [5]) докажем утверждение леммы. Если $\text{ord}(\mathcal{J}, \mathcal{S}) = 0$, тогда $p|_{\mathcal{J}} = \text{Const}$. Тогда используя лемму 2.2 для q будем иметь

$$(2.6) \quad \|p\|_{\mathcal{J}} \leq \|p+q\|_{\mathcal{J}} + \|q\|_{\mathcal{J}} \leq \|p+q\|_{\mathcal{J}} + 1 \leq (2H+1) \cdot \|p+q\| + 1$$

Допустим, что утверждение индукции справедливо для $\mathcal{J}$ с $\text{ord}(\mathcal{J}, \mathcal{S}) < i$ и докажем для $\mathcal{J}$ с $\text{ord}(\mathcal{J}, \mathcal{S}) = i$. Заметим, что $p|_{\mathcal{J}} \neq \text{Const}$ а также из условия vii) следует, что $p|_{\mathcal{J}_+} \neq \text{Const}$ и $p|_{\mathcal{J}_-} \neq \text{Const}$. Обозначим через $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_k$ все максимальные элементы $\mathcal{S}$, которые содержатся в $\mathcal{J}_+$ и $p|_{\mathcal{J}_j} \neq \text{Const}$, $j = 1, 2, \dots, k$. А через $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_m$ обозначим все максимальные элементы $\mathcal{S}$, которые содержатся в $\mathcal{J}_+$ и $p|_{\mathcal{J}_j} = \text{Const}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Заметим, что $\mathcal{J}_+ = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{J}_j \cup \bigcup_{j=1}^m \mathcal{J}_j$.

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{J}_s$ являются правыми и левыми половинами некоторого двоичного интервала $\mathcal{J}$. Из условий леммы следует, что $c_{\mathcal{J}}(p) \neq 0$ и следовательно $\|p+q\|_{\mathcal{J}} \geq 1$. Используя лемму 2.2 для q получим, что $\|q\|_{\mathcal{J}} \leq 1$. Следовательно

$$(2.7) \quad (2H+1)\|p+q\|_{\mathcal{J}} - \|p\|_{\mathcal{J}} > 2H\|p+q\|_{\mathcal{J}} - 1 > 2H-1 > 2H-2.$$

Итак, на интервале $\mathcal{J}$ выполняется соотношение (2.5). В последовательности $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_m$ отметим все пары, чьи объединения являются двоичными интервалами, и множество этих объединений обозначим через $\mathcal{I}_{k+1}, \mathcal{I}_{k+2}, \dots, \mathcal{I}_s$. А множество оставшихся интервалов обозначим через $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_l$. Для интервалов $\mathcal{J}_i$ имеем соотношение (2.5), а для интервалов $\mathcal{J}_i$ имеем (2.4). Заметим, что из конструкции следует, что $l \leq s(H-1)$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \|p\|_{\mathcal{J}_+} &= \sum_{i=1}^s \|p\|_{\mathcal{J}_i} + \sum_{i=1}^l \|p\|_{\mathcal{J}_i} < (2H+1) \sum_{i=1}^s \|p\|_{\mathcal{J}_i} - s(2H-2) \\ &\quad + (2H+1) \sum_{i=1}^l \|p\|_{\mathcal{J}_i} + l \leq (2H-1)\|p\|_{\mathcal{J}_+} - (H-1). \end{aligned}$$

Из условия vii) данной леммы следует, что $\|p\|_{\mathcal{J}} = 2\|p\|_{\mathcal{J}_+}$, $\|p+q\|_{\mathcal{J}} = 2\|p+q\|_{\mathcal{J}_+}$, следовательно, получаем $\|p\|_{\mathcal{J}} \leq (2H+1)\|p+q\|_{\mathcal{J}} - 2(H-1)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Сначала докажем правую часть неравенства т.е. $G_{\mathcal{A}} \leq 2H(\mathcal{A})+1$. Пусть $f \neq 0$. Нам достаточно рассмотреть случай, когда $G_m(f) \neq f$. Обозначим

$$\begin{aligned} p &= \frac{G_m(f)}{\max \{ \|c_{\Delta_n}(f - G_m(f))\| : \Delta_n \in \text{sp}(f - G_m(f)) \}} \\ q &= \frac{f - G_m(f)}{\max \{ \|c_{\Delta_n}(f - G_m(f))\| : \Delta_n \in \text{sp}(f - G_m(f)) \}} \end{aligned}$$

Нам нужно оценить величину $\frac{\|p\|}{\|p+q\|}$. Так как p является полиномом, а система Хаара обладает свойством монотонности, то можем считать, что q тоже является полиномом. Имеем, что $H(sp(p+q)) < \infty$. Все двоичные интервалы, которые не принадлежат $sp(p+q)$ и на которых $p+q$ не является постоянным прономеруем по увеличению меры и обозначим через $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$. Положим

$$(p', q') = G(C(\dots(C((p, q, \delta_1), \delta_2), \dots, \delta_k))$$

Функции p', q' будут удовлетворять всем условиям основной Леммы, поэтому получаем, что $\frac{\|G_m(f)\|}{\|f\|} \leq \frac{\|p'\|}{\|p'+q'\|} \leq 2H+1$. Теперь докажем, что $G_A \geq \frac{H}{16}$. Пусть в подсистеме S имеется цепь длиной H . Для простоты представления предположим, что $\{h_n^{(1)}, h_{n+1}^{(1)}, \dots, h_{n+H-1}^{(1)}\} \subset S$. Рассмотрим функцию $f = \sum_{i=0}^{n+H-1} h_i^{(1)}$. Заметим, что $\|f\| = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \leq 2$. Обозначим $m = \lfloor \frac{H}{2} \rfloor$ и рассмотрим следующую реализацию жадного алгоритма $G_m(f) = \sum_{i=0}^{m-1} h_{n+2i}^{(1)}$. Для $G_m(f)$ справедлива оценка $\|G_m(f)\| \geq \frac{m}{4}$. Следовательно, $\|G_m(f)\| \geq \frac{H}{16} \|f\|$. И это означает, что $\|G_m\| \geq \frac{H}{16}$.

Abstract. In this paper, we estimate the quasi-greedy constant for quasi-greedy subsystems of the Haar system in $L^1(0, 1)$. All quasi-greedy subsystems of the Haar system are characterized in [4]. The characterization is based on the term length of the chains, which is introduced in [5]. In [4], the estimate $G(H) \leq C \cdot 2^H$ was obtained with H being the length of the longest chain of the subsystem. In this paper, we improve this estimate and show that $\frac{H}{16} \leq G(H) \leq 2H+1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, "On the existence of almost greedy bases in Banach spaces", *Studia Mathematica*, **159**, 67 – 101 (2003).
- [2] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, P. Wojtaszczyk, "On approximate t_1 systems in Banach spaces", *Journal of Approximation Theory*, **114**, no. 2, 214 – 241 (2002).
- [3] S. Gogyan, "Greedy algorithm with regard to Haar subsystems", *East Journal on Approximations*, **11**, no. 2, 221 – 236 (2005).
- [4] S. Gogyan, "GA greedy algorithm in $L^1(0, 1)$ in subsystems of the Haar system and ω -quasi-greedy bases", *Mat. Zametki*, **88**, no. 1, 18 – 29 (2010).
- [5] S. Gogyan, "On convergence of weak thresholding greedy algorithm in $L^1(0, 1)$ ", *Journal Approximation Theory*, **161**, no. 1, 49 – 64 (2009).
- [6] V. N. Temlyakov, "Greedy approximation", *Acta Numerica*, **17**, 235 – 409 (2008).
- [7] S. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", *East J. Approx.*, **5**, 365 – 379 (1999).
- [8] P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general biorthogonal systems", *J. Approx. Theory*, **107**, 293 – 314 (2000).

Поступила 19 декабря 2018

После доработки 20 января 2019

Принята к публикации 24 января 2019

NON-ASYMPTOTIC GUARANTEES FOR SAMPLING BY
STOCHASTIC GRADIENT DESCENT

A. G. KARAGULYAN

Yerevan State University, Armenia
E-mail: *anetik.karagulyan@ensae.fr*

Abstract. Sampling from various kinds of distributions is an issue of paramount importance in statistics since it is often the key ingredient for constructing estimators, test procedures or confidence intervals. In many situations, the exact sampling from a given distribution is impossible or computationally expensive and, therefore, one needs to resort to approximate sampling strategies. However, it is only very recently that a mathematical theory providing non-asymptotic guarantees for approximate sampling problem in the high-dimensional settings started to be developed. In this paper we introduce a new mathematical framework that helps to analyze the Stochastic Gradient Descent as a method of sampling, closely related to Langevin Monte-Carlo.

MSC2010 numbers: 42B25, 42B20.

Keywords: Markov chain Monte Carlo; rates of convergence; approximate sampling; Langevin algorithm; gradient descent.

1. INTRODUCTION

Let us first introduce the mathematical setting of Langevin sampling. The general problem is to sample from the log-concave distribution with density $\pi(\theta) = c \exp(-f(\theta))$, where $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ satisfies the following two conditions:

$$(1.1) \quad \text{Strong convexity: } f(\theta_2) \geq f(\theta_1) + \nabla f(\theta_1)^T(\theta_2 - \theta_1) + \frac{m}{2} \|\theta_1 - \theta_2\|_2^2;$$

$$(1.2) \quad \text{Smoothness: } \|\nabla f(\theta_1) - \nabla f(\theta_2)\|_2 \leq M \|\theta_1 - \theta_2\|_2,$$

for all p -dimensional real vectors θ_1 and θ_2 . The parameters m and M are positive numbers and $\|\cdot\|_2$ is the Euclidean norm on $\mathcal{R}^n$. The problem of sampling from π is closely related to the problem of finding the minimum of the function $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$. Indeed, suppose we manage to sample from the distribution $\pi_\beta(\theta) = c_\beta \exp(-\beta f(\theta))$, where β is a large positive number. Then π_β will mainly be concentrated around the unique minimum point of f and it will have some kind of a spike form. Thus, a sample from π_β is a high probability approximation of the minimum point. Therefore considering f to be convex will facilitate our task for characterizing the convergence of the considered sampling method. For more details see [5] and [10].

Langevin Monte-Carlo algorithm is one of the methods for the approximate sampling from the target distribution π . The idea comes from the following Stochastic Differential Equation (SDE), named Langevin diffusion:

$$(1.3) \quad dX(t) = -\nabla f(X(t))dt + \sqrt{2}dW(t).$$

Here W is the standard Wiener process or Brownian motion in $\mathbb{R}^p$. The solution of (1.3) is a Markov process having π as invariant distribution [1]. In order to use this fact for our goal, we will use Euler-Maruyama discretization of (1.3), which can be found in [15]. It goes as follows:

$$(1.4) \quad \theta_{k+1} = \theta_k - h_{k+1}\nabla f(\theta_k) + \sqrt{2h_{k+1}}\xi_{k+1},$$

where $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$ follow Gaussian distribution $\mathcal{N}(0, I_p)$ and are independent from each other and θ_0 . The latter is the starting point for the algorithm and it can be random as well. In particular when the step-sizes h_k are constantly equal to h and h is small, then for large enough k 's the distance (Wasserstein, Total Variation) between the distribution of θ_k and π is small. This algorithm is called Gradient Langevin Dynamics (GLD) or Langevin Monte-Carlo (LMC) and it is actively studied nowadays ([3]–[9]).

In this paper, however we are not going to study the convergence of LMC algorithms. Instead we will review Stochastic Gradient Descent as a sampling method and represent it as a sampling algorithm. Let us recall SGD for the case of optimization. Often in Machine Learning problems we need to minimize the empirical risk. The latter is usually a sum-decomposable function $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x),$$

where n is the sample size and $g_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, for every $i = 1, \dots, n$. The classical algorithm to solve a minimization problem, when mild assumptions are satisfied, is the Gradient Descent. Unfortunately when the sample size is large then every step of Gradient Descent is becoming computationally expensive. That is why Stochastic Gradient Descent is introduced. The main idea of SGD is to replace the full gradient in GD with its unbiased estimate. There are various ways to do it, but the most common one is the so called Batch Gradient Descent. In the latter case, one just samples a mini-batch B (a subset of $\{1, 2, \dots, n\}$) and replaces the gradient by $c_B \sum_{i \in B} \nabla g_i$, where c_B is a constant depending on $|B|$. Thus the update rule becomes $\theta_{k+1} = \theta_k - c_B \sum_{i \in B} \nabla g_i$. For more details see [2].

The problem of our interest however is not directly related to optimization, but to sampling. We will show that in the case of a smooth and strongly convex potential function f SGD yields a convergence of order $\tilde{O}(\kappa^2 p / \varepsilon^2)$ ¹ in Wasserstein error. If in addition to these conditions we also have second-order smoothness, then the rate improves to $\tilde{O}(\kappa^2 p / \varepsilon^2 \wedge \kappa \sqrt{np} / \varepsilon)$.

This article is organized as follows: In the next section, we give some remarks about the past and ongoing research in this area. Section In Section ?? we introduce the theoretical setting that we are going to work with. In section 4 we propose a mathematical framework which helps to analyze the convergence. The main results that provide non-asymptotic upper bounds to convergence rate are presented in Section 6.

2. PRIOR WORK

The first and probably the most influential work providing probabilistic analysis of the asymptotic properties of the LMC algorithm is described in [15]. However, one of the recommendations made by the authors of that paper is to avoid using Langevin algorithm as it is defined in (1.4) or to use it very cautiously, since the ergodicity of the corresponding Markov chain θ_k is very sensitive to the choice of the parameter h . Even in the cases where the Langevin diffusion is geometrically ergodic, the inappropriate choice of h may result the transience of the Markov chain. These findings have strongly influenced the subsequent studies since all the ensuing research focused essentially on the Metropolis adjusted version of the LMC, known as Metropolis adjusted Langevin algorithm (MALA) and its numerous modifications ([11]–[16]). In contrast to this, it is shown that under the strong convexity assumption imposed on f coupled with the Lipschitz continuity of the gradient of f , one can ensure the non-transience of the Markov chain θ_k by a suitable choice of h_k . Later by [5] and [8] it was shown that the convergence rate in TV distance is $\tilde{O}(p / \varepsilon^2)$ for any initial vector θ_0 .

Another problem of interest is the convergence in Wasserstein distance. In the next section the reader can find our reasoning to choose Wasserstein distance instead of TV. The convergence of LMC with this error was recently studied by [6] and [8] and a rate of $\tilde{O}(p / \varepsilon^2)$ was achieved. In addition to this, in [6] it was shown, that imposing additional smoothness for function f , meaning Lipschitz-continuity of its Hessian matrix, implies a better convergence rate of $\tilde{O}(\sqrt{p} / \varepsilon)$ for LMC. It turns out that in the case of sum-decomposable potential function, a modified version of LMC achieves

¹ $\tilde{O}$ is the big- O notation, ignoring logarithmic factors.

a better convergence rate. Some of these algorithms have their roots in optimization, like SAGA [4], which was originally proposed in a paper by Defazio et al. [7] for the problem of optimization.

The convergence in terms of Wasserstein error was studied by many authors. [8] proved the rate $O(p/\varepsilon^2)$ for any deterministic starting point θ_0 . The same convergence with improved coefficients was later shown in [6]. In this section we will formulate two theorems from [6], which will be used later on. Before we state the theorems, let us define W_2 Wasserstein distance. For two probability measures μ and ν defined on $(\mathcal{R}^p, \mathcal{B}(\mathcal{R}^p))$, W_2 distance is defined by

$$(2.1) \quad W_2(\mu, \nu) = \left\{ \inf_{\eta \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{\mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^p} \|\theta - \theta'\|_2^2 d\eta(\theta, \theta') \right\}^{\frac{1}{2}},$$

where the infimum is taken with respect to all joint distributions η having μ and ν as marginal distributions. Let us compare this distance to total variation distance. If we have small Wasserstein for some μ and ν , then it implies that their first order moments are also close. This property does not hold for the total variation distance. As an example one can check that $\|\delta_\theta - \delta_{\theta'}\|_{TV} = 1_{\theta \neq \theta'}$, whereas $W_2(\delta_\theta, \delta_{\theta'}) = \|\theta - \theta'\|_2$ is a smooth function increasing function of Euclidean distance between θ and θ' .

Let us now present a non-asymptotic convergence bound for Wasserstein error, when the constant step-size LMC .

Theorem 2.1 (Theorem 1 from [6]). *Assume that $h \in (0, 2/M)$. Let f satisfy conditions (1.1) and (1.2) , thus the following claims hold:*

$$\begin{aligned} \text{if } h \leq \frac{2}{m+M}, \text{ then } W_2(\nu_K, \pi) &\leq (1-mh)^K W_2(\nu_0, \pi) + \frac{1.65M}{m} (hp)^{\frac{1}{2}}; \\ \text{if } h \geq \frac{2}{m+M}, \text{ then } W_2(\nu_K, \pi) &\leq (Mh-1)^K W_2(\nu_0, \pi) + \frac{1.65Mh}{2-Mh} (hp)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

In practice, a relevant approach to get an accuracy of at most ε is to minimize the upper bound provided by Theorem 2.1 with respect to h , for a fixed K . Then, one can choose the smallest K for which the obtained upper bound is smaller than ε . One useful observation is that the second upper bound is an increasing function of h . Its minimum is always attained at $h = 2/(m+M)$, which means that one can always look for a step-size in the interval $(0, 2/(m+M)]$ by minimizing the first upper bound. This can be done using standard methods of optimization.

Remark 2.1. *These two upper bounds contain $W_2(\nu_0, \pi)$, computation of which can be involving. In order to avoid it, we will bound it from above. If $f \geq 0$, we can replace*

it by $\sqrt{p/m} + \sqrt{2f(\theta_0)/m}$. Indeed,

$$\begin{aligned} W_2(\nu_0, \pi) &\leq \sqrt{\frac{p}{m}} + \|\theta_0 - \theta\|_2 \\ &\leq \sqrt{\frac{p}{m}} + \sqrt{\frac{2}{m}(f(\theta_0) - f(\theta_*))} \leq \sqrt{\frac{p}{m}} + \sqrt{\frac{2f(\theta_0)}{m}}. \end{aligned}$$

The first inequality is a corollary from Proposition 1 of [8]. Combining Theorem 2.1 with its remarks we obtain the following. Suppose that we choose h and K so that

$$(2.2) \quad h \leq \min\left(\frac{2}{m+M}, \frac{m^2\varepsilon^2}{11M^2p}\right) \text{ and } hK \geq \frac{1}{m} \log(Q(p, \varepsilon)),$$

where $Q(p, \varepsilon) = \frac{2f(\theta_0) + mp}{0.5m\varepsilon}$ is a real-valued rational function. Then each of the components from the right-hand side of Theorem will be less than 0.5ε , thus $W_2(\nu_K, \pi) \leq \varepsilon$.

Now, let us discuss the convergence rate of LMC in the case of additional smoothness. Below we present a theorem that quantifies the non-asymptotic behavior of LMC, when the potential function has a Lipschitz-continuous Hessian. That is, for every $x, y \in \mathcal{R}^p$ we have

$$(2.3) \quad \|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq L\|x - y\|_2,$$

where $\|\cdot\|$ is the operator norm of matrices.

Theorem 2.2 (Theorem 4 from [6]). *Let ν_K be the distribution of K -th iterate of the LMC algorithm iterations. Assume that the function $f: \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}$ satisfies (1.1), (1.2) and it is also L -Hessian-Lipschitz. Then for every $h < 2/(m+M)$,*

$$W_2(\nu_K, \pi) \leq (1 - mh)^K W_2(\nu_0, \pi) + \frac{Lhp}{2m} + \frac{11M^{\frac{3}{2}}h\sqrt{p}}{5m}.$$

Remark 2.2. *In order for the improvement of the rate to be visible, let us take a closer look to the order of step-size h and dimension p . Here we have $O(hp)$ meanwhile Theorem 2.1 gives only $O(\sqrt{hp})$, which is worse as h is considered to be small.*

Remark 2.3. *Doing analogous analysis as we did for the previous theorem, one can deduce that the convergence rate is $\tilde{O}(\sqrt{p}/\varepsilon)$.*

3. PROPOSED FRAMEWORK TO ANALYZE SGD

In the following sections we will discuss a special case for potential function f , in particular when f is a sum-decomposable function, that is

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^n g(\theta, Z_i),$$

where n is a very large positive integer, $g : \mathbb{R}^p \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ is a given smooth function and $Z_1, \dots, Z_n$ are iid random variables with values in some probability space $\mathcal{Z}$. To ease notation, we write $g_i(\theta) = g(\theta, Z_i)$. We assume here that the functions g_i are strongly convex with a coefficient m_g and its gradient is M_g Lipschitz-continuous. Therefore f is a convex and gradient-Lipschitz function as well, with coefficients nm_g and nM_g . So we have

$$\nabla f(\theta) = \sum_{i=1}^n \nabla g_i(\theta).$$

In order to avoid the computation of n gradients ∇g_i at each iteration of the LMC, we will use the classic Stochastic Gradient Descent algorithm in order to sample approximately. Let us first recall the algorithm. At each iteration k of the algorithm, we choose a subset B_k independent of all the past randomness and update θ_{k+1} by

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{hm}{b} \sum_{i \in B_k} \nabla g_i(\theta_k).$$

The latter can be rewritten as $\theta_{k+1} = \theta_k - h \nabla f(\theta_k) + h \zeta_k$, where the noise vectors ζ_k are of the form

$$\zeta_k = n \left\{ \frac{1}{b} \sum_{i \in B_k} \nabla g_i(\theta_k) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla g_i(\theta_k) \right\}.$$

If b is large, the distribution of ζ_k (conditionally to θ_k) is approximately Gaussian $\mathcal{N}_p(0, \Sigma_k)$ where the covariance matrix Σ_k is given by

$$\Sigma_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla g_i(\theta_k) \nabla g_i(\theta_k)^\top - \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla g_i(\theta_k) \right\} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla g_i(\theta_k) \right\}^\top.$$

Below we study a particular case of SGD when the noise vector ζ_k is a normal random vector with a covariance proportional to identity matrix. We will assume, that $\Sigma_k = \sigma^2 I_p$, where $\sigma^2 = n(n-b)/b$. The choice of σ^2 is intuitive. For details see the Appendix. Let us formulate the framework we are going to work with.

Assumptions: Suppose $g_i : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^p$ for $i = 1, \dots, n$ and $f = \sum_i g_i$. We will assume that the functions $g_1, g_2, \dots, g_n$ satisfy the assumptions (1.1) and (1.2) with coefficients m_g and M_g , respectively.

Iterative method:

$$(3.1) \quad \theta_{k+1} = \theta_k - h \nabla f(\theta_k) + h \zeta_k,$$

where $\zeta_k \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{n(n-b)}{b} I_p\right)$, for $k = 1, 2, \dots, n$.

Problem: Find a solution to this optimization problem

$$\begin{cases} \text{Minimize } Kb; \\ \text{Subject to } \min_h W_2(\nu_{K,h,b}, \pi) \leq \varepsilon, \end{cases}$$

where $\nu_{K,h,b}$ is the distribution of the K -th iterate of the SGD with step-size h and batch-size b . In other words, what is the minimum amount of overall gradient evaluations in order to have an error of ε .

4. MAIN RESULTS

In this section we present two theorems that solve the problem stated above in two slightly different cases. For the rest of the paper we denote the condition number M_g/m_g by κ .

Theorem 4.1. *Suppose that the following conditions are satisfied:*

$$h = \frac{\varepsilon^2}{4\kappa^2 p}, \quad b = \frac{hn^2}{2 + hn}, \quad n \geq 9 \quad \text{and} \quad \frac{3\kappa\sqrt{p}}{n} \leq \varepsilon \leq \frac{2\kappa\sqrt{p}}{\sqrt{nM_g}}.$$

If

$$(4.1) \quad Kb \geq \frac{4p\kappa^2 n \log(Q'(p, \varepsilon))}{m_g(8p\kappa^2 + \varepsilon^2 n)},$$

where Q' is a rational function given by formula

$$Q'(p, \varepsilon) = \frac{2f(\theta_0) + m_g p}{0.1m_g \varepsilon},$$

then $W_2(\nu_{K,h,b}, \pi) \leq \varepsilon$.

Before we bring the proof let us state some remarks regarding this theorem.

Remark 4.1. *Since the batch-size b is between 1 and n , $hn^2/(2 + hn)$ must also satisfy this condition. In order to verify that, let us substitute h with its value. Therefore we have*

$$b = \frac{n^2 \varepsilon^2}{8\kappa^2 p + n \varepsilon^2}.$$

The latter is a monotonically increasing function with respect to ε^2 . Thus taking into account that n is larger than 9,

$$(4.2) \quad b = \frac{n^2}{\frac{8\kappa^2 p}{\varepsilon^2} + n} \geq \frac{n^2}{\frac{8n^2}{9} + n} \geq 1.$$

The inequality $b \leq n$ is obvious.

Remark 4.2. *One can notice that, if $n \rightarrow \infty$, then Kb has an order of $\tilde{O}\left(\frac{4p\kappa^2}{\varepsilon^2}\right)$.*

Proof. As the function f is a sum of n strongly-convex and gradient-Lipschitz functions, then it is also a strongly-convex and gradient-Lipschitz function with coefficients $m = nm_g$ and $M = nM_g$, respectively. First let us express the step-size h in terms of the batch-size b . From the formula of b , we obtain $h = 2b/(n - b)$. Thus if we can rewrite the iterative method in the following way:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - h \nabla f(\theta_k) - h \zeta_k = \theta_k - h \nabla f(\theta_k) + h \sqrt{\frac{n(n-b)}{b}} \eta_k = \theta_k - h \nabla f(\theta_k) + \sqrt{2h} \eta_k,$$

where $\eta_1, \eta_2, \dots$, as usual, are independent standard normal p -dimensional random vectors. Therefore we got the classic LMC update rule. From the definition of h we have

$$h = \frac{\varepsilon^2}{4\kappa^2 p} \leq \frac{1}{nM_g}.$$

Thus Theorem 2.1 yields $W_2(\nu_K, \pi) \leq (1 - nm_g h)^K Q(p, \varepsilon) + 1.65\kappa\sqrt{ph}$. We will give upper bounds for each component of the right-hand side. Substituting h with its value in $\kappa\sqrt{ph}$ we obtain, that

$$\kappa\sqrt{ph} = \kappa\sqrt{p \frac{\varepsilon^2}{4\kappa^2 p}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Now let us discuss the other component. As we mentioned in previous sections, if

$$(4.3) \quad K \geq \frac{\log(Q'(p, \varepsilon))}{m_g n h} = \frac{4p\kappa^2}{m_g n \varepsilon^2} \cdot \log(Q'(p, \varepsilon)),$$

then $(1 - nm_g h)^K W_2(\nu_{0,h,b}, \pi)$ will be less than 0.1ε . In order to complete the proof we just need to multiply this lower bound on K by b . Thus we obtain

$$(4.4) \quad Kb \geq \frac{4p\kappa^2 b}{m_g n \varepsilon^2} \cdot \log(Q'(p, \varepsilon)).$$

Using the definition of h , we obtain the following formula for b

$$b = \frac{n^2 \varepsilon^2}{8\kappa^2 p + n \varepsilon^2}.$$

Substituting the latter in (4.4), we get the required. $\square$

5. CONVERGENCE OF SGD WITH SECOND-ORDER SMOOTHNESS

In this section we will analyze the convergence of Stochastic Gradient Descent in terms of Wasserstein distance when the Hessian matrix of the function f is Lipschitz-continuous.

Theorem 5.1. *Suppose that the following conditions are satisfied:*

$$h = \frac{\varepsilon}{4\kappa L_g \sqrt{M_g p \max(p, n)}}, \quad b = \frac{hn^2}{2 + hn},$$

$$\frac{2\sqrt{p \max(p, n)}}{n(n-1)} \leq \frac{\varepsilon}{4\kappa L_g \sqrt{M_g}} \leq \frac{\sqrt{p \max(p, n)}}{M_g n}.$$

If

$$(5.1) \quad Kb \geq \frac{4n\kappa L_g \sqrt{M_g p \max(p, n)}}{m_g(8\kappa L_g \sqrt{M_g p \max(p, n)} + n\varepsilon)} \cdot \log(Q''(p, \varepsilon)),$$

where

$$Q''(p, \varepsilon) = \frac{2f(\theta_0) + m_g p}{0.3m_g \varepsilon},$$

then $W_2(\nu_{K, h, b}, \pi) \leq \varepsilon$.

Remark 5.1. Again the condition on ε is brought to make the choice of parameters possible. In particular, as mentioned before, b is an integer between 1 and n . Doing simple calculations and using the aforementioned condition, one can verify that our formula b satisfies this criteria.

Remark 5.2. Let us interpret a little the result of the theorem. In the case when our sample size n tends to infinity, we have $O(\kappa\sqrt{np} \log(Q(p, \varepsilon))/\varepsilon)$ complexity.

Proof. The proof is similar to the one for Theorem 4.1. Using the same reasoning as before f satisfies (1.1), (1.2), (2.3) with $m = nm_g$, $M = nM_g$ and $L = nL_g$, respectively. As in the previous proof we will represent our iterative method as a classic Langevin Monte-Carlo update step. We have that

$$h = \frac{\varepsilon}{4\kappa L_g \sqrt{M_g p \max(p, n)}} \leq \frac{1}{nM_g},$$

therefore (2.2) can be applied:

$$W_2(\nu_{K, h, b}, \pi) \leq (1 - nm_g h)^K W_2(\nu_{0, h, b}, \pi) + \frac{L_g h p}{2m_g} + \frac{11}{5} \kappa h \sqrt{M_g p m}.$$

Let us express b in terms of ε , p and n :

$$b = \frac{hn^2}{2 + hn} = \frac{n^2}{\frac{2}{h} + n} = \frac{\varepsilon n^2}{8\kappa L_g \sqrt{M_g p \max(p, n)} + \varepsilon n}.$$

Thus the condition (5.1) is equivalent to

$$K \geq \frac{4\kappa L_g \sqrt{M_g p \max(p, n)}}{m_g n \varepsilon} \cdot \log(Q''(p, \varepsilon)) = \frac{\log(Q''(p, \varepsilon))}{m_g n h}.$$

From the analysis shown above, this yields that $(1 - nm_g h)^K W_2(\nu_{0, h, b}, \pi) \leq 0.3\varepsilon$. Let us proceed to the second component, $L_g h p / 2m_g$. From the formula of h , which is given in the statement of the theorem,

$$\frac{L_g h p}{2m_g} = \frac{L_g p}{2m_g} \cdot \frac{\varepsilon}{4\kappa L_g \sqrt{M_g p \max(p, n)}} \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

The latter inequality is true, if we assume that L_g , M_g and κ are greater than 1. Similarly,

$$\frac{11M_g^2 h \sqrt{\mu}}{5m_g} = \frac{11M_g^2 \sqrt{\mu}}{5m_g} \cdot \frac{\varepsilon}{4\kappa L_g \sqrt{M_g \rho \max(\mu, n)}} \leq \frac{11\varepsilon}{20}.$$

Summing up these three inequalities we obtain that, $W_2(\nu_{K,b,b,\pi}) \leq \varepsilon$. $\square$

6. APPENDIX: THE CHOICE OF THE NOISE VARIANCE

In this section we give a little insight on why and how we chose the distribution of the noise vectors in 3. Suppose we have a set of n numbers $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. A random variable X is designed in the following way. We take a uniformly random subset I of A with a fixed size b from the class C_b of all subsets of fixed size b . Afterwards we calculate the value of $\frac{1}{b} \sum_{i \in I} a_i$ and assign it to X . One can easily claim that $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ and therefore if we assume a_i 's to be of the same order, then $\mathbb{E}[X] = O(n)$. Important detail to notice is that it does not depend on b . Unfortunately the order of the variance is not that easy to guess, so we will hereby calculate it.

Proposition 6.1. *Let us define the variance of X by $\text{Var}[X]$. Then*

$$\text{Var}[X] = O\left(\frac{n(n-b)}{b}\right).$$

Proof.

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \frac{1}{C_n^b} \sum_{I \in C_b} \left[\sum_{i \in I} a_i \right]^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \frac{n^2}{b^2 C_n^b} \sum_{I \in C_b} \left[\sum_{i \in I} a_i^2 + \sum_{i \neq j, i, j \in I} 2a_i a_j \right] \\ &- \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \frac{n^2 C_{n-1}^{b-1}}{b^2 C_n^b} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{n^2 C_{n-2}^{b-2}}{b^2 C_n^b} \sum_{i \neq j} a_i a_j - \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i \neq j} a_i a_j \\ &= \frac{n-b}{b} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{b-n}{nb-b} \sum_{i \neq j} a_i a_j. \end{aligned}$$

We know that $\sum_{i=1}^n a_i^2 = O(n)$ and $\sum_{i \neq j} 2a_i a_j = O(n(n-1))$. Therefore the order of the variance is $O(n(n-b)/b)$. $\square$

Conclusion. In this paper we have introduced a new mathematical framework which helps to analyze Stochastic Gradient Descent as a sampling method, where the potential function is strongly convex and has a Lipschitz gradient. Considering the particular case, where the stochastic term is a normal random vector with a diagonal covariance matrix, we have shown a convergence rate of $\tilde{O}(p/\varepsilon^2)$. The

latter is a massive improvement compared to the classic LMC which was giving only $\tilde{O}(np/\varepsilon^2)$. In the case when we also assumed second-order smoothness, we have got $\tilde{O}(p/\varepsilon^2 \wedge \kappa\sqrt{np}/\varepsilon)$ convergence rate.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] D. Bakry, P. Cattiaux, and A. Guillin, "Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes: Lyapunov versus Poincaré", *Journal of Functional Analysis*, **254**, no. 3, 727 – 759 (2008).
- [2] L. Bottou, F. E. Curtis, and J. Nocedal, "Optimization methods for large-scale machine learning", *SIAM Review* **60**, no. 2, 223 – 311 (2018).
- [3] N. Brosse et al., "Sampling from a log-concave distribution with compact support with proximal Langevin Monte Carlo", *Proceedings of Machine Learning Research* **65**, 319 – 342 (2017).
- [4] N. S. Chatterji et al., "On the Theory of Variance Reduction for Stochastic Gradient Monte Carlo", *arXiv preprint arXiv:1802.05431* (2018).
- [5] A. Dalalyan, "Theoretical guarantees for approximate sampling from smooth and log-concave densities", *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* **79**, no. 3, 651 – 676 (2017).
- [6] A. S. Dalalyan and A. G. Karagulyan, "User-friendly guarantees for the Langevin Monte Carlo with inaccurate gradient", *arXiv preprint arXiv:1710.00095* (2017).
- [7] A. Defazio, F. R. Bach, and S. Lacoste-Julien, "SAGA: A Fast Incremental Gradient Method With Support for Non-Strongly Convex Composite Objectives", *CoRR abs/1407.0202* (2014). *arXiv: 1407.0202*.
- [8] A. Durmus and E. Moulines, "High-dimensional Bayesian inference via the Unadjusted Langevin Algorithm", *arXiv preprint arXiv:1605.01559* (2016).
- [9] A. Durmus, E. Moulines, et al., "Nonasymptotic convergence analysis for the unadjusted Langevin algorithm", *The Annals of Applied Probability* **27**, no. 3, 1551 – 1587 (2017).
- [10] S. B. Gelfand and S. K. Mitter, "Recursive stochastic algorithms for global optimization in $\mathbb{R}^d$ ", *SIAM Journal on Control and Optimization* **29**, no. 5, 999 – 1018 (1991).
- [11] S. F. Jarner and E. Hansen, "Geometric ergodicity of Metropolis algorithms", *Stochastic Process. Appl.* **85**, no. 2, 341 – 361 (2000).
- [12] N. S. Pillai, A. M. Stuart, and A. H. Thiery, "Optimal scaling and diffusion limits for the Langevin algorithm in high dimensions", *Ann. Appl. Probab.*, **22**, no. 6, 2320 – 2356 (2012).
- [13] G. O. Roberts and J. S. Rosenthal, "Optimal scaling of discrete approximations to Langevin diffusions", *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, **60**, no. 1, 255 – 268 (1998).
- [14] G. O. Roberts and O. Stramer, "Langevin diffusions and Metropolis-Hastings algorithms", *Methodol. Comput. Appl. Probab.* **4**, no. 4, 337 – 357 (2003).
- [15] G. O. Roberts, R. L. Tweedie, et al., "Exponential convergence of Langevin distributions and their discrete approximations", *Bernoulli* **2**, no. 4, 341 – 363 (1996).
- [16] O. Stramer and R. L. Tweedie, "Langevin-type models. I. Diffusions with given stationary distributions and their discretizations", *Methodol. Comput. Appl. Probab.* **1**, no. 3, 283 – 306 (1999).

Поступила 2 ноября 2018

После доработки 25 декабря 2018

Принята к публикации 24 января 2019

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Г. А. КАРАНЕТЯН, М. А. ХАЧАТУРЯН

Российско-Армянский университет¹

E-mails: gartik_karapetyan@yahoo.com, kharikayev@gmail.com

Аннотация. Работа является продолжением предыдущих работ авторов в теоремах вложения для функций, принадлежащих мультианизотропному пространству Соболева. Основан на предыдущих работ, где изучался случай, когда показатели вложения имеют единицу, в этой работе изучен предельный случай, то есть, когда показатели вложения равны единице.

MSC2010 number: 32Q40.

Ключевые слова: мультианизотропное пространство; интегральное представление; теорема вложения; мультипоказатель; усреднение функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

При доказательстве всех теорем вложения (см. [1] – [7]) выделяются два случая. Первый случай, когда, показатель вложения меньше единицы; второй случай, когда показатель равен единице, то есть имеет место предельный случай. В предыдущих работах при доказательстве теорем вложения для функций из мультианизотропных пространств (см. [8] – [10]) изучали случай, когда показатель вложения меньше единицы. В данной работе доказываются теоремы вложения для мультианизотропных функциональных пространств в предельном случае.

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n -мерное евклидово пространство, а $\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов из $\mathbb{R}^n$. Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $t > 0$ введем следующие обозначения: $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $t^\alpha = (t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_n})$, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ ($k = 1, \dots, n$), $D^\alpha = D^{\alpha_1} \dots D^{\alpha_n}$ есть обобщенная производная по С.Л. Соболеву порядка α .

Для данного набора мультииндексов обозначим через Ω наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки этого набора. Предположим, что многогранник Ω есть вполне правильный многогранник, то есть имеет вершину в начале координат и на всех координатных осях, а внешние нормали всех $(n-1)$ -мерных некоординатных граней имеют положительные компоненты. Через Ω_1^{n-1}

¹Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАН из средств МОН РФ и при поддержке финансирования Государственным комитетом по науке Министерства образования и науки РА совместно с РФФИ (код проекта 18RF-004).

($i = 1, \dots, I_{n-1}$) обозначим $(n-1)$ -мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{M}$, а через $\partial^i \mathfrak{M} = \bigcup_{j=1}^{I_{n-1}} \mathfrak{M}_j^{n-1}$. Также, пусть μ^i ($i = 1, \dots, I_{n-1}$) есть такая внешняя нормаль грани $\mathfrak{M}_j^{n-1}$, что уравнение гиперплоскости, содержащей данную грань, задается формулой $(\alpha, \mu^i) = 1$ ($i = 1, \dots, I_{n-1}$). Обозначим через α^i ($i = 1, \dots, M$) вершины (отличные от нуля) многогранника $\mathfrak{M}$. Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{M}$ обозначим через $W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_p(\mathbb{R}^n) : D^{\alpha^i} f \in L_p(\mathbb{R}^n), i = 1, \dots, M\}$ и назовем мультианизотропным пространством С.Л. Соболева. Заметим, что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|U\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^M \|D^{\alpha^i} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Основным результатом данной работы является следующая предельная теорема о вложении для функций из мультианизотропного пространства $W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.1. Пусть для чисел p и q ($1 < p \leq q < \infty$) и мультииндекса $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$$(1.1) \quad \chi = \min_{i=1, \dots, I_{n-1}} \left((\beta, \mu^i) + |\mu^i| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right) = 1.$$

Тогда $D^\beta W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$, то есть любая функция $f \in W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенную производную $D^\beta f$, принадлежащую классу $L_q(\mathbb{R}^n)$, и для некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$ имеет место неравенство

$$(1.2) \quad \|D^\beta f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \sum_{i=1}^M \|D^{\alpha^i} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Замечание 1.1. В случае, когда β принадлежит некоторой $(n-1)$ -мерной грани, то есть если $\beta \in \partial^i \mathfrak{M}$ (следовательно, $p = q$), то данная теорема получается также с многократным применением теоремы вложения для обобщенно однородных пространств (см. [11]).

2. УСРЕДНЕНИЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\alpha^1, \dots, \alpha^M$ — вершины вполне правильного многогранника $\mathfrak{M}$ (отличные от нуля), $\nu > 0$ есть произвольный параметр, а k — натуральное число. Обозначим через

$$P(\nu, \xi) = (\nu \xi^{\alpha^1})^{2k} + \dots + (\nu \xi^{\alpha^M})^{2k}$$

мультианизотропный многочлен и с помощью $P(\nu, \xi)$ введем следующие функции:

$$\begin{aligned} G_0(\nu, \xi) &= e^{-P(\nu, \xi)}, \\ G_{1,j}(\nu, \xi) &= (-2k) (\nu \xi^{\alpha^j})^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} \quad j = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

а $G_0(t, \nu)$, $G_{1,j}(t, \nu)$ ($j = 1, \dots, M$) есть соответствующие преобразования Фурье для этих функций. Из вышеприведенности многогранника $\mathfrak{M}$ следует, что все вышеуказанные функции принадлежат классу S Шварца — множеству функций, убывающих на бесконечности бесконечно дифференцируемых функций. Свойства функций G_0 , $G_{1,j}$ ($j = 1, \dots, M$) изучены в работах [8]–[10].

В работах [8]–[10] для любой функции f было введено усреднение с мультианизотропным ядром $G_0(t, \nu)$:

$$(2.1) \quad f_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) G_0(t-x, \nu) dt,$$

которое удовлетворяет обычным свойствам усреднения, то есть имеет место

Лемма 2.1. (см. [10]) Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Тогда $f_\nu \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\|f_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ и $\lim_{\nu \rightarrow 0} \|f_\nu - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 0$.

С помощью усреднения (2.1), как и в работе [10], получим интегральное представление функций через мультианизотропные ядра $G_{1,j}$ ($j = 1, \dots, M$).

Теорема 2.1. (см. [10]) Пусть для функции f существуют производные $D^{\alpha^i} f$ ($j = 1, \dots, M$). Тогда почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место представление

$$(2.2) \quad f(x) = f_h(x) + \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha^j} f(t) G_{1,j}(t-x, \nu) dt.$$

Дальнейшее доказательство основной теоремы опирается на интегральное представление (2.2).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОЦЕНКИ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ЯДЕР

В этом параграфе мы докажем теорему вложения, применяя метод оценки мультианизотропных ядер $G_{1,j}(t, \nu)$ ($j = 1, \dots, M$). Будем изучать случай не всех вполне правильных многогранников, а именно специальных многогранников $\mathfrak{M}$. Предположим, что многогранник $\mathfrak{M}$ имеет $(n-1)$ -мерные грани, содержащие точки $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\} \setminus \{\alpha^n\}$ ($i = 1, \dots, n$), где $\alpha^i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$. Внешнюю нормаль данной грани обозначим через μ^i ($i = 1, \dots, n$) и пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — точка пересечения гиперплоскостей, содержащих $(n-1)$ -мерные грани с внешними нормальями $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n$. Пусть $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n$. Как и в работе [9], построим систему n векторов $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $m = (m_1, \dots, m_{n-1}, 0)$, $\sigma = (\sigma_1, 0, \dots, 0)$. Тогда имеют место частные случаи лемм 2.1–2.2 работы [9].

Лемма 3.1. Для любого мультииндекса $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ существует постоянное число $C = C(\mathfrak{M}, N) > 0$, что для любого $\nu : 0 < \nu < 1$ справедливо

неравенств

$$\left| D^\beta \hat{G}_k(t, \nu) \right| \leq C \nu^{-\frac{1}{2} - \max_{i \in \text{supp } \beta} \{ |\mu^i| + (\beta, \mu^i) \}} \cdot \frac{1}{1 + \nu^{-N} (t^{N\gamma} + t^{N\sigma_1} \dots t_1^{N\sigma_1})},$$

где N — любое натуральное число, для которого векторы $N\gamma$, $N\sigma_1, \dots, N\sigma_M$ имеют четные координаты, а индекс $k = 0$ или $k = 1, j$ ($j = 1, \dots, M$).

Лемма 3.2. Существует такое число N_0 , что для любого $N \geq N_0$ существует постоянная $C = C(N)$, что для любого $\nu : 0 < \nu < 1$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dt_1 \dots dt_n}{1 + \nu^{-N} (t^{N\gamma} + t^{N\sigma_1} \dots t_1^{N\sigma_1})} \leq C \nu^{|\mu^1|}.$$

Теорема 3.1. Пусть числа p и q ($1 < p \leq q < \infty$) и мультииндекс β такие, что

$$\chi = \max_{i=1, \dots, n} (|\mu^i| + (\beta, \mu^i)) - |\mu^1| \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = 1.$$

Тогда $D^\beta W_{p,q}^{(1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$ и имеет место неравенство (1.2).

Доказательство. Пусть $1 < p < \infty$, тогда по интегральному представлению (2.1), имеем, что

$$D^\beta f_\varepsilon(x) - D^\beta f_h(x) = \sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha^j} f(t) D^\beta \hat{G}_{1,j}(t - x, \nu) dt.$$

Обозначим $x = (x, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ и, применив неравенство Юнга для x при фиксированном x_n , получим

$$\|D^\beta f_\varepsilon(\cdot, x_n) - D^\beta f_h(\cdot, x_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} \leq$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} \|D^\beta \hat{G}_{1,j}(\cdot, t_n, \nu)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} \|D^{\alpha^j} f(\cdot, x_n + t_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} dt_n,$$

где $r = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Применяя лемму 3.1 и тот факт, что $\chi = 1$, отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \|D^\beta f_\varepsilon(\cdot, x_n) - D^\beta f_h(\cdot, x_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} \nu^{-\max_{i \in \text{supp } \beta} \{ |\mu^i| + (\beta, \mu^i) \}} d\nu \\ & \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dt_1 \dots dt_{n-1}}{\left(1 + \nu^{-N} \left(t_1^{N\gamma_1} \dots t_n^{N\gamma_n} + t_1^{N\sigma_1} \dots t_{n-1}^{N\sigma_{n-1}} + \dots + t_1^{N\sigma_1} \right) \right)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. \times \|D^{\alpha^j} f(\cdot, x_n + t_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} dt_n = \sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} \nu^{-1 - |\mu^1| \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)} d\nu \|D^{\alpha^j} f(\cdot, x_n + t_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} \right) \end{aligned}$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dt_1 \dots dt_{n-1}}{\left(1 + \nu^{-N} \left(t_1^{N\gamma_1} \dots t_n^{N\gamma_n} + t_1^{Nm_1} \dots t_{n-1}^{Nm_{n-1}} + \dots + t_i^{N\sigma_i} \right) \right)^{\frac{1}{p}}} dt_n \right)^{\frac{1}{q}}$$

После преобразования $\tau_1 = \nu^{\mu_1} t_1, \dots, \tau_{n-1} = \nu^{\mu_{n-1}} t_{n-1}$, в первую интегральную формулу

$$\begin{aligned} \|D^{\beta} f_n(\cdot, x_n) - D^{\beta} f_n(\cdot, x_n)\|_{L_{\beta}(\mathbb{R}^{n-1})} &\leq \sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} \nu^{-1} |\sigma^j| \left(1 + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + t_n^{N\gamma_n} + \nu^{N\gamma_n} t_n^{N\gamma_n} + \nu^{N\gamma_n} t_n^{N\gamma_n} + \dots + t_i^{N\sigma_i} \right) d\nu \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}}{\left(1 + \tau_1^{N\gamma_1} \dots \tau_{n-1}^{N\gamma_{n-1}} \nu^{-N\gamma_n} t_n^{N\gamma_n} + \tau_1^{Nm_1} \dots \tau_{n-1}^{Nm_{n-1}} + \dots + t_i^{N\sigma_i} \right)^{\frac{1}{p}}} dt_n \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\|D^{\beta} f(\cdot, x_n + t_n)\|_{L_{\beta}(\mathbb{R}^{n-1})} d\nu. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} \nu^{-1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}}{\left(1 + \tau_1^{N\gamma_1} \dots \tau_{n-1}^{N\gamma_{n-1}} \nu^{-N\gamma_n} t_n^{N\gamma_n} + \tau_1^{Nm_1} \dots \tau_{n-1}^{Nm_{n-1}} + \dots + t_i^{N\sigma_i} \right)^{\frac{1}{p}}} dt_n \right)^{\frac{1}{q}}$$

где $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{q}$.

Обозначим $\left(\frac{d\mu}{d\nu} \right)^{\frac{1}{p}} = \mu$. Тогда $d\mu = -\frac{N\gamma_n}{\nu} |t_n|^{\gamma_n} \nu^{-1 - \frac{N\gamma_n}{p}} d\nu$, и интеграл A примет вид

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{|t_n|^{\frac{1}{p}}} \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}}{\left(1 + \tau_1^{N\gamma_1} \dots \tau_{n-1}^{N\gamma_{n-1}} \mu^{N\gamma_n} + \tau_1^{Nm_1} \dots \tau_{n-1}^{Nm_{n-1}} + \dots + t_i^{N\sigma_i} \right)^{\frac{1}{p}}} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= A_1 + A_2, \end{aligned}$$

где в интеграле A_1 интегрирование по μ проводится от 0 до 1, а в интеграле A_2 — от 1 до ∞ . Для A_1 имеем

$$A_1 \leq \frac{1}{|t_n|^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}}{\left(1 + \tau_1^{N\gamma_1} \dots \tau_{n-1}^{N\gamma_{n-1}} + \dots + \tau_i^{N\sigma_i} \right)^{\frac{1}{p}}} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{|t_n|^{\frac{1}{p}}}.$$

После замены переменных $\tau_{n-1} = \mu^{\frac{1}{N\gamma_{n-1}}} = q_{n-1}$, для A_2 имеем

$$A_2 \leq \frac{1}{|t_n|^{\frac{1}{p}}} K$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\mu^{N\sigma_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \dots d\tau_{n-2} d\eta_{n-1}}{(1 + \tau_1^{N\sigma_1} + \dots + \tau_{n-2}^{N\sigma_{n-2}} + \tau_{n-1}^{N\sigma_{n-1}} + \dots + \tau_1^{N\sigma_1})^{\frac{1}{p}}}} \right)^{\frac{1}{p}} d\mu \leq \frac{C}{|t_n|^{\frac{1}{p}}},$$

так как $\gamma_n > \gamma_{n-1}$. Следовательно, для некоторой постоянной $C > 0$ $A \leq \frac{C}{|t_n|^{\frac{1}{p}}}$, то есть получим

$$\|D^{\beta} f_{\varepsilon}(\cdot, x_n) - D^{\beta} f_h(\cdot, x_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}} \frac{\|D^{\alpha'} f(\cdot, x_n + t_n)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^{n-1})}}{|t_n|^{\frac{1}{p}}} dt_n.$$

В левой части последнего неравенства для каждого слагаемого по x_n применяя неравенство Харди-Литтлвуда (см. [11] стр. 31, § 2.19), имеем

$$\|D^{\beta} f_{\varepsilon}(x) - D^{\beta} f_h(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq$$

(3.1)

$$C \sum_{j=1}^M \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{|t_n|^{\frac{1}{p}}} \|D^{\alpha'} f(\cdot, x_n + t_n)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^{n-1})} dt_n \right)^{\frac{1}{p}} dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sum_{j=1}^M \|D^{\alpha'} f\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $h_0 < 1$ фиксированное число, а $\varepsilon : 0 < \varepsilon < h_0$. Тогда для последовательности $\{f_{\varepsilon}(x)\}$ имеем

$$\begin{aligned} \|D^{\beta} f_{\varepsilon}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} &\leq \|D^{\beta} f_{\varepsilon} - D^{\beta} f_{h_0}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} + \|D^{\beta} f_{h_0}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &C \sum_{j=1}^M \left(\|D^{\alpha'} f\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} + \|D^{\beta} f_{h_0}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \right). \end{aligned}$$

Оценим $\|D^{\beta} f_{h_0}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}$. Из усреднения (2.1) имеем

$$D^{\beta} f_{h_0}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) D^{\beta} G_0(t - x, h_0) dt.$$

Так как $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, то, применяя неравенство Юнга, получим

$$\|D^{\beta} f_{h_0}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|D^{\beta} G_0(\cdot, h_0)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}.$$

Из лемм 3.1, 3.2 для второго множителя получим следующую оценку

$$\|D^{\beta} G_0(\cdot, h_0)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\begin{aligned} &= \sup_{h_0} \sup_{\substack{\mu' \in \mathbb{R}^n \\ \mu'' \in \mathbb{R}^n}} (|\mu'| + |\mu''|) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dt_1 \dots dt_n}{\left((1 + h_0^{-N} (t_1^{N\gamma} + \dots + t_n^{N\mu} + \dots + t_1^{N\sigma_1})) \right)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &= \sup_{h_0} \sup_{\substack{\mu' \in \mathbb{R}^n \\ \mu'' \in \mathbb{R}^n}} (|\mu'| + |\mu''|) + |\mu'| \\ &C \leq C(N, h_0) \end{aligned}$$

при любых $N \geq N_0$. То есть для фиксированного h_0 и $N \geq N_0$ имеем, что

$$(3.2) \quad \|D^j f_{h_0}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}.$$

Из неравенств (3.1) и (3.2) следует, что последовательности $\{h_0\} \cup \{D^j f, f_2\}$ ограничены в $L_q(\mathbb{R}^n)$ при всех достаточно малых h_0 ($0 < h_0 < h_0$). А из любой компактности ограниченного множества следует существование слабой* предельной функции $D^j f \in L_q(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|D^j f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{h_0 \rightarrow 0} \|D^j f_{h_0}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда, еще раз применение неравенства (3.1) и (3.2), получим, что

$$(3.3) \quad \|D^j f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \sum_{k=1}^M \|D^{k+j} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ МЕТОДОМ ТЕОРИИ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

В этом параграфе докажем основную теорему 1.1, применяя метод мультипликаторов. Заметим, что теорема 1.1 обобщает также теорему 3.1. Для этого напомним теорему о мультипликаторах П.И. Лизоркина (см. [13]).

Определение 4.1. (см. [13]) Ограниченная измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция называется (L_p, L_q) -мультипликатором, если существует постоянное число $C = C(p, q)$, что для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции f имеет место неравенство

$$\|\tilde{\mu} f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где $\tilde{f}$ — преобразование Фурье функции f , а f — обратное преобразование Фурье.

Множество (L_p, L_q) -мультипликаторов обозначим через $M_{p,q}^n$.

Теорема 4.1. (П.И. Лизоркина о мультипликаторах, см. [13]) Пусть вектор $k = (k_1, \dots, k_n)$ имеет координаты 0 или 1. Носителем вектора k называем множество $e_k = \{j_1, \dots, j_m\}$ тех индексов j , для которых $k_j = 1$ и пусть функция $\mu(\xi)$ задана на $\mathbb{R}^n$. Если для любого вектора k производная $D^k \mu(\xi)$ существует и непрерывна в любой точке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где $\xi_i \neq 0$ при $i \in e_k$ и подчиняется неравенству

$$(4.1) \quad \left| |\xi_1|^{k_1+1-\frac{1}{p}} \dots |\xi_n|^{k_n+1-\frac{1}{p}} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial \xi_1^{k_1} \dots \partial \xi_n^{k_n}} \mu(\xi) \right| \leq L$$

для некоторой постоянной $L > 0$, тогда $p \in M_q^p$, то есть существует не зависящая от L и f постоянная $C = C(p, q)$, что

$$\left\| \widetilde{\mu(\xi)f(\xi)} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq CL \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p \leq q < \infty$).

Доказательство основной теоремы 1.1. Сперва докажем случай, когда $\beta \in \partial' \mathcal{N}$, то есть для некоторого i_0 ($i_0 = 1, \dots, l_{n-1}$) $(\beta, \mu^{i_0}) = 1$ (следовательно, $q = p$) и $(\beta, \mu^i) \leq 1$ для любого $i = 1, \dots, l_{n-1}$. Из представления (2.2) и из полноты $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $W_p^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ имеем, что почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$D^\beta f_\varepsilon(x) - D^\beta f_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} d\nu$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha^j} f(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\beta - \alpha^j + \alpha} (-2k) (\nu \xi^{\alpha^j})^{2k-1} e^{-((\nu \xi^{\alpha^1})^{2k_1} + \dots + (\nu \xi^{\alpha^M})^{2k_M})} d\xi d\xi =$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{D^{\alpha^j} f(\xi)} \xi^{\beta - \alpha^j + \alpha} (-2k) (\nu \xi^{\alpha^j})^{2k-1} e^{-((\nu \xi^{\alpha^1})^{2k_1} + \dots + (\nu \xi^{\alpha^M})^{2k_M})} d\xi.$$

В последнем интеграле мы применили теорему Фубини. Отсюда имеем, что

$$(4.2) \quad D^\beta f_\varepsilon(x) - D^\beta f_h(x) = \sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{D^{\alpha^j} f(\xi)} F_{j,\varepsilon,h}(\xi) e^{i(\beta, x)} d\xi = \sum_{j=1}^M \widetilde{F_{j,\varepsilon,h}(\xi)} \widetilde{D^{\alpha^j} f(\xi)}.$$

где

$$(4.3) \quad F_{j,\varepsilon,h}(\xi) = \xi^\beta \int_{\mathbb{R}^n} (-2k) (\nu \xi^{\alpha^j})^{2k-1} e^{-((\nu \xi^{\alpha^1})^{2k_1} + \dots + (\nu \xi^{\alpha^M})^{2k_M})} d\nu.$$

Так как $D^{\alpha^j} f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ($j = 1, \dots, M$), то если докажем, что для любого $j = 1, \dots, M$ функция $F_{j,\varepsilon,h}(\xi)$ является (L_p, L_p) -мультипликатором, который со своими производными $D^k F_{j,\varepsilon,h}(\xi)$ равномерно ограничен по ε и h , следовательно, получим, что для некоторой постоянной $C > 0$ имеет место неравенство

$$(4.4) \quad \|D^\beta f_\varepsilon(x) - D^\beta f_h(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=1}^M \|D^{\alpha^j} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Для этого применим теорему П. Н. Лизоркина для функции $F_{j,\varepsilon,h}(\xi)$. Обозначим через $\rho_{\mathcal{N}}(\xi) = (\xi^{2\alpha^1} + \dots + \xi^{2\alpha^M})^{1/2}$ и назовем мультиаксиальным расстоянием. Имеем

$$F_{j,\varepsilon,h}(\xi) = \frac{(-2k)\xi^\beta (\xi^{1^2})^{2k-1}}{(\rho_{\mathcal{N}}(\xi))^{2k}} \int_{\mathbb{R}^n} (\nu \rho_{\mathcal{N}}(\xi))^{2k-1} e^{-\nu^{2k} (\xi^{2k\alpha^1} + \dots + \xi^{2k\alpha^M})} \rho_{\mathcal{N}}(\xi) d\nu = A_1 A_2.$$

Так как произведение (L_p, L_p) -мультипликаторов также является (L_p, L_p) -мультипликатором, докажем, что каждый из множителей есть (L_p, L_p) -мультипликатор, который ограничен по ξ, ε, h . Так, что при $\beta \in \partial^2 \mathfrak{D}$ и $\alpha^j (j = 1, \dots, M)$ — вершины многогранника $\mathfrak{M}$ $A_1 = \frac{\xi^p (\xi^{\alpha^1})^{2k-1}}{(p_{\mathfrak{M}}(\xi))^{2k-1}}$ является (L_p, L_p) -мультипликатором. Докажем и работе [14] Г.Е. Казарин. Оценим второй множитель. Заметим, что выражение $\xi^{2k\alpha^1} + \dots + \xi^{2k\alpha^M}$ эквивалентно выражению $(p_{\mathfrak{M}}(\xi))^{2k}$, то есть для некоторых положительных постоянных a_1 и a_2

$$a_1 (p_{\mathfrak{M}}(\xi))^{2k} \leq \xi^{2k\alpha^1} + \dots + \xi^{2k\alpha^M} \leq a_2 (p_{\mathfrak{M}}(\xi))^{2k}.$$

Следовательно, для второго множителя имеем

$$A_2 = \int_0^h (\nu p_{\mathfrak{M}}(\xi))^{2k-1} e^{-\nu^{2k} (\xi^{2k\alpha^1} + \dots + \xi^{2k\alpha^M})} p_{\mathfrak{M}}(\xi) d\nu \leq \\ \leq \int_0^h (\nu p_{\mathfrak{M}}(\xi))^{2k-1} e^{-a_1 \nu^{2k} p_{\mathfrak{M}}(\xi)^{2k}} p_{\mathfrak{M}}(\xi) d\nu.$$

После замены переменных $p_{\mathfrak{M}}(\xi)\nu = t$ имеем, что

$$A_2 \leq \int_{p_{\mathfrak{M}}(\xi)}^{h p_{\mathfrak{M}}(\xi)} t^{2k-1} e^{-a_1 t^{2k}} dt \leq \int_0^\infty t^{2k-1} e^{-a_1 t^{2k}} dt \leq L.$$

Оценим производные функции $F_{j,\varepsilon,h}(\xi)$. Для этого достаточно оценить производные второго множителя. Пусть вектор $\vec{k} = (1, 0, \dots, 0)$. Имеем

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} A_1 = \\ \xi_1 \int_0^h \nu^{2k-1} (p_{\mathfrak{M}}(\xi))^{2k-1} k \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\xi^{2\alpha^1} + \dots + \xi^{2\alpha^M})}{p_{\mathfrak{M}}^2(\xi)} p_{\mathfrak{M}}(\xi) e^{-\nu^{2k} (\xi^{2k\alpha^1} + \dots + \xi^{2k\alpha^M})} d\nu = \\ \xi_1 \int_0^h \nu^{2k-1} (p_{\mathfrak{M}}(\xi))^{2k} e^{-\nu^{2k} (\xi^{2k\alpha^1} + \dots + \xi^{2k\alpha^M})} (-\nu^{2k}) \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\xi^{2k\alpha^1} + \dots + \xi^{2k\alpha^M}) d\nu = B_1 + B_2.$$

B_1 оценивается аналогично как A_2 , с учетом того, что

$$\left| \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\xi^{2\alpha^1} + \dots + \xi^{2\alpha^M}) \right| \leq C.$$

Для оценки B_2 нужно учесть, что

$$\left| \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\xi^{2k\alpha^1} + \dots + \xi^{2k\alpha^M}) \right| \leq C (p_{\mathfrak{M}}(\xi))^{2k}.$$

Аналогично оцениваются другие случаи вектора $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)$, где $k_j = 0$ или 1 ($j = 1, \dots, n$). Тем самым доказано, что функция $F_{j,z,h}(\xi)$ при $\beta \in \mathcal{O}'\mathcal{M}$ является (L_p, L_p) -мультипликатором, не зависящим от ε и h , следовательно, при $\beta \in \mathcal{O}'\mathcal{M}$ неравенство (4.4) доказано. Пусть теперь $\beta \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{O}'\mathcal{M}$, следовательно, $p < q$. Докажем, что $F_{j,z,h}(\xi) \in M_p^q$, то есть является (L_p, L_q) -мультипликатором. Так как умножение M_p^q мультипликатора на M_p^p мультипликатор является M_p^q мультипликатором, то по теореме П.Ц. Лигоркина достаточно доказать, что A_1 является M_p^q мультипликатором. А для этого достаточно доказать, что $\frac{\xi^2}{\mu_n(\xi)}$ является M_p^q мультипликатором.

Проверим условие (4.1) при $\bar{k} = (0, \dots, 0)$, то есть докажем, что

$$\left| \frac{|\xi_1|^{2\alpha_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \dots |\xi_n|^{2\alpha_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}}{\mu_n(\xi)} \right| \leq L.$$

Пусть условие (1.1) выполняется для некоторого i_0 , то есть вектор $\sigma = \left(\beta_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \dots, \beta_n + \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right)$ принадлежит гиперплоскости с внешней нормалью $\mu^{i_0} : (\sigma, \mu^{i_0}) = 1$ и $(\sigma, \mu^i) \leq 1$ ($i = 1, \dots, I_{n-1}$), следовательно, точка σ принадлежит грани с внешней нормалью μ^{i_0} и $|\xi^\sigma|$ оценивается через $(\sum_i \xi^{2\alpha_i})^{\frac{1}{2}}$, где α^j — вершины $(n-1)$ -мерной грани с внешней нормалью μ^{i_0} . Пусть теперь $\bar{k} \neq (0, 0, \dots, 0)$. Достаточно изучать случай, когда $\bar{k} = (1, 0, \dots, 0)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{|\xi_1|^{2\alpha_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} |\xi_2|^{2\alpha_2 - \frac{1}{p}} \dots |\xi_n|^{2\alpha_n - \frac{1}{p}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\xi^2}{\mu_n(\xi)} \right)}{\mu_n(\xi)} \right| \\ &= \left| \frac{|\xi_1|^{2\alpha_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} |\xi_2|^{2\alpha_2 - \frac{1}{p}} \dots |\xi_n|^{2\alpha_n - \frac{1}{p}} \frac{\partial_1 \xi_1^{2\alpha_1 - 1} \xi_2^{2\alpha_2} \dots \xi_n^{2\alpha_n}}{\mu_n(\xi)} \right. \\ & \quad \left. - |\xi_1|^{2\alpha_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} |\xi_2|^{2\alpha_2 - \frac{1}{p}} \dots |\xi_n|^{2\alpha_n - \frac{1}{p}} \frac{\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\xi^{2\alpha_1} + \dots + \xi^{2\alpha_n})}{2(\mu_n(\xi))^2} \right| \\ & \leq C_1 \left| \frac{|\xi_1|^{2\alpha_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \dots |\xi_n|^{2\alpha_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}}{\mu_n(\xi)} \right| \\ & \quad + C_2 \left| \frac{|\xi_1|^{2\alpha_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \dots |\xi_n|^{2\alpha_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}}{\mu_n(\xi)} \right| \cdot \left| \frac{\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\xi^{2\alpha_1} + \dots + \xi^{2\alpha_n})}{\mu_n^2(\xi)} \right| \leq L. \end{aligned}$$

Остальные производные оцениваются аналогичным образом. Следовательно, для любых p, q , удовлетворяющие соотношению (1.1), имеет место неравенство

$$\|D^\beta f_\varepsilon - D^\beta f_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=1}^M \|D^{\alpha_j} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для любых ε , $h \pm \varepsilon < \varepsilon < h + 1$, то есть получили неравенство (3.1). Сделанные рассуждения проводятся как и при доказательстве теоремы 3.1.

Abstract. The present paper is a continuation of the author's previous papers devoted to the study of embedding theorems for functions belonging to Sobolev multi-anisotropic spaces. In the previous papers were considered the cases when the embedding index is less than one, while the present paper concerns the limiting case, that is, when the embedding index is equal to one.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Л. Соболев, "Об одной теореме функционального анализа", *Мат. сборник*, 4(36):3, 391–397 (1938).
- [2] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, ЛГУ, Новосибирск (1962).
- [3] С. М. Никольский, Об одной задаче С. Л. Соболева, *Сиб. мат. журнал*, 3, no. 6, 845–857 (1962).
- [4] K. T. Smith, "Inequalities for formally positive integro-differential forms", *Ill. Amer. Math.*, 368–370 (1961).
- [5] Н. П. Ильин, "Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к проблеме продолжения функций класса $W_p^1(\Omega)$ ", *Сиб. Мат. Журнал*, 8, no. 3, 573–586 (1967).
- [6] О. Н. Бесов, "О компактности в неметризуемом пространстве", *Докл. АН СССР*, 173(115), no. 4, 585–590 (1967).
- [7] Ю. П. Рокоткин, "Интегральные представления дифференцируемых функций", *Сиб. мат. журнал*, 12, no. 2, 420–432 (1971).
- [8] G. A. Karapetyan, "Integral representation of functions and embedding theorems for multi-anisotropic spaces for the three-dimensional case", *Russian Mathematical Journal*, 155:1, 7, no. 4, 19–30 (2016).
- [9] Г. А. Карапетян, "Интегральное представление и теоремы вложения для n -мерных мультианнизотропных пространств с одной вершинной анизотропностью", *Сиб. мат. журнал*, 58, no. 3, 445–460 (2017).
- [10] G. A. Karapetyan, M. K. Arakelian, "Embedding theorems for general multi-anisotropic spaces", *Math. Zametki*, 104, no. 3, 422–438 (2018).
- [11] О. В. Бесов, Н. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, М., Наука, (1975).
- [12] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и дифференцирование*, Наука (1977).
- [13] П. И. Лисоркин, " (L_p, L_q) мультипликаторы интегралов Фурье", *ДАН СССР*, 152, 808–811 (1963).
- [14] Г. Г. Катарян, "Операторы постоянной связи и оценка связи через представленных в формально гиперэллиптические операторы", *Anal. Math.*, 3, 263–289 (1977).

Поступила 15 июля 2018

После доработки 23 октября 2018

Принята к публикации 20 декабря 2018

ЯВЛЕНИЕ ГИББСА ДЛЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ВЕЙВЛЕТА СТРОМБЕРГА

В. Г. МИКАЕЛЯН

Ереванский Государственный Университет, Ереван, Армения

E-mail: mik.vazgen@gmail.com

Аннотация. Явление Гиббса исследуется для кусочно-линейного вейвлета Стромберга. Доказано, что Явление Гиббса для частичных сумм ряда Фурье-Стромберга имеет место во всех точках $\mathbb{R}$ и функции Гиббса почти всюду равна $\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$.

MSC2010 number: 42C10.

Ключевые слова: явление Гиббса; функция Гиббса; кусочно-линейный вейвлет; ряд Фурье-Стромберга.

1. ВВЕДЕНИЕ

Явлением Гиббса называется определенная особенность поведения частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции. Оно впервые обнаружено Г. Уилбрейамом (1848 г.) и значительно позже переткрыто Дж. Гиббсом (1899 г.). Оно заключается в следующем: n -ая частичная сумма ряда Фурье по тригонометрической системе имеет большие колебания вблизи точки скачка функции. При увеличении n колебание не затухает, но достигает конечного предела.

Для каждого неотрицательного целого числа m Стромберг [1] построил кусочно полиномиальный вейвлет $f^{(m)}$, который на каждом отрезке полиномальности является полиномом с действительными коэффициентами, степени не выше $m+1$, и ортонормированная система $f_{i,j}^{(m)}(x) = 2^{i/2} f^{(m)}(2^i x - j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$ является безусловным базисом в $H^p(\mathbb{R})$, при $p > \frac{1}{2}$. В настоящей работе исследуется явление Гиббса для системы Стромберга в случае $m = 0$. Напомним определение этой системы для $m = 0$.

Пусть $A_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \frac{1}{3}(-N)$ и $A_1 = A_0 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Точки множества A_0 разбивают действительную ось $\mathbb{R}$ на интервалы $\{I_\sigma\}_{\sigma \in A_0}$, где σ левая концевая точка интервала I_σ . Обозначим через S_0 подпространство пространства $L_2(\mathbb{R})$, состоящее из таких функций $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, которые линейны на каждом интервале

$t_0, \sigma \in A_0$. Аналогично определяется подпространство S_1 , если вместо A_0 рассмотреть A_1 . Очевидно, что $S_0 \subset S_1$ и, если $f(x) \in S_0$, то $f(x-1) \in S_1$. Функции из S_1 отличаются от функций S_0 только тем, что функции из S_0 должны быть линейными на $[0, 1]$, а функции из S_1 могут быть линейными только на каждом из интервалов $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$. Поэтому S_0 имеет размерность 1 и S_1 . Следовательно существует функция $f^{(0)} \in L_2(\mathbb{R})$, с точностью до знака определяемая из следующих соотношений:

1. $f^{(0)} \in S_1$,
2. $f^{(0)} \perp S_0$, т. е. $\int f^{(0)}(x) f(x) dx = 0$ для любого $f \in S_0$,
3. $\|f^{(0)}\|_2 = 1$.

Для любой пары $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ положим

$$(1.1) \quad f_{i,j}(x) = 2^{\frac{i}{2}} f^{(0)}(2^i x - j).$$

Система $\{f_{i,j}(x)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ была введена Стрэмбергом [1]. Им же получено, что $\{f_{i,j}(x)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ полная ортонормированная в $L_2(\mathbb{R})$ система и что она является безусловным базисом в $H^p(\mathbb{R})$ при любом $p > \frac{1}{2}$.

Пусть t_0 точка разрыва первого рода функции $q \in L(\mathbb{R})$, причем $|q(t_0-) - q(t_0+)| = 2d > 0$, и пусть последовательность функций $\{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ сходится к $q(t)$ в каждой точке некоторой окрестности точки t_0 , при $i, j \rightarrow +\infty$. Функцию

$$G(t_0, q, \{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}) = G(t_0) = \lim_{i,j \rightarrow +\infty} \frac{1}{d} \left| q_{i,j}(t) - \frac{q(t_0+) + q(t_0-)}{2} \right|$$

назовем функцией Гиббса для последовательности $\{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$. Если $G(t_0) > 1$, то скажем, что для последовательности $\{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ в точке t_0 имеет место явление Гиббса.

Хорошо известно (см. [2], стр. 123-126), что для частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе имеет место явление Гиббса: функция $G(t_0)$ не зависит от t_0 и равна постоянной Гиббса

$$G(t_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.17.$$

Для чистых сумм ряда Фурье-Франклина явление Гиббса установлено в работе [3]. Для частичных сумм ряда Фурье-Франклина функция G почти всюду является постоянной.

Для частичных сумм ряда Фурье-Франкляна (общий случай) явление Гиббса установлено в работе [4], где доказано, что явление Гиббса для частичных

сумм ряда Фурье-Франклита имеет место почти во всех точках $[0, 1]$ и найдены оценки сверху и снизу для этой функции. Для частичных сумм ряда Фурье-Уолша наличие явления Гиббса установлено в работе [5]. Для частичных сумм ряда Фурье-Уолша функция G не является постоянной. В работе [6] найдены точные оценки сверху и снизу для этой функции. Подобные вопросы исследованы также в работах [7]-[8].

Пусть

$$S_{i_0, j_0}(f, x) = \sum_{i=-\infty}^{i_0-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{i,j} f_{i,j}(x) + \sum_{j=-\infty}^{j_0} a_{i_0,j} f_{i_0,j}(x), \quad i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$$

частичная сумма ряда Фурье-Стромберга, а $G(t_0) = G(t_0, f, \{S_{i_0, j_0}(f, \cdot)\}_{i_0, j_0=-\infty}^{+\infty})$ функция Гиббса. Сформулируем основные результаты:

Теорема 1.1. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ имеет неустраняемый разрыв в этой точке, тогда

$$1 + \frac{48 - 28\sqrt{3} + 8\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{27} \leq G(t_0, f) \leq \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3},$$

причем $G(t_0, f) = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}$, для почти всех $t_0 \in \mathbb{R}$.

Из теоремы 1.1 следует, что для частичных сумм ряда Фурье-Стромберга явление Гиббса имеет место везде и функция Гиббса постоянна почти всюду.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Пусть $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$. Обозначим

$$K_{i_0, j_0}(x, t) = \sum_{i=-\infty}^{i_0-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{i,j}(x) f_{i,j}(t) + \sum_{j=-\infty}^{j_0} f_{i_0,j}(x) f_{i_0,j}(t).$$

Из (1.1) следует, что для любых $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$

$$K_{i_0, j_0}(x, t) = 2^{i_0} K_{0,0}(2^{i_0} x - j_0, 2^{i_0} t - j_0).$$

Легко можно установить, что для любого ограниченного $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$(2.1) \quad S_{i_0, j_0}(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{i_0, j_0}(x, t) f(t) dt.$$

Пусть $n \in A_1$. Обозначим через $\varphi_n(t)$ ту кусочно-линейную функцию с узлами из A_1 , для которой $\varphi_n(n) = 1$ и $\varphi_n(l) = 0$ для любых $l \in A_1, l \neq n$.

Очевидно, что $K_{0,0}(x, t)$ кусочно-линейная функция и по x и по t , с узлами из A_1 . Зафиксируем $k \in A_1$ и для любого $t \in A_1$ положим $a_t = K_{0,0}(k, t)$.

Лемма 2.1. Пусть $x_0 \in \mathbb{Z}$. Тогда

- 1) если $x_0 \geq 1$ и $m \leq x_0 < m+1$, где $m \in A_1$, $m \geq 1$, то справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(k, t) dt = \begin{cases} 1 + \alpha_m, & \text{если } k \leq m \\ \alpha_m, & \text{если } k > m, \end{cases}$$

$$\text{где } \alpha_m = \frac{a_{m+1}}{6} - \frac{a_m}{3} + a_m(x_0 - m) + \frac{a_{m+1} - a_m}{2}(x_0 - m)^2,$$

- 2) если $x_0 < 1$ и $m \leq x_0 < m + \frac{1}{2}$, где $m \in A_1$, $m < 1$, то справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{x_0} K_{0,0}(k, t) dt = \begin{cases} 1 + \beta_m, & \text{если } k \leq m \\ \beta_m, & \text{если } k > m. \end{cases}$$

$$\text{где } \beta_m = -\frac{a_{m+1}}{12} - \frac{a_m}{6} + a_m(x_0 - m) + (a_{m+1} - a_m)(x_0 - m)^2.$$

Доказательство. Обозначим

$$\psi_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (-\infty, m) \\ m+1-t, & \text{если } t \in [m, m+1] \\ 0, & \text{если } t \in (m+1, +\infty). \end{cases}$$

Из (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_0} K_{0,0}(k, t) dt &= \int_{-\infty}^{x_0} K_{0,0}(k, t) \psi_1(t) dt = \int_{-\infty}^{m+1} K_{0,0}(k, t) (m+1-t) dt + \\ &+ \int_m^{x_0} K_{0,0}(k, t) dt = \psi_1(k) + \alpha_m = \begin{cases} 1 + \alpha_m, & \text{если } k \leq m \\ \alpha_m, & \text{если } k > m. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассматривая ψ_2 вместо функции ψ_1 получим доказательство пункта 2, где

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (-\infty, m) \\ 2m+1-2t, & \text{если } t \in \left[m, m+\frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{если } t \in \left(m+\frac{1}{2}, +\infty\right). \end{cases}$$

Лемма 2.2. Имеют место следующие утверждения

1) Если $k > 1$ и $n \in A_1$, то

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}-2)^{k-2n+1}, & \text{если } n \leq 1 \\ \sqrt{3} (-2-\sqrt{3})^{n-k} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}-2)^{n+k-1}, & \text{если } 1 \leq n \leq k \\ \sqrt{3} (\sqrt{3}-2)^{n-k} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}-2)^{n+k-2}, & \text{если } n \geq k. \end{cases}$$

2) Если $k = 1$ и $n \in A_1$, то

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}-2)^{-2n+1}, & \text{если } n \leq 1 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}-2)^{n-1}, & \text{если } n \geq 1. \end{cases}$$

3) Если $k < 1$ и $n \in A_1$, то

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}-2)^{n-2k+1}, & \text{если } n \geq 1 \\ 2\sqrt{3} (-2-\sqrt{3})^{-2n+2k} - \frac{2}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}-2)^{-2n-2k+1}, & \text{если } k \leq n \leq 1 \\ 2\sqrt{3} (\sqrt{3}-2)^{-2n+2k} - \frac{2}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}-2)^{-2n-2k+1}, & \text{если } n \leq k. \end{cases}$$

Доказательство. Из (2.1) следует, что для любого $n \in A_1$

$$(2.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K_{0,0}(k,t) \varphi_n(t) dt = \varphi_n(k).$$

Докажем утверждение 1). Пусть $k > 1$. Если $n \neq k$ и $n > 1$, то

$$0 = \varphi_n(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{0,0}(k,t) \varphi_n(t) dt = \frac{a_{n-1}}{6} + \frac{2a_n}{3} + \frac{a_{n+1}}{6},$$

т.е. $a_{n-1} + 4a_n + a_{n+1} = 0$. Полагая $n = k$ в (2.2), получим $a_{k-1} + 4a_k + a_{k+1} = 0$.

А если $n < 1$ то, справедливы равенства

$$0 = \varphi_n(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{0,0}(k,t) \varphi_n(t) dt = \frac{a_{n-1}}{12} + \frac{a_n}{3} + \frac{a_{n+1}}{12},$$

т.е. $a_{n-1} + 4a_n + a_{n+1} = 0$. Подставляя $n = 1$ в (2.2), будем иметь

$$0 = \varphi_1(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{0,0}(k,t) \varphi_1(t) dt = \frac{a_{\frac{1}{2}}}{12} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{6}$$

т.е. $a_{\frac{1}{2}} + 6a_1 + 2a_2 = 0$.

Поскольку $-2 - \sqrt{3}$ и $\sqrt{3} - 2$ являются корнями квадратного уравнения $t^2 + 4t + 1 = 0$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0$, следовательно

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} - 2)^{k-2n+1}, & \text{если } n \leq 1, \\ \sqrt{3} (-2 - \sqrt{3})^{n-k} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} - 2)^{n+k-2}, & \text{если } 1 \leq n \leq k, \\ \sqrt{3} (\sqrt{3} - 2)^{n-k} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} - 2)^{n+k-2}, & \text{если } n > k. \end{cases}$$

Тем же способом мы получим доказательства пунктов 2) и 3).

Следствие 2.1. Для $n \in A_1$ имеют место следующие соотношения

- 1) $0 < a_k < 2\sqrt{3}$,
- 2) $a_n a_{n+1} < 0$, если $n < 1$,
- 3) $a_n a_{n+1} < 0$, если $n \geq 1$,
- 4) $|a_n| = (2 + \sqrt{3}) |a_{n+1}|$, если $n \geq k$ и $n \geq 1$,
- 5) $|a_n| \geq (2 + \sqrt{3}) |a_{n+1}|$, если $n \geq k$ и $n < 1$,
- 6) $|a_n| \geq 2 |a_{n-1}|$, если $n \leq k$ и $n > 1$,
- 7) $|a_n| = (2 + \sqrt{3}) |a_{n-1}|$, если $n \leq k$ и $n \leq 1$.

Следствие 2.2. Пусть i и j последовательные точки из A_1 . Тогда

- 1) $|a_j| \geq 2 |a_i|$, если $i < j \leq k$,
- 2) $|a_i| \geq 2 |a_j|$, если $k \leq i < j$.

Лемма 2.3. Обозначим через y_k и z_k ближайшие слева и справа от 0 корни функции $K_{0,0}(k, t)$. Тогда

$$y_k = \begin{cases} k-1 + \frac{\sqrt{3}-2}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{3}-2)^{2k-4} + 3}{(\sqrt{3}-2)^{2k-3} - 3}, & \text{если } k > 1, \\ k + \frac{1}{2(\sqrt{3}-3)}, & \text{если } k \leq 1, \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} k + \frac{1}{3-\sqrt{3}}, & \text{если } k \geq 1, \\ k + \frac{1}{2(3-\sqrt{3})} \cdot \frac{3 - (\sqrt{3}-2)^{-4k+4}}{3 + (\sqrt{3}-2)^{-4k+3}}, & \text{если } k < 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $k > 1$. Из следствия 2.1 следует, что y_k точка пересечения с осью Ox отрезка с концами $(k-1, a_{k-1})$ и (k, a_k) , а z_k точка пересечения с осью Ox отрезка с концами (k, a_k) и $(k+1, a_{k+1})$, т.е.

$$y_k = k-1 + \frac{a_{k-1}}{a_{k-1} - a_k} = k-1 + \frac{\sqrt{3}-2}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{3}-2)^{2k-4} + 3}{(\sqrt{3}-2)^{2k-3} - 3}$$

$$x_k = k + \frac{a_k}{a_k - a_{k+1}} = k + \frac{1}{3 - \sqrt{3}}.$$

Пусть $k = 1$. Из следствия 2.1 следует, что y_1 точка пересечения с осью Ox отрезка с концами $\left(\frac{1}{2}, a_{\frac{1}{2}}\right)$ и $(1, a_1)$, а z_1 точка пересечения с осью Ox отрезка с концами $(1, a_1)$ и $(2, a_2)$, т.е.

$$y_1 = 1 + \frac{a_1}{2(a_{\frac{1}{2}} - a_1)} = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{3} - 3)}$$

$$z_1 = 1 + \frac{a_1}{a_1 - a_2} = 1 + \frac{1}{3 - \sqrt{3}}.$$

Пусть $k < 1$. Из следствия 2.1 следует, что y_k точка пересечения с осью Ox отрезка с концами $\left(k - \frac{1}{2}, a_{k-\frac{1}{2}}\right)$ и (k, a_k) , а z_k точка пересечения с осью Ox отрезка с концами (k, a_k) и $\left(k + \frac{1}{2}, a_{k+\frac{1}{2}}\right)$, т.е.

$$y_k = k + \frac{a_k}{2(a_{k-\frac{1}{2}} - a_k)} = k - \frac{1}{2(3 - \sqrt{3})}$$

$$z_k = k + \frac{a_k}{2(a_k - a_{k+\frac{1}{2}})} = k + \frac{1}{2(3 - \sqrt{3})} \cdot \frac{3 - (\sqrt{3} - 2)^{-4k+1}}{3 + (\sqrt{3} - 2)^{-4k+3}}.$$

Лемма 2.4. *Справедливы равенства*

$$1) \sup \left\{ \int_{-\infty}^x K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3},$$

$$2) \inf \left\{ \int_{-\infty}^x K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, x \in \mathbb{R} \right\} = -\frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$$

Доказательство. Из следствия 2.1 следует, что

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^x K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, x \in \mathbb{R} \right\} = \sup \left\{ \int_{-\infty}^{x_k} K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1 \right\}$$

$$\inf \left\{ \int_{-\infty}^x K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, x \in \mathbb{R} \right\} = \inf \left\{ \int_{-\infty}^{y_k} K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1 \right\}.$$

1) Если $k \geq 1$, то из лемм 2.1 – 2.3 будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(k, t) dt = \frac{3\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})^{2k+1}}{6(\sqrt{3} - 1)}.$$

Поскольку $(2 - \sqrt{3})^{2k+1} \leq 2 - \sqrt{3}$, при $k \geq 1$, следовательно

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, k \geq 1 \right\} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}.$$

Если $k < 1$, то из лемм 1, 2 и 3 будем иметь

$$\int_{-\infty}^{k_2} K_{0,0}(k, t) dt = 1 + \frac{2 - \sqrt{3}}{6(\sqrt{3} - 1)} \frac{9 + (2 - \sqrt{3})^{2k+6}}{3 - (2 - \sqrt{3})^{2k+4}}.$$

Поскольку функция $g(x) = \frac{9+x^2}{3-x}$ возрастающая в интервале $(0, 2 - \sqrt{3}]$, следовательно

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, k < 1 \right\} = 1 + \frac{2 - \sqrt{3}}{6(\sqrt{3} - 1)} g(2 - \sqrt{3}) = \frac{14 - 6\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, x \in \mathbb{R} \right\} = \max \left\{ \frac{2 + \sqrt{3}}{3}, \frac{14 - 6\sqrt{3}}{2} \right\} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

2) Если $k > 1$, то из лемм 2.1 – 2.3 будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(k, t) dt = \frac{\sqrt{3} - 2}{6(\sqrt{3} - 1)} \frac{9 + (2 - \sqrt{3})^{2k+6}}{3 + (2 - \sqrt{3})^{2k+2}}.$$

Поскольку функция $f(x) = \frac{9+x^2}{3+x}$ убывающая в интервале $[0, 2 - \sqrt{3}]$, то

$$\inf \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, k > 1 \right\} = \frac{\sqrt{3} - 2}{6(\sqrt{3} - 1)} f(0) = -\frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$$

Если $k \leq 1$, то из лемм 1, 2 и 3 будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(k, t) dt = \frac{\sqrt{3} - 2}{2(\sqrt{3} - 1)} \left(1 - \frac{(2 - \sqrt{3})^{-2k+4}}{3} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\inf \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(k, t) dt : k \in A_1, k \leq 1 \right\} = -\frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$$

Тогда обратим

$$\inf \left\{ \int_{-\infty}^x K_{0,0}(k,t) dt : k \in A_1, x \in \mathbb{R} \right\} = -\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Лемма 2.5. Пусть $0 \leq \varepsilon < \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ и $x \in \mathbb{R}$. Если $|x - z_1| \leq \varepsilon$, то

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^x K_{0,0}(1,t) dt \geq \frac{2+\sqrt{3}}{3} - 2\varepsilon^2(\sqrt{3}-1).$$

Доказательство. Замечая, что

$$1 < 1 + \frac{1}{3-\sqrt{3}} - \varepsilon = z_1 - \varepsilon \leq x \leq z_1 + \varepsilon < 1 + \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2,$$

из лемм 2.1 и 2.2 получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2+\sqrt{3}}{3} - 2\varepsilon^2(\sqrt{3}-1) - \int_{-\infty}^x K_{0,0}(1,t) dt = \\ & = 2(\sqrt{3}-1)(x - z_1 - \varepsilon)(x - z_1 + \varepsilon) \leq 0. \end{aligned}$$

Замечание 2.1. Неравенство (2.3) имеет место также когда $\varepsilon \in \left(\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}, \frac{1}{3-\sqrt{3}} \right)$ и $x \in [z_1 - \varepsilon, 2]$.

Лемма 2.6. Если $\delta \in \left(0, \frac{1}{3-\sqrt{3}} \right)$ и $x \in [2, z_2 - \delta]$, то

$$\int_{-\infty}^x K_{0,0}(1,t) dt \geq \frac{8-3\sqrt{3}}{3} + \delta^2(\sqrt{3}-1)^3$$

Доказательство. Так как $z_2 - \delta < 3$, то $x \in [2, 3]$. Следовательно, из лемм 2.1 и 2.2 получаем

$$\int_{-\infty}^x K_{0,0}(1,t) dt - \frac{8-3\sqrt{3}}{3} - \delta^2(\sqrt{3}-1)^3 = 2(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})(x - z_2 - \delta)(x - z_2 + \delta) \geq$$

Лемма 2.7. Если $x \in \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right), 2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right]$, то

$$\int_{-\infty}^x K_{0,0}(1,t) dt \geq 1 + \frac{24-14\sqrt{3}+4\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{27}.$$

Доказательство. Из замечания 2.1 получаем

$$\int_{-\infty}^x K_{0,0}(t, t) dt \geq \frac{2 + \sqrt{3}}{3} - 2 \left(\sqrt{3} - 1 \right) \left(\frac{4}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{9 - 3\sqrt{3}} \right)^2 - 1 + \frac{6 - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{\pi},$$

для любого $x \in \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right), 2 \right)$. С другой стороны, из леммы 2.6 имеем, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x K_{0,0}(t, t) dt &\geq \frac{8 - 3\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{1}{9 - 3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{6}} \right)^2 (\sqrt{3} - 1)^3 \\ &\quad - 1 + \frac{24 - 14\sqrt{3} + 4\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{27}, \end{aligned}$$

для любого $x \in \left[2, 2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right), 3 \right)$.

Лемма 2.8. Если $x \in \mathbb{R}$, $n \in A_1$ и $\delta > 0$ таковы, что $\int_{-\infty}^x K_{0,0}(u, t) dt > 1 + \delta$,

то $|x - n| < 2 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$.

Доказательство. Для любого $l \in A_1$ обозначим через S_l площадь треугольника с вершинами (l, a_l) и ближайшими к l слева и справа к нулям функции $K_{0,0}(n, t)$. Обозначим через i , ту точку из A_1 , для которой x принадлежит полуоткрытому слева интервалу, концами которой являются ближайшие от i слева и справа нули функции $K_{0,0}(n, t)$. Допустим, что $x \leq n$. Из следствий 2.1 и 2.2 следует

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x K_{0,0}(n, t) dt &\leq \sum_{\substack{i \leq x \\ i \in A_1}} S_i \leq \sum_{\substack{i \leq x \\ i \in A_1}} |a_i| \leq |a_i| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \\ &= 2|a_i| \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{n-i}} |a_n| \leq \frac{4\sqrt{3}}{2^{n-i}}. \end{aligned}$$

Следовательно $n - i < \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{1 + \delta}$. Теперь допустим, что $x > n$. В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x K_{0,0}(n, t) dt &= 1 - \int_x^\infty K_{0,0}(n, t) dt \leq 1 + \sum_{\substack{i \geq x \\ i \in A_1}} S_i \leq 1 + \sum_{\substack{i \geq x \\ i \in A_1}} |a_i| \\ &\leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) |a_i| = 1 + 2|a_i| \leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^{i-n}} |a_n| \leq 1 + \frac{4\sqrt{3}}{2^{i-n}}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $2^{i-n} < \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$, поэтому $i - n < \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$.

Поскольку $\log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta} > \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{1+\delta}$, следовательно, если $\int_{-\infty}^{\infty} K_{0,0}(u, t) dt > 1 + \delta$,

то $j - n < \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$. Таким образом, получаем $|i - n| \leq |i - j| + |j - n| < 2 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$.

Обозначим

$$D_{i,j} = \frac{1}{2^i} \mathbb{Z} \cup \left(\left(-\frac{1}{2^{i+1}} \right) \mathbb{N} + \left\{ \frac{j+1}{2^i} \right\} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 2.9. Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$. Если существуют последовательности $i_n \in \mathbb{N}$, $j_n \in \mathbb{Z}$ и $s_n \in D_{i_n, j_n}$, такие, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} i_n = +\infty$ и $S_{i_n, j_n}(h_x, s_n) > 1 + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$h_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \leq x, \\ 0, & \text{если } t > x, \end{cases}$$

то $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = x$.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} S_{i_n, j_n}(h_x, s_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{i_n, j_n}(s_n, t) h_x(t) dt = \int_{-\infty}^x K_{i_n, j_n}(s_n, t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^x 2^{i_n} K_{0,0}(2^{i_n} s_n - j_n, 2^{i_n} t - j_n) dt = \int_{-\infty}^{2^{i_n} x - j_n} K_{0,0}(2^{i_n} s_n - j_n, t) dt, \end{aligned}$$

т.е. мы имеем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{2^{i_n} x - j_n} K_{0,0}(2^{i_n} s_n - j_n, t) dt > 1 + \delta.$$

Из леммы 2.6 вытекает $|2^{i_n} x - j_n - (2^{i_n} s_n - j_n)| < 2 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$, т.е.

$$|s_n - x| < \frac{2 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}}{2^{i_n}},$$

следовательно $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = x$.

Лемма 2.10. Пусть $\delta \in \left(\frac{6\sqrt{3}-10}{3(\sqrt{3}-1)}, \frac{\sqrt{3}-1}{3} \right)$, $i \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{Z}$. Если $E_{i,j}(\delta)$ множество тех $x \in \mathbb{R}$, для которых существует $k \in D_{i,j}$, что $S_{i,j}(h_x, k) >$

$1 + \delta$, то

$$\mu \left(\mathbb{R} \setminus \bigcap_{l=1}^{+\infty} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} E_{i,j}(\delta) \right) = 0.$$

Доказательство. Для любого $\delta \in \left(\frac{6\sqrt{3}-11}{3(\sqrt{3}-1)}, \frac{\sqrt{3}-1}{3} \right)$ структура $\mathbb{R}$ $\left(\emptyset, \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \right)$, для которого $\delta = \frac{\sqrt{3}-1}{3} - 2\varepsilon^2(\sqrt{3}-1)$. Пусть

$$x \in \left[\frac{z_1 - \varepsilon + j}{2^i}, \frac{z_1 + \varepsilon + j}{2^i} \right] = A_{i,j}(\delta),$$

где $i, j \in \mathbb{Z}$. Так как $|2^i x - j - z_1| < \varepsilon$, то по лемме 5 следует, что

$$\begin{aligned} S_{i,j} \left(h_x, \frac{j+1}{2^i} \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{i,j} \left(\frac{j+1}{2^i}, t \right) h_x(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{j}{2^i}} K_{i,j} \left(\frac{j+1}{2^i}, t \right) dt = \int_{-\infty}^{\frac{j}{2^i}} 2^i K_{0,0}(1, 2^i t - j) dt \\ &= \int_{-\infty}^{2^i \frac{j}{2^i} - j} K_{0,0}(1, t) dt \geq \frac{2+\sqrt{3}}{3} - 2\varepsilon^2(\sqrt{3}-1) = 1 + \delta, \end{aligned}$$

поэтому $A_{i,j}(\delta) \subset E_{i,j}(\delta)$.

Заметим, что

$$\mu \left(\mathbb{R} \setminus \bigcap_{l=1}^{+\infty} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} E_{i,j}(\delta) \right) \leq \mu \left(\mathbb{R} \setminus \bigcap_{l=1}^{+\infty} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j}(\delta) \right) = \mu \left(\bigcup_{l=1}^{+\infty} \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j}(\delta) \right) \right).$$

значит достаточно доказать, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\mu \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j}(\delta) \right) = 0.$$

Последовательность $\{2^n x\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq l$ всюду плотна в $[0, 1]$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$ ([9], лем. 4.3, 1.6). Поскольку $(z_1 - 1) \in (0, 1)$, следовательно для почти всех $x \in \mathbb{R}$, существует $i \geq l$ для которой $|(2^i x) - (z_1 - 1)| < \varepsilon$, т.е. $x \in A_{i, [2^i x] - 1}$, что и требовалось доказать.

Следствие 2.3. $\lim_{l \rightarrow +\infty} S_{i,j}(h_x, t) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$, для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Из первого пункта леммы 2.4 следует, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} S_{i,j}(h_x, t) \leq \frac{2 + \sqrt{3}}{3},$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Из леммы 2.10 следует, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ существуют последовательности $i_n, j_n \in \mathbb{N}$ и $k_n \in D_{i_n, j_n}$, такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = +\infty$ и $S_{i_n, j_n}(h_x, k_n) > 1 + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, следовательно из леммы 2.9 мы получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = x$, поэтому

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} S_{i,j}(h_x, t) > \frac{2 + \sqrt{3}}{3},$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, для почти всех $x \in \mathbb{R}$ мы имеем

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} S_{i,j}(h_x, t) = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}.$$

Замечание 2.2. Тем же способом можно получить, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} S_n(h_x, t) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4},$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.11. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} E_{i,j}(c) = \mathbb{R}$, где $c = \frac{24 - 14\sqrt{3} + 4\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{27}$.

Доказательство. Из леммы 2.10 следует, что достаточно доказать равенство

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_{i,j}(c) = \mathbb{R}$, для любого $l \in \mathbb{N}$, где

$$B_{i,j}(c) = \left[\frac{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + j}{2}, \frac{2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + j}{2} \right].$$

Поскольку левый конец отрезка $B_{l+1, 2j+3}(c)$ совпадает с правым концом отрезка $B_{l,j}(c)$, следовательно

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_{i,j}(c) &= \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_{l,j}(c) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_{l+1,j}(c) \right) \supset \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_{l,j}(c) \right) \\ &\cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_{l+1, 2j+3}(c) \right) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (B_{l,j}(c) \cup B_{l+1, 2j+3}(c)) \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + j}{2^{j+1}}, \frac{2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + 2j + 3}{2^{j+1}} \right|$$

Из неравенства

$$\frac{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + j + 1}{2^j} < \frac{2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + 2j + 3}{2^{j+1}}$$

вытекает, что $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} D_{i,j}(x) = \mathbb{R}$.

Следствие 2.4. $\lim_{t \rightarrow +\infty} S_{i,j}(h_x, t) \geq 1 + \frac{24 - 14\sqrt{3} + 4\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{27}$, для любого $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Из леммы 2.11 следует, что для любого $x \in \mathbb{R}$ существуют последовательности $i_n, j_n \in \mathbb{N}$ и $k_n \in D_{i_n, j_n}$, такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = +\infty$ и $S_{i_n, j_n}(h_x, k_n) > 1 + \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, из леммы 2.9 мы получим, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_n = x$, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_{i,j}(h_x, t) \geq 1 + \frac{24 - 14\sqrt{3} + 4\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{27},$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.12. Если $i, j \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$, то $\int_{-\infty}^{+\infty} |K_{i,j}(t, s)| ds \leq 4\sqrt{3}$.

Доказательство. Пусть $2^i t - j \in (n_1, n_2]$, где n_1 и n_2 положительные точки из A_1 . Тогда из следствия 1 следует что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |K_{i,j}(t, s)| ds &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^i |K_{0,0}(2^i t - j, 2^i s - j)| ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |K_{0,0}(2^i t - j, s)| ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n \in A_1} \varphi_n(2^i t - j) K_{0,0}(n, s) \right| ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{n_1}(2^i t - j) K_{0,0}(n_1, s) \\ &+ \varphi_{n_2}(2^i t - j) K_{0,0}(n_2, s)| ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (|K_{0,0}(n_1, s)| + |K_{0,0}(n_2, s)|) ds \leq 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Лемма 2.13. Пусть $x \in \mathbb{R}$, а g ограниченная функция на $\mathbb{R}$ и непрерывна в точке x . Тогда $\lim_{t \rightarrow +\infty} S_{i,j}(g, t) = g(x)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon' > 0$. Поскольку g непрерывна в точке x , то существует $\delta > 0$, для которой $|g(s) - g(x)| < \varepsilon'$, когда $|s - x| < \delta$. Мы также имеем, что существует $M > 0$, для которой $|g(s)| \leq M$, для любого $s \in \mathbb{R}$. Поскольку

$$S_{i,j}(g, t) = \int_{-\infty}^{x-\delta} K_{i,j}(t, s) g(s) ds + \int_{x-\delta}^{x+\delta} K_{i,j}(t, s) ds = 1,$$

то из леммы 2.9 следует, что

$$\begin{aligned} |S_{i,j}(g, t) - g(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x-\delta} |K_{i,j}(t, s)| |g(s) - g(x)| ds = \int_{|s-x|<\delta} |K_{i,j}(t, s)| |g(s) - g(x)| ds \\ &+ \int_{|s-x|\geq\delta} |K_{i,j}(t, s)| |g(s) - g(x)| ds \leq \varepsilon' \int_{|s-x|<\delta} |K_{i,j}(t, s)| ds \\ &+ 2M \cdot \int_{|s-x|\geq\delta} |K_{i,j}(t, s)| ds \leq 4\sqrt{3}\varepsilon' + 2M \int_{|s-x|\geq\delta} |K_{i,j}(t, s)|. \end{aligned}$$

Таким образом достаточно доказать, что $\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{|s-x|\geq\delta} |K_{i,j}(t, s)| ds = 0$.

Докажем, что $\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |K_{i,j}(t, s)| ds = 0$. Пусть $2^i t - j \in (b_{i,j}, c_{i,j}]$, где $b_{i,j}$ и $c_{i,j}$ последовательные точки из A_1 . Обозначим через $d_{i,j}$ ту точку из A_1 , для которой $2^i(x - \delta) - j$ принадлежит полуоткрытому слева интервалу, концами которого являются ближайшие от $d_{i,j}$ слева и справа нули функции $K_{0,0}(c_{i,j}, t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x-\delta} |K_{i,j}(t, s)| ds &= \int_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j} |K_{0,0}(2^i t - j, s)| ds = \int_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j} \left| \sum_{n \in A_1} \varphi_n(2^i t - j) K_{0,0}(n, s) \right| ds \\ &= \int_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j} \{ \varphi_{b_{i,j}}(2^i t - j) K_{0,0}(b_{i,j}, s) + \varphi_{c_{i,j}}(2^i t - j) K_{0,0}(c_{i,j}, s) \} ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j} (|K_{0,0}(b_{i,j}, s)| + |K_{0,0}(c_{i,j}, s)|) ds. \end{aligned}$$

Пусть $|t - x| < \frac{\delta}{2}$. В этом случае

$$(2^i t - j) - 2^i(x - \delta) - j = 2^i(t - x + \delta) > 2^{i-1}\delta,$$

т.е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} ((2't - j) - 2'(x - \delta) - j) = +\infty$, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (b_{i,j} - d_{i,j}) = +\infty \text{ и } \lim_{t \rightarrow +\infty} (c_{i,j} - d_{i,j}) = +\infty.$$

Из следствия 2.1 вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{2'(x-\delta)-j} |K_{0,0}(b_{i,j}, s)| ds \leq \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \leq d_{i,j}}} S_m \leq \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \leq d_{i,j}}} |a_m| \leq 2\|a\|_1 \leq \frac{4\sqrt{2}}{2^{j_0} - 2^{j_1}}.$$

Поэтому из $\lim_{t \rightarrow +\infty} (b_{i,j} - d_{i,j}) = +\infty$ следует, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \int_{-\infty}^{2'(x-\delta)-j} |K_{0,0}(b_{i,j}, s)| ds = 0.$$

Аналогично получим, что $\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \int_{-\infty}^{2'(x-\delta)-j} |K_{0,0}(c_{i,j}, s)| ds = 0$, т.е.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \int_{-\infty}^{2'(x-\delta)-j} |K_{i,j}(t, s)| ds = 0.$$

Тем же методом можно доказать, что $\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \int_{-\infty}^{2'(x-\delta)-j} |K_{i,j}(t, s)| ds = 0$.

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим: $f(t_0+) = d_1$ и $f(t_0-) = d_2$. Очевидно, что существует $\varepsilon > 0$, для которой следующая функция ограничена на $\mathbb{R}$:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - h_{t_0}(t)(d_2 - d_1), & t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{t_0\}, \\ d_1, & t = t_0, \\ 0, & t \notin (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Поскольку функция g непрерывна в точке t_0 , то из леммы 2.13 получаем

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \rightarrow +\infty}} S_{i,j}(g, t) = g(t_0) = d_1.$$

Следовательно

$$\overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \rightarrow +\infty}} S_{i,j}(f, t) = \begin{cases} d_1 + (d_2 - d_1) \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \rightarrow +\infty}} S_{i,j}(h_{t_0}, t), & \text{если } d_2 > d_1 \\ d_1 + (d_2 - d_1) \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \rightarrow +\infty}} S_{i,j}(h_{t_0}, t), & \text{если } d_2 < d_1. \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} S_{i,j}(f, t) = \begin{cases} d_1 + (d_2 - d_1) \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} S_{i,j}(h_{t_0}, t), & \text{если } d_2 < d_1 \\ d_1 + (d_2 - d_1) \underline{\lim}_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} S_{i,j}(h_{t_0}, t), & \text{если } d_2 > d_1. \end{cases}$$

Из определения функции Гиббса, из следствия 2.4 и из замечания 2.2 следует, что для точек возле $t_0 \in \mathbb{R}$

$$G(t_0) = \max \left\{ 2 \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} S_n(h_{t_0}, t) - 1, -2 \underline{\lim}_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} S_n(h_{t_0}, t) + 1 \right\} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Из леммы 2.4 следует, что $G(t_0) \leq \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}$, для любого $t_0 \in \mathbb{R}$, а из следствия 2.3 следует, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$

$$G(t_0) \geq 2c - 1 = 1 + \frac{48 - 28\sqrt{3} + 8\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{27}.$$

В заключение выражаю благодарность академику Г. Г. Геворкяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. In this paper we study the Gibbs phenomenon for piecewise linear Stromberg wavelet. We prove that the Gibbs phenomenon for partial sums of Fourier-Stromberg series occurs at all points of $\mathbb{R}$ and the Gibbs function is almost everywhere equal to $\frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. O. Stromberg, "A modified Franklin system and higher-order Spline systems on $\mathbb{R}$ " as unconditional bases for Hardy spaces", Conf. on Harmonic Analyses in honor of A. Zygmund, II, 475 – 494 (1983).
- [2] Н. К. Барн, Тригонометрические ряды, Физматгиз, Москва (1961).
- [3] О. Г. Саргсян, "О сходимости и явлении Гиббса рядов Фрэнклина", Изв. НАН Армении, математика, 32, no. 1, 61 – 84 (1996).
- [4] В. Г. Микаелян, "Явление Гиббса для общей системы Фрэнклина", Изв. НАН Армении, математика, 52, no. 4, 51 – 71 (2017).
- [5] А. М. Зубякин, "Явление Гиббса для мультипликативных систем типа Уолша и типа Виланкина-Джафарли", Сиб. мат. журн., 12, no. 1, 147 – 157 (1971).
- [6] Л. А. Балажан, В. А. Скворцов, "Константы Гиббса для частичных сумм рядов Фурье-Уолша и их $(C, 1)$ -средних", Тр. МАН СССР, 164, 37 – 48 (1983).
- [7] С. Карапика, "Gibbs phenomenon in wavelet analysis", Results. Math., 34, 336 – 341 (1998).
- [8] S. E. Kelly, "Gibbs Phenomenon for Wavelets", Appl. Comput. Harmonic Anal., 3, 72 – 81 (1996).
- [9] Л. Кейнсер, "Равномерное распределение последовательностей", Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. (1985).

Поступила 2 мая 2018

После доработки 25 августа 2018

Принята к публикации 15 сентября 2018

О ПОДМНОЖЕСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ, ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ НАБОРОМ ПОПАРНЫХ СУММ ИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Д. САРГИСИ

Ереванский государственный университет

E-mail: davit.sargisyan.1993@gmail.com

Аннотация. Через F_3^n обозначены n -мерное линейное пространство над конечным полем F_3 . Для подмножества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ в F_3^n обозначим через $A \pm A$ множество сумм пар различных элементов A . Показано, что A однозначно определяется набором $A \pm A$, если для любого $B \subseteq F_3^n + \{0\} = \{B\}$ и $A \pm A = B \pm B$ следует, что $A = B$. В качестве контрпримера мы приводим N_1 для которых набор $A \in F_3^{N_1}$, состоящий из N элементов однозначно определяется подмножеством $A \pm A$.

MSC2010 number: 11B75.

Ключевые слова: пары различных элементов; единственность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть F_3^n – n -мерное линейное пространство над конечным полем F_3 . Набор элементов C из F_3^n записывается как $C = \{c_1^{(m_1)}, c_2^{(m_2)}, \dots, c_N^{(m_N)}\}$, где $c_i \in F_3^n, m_i > 0$. Крайность элемента $s \in F_3^n$ в C обозначается через

$$\text{count}_C(s) = \sum_{1 \leq i \leq N} m_i.$$

Отметим, что не исключается возможность $c_i = c_j, i \neq j$. Мощность набора C обозначается через $|C| = m_1 + m_2 + \dots + m_N$. Наборы A и B в F_3^n считаются равными тогда и только тогда, когда для всякого $s \in F_3^n$ имеет место равенство $\text{count}_A(s) = \text{count}_B(s)$. Основные операции над наборами понимаются следующим образом. Для любого $s \in F_3^n$

$$\text{count}_{A \cup B}(s) = \text{count}_A(s) + \text{count}_B(s)$$

$$\text{count}_{A \cap B}(s) = \min\{\text{count}_A(s), \text{count}_B(s)\}$$

$$\text{count}_{A \setminus B}(s) = \max\{\text{count}_A(s) - \text{count}_B(s), 0\}$$

Мы используем запись $C \subseteq F_3^n$ как для наборов, так и для подмножеств в F_3^n ; каждая ситуация будет ясна из контекста. Определим $\text{set}(C)$ как

$$\text{set}(C) = \{s \mid s \in F_3^n, \text{count}_C(s) > 0\}$$

Пусть A, B - подмножества в F_3^n . Сумма A и B определяется как

$$A + B = \{(a+b)^{[i]} \mid a \in A, b \in B, a \neq b\}$$

Отметим, что каждая пара различных элементов в $A \times A$ рассматривается только один раз, и по определению $A + A$ - это набор сумм пар различных элементов A . Если $|A| = 1$, то $A + A = \emptyset$. Сходным образом, для набора $C = \{c_1^{[m_1]}, c_2^{[m_2]}, \dots, c_N^{[m_N]}\}$ в F_3^n определяется

$$C + C = \{(c_i + c_j)^{[m_i + m_j]} \mid 1 \leq i < j \leq N\} \cup \{2c_i^{[m_i]} \mid i = 1, \dots, N\}$$

Для элемента $c \in F_3^n$ положим

$$c + C = \{c^{[1]}\} + C = \{(c + c_i)^{[m_i + 1]} \mid 1 \leq i \leq N\}$$

Пример 1.1. Пусть $A, B \subseteq F_3^3 = F_3$ и $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$. Тогда $A + B = \{0^{[1]}, 1^{[1]}, 2^{[1]}\}$, $A + A = \{1^{[1]}\}$, $B + B = \{0^{[1]}\}$. Для $C = \{0^{[3]}, 1^{[3]}\}$ имеем $C + C = \{0^{[3]}, 1^{[3]}, 2^{[3]}\}$.

Замечание 1.1. В выражениях, содержащих наборы или множества, типа $A + A \cup B + B$, операция $+$ имеет более высокий приоритет чем $\cup$ и $\cap$. Для непересекающихся подмножеств A, B в F_3^n верна следующая формула:

$$(A \cup B) + (A \cup B) = A + A \cup A + B + B + B$$

Для наборов C, D, E в F_3^n из условия $C \cup D = C \cup E$ следует, что $D = E$.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ - подмножество в F_3^n . A однозначно определяется набором $A + A$, если для всякого $B \subseteq F_3^n$, такого что $A + A = B + B$ (очевидно $|A| = |B|$) следует что $A = B$. В настоящей статье мы определяем значения параметра N , для которых все подмножества $A \subseteq F_3^n$ с N элементами однозначно определяются набором $A + A$. Аналогичная задача для натуральных чисел предложена Л. Мизером в [1] и содержится в [2] как задача 15.12 на странице page 106. Случай алгебраически замкнутого поля характеристики 0 решен Селфриджем и Страуссом в [3]. Рассмотренный нами случай также решает проблему над конечными полями характеристики 3. Обзор результатов по этой тематике можно найти в [4].

Теорема 2.1. Для любого $N, 1 \leq N \leq 3^n - 1$, в F_3^n найдутся два разных подмножества A и B , такие что $|A| = |B| = N$ и $A + A = B + B$, тогда и только тогда, когда $N \not\equiv 0 \pmod{3}$ и $N \neq 3^n - 1$.

Предложение 2.1. Если $1 \leq N \leq 3^n - 1$ и $N \not\equiv 0 \pmod{3}$, $N \neq 3^n - 1$, то найдутся различные подмножества $A, B \subseteq F_3^n$, такие что $|A| = |B| = N$ и $A + A = B + B$.

Доказательство. Приведем индукцию по n . Если $n = 1$, тогда $N = 1$ и для $A = \{0\}, B = \{1\}$ имеем $A + A = B + B = \emptyset$. Пусть теперь $n > 1$ и утверждение верно для всех меньших значений. Ввиду $N \neq 0$ рассмотрим следующие случаи.

Случай 1: $N < 3^{n-1} - 1$.

Согласно индуктивному предположению найдутся два разных подмножества $A, B \subseteq F_3^{n-1}$, такие что $|A| = |B| = N$ и $A + A = B + B$. Определим

$$C = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A\}, \quad D = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B\}.$$

Очевидно, что $|C| = |D| = N$ и $C + C = D + D$.

Случай 2: $N = 3^{n-1} - 1$.

Пусть L - это подпространство в F_3^n , состоящее из всех векторов с последней нулевой координатой. Положим $a = (0, 0, \dots, 0, 0), b = (1, 0, \dots, 0, 0), c = (2, 0, \dots, 0, 0), M = L \setminus \{a, b, c\}, d = (2, 2, \dots, 2, 1), e = (1, 2, \dots, 2, 1)$. Рассмотрим множества $A = \{c, d\} \cup M$ и $B = \{a, e\} \cup M$. Имеем $|A| = |B| = 3^{n-1} - 1 = N$. Для $m \in M$ оба $b + m$ и $c + m \in M$. Следовательно, $c \in M \Rightarrow M \cap c + M = a + (c + M) = a + M$. Подобным образом, из $b + M = M$ получим $d + M = (c + b) + M = c + (b + M) = c + M$. Поэтому, $c + d = a \neq e, c \in M \Rightarrow c + M = a \neq M, d + M = e + M$, и $A + A = B + B$. Например, при $n = 3$

$$A = \{(2, 2, 1), (2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 0), (1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 2, 0)\},$$

$$B = \{(1, 2, 1), (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 0), (1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 2, 0)\}.$$

Случай 3: $3^{n-1} < N < 2 \cdot 3^{n-1} - 1$.

Пусть $M = N - 3^{n-1}, 0 < M < 3^{n-1} - 1$. Пусть L - подмножество в F_3^n , состоящее из всех векторов с последней координатой, равной 2. Согласно случаю 1 найдутся подмножества $C, D \subseteq F_3^n$, такие что $C \neq D, |C| = |D| = M, C + C = D + D$ и $x_n = 0$ для всех $(x_1, \dots, x_n) \in C \cup D$. Положим $A = L \cup C, B = L \cup D$. Тогда $A \neq B$ и $|A| = |B| = N$. Для $c = (c_1, \dots, c_n) \in C$ имеем $c_n = 0$, поэтому $c + L = L$ и $C + L = \{c + L \mid c \in C\}$. Аналогично $D + L = \{c + L \mid c \in D\}$ и $C + L = D + L$. Так как $A + A = C + C \cup L + L \cup C + L$ и $B + B = D + D \cup L + L \cup D + L$, получаем $A + A = B + B$.

Случай 4: $N = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$.

Положим $M = 3^{n-1} - 1$. Пусть L - подмножество в F_3^n , состоящее из всех векторов с последней координатой, равной 2. Согласно случаю 2 найдутся подмножества $A = \{d\} \cup A_1, B = \{e\} \cup B_1 \subseteq F_3^n$, такие что $A \neq B, |A| = |B| = M, d = (d_1, \dots, d_{n-1}, 1), e = (e_1, \dots, e_{n-1}, 1), x_n = 0$ для всех $(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \cup B_1$, и $A + A = B + B$. Положим $C = L \cup A, D = L \cup B$. Тогда $C \neq D$ и $|C| = |D| = N$.

Заметим также, что $d + L = e + L$. Для $a = (a_1, \dots, a_n) \in A_1$ получаем $a + L = L$ и $A_1 + L = \{e + L \mid e \in L\}$. Положим образем, $B_1 + L = \{e^{[M-1]} \mid e \in L\}$ и $A_1 + L = B_1 + L$. Теперь $C + C = D + D$ непосредственно следует из $A + A = B + B$, $d + L = e + L$, и $A_1 + L = B_1 + L$.

Случай 5: $2 \cdot 3^{n-1} < N < 3^n - 1$.

Пусть L — это подмножество в F_3^n , состоящее из всех векторов с последней ненулевой координатой. Согласно случаю 1 найдутся подмножества $C, D \subseteq F_3^n$, такие что $C \neq D$, $|C| = |D| = N - 2 \cdot 3^{n-1}$, $x_n = 0$ для всех $(x_1, \dots, x_n) \in C \cup D$ и $C + C = D + D$. Положим $A = L \cup C$, $B = L \cup D$. Тогда $A \neq B$, $|A| = |B| = N$ и $A + A = B + B$ как и в предыдущих двух случаях. $\square$

Лемма 2.1. Если A, B — два разных набора в F_3 , такие что $|A| = |B| = N$ и $A + A = B + B$, тогда $N \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Доказательство. Обозначим $n_i = \text{count}_A(i)$, $m_i = \text{count}_B(i)$, $i \in F_3$. Из соображений симметрии следует рассмотреть следующие случаи:

Случай 1: $|\text{set}(A)| = |\text{set}(B)| = 1$.

Если $\text{set}(A) = \text{set}(B)$ то $A = B$, что приводит к противоречию. Поэтому $\text{set}(A) \neq \text{set}(B)$. Пусть, к примеру, $A = \{0^{[N]}\}$, $B = \{1^{[N]}\}$. При $N = 1$ все очевидно, в противном случае $A + A \neq B + B$ и получается противоречие.

Случай 2: $|\text{set}(A)| = 1$, $|\text{set}(B)| \geq 2$.

Получим $|\text{set}(A + A)| = 1$. При $N = 2$ все очевидно, в противном случае $|\text{set}(B + B)| \geq 2$ и потому $A + A \neq B + B$.

Случай 3: $|\text{set}(A)| = |\text{set}(B)| = 2$.

Из $|\text{set}(A)| = |\text{set}(B)| = 2$ получаем, что $n_i = 0$ только для одного $i \in \{0, 1, 2\}$, и $m_j = 0$ только для одного $j \in \{0, 1, 2\}$. Пусть $i = j$. Без потери общности можем предположить, что $i = j = 0$, то есть $A = \{1^{[n_1]}, 2^{[n_2]}\}$, $B = \{1^{[m_1]}, 2^{[m_2]}\}$. Из $A + A = B + B$ получается $\binom{n_1}{2} = \binom{m_1}{2}$ и $\binom{n_2}{2} = \binom{m_2}{2}$ (вычисляя кратности 1 и 2 в $A + A$ и $B + B$). Тогда $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, и $A = B$ — противоречие. Следовательно $i \neq j$. Без потери общности можем предположить, что $i = 2$ и $j = 0$:

$$A = \{0^{[n_0]}, 1^{[n_1]}\}, B = \{1^{[m_1]}, 2^{[m_2]}\}$$

Вычисляя кратности 2 в $A + A$ и $B + B$ получаем $\binom{n_1}{2} = \binom{m_2}{2}$ и $n_1 = m_1 = n$. Из $|A| = |B| = N$ следует $n_0 = m_2 = m$. Поэтому,

$$A = \{0^{[m]}, 1^{[n]}\}, B = \{1^{[n]}, 2^{[m]}\}$$

Приравняв кратности 1 в $A + A$ и $B + B$ получаем $mn = \binom{n}{2}$. Отсюда $m = 2n + 1$ и $N = 3n + 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Случай 4: $|set(A)| = 3, |set(B)| = 2$.

Без потери общности можем предположить, что $m_0 = 0$ и, тогда, $A = \{0^{[m_0]}, 1^{[m_1]}, 2^{[m_2]}\}$, $B = \{1^{[n_1]}, 2^{[n_2]}\}$ и

$$(2.1) \quad m_0 + n_1 + n_2 = m_1 + m_2$$

Приравнявая кратности 1 и 2 в $A + A$ и $B + B$ получим

$$(2.2) \quad \binom{m_2}{2} + m_0 m_1 = \binom{m_2}{2}, \quad \binom{n_1}{2} + m_0 m_2 = \binom{m_1}{2}.$$

Покажем, что $(m_0 + n_1 + n_2) \not\equiv 0 \pmod{3}$. Из (2.2) следует $m_2 > n_2$ и $m_1 > n_1$; поэтому, $m_2 = n_2 + y$, $m_1 = n_1 + x$, где x, y - натуральные числа.

Ввиду (2.1) $m_0 = x + y$. Подставим выражения для m_1, m_1 , и m_2 в (2.2) и (??):

$$\begin{cases} n_1 x + n_1 y - n_2 y = \binom{y}{2} \\ n_2 x + n_2 y - n_1 x = \binom{x}{2} \end{cases}$$

Решив систему уравнений получаем:

$$2n_1 = y - \frac{2yx + y^2}{x^2 + yx + y^2}, \quad 2n_2 = x - \frac{2yx + x^2}{x^2 + yx + y^2}.$$

Из натуральности $x, y \in \mathbb{N}$ следует, что $x - 2n_2 \in (0, 2]$. Так как $x - 2n_2$ - целое, то $x = 2n_2 + 1$. Аналогично, $y = 2n_1 + 1$. Из $m_0 = x + y$ получаем, что $m_0 + n_1 + n_2 = 3(n_1 + n_2) + 2 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Случай 5: $|set(A)| = |set(B)| = 3$.

Имеем $n_i > 0$ и $m_i > 0, i = 0, 1, 2$. Докажем, что для $C = A \setminus \{0^{[1]}, 1^{[1]}, 2^{[1]}\} = \{0^{[m_0-1]}, 1^{[m_1-1]}, 2^{[m_2-1]}\}$ и $D = B \setminus \{0^{[1]}, 1^{[1]}, 2^{[1]}\} = \{0^{[m_0-1]}, 1^{[m_1-1]}, 2^{[m_2-1]}\}$ верно $C + C = D + D$. Из

$$0 + C = \{0^{[m_0-1]}, 1^{[m_1-1]}, 2^{[m_2-1]}\}$$

$$1 + C = \{0^{[m_0-1]}, 1^{[m_0-1]}, 2^{[m_1-1]}\}$$

$$2 + C = \{0^{[n_1-1]}, 1^{[n_2-1]}, 2^{[m_0-1]}\}$$

следует $0 + C \cup 1 + C \cup 2 + C = \{0^{[N-3]}, 1^{[N-3]}, 2^{[N-3]}\}$. Набор $0 + C \cup 1 + C \cup 2 + C$ не зависит от элементов C , а зависит только от мощности C . Ввиду $A = C \cup \{0^{[1]}, 1^{[1]}, 2^{[1]}\}$, получаем

$$\begin{aligned} A + A &= C + C \cup 0 + C \cup 1 + C \cup 2 + C \cup \{0^{[1]}, 1^{[1]}, 2^{[1]}\} + \{0^{[1]}, 1^{[1]}, 2^{[1]}\} \\ &= C + C \cup \{0^{[N-3]}, 1^{[N-3]}, 2^{[N-3]}\} \cup \{0^{[1]}, 1^{[1]}, 2^{[1]}\} = C + C \cup \{0^{[N-2]}, 1^{[N-2]}, 2^{[N-2]}\} \end{aligned}$$

Аналогично, $B + B = D + D \cup \{0^{[N-2]}, 1^{[N-2]}, 2^{[N-2]}\}$. Теперь уже $C + C = D + D$ следует из $A + A = B + B$.

Таким образом, мы всегда можем предположить, без потери общности, что либо

$|\text{set}(A)| < 3$, либо $|\text{set}(B)| < 3$; ибо в противном случае положив $k = \min\{n_0, n_1, n_2, m_0, m_1, m_2\}$ рассмотрим выборы $C = A \setminus \{0^{[k]}, 1^{[k]}, 2^{[k]}\}$, $D = B \setminus \{0^{[k]}, 1^{[k]}, 2^{[k]}\}$, для которых $C + C = D + D$, $C \neq D$, либо $|\text{set}(C)| < 3$, либо $|\text{set}(D)| < 3$, и $|C| = |D| = N \bmod 3$. Так, что этот случай сводится к рассмотренным выше. $\square$

Лемма 2.2. Пусть A, B - разные наборы в F_3^n , $n > 1$, такие что $|A| = |B| = N$ и $A + A = B + B$. Найдутся разные наборы $A_L, B_L \subset F_3^{n-1}$, такие что $|A_L| = |B_L| = N$ и $A_L + A_L = B_L + B_L$.

Доказательство. Положим $A = \{a_1^{[n_1]}, a_2^{[n_2]}, \dots, a_M^{[m_M]}\}$, $B = \{b_1^{[n_1]}, b_2^{[n_2]}, \dots, b_N^{[n_N]}\}$. Пусть L какое-либо 1-мерное подпространство в F_3^n . Фактор-пространство F_3^n/L изоморфно F_3^{n-1} . Имея это ввиду, построим два набора в F_3^{n-1} заменяя каждый элемент в A и B на содержащий его смежный класс по подпространству L :

$$A_L = \{(a_1 + L)^{[n_1]}, (a_2 + L)^{[n_2]}, \dots, (a_M + L)^{[m_M]}\}$$

$$B_L = \{(b_1 + L)^{[n_1]}, (b_2 + L)^{[n_2]}, \dots, (b_N + L)^{[n_N]}\}$$

Из $A + A = B + B$ следует, что $A_L + A_L = B_L + B_L$. Для завершения доказательства покажем, что L может быть выбрано так, чтобы $A_L \neq B_L$.

Положим $C = A \cap B$, $D = A \setminus C$, $E = B \setminus C$, тогда $D \cap E = \emptyset$ и $|D| = |E|$. В самом деле, для любого $s \in F_3^n$

$$\text{count}_D(s) = \max\{\text{count}_A(s) - \text{count}_C(s), 0\}$$

$$\text{count}_E(s) = \max\{\text{count}_B(s) - \text{count}_C(s), 0\}$$

Из $C = A \cap B$ следует $\text{count}_C(s) \leq \text{count}_A(s)$ и $\text{count}_C(s) \leq \text{count}_B(s)$. Далее,

$$\text{count}_D(s) = \text{count}_A(s) - \text{count}_C(s)$$

$$\text{count}_E(s) = \text{count}_B(s) - \text{count}_C(s)$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} |D| &= \sum_{s \in F_3^n} \text{count}_D(s) = \sum_{s \in F_3^n} \text{count}_A(s) - \text{count}_C(s) \\ &= \sum_{s \in F_3^n} \text{count}_A(s) - \sum_{s \in F_3^n} \text{count}_C(s) = |A| - |C| \end{aligned}$$

Аналогично, $|E| = |B| - |C|$ и $|D| = |E|$ следует из $|A| = |B|$.

Из соображений симметрии следует рассмотреть следующие случаи:

Случай 1: $|\text{set}(D)| = |\text{set}(E)| = 1$.

То есть, $A = \{d^{[N]}\} \cup C$, $B = \{e^{[N]}\} \cup C$, и $d \neq e$. Выберем L таким образом, чтобы d и e принадлежали бы разным смежным классам по L . Ясно, что A_L и B_L будут разными.

Случай 2: $|set(D)| = 2, |set(E)| = 1$.

Пусть $D = \{d_1^{[p]}, d_2^{[p]}\}$ и $E = \{e^{[k]}\}$, $k = p+1$. Рассмотрим $L = \{0, d_1 - d_2, -d_1 + d_2\}$. Выберем $d_1 + L = d_2 + L = H = \{d_1, d_2, -d_1 - d_2\}$. Предположим, что $A_L = B_L$. Это означает, что $D_L \cup C_L = E_L \cup C_L$, что имеет место $D_L = E_L$ и $e \in L = d_1 + L = H$. Ввиду $D \cap E = \emptyset$, получим $e = -d_1 - d_2$. Тогда, если $d_1 \neq 0$ и $d_2 \neq 0$, то для $L_1 = \{0, -d_1 - d_2, d_1 + d_2\}$ получим $d_1 + L_1 \neq e \in L_1$ и $A_{L_1} \neq B_{L_1}$. В противном случае, если один из d_1, d_2 равен нулю, скажем $d_1 = 0$, получим $e = -d_2$. Выбрав $e \in \mathbb{F}_q \setminus \{0, d_2, -d_2\}$, и положим $L_2 = \{0, e, -e\}$, получим $d_1 + L_2 \neq e \in L_2$ и $A_{L_2} \neq B_{L_2}$.

Случай 3: $|set(D)| = |set(E)| = 2$.

Пусть $D = \{d_1^{[m]}, d_2^{[n]}\}$, $E = \{e_1^{[p]}, e_2^{[k]}\}$, $m+n=p+k$, и $L = \{0, d_1 - d_2, -d_1 + d_2\}$. Тогда $d_1 + L = d_2 + L = H = \{d_1, d_2, -d_1 - d_2\}$. Если $A_L = B_L$, то $e_1 + L = e_2 + L = H$. Тогда все d_1, d_2, e_1, e_2 лежат в H , и, ввиду $D \cap E = \emptyset$, что противоречит тому, что $|H| = 3$. Поэтому $A_L \neq B_L$.

Случай 4: $|set(D)| > 2$.

Пусть $|set(D)| = P > 2$ и $D = \{d_1^{[k_1]}, d_2^{[k_2]}, \dots, d_{P-1}^{[k_{P-1}]}\}$, $d_i \neq d_j, 1 \leq i, j \leq P$. Положим $L_1 = \{0, d_1 - d_2, -d_1 + d_2\}$. Предположим, что $A_{L_1} = B_{L_1}$. Из $d_1 + L_1 = d_2 + L_1 = H = \{d_1, d_2, -d_1 - d_2\}$ и $A_{L_1} = B_{L_1}$ следует, что найдется $e_1 \in E$ такое, что $e_1 + L_1 = H$. Из $D \cap E = \emptyset$ следует $e_1 = -d_1 - d_2$ и $-d_1 - d_2 \notin D$. Так как $d_i + L_1 \neq H, i > 2$, и $e + L_1 \neq H, e \in E, e \neq e_1$, получим $count_E(e_1) = k_1 + k_2$. Аналогично, если для $L_2 = \{0, d_1 - d_3, -d_1 + d_3\}$ имеет место $A_{L_2} = B_{L_2}$, тогда $e_2 = -d_1 - d_3 \in E$ и $count_E(e_2) = k_1 + k_3$. Продолжая получим $L_i = \{0, d_1 - d_i, -d_1 + d_i\}, L_2 = \{0, d_1 - d_3, -d_1 + d_3\}, \dots, L_{P-1} = \{0, d_1 - d_{P-1}, -d_1 + d_{P-1}\}$, для которых $e_1 = -d_1 - d_2, e_2 = -d_1 - d_3, \dots, e_{P-1} = -d_1 - d_{P-1}$ и $count_E(e_1) = k_1 + k_2, count_E(e_2) = k_1 + k_3, \dots, count_E(e_{P-1}) = k_1 + k_P$. Ясно, что

$$\begin{aligned} |E| &\geq count_E(e_1) + count_E(e_2) + \dots + count_E(e_{P-1}) \\ &= (k_1 + k_2) + (k_1 + k_3) + \dots + (k_1 + k_P) \\ &= (P-2) \cdot k_1 + k_1 + \dots + k_P = (P-2) \cdot k_1 + |D| \end{aligned}$$

Ввиду $P > 2$, получаем $|D| < |E|$, что противоречит тому, что $|D| = |E|$. Следовательно, $A_{L_i} \neq B_{L_i}$ для некоторого $i, 1 \leq i \leq P-1$. □

Лемма 2.3. Если существуют разныe подмножества $A, B \subset \mathbb{F}_q^n$, такие что $|A| = |B| = N$ и $A + A = B + B$, тогда $N \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_N\}, B = \{b_1, \dots, b_N\}$. Так как множества могут быть рассмотрены в качестве наборов, из леммы 2 следует, что найдутся

разные наборы $A_L, B_L \subseteq F_3^{n-1}$ такие что $|A_L| = |B_L| = N$ и $A_L + A_L = B_L + B_L$. Если $n-1 > 1$, применим лемму 2 к A_L и B_L получим разные наборы $A_{L_1}, B_{L_1} \subseteq F_3^{n-2}$, такие что $|A_{L_1}| = |B_{L_1}| = N$ и $A_{L_1} + A_{L_1} = B_{L_1} + B_{L_1}$. Продолжим применять лемму 2 пока не получим разные наборы $C, D \subseteq F_3^1 = F_3$, такие что $|C| = |D| = N$ и $C + C = D + D$. Условие $N \not\equiv 0 \pmod{3}$ следует из леммы 2.1. $\square$

Лемма 2.4. Если существуют разные подмножества $A, B \subseteq F_3^n$, такие что $|A| = |B| = N$ и $A + A = B + B$, тогда $N \neq 3^n - 1$.

Доказательство. Предположим, что $A = F_3^n \setminus \{e_1\}$ и $B = F_3^n \setminus \{e_2\}$, $e_1 \neq e_2$. Пусть $C = F_3^n \setminus \{e_1, e_2\}$. Тогда, $A + A = e_2 + C \cup C + C = B + B = e_1 + C \cup C + C$

$$(2.3) \quad e_1 + C = e_2 + C$$

Множество $e_1 + C$ является сдвигом C . Поэтому $|e_1 + C| = |C| = |F_3^n| - 2$. Из $e_2 \notin C$ следует $e_1 + e_2 \notin e_1 + C$. Если $-e_1 \in e_1 + C$, то $-e_1 - e_1 = -2e_1 = e_1 \in C$, что противоречит $e_1 \notin C$. Следовательно, $e_1 + C = F_3^n \setminus \{e_1 + e_2, -e_1\}$. Аналогично, $e_2 + C = F_3^n \setminus \{e_1 + e_2, -e_2\}$. Из $e_1 \neq e_2$ получается $e_1 + C \neq e_2 + C$, что противоречит (2.3). $\square$

Из лемм 2.3 и 2.4 следует следующее утверждение.

Предложение 2.2. Если существуют разные подмножества $A, B \subseteq F_3^n$, такие что $|A| = |B| = N$ и $A + A = B + B$, тогда $N \not\equiv 0 \pmod{3}$ и $N \neq 3^n - 1$.

Комбинируя предложения 2.1 и 2.2 получаем доказательство основной теоремы.

Abstract. Let F_3^n be an n -dimensional linear space over the finite field F_3 . Let $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ be a set in F_3^n and $A + A$ be the collection of sums of pairs of distinct elements in A . It is said, that A is uniquely determined by $A + A$ if for any $B \subseteq F_3^n$ such that $|A| = |B|$ and $A + A = B + B$ it follows that $A = B$. In this paper, we find those values of N for which any set $A \subset F_3^n$ containing N elements is determined uniquely by $A + A$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Moser, Problem E 1218, Amer. Math. Monthly, 507 pages, (1957).
- [2] László Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, American Mathematical Soc. (1979).
- [3] J. Selridge and E. G. Straus, Pac. J. Math. 8, 847 – 856 (1958).
- [4] D. Fomin, "Is Multiset of a Integer Uniquely Determined by the Multiset of its s -sums?" arXiv:1709.06046v3 [math.NT] 16 Nov 2017.

Поступила 26 января 2018

После доработки 21 июля 2018

Принята к публикации 15 сентября 2018

ON THE EQUATION $f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z + \beta}$

Q. HAN, F. LÜ

Texas A&M University at San Antonio, Texas, USA[†]
China University of Petroleum at Qingdao, Shandong, P.R. China
E-mails: qhan@tamusa.edu; lufeng18@163.com

Abstract. In this paper we describe the meromorphic solutions of the equation $f^n(z) + (f')^n(z) = e^{\alpha z + \beta}$ and $f^n(z) + f^n(z+c) = e^{\alpha z + \beta}$ ($c \neq 0$) over the complex plane $\mathbb{C}$ for integers $n \geq 1$.

MSC2010 numbers: 30D30, 34M05, 39B32, 30D20, 30D35, 39A10.

Keywords: Fermat-type equation; meromorphic solution; Nevanlinna theory; Weierstrass elliptic function.

1. INTRODUCTION

This paper is devoted to the description of meromorphic solutions for the following functional equation:

$$(1.1) \quad f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z + \beta},$$

where $g(z) = f'(z)$ or $g(z) = f(z+c)$ for $\alpha, \beta, c \in \mathbb{C}$, when $n \geq 1$.

In particular, when $\alpha = \beta = 0$, then (1.1) is reduced to the following well known Fermat-type functional equation, initialed by Gross [8, 9] and Baker [1]:

$$(1.2) \quad f^n(z) + g^n(z) = 1.$$

Below, we summarize all the possible meromorphic solutions of equation (1.2) (see Theorem 2.3 in Han [10]).

Proposition 1.1. *The following assertions hold.*

- (A) For $n = 2$, the only nonconstant meromorphic solutions of equation (1.2) are the functions $f = \frac{1}{1+\omega}$ and $g = \frac{\omega}{1+\omega}$ for a nonconstant meromorphic function ω .
- (B) For $n = 3$, the only nonconstant meromorphic solutions of equation (1.2) are the functions $f = \frac{1}{3\eta(1+\frac{\sqrt{3}}{2}p'(h))}$ and $g = \frac{1}{3\eta(1-\frac{\sqrt{3}}{2}p'(h))}$ for a nonconstant entire function h and a cubic root η of unity, where p denotes the Weierstrass p -function.
- (C) For $n \geq 4$, there is no nonconstant meromorphic solution for equation (1.2).

[†]LuFeng Lü is supported by NNSF of China Project No. 11601521, and the Fundamental Research Fund for Central Universities in China Project No. 15CX05061A, 15CX05063A and 15CX08011A

In view of the transformation $\omega = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$, where h is an entire function, we see that in the case (A) (for $n = 2$) the functions $f = \frac{1-i\omega}{1+i\omega} = \sin(h)$ and $g = \frac{1+i\omega}{1-i\omega} = \cos(h)$ are the only entire solutions of equation (1.2). Moreover, the Weierstrass elliptic p -function $p(z)$ with periods ω_1 and ω_2 is defined to be

$$p(z; \omega_1, \omega_2) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\mu \in \mathbb{Z}\omega_1 + \nu\omega_2, \mu \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z + \mu\omega_1 + \nu\omega_2)^2} - \frac{1}{(\mu\omega_1 + \nu\omega_2)^2} \right\},$$

which is an even function and, with appropriately chosen ω_1 and ω_2 , satisfies the equation:

$$(1.3) \quad (p')^2 = 4p^3 - 1.$$

For meromorphic solutions of partial differential equations similar to equation (1.1), we refer the reader to Li [11, 12], Chang and Li [4], Han [10], and the references therein.

In what follows, we assume the familiarity with the basics of Nevanlinna's theory of meromorphic functions in $\mathbb{C}$ (see [15]), such as the first and second main theorems, and the standard notation, such as the characteristic function $T(r, f)$, the proximity function $m(r, f)$, and the counting functions $N(r, f)$ (counting multiplicity) and $\bar{N}(r, f)$ (ignoring multiplicity). By $S(r, f)$ we denote a quantity satisfying $S(r, f) = o(T(r, f))$ as $r \rightarrow \infty$, except possibly on a set of finite logarithmic measure, which is not necessarily the same at each occurrence.

2. MAIN RESULTS

We first consider meromorphic solutions of equation $f^n + (f')^n = \gamma^n$ for $n \geq 4$ and $\gamma \neq 0$. According to Proposition 1.1, both $\frac{f}{\gamma}$ and $\frac{f'}{\gamma}$ are constant. Assume $f = c_1\gamma$ and $f' = c_2\gamma$ to see that $c_1\gamma' = c_2\gamma$ with $c_1^n + c_2^n = 1$. If $c_1 = 0$, then $f \equiv 0$ and hence $\gamma \equiv 0$. So, $c_1 \neq 0$. If $c_2 = 0$, then f is a constant and so is γ . When $c_1c_2 \neq 0$, then γ cannot have zeros and poles, and hence $\gamma^n(z) = e^{\alpha z + \beta}$ with $\alpha = n\frac{\beta}{\alpha}$. This is another reason why in our study we are focusing on the function $e^{\alpha z + \beta}$.

Next, for $f^3 + (f')^3 = e^{\alpha z + \beta}$, the function f must be entire, and thus both $\frac{f}{\gamma}$ and $\frac{f'}{\gamma}$ are constant, so that the same conclusion holds as above. Now, for $f^2 + (f')^3 = e^{\alpha z + \beta}$, the function f must again be entire and, by Proposition 1.1, we have $f(z) = e^{\frac{\alpha z + \beta}{2}} \sin(h(z))$ and $f'(z) = e^{\frac{\alpha z + \beta}{2}} \cos(h(z))$, so that $\frac{3}{2} \tan(h) = 1 - h'$. Since $T(r, h') = O(T(r, h)) + S(r, h)$ as $r \rightarrow \infty$ and $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, \frac{\sin(h)}{1-h'})}{T(r, h)} = +\infty$ (see Clunie [6, Theorem 2 (i)] that extends Pólya's result from [16]), we see that either $\alpha = 0$ and $h' = 1$, or h is a constant.

Summarizing the above discussions we can state the following result.

Theorem 2.1. *The meromorphic solutions f of the following differential equation:*

$$(2.1) \quad f^n(z) + (f')^n(z) = e^{\alpha z + \beta}$$

must be entire functions, and the following assertions hold.

(A) *For $n = 1$, the general solutions of (2.1) are $f(z) = \frac{e^{\alpha z + \beta}}{n+1} + ae^{-z}$ for $\alpha \neq -1$ and $f(z) = ze^{-z+\beta} + ae^{-z}$.*

(B) *For $n = 2$, either $\alpha = 0$ and the general solutions of (2.1) are $f(z) = e^{\frac{\alpha}{2}z} \sin(z+b)$, or $f(z) = de^{\frac{\alpha+\beta}{2}z}$.*

(C) *For $n \geq 3$, the general solutions of (2.1) are $f(z) = de^{\frac{\alpha+\beta}{n}z}$.*

Here, $\alpha, \beta, a, b, d \in \mathbb{C}$ with $d^n(1 + \frac{\alpha+\beta}{n}) = 1$ for $n \geq 1$.

Note when $n \geq 2$, equation (2.1) may have no meromorphic solution for $\alpha = -\frac{n-1}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Also, for some related interesting results, we refer the reader to Li and Yang [18], and Li [13].

Now, consider the meromorphic solutions $f(z)$ of the following difference equation with $c \neq 0$:

$$(2.2) \quad f^n(z) + f^n(z+c) = e^{\alpha z + \beta}.$$

When $n \geq 1$, take $f(z) = c_1 e^{\frac{\alpha+\beta}{n}z}$ and $f(z+c) = c_2 e^{\frac{\alpha+\beta}{n}(z+c)}$ to see that $c_1 c_2 = 1$ and with $c_1^n + c_2^n = 1$, inspired by the case (C) of Proposition 1.1. Note that $c_1 c_2 \neq 0$ and $f(z+c) = e^{\frac{\alpha c}{n}} f(z)$. As a result, all the trivial meromorphic solutions of (2.2) are the functions $f(z) = de^{\frac{\alpha+\beta}{n}z}$ with $d^n(1 + e^{\alpha c}) = 1$ for $n \geq 1$.

Next, we discuss the existence of nontrivial meromorphic solutions for (2.2) when $n = 3$. It should be noted that a similar yet simpler approach has been applied in Han and Lü [14].

Theorem 2.2. *There is no meromorphic solution of finite order for the difference equation:*

$$(2.3) \quad f^3(z) + f^3(z+c) = e^{\alpha z + \beta}.$$

Here, the order of f is defined to be $\rho(f) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$.

3. PROOF OF THEOREM 2.2

By Proposition 1.1, one has

$$(3.1) \quad f(z) = \frac{1}{2} \frac{\left\{1 + \sqrt[3]{p'(h(z))}\right\}}{p(h(z))} e^{\frac{\alpha z + \beta}{2}} \quad \text{and} \quad f(z+c) = \frac{1}{2} \frac{\left\{1 - \sqrt[3]{p'(h(z))}\right\}}{p(h(z))} e^{\frac{\alpha z + \beta}{2}}.$$

A routine computation leads to

$$(3.2) \quad \frac{\eta \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} p'(h(z)) \right\}}{p(h(z))} = \frac{\left\{ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} p'(h(z+c)) \right\}}{p(h(z+c))} e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Assuming $\rho(f) < \infty$, from (1.3) and the first equality in (3.1), we obtain

$$(3.3) \quad \frac{3f^2(z)p^2(h(z))}{e^{\frac{2}{3}(n\alpha+\beta)}} = \frac{3f(z)p(h(z))}{e^{\frac{1}{3}(n\alpha+\beta)}} + 1 + p^3(h(z)).$$

Recall the estimate (2.7) from Bank and Langley [2], stating that

$$(3.4) \quad T(r, p) = \frac{\pi}{A} r^2 (1 + o(1)) \quad \text{and} \quad \rho(p) = 2,$$

where A is the area of the parallelogram $\mathfrak{S}$ with vertices $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$.

Therefore, taking into account that $T(r, e^{n\alpha}) = \frac{\pi}{2} r (1 + o(1))$, we can combine (3.3) and (3.4) to obtain

$$(3.5) \quad T(r, p(h)) \leq 2T(r, f) + \frac{2}{3}T(r, e^{n\alpha}) + O(1),$$

and hence $\rho(p(h)) < \infty$ as well. By Corollary 1.2 of Edrei and Fuchs [7] (see also Theorem 1 of Bergweiler [3] for a different and elegant proof), h must be a polynomial.

A side note here is that $T(r, p(h)) = O(r^{2l})$ for some positive integer $l \geq 1$.

Notice that when $p(z_0) = 0$, then by (1.3) we have $(p')^3(z_0) = -1$. Now, we denote by $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ all the zeros of $p(z)$ that satisfy $|z_j| \rightarrow \infty$ as $j \rightarrow \infty$, and assume that $h(a_{j,k}) = z_j$ for $k = 1, 2, \dots, \deg(h)$. Then, we have $(p')^2(h(a_{j,k})) = (p')^2(z_j) = -1$.

Suppose there is a subsequence of $\{a_{j,k}\}_{j=1}^\infty$ with respect to j such that $p(h(a_{j,k} + c)) = 0$. Denote this subsequence still by $\{a_{j,k}\}_{j=1}^\infty$ and, without loss of generality, fix the index k below. So, we have $(p')^2(h(a_{j,k} + c)) = -1$. Differentiate (3.2) and use substitution to obtain

$$\eta \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} p'(h(a_{j,k})) \right\} p'(h(a_{j,k} + c)) h'(a_{j,k} + c) = \left\{ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} p'(h(a_{j,k} + c)) \right\} p'(h(a_{j,k})) h'(a_{j,k}) e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

from which we observe that one and only one of the following situations can appear:

$$\begin{cases} \eta \left\{ 1 - i \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} h'(a_{j,k} + c) = \left\{ 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} h'(a_{j,k}) e^{\frac{2\pi i}{3}}, \\ \eta h'(a_{j,k} + c) = -h'(a_{j,k}) e^{\frac{2\pi i}{3}}, \\ \eta \left\{ 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} h'(a_{j,k} + c) = \left\{ 1 - i \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} h'(a_{j,k}) e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{cases}$$

Taking into account that $h(z)$ and $h(z+c)$ are polynomials of the same leading coefficient, and there are infinitely many $a_{j,k}$'s with $|a_{j,k}| \rightarrow \infty$ as $j \rightarrow \infty$, we

conclude that

$$(3.6) \quad \begin{cases} \eta \left\{ 1 - i \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} h'(z+c) = \left\{ 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} h'(z) e^{\frac{\alpha}{3}}, \\ \eta h'(z+c) = -h'(z) e^{\frac{\alpha}{3}}, \\ \eta \left\{ 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} h'(z+c) = \left\{ 1 - i \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} h'(z) e^{\frac{\alpha}{3}}. \end{cases}$$

This is possible only if α and c satisfy $e^{\frac{\alpha}{3}} = -1, \frac{1}{3} \pm i \frac{\sqrt{3}}{3}$ because $\eta = 1, -\frac{1}{3} \pm i \frac{\sqrt{3}}{3}$.

When this is true, one has uniformly by (3.6) that $h(z) = az + b$ for $ac \neq 0$. Since $p(z)$ has two distinct zeros in $\mathbb{S}$, and thus, in each associated lattice, we observe that all the zeros $(a_j)_{j=1}^n$ of $p(z)$ are transferred to each other through (a multiple of) ac . For simplicity, we can consider two cases where either $ac = \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ or $ac \neq \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ and $ac \in \mathbb{S}$. The former cannot occur in view of (3.2) and the periodicity of $p(z)$ and $p'(z)$, and the latter cannot occur either because $p(z)$ has a unique double pole in each lattice. We substitute $\frac{1}{a} = -\frac{b}{a}$ into (3.2) to get a contradiction:

$$\infty = \frac{\eta \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} p'(0) \right\}}{p(0)} - \frac{\left\{ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} p'(ac) \right\}}{p(ac)} e^{\frac{\alpha}{3}} < \infty.$$

Thus, $p(h(a_{j,k} + c)) = 0$ may occur only for finitely many $a_{j,k}$'s. Without loss of generality, assume that $p(h(a_{j,k} + c)) \neq 0$ for each $k = 1, 2, \dots, \deg(h)$ and all $j > J$, with J being a sufficiently large positive integer. Since $p(h(a_{j,k})) = 0$ and $(p')^2(h(a_{j,k})) = -1$, by (3.2) we have $p(h(a_{j,k} + c)) = \infty$ for $j > J$. Observing that $O(\log r) = S(r, p(h))$, we can write

$$(3.7) \quad \begin{aligned} N \left(r, \frac{1}{p(h(z))} \right) &\leq N \left(r, \frac{1}{p(h(z))} \right) + 2N \left(r, \frac{1}{h'(z)} \right) \\ &\leq N(r, p(h(z+c))) + 2T(r, h') + O(\log r) \leq N(r, p(h(z+c))) + S(r, p(h)). \end{aligned}$$

Now we use the first equality in (3.1) and estimate (3.4) to obtain

$$(3.8) \quad T(r, f) \leq T(r, p(h)) + T(r, p'(h)) + \frac{1}{3} T(r, e^{\alpha z}) + O(1) \leq O(T(r, p(h))).$$

Hence, in view of (3.5) and the side note after it, we have $\rho(f) = \rho(p(h))$ and $S(r, f) = S(r, p(h))$. Thus, $T(r, e^{\alpha z}) = S(r, f)$. Since all the zeros of the functions $f - e^{\frac{\alpha z + \beta}{3}}$, $f - \eta e^{\frac{\alpha z + \beta}{3}}$ and $f - \eta^2 e^{\frac{\alpha z + \beta}{3}}$ ($\eta \neq 1$) are of multiplicities at least 3, from (2.3) and Yamanoi's second main theorem (see [17]), we obtain

$$\begin{aligned} 2T(r, f) &\leq \sum_{m=1}^3 \tilde{N} \left(r, \frac{1}{f - \eta^m e^{\frac{\alpha z + \beta}{3}}} \right) + \tilde{N}(r, f) + S(r, f) \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 N \left(r, \frac{1}{f - \eta^m e^{\frac{\alpha z + \beta}{3}}} \right) + N(r, f) + S(r, f) \leq 2T(r, f) + S(r, p(h)). \end{aligned}$$

Therefore, we have $T(r, f) = N(r, f) + S(r, p(h))$, and hence $m(r, f) = S(r, p(h))$.

Next, applying the lemma of logarithmic derivative and again using the first equality in (3.1), we get

$$(3.9) \quad m\left(r, \frac{1}{p(h)}\right) \leq m(r, f) + m\left(r, \frac{p'(h)h'}{p(h)}\right) + S(r, p(h)) = S(r, p(h)).$$

Finally, combining (3.7) and (3.9), and applying Theorem 2.1 from Chiang and Feng [5], we obtain

$$(3.10) \quad \begin{aligned} T(r, p(h)) + O(1) &= T\left(r, \frac{1}{p(h)}\right) = m\left(r, \frac{1}{p(h(z))}\right) + N\left(r, \frac{1}{p(h(z))}\right) \\ &\leq \bar{N}(r, p(h(z+c))) + S(r, p(h)) \leq \frac{1}{2}N(r, p(h(z+c))) + S(r, p(h)) \\ &\leq \frac{1}{2}T(r, p(h(z+c))) + S(r, p(h)) \leq \frac{1}{2}T(r, p(h)) + S(r, p(h)), \end{aligned}$$

which is a contradiction, and the result follows. $\square$

4. EXAMPLES

Example 4.1. Let $f(z)$ be given by (3.1) through $h(z) = e^z$. Then $\rho(f) = \infty$, and for $c = \pi i$ and each α with $e^{\alpha c} = 1$, we have $f^3(z) + f^3(z+c) = e^{\alpha z+\beta}$ for all $\beta \in \mathbb{C}$.

Example 4.2. Let $f_1(z) = e^{\frac{1+\beta}{2}} \sin(z)$ and $f_2(z) = e^{\frac{1+\beta}{2}} \sin(e^{4iz} + z)$. Then $\rho(f_1) \leq 1$ and $\rho(f_2) = \infty$. For $c = \frac{\pi}{2}$ and each α with $e^{\alpha c} = 1$, we have $f_j^2(z) + f_j^2(z+c) = e^{\alpha z+\beta}$ for $j = 1, 2$ and all $\beta \in \mathbb{C}$.

Example 4.3. Let $f_1(z) = e^z + \frac{e^{\alpha+\beta}}{2}$ and $f_2(z) = e^{e^z+z} + \frac{e^{\alpha+\beta}}{2}$. Then $\rho(f_1) \leq 1$ and $\rho(f_2) = \infty$. For $c = i\pi$ and each α with $e^{\alpha c} = 1$, we have $f_j(z) + f_j(z+c) = e^{\alpha z+\beta}$ for $j = 1, 2$ and all $\beta \in \mathbb{C}$.

In contrast to Theorem 2.1, even though the existence of finite or infinite order solutions of equation $f^2(z) + f^2(z+c) = e^{\alpha z+\beta}$ may be described for special α and c , we could not characterize systematically all the possible solutions of this difference equation. The same concern occurs for the existence of infinite order solutions of equation $f^3(z) + f^3(z+c) = e^{\alpha z+\beta}$ in a systematic manner.

Finally, we briefly consider the equation $f(z) + f(z+c) = e^{\alpha z+\beta}$. Recall (2.2) to choose $f(z) = de^{\alpha z+\beta}$ and $f(z+c) = e^{\alpha c}f(z)$. When $d(1+e^{\alpha c}) = 1$, we are done. The general solutions may be of the form $f(z) = \delta(z) + de^{\alpha z+\beta}$ for a meromorphic function $\delta(z)$ with $\delta(z+c) = -\delta(z)$ and $d(1+e^{\alpha c}) = 1$. In addition, the general solutions may be of the form $f(z) = \delta(z) - \frac{e}{c}e^{\alpha z+\beta}$ for $e^{\alpha c} = -1$. When $n \geq 2$, then equation (2.2) may have no solution if $e^{\alpha c} = -1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. N. Baker, "On a class of meromorphic functions", Proc. Amer. Math. Soc., **17**, 819 – 822 (1966).
- [2] S. B. Bank and J. K. Langley, "On the value distribution theory of elliptic functions", Monatsch. Math., **98**, 1 – 20 (1984).
- [3] W. Bergweiler, "Order and lower order of composite meromorphic functions", Michigan Math. J., **30**, 135 – 146 (1989).
- [4] D. C. Chang and H. Q. Li, "Description of entire solutions of elliptic type equations", Complex Math. Bull., **55**, 249 – 259 (2012).
- [5] Y. M. Chiang and S. Feng, "On the Nevanlinna characteristic of $f(z+q)$ and difference equation in the complex plane", Ramanujan J., **10**, 105 – 129 (2008).
- [6] J. Claude, "The composition of entire and meromorphic functions", Mathematical Essays, Dedicated to A.J. Marinsky, 75-92, Ohio University Press, Athens, Ohio (1976).
- [7] A. Ekevi and W. H. J. Fuchs, "On the zeros of $f(qz)$ when f and q are entire functions", J. Analyse Math., **12**, 243 – 255 (1964).
- [8] P. Gross, "On the equation $f^n + g^n = 1$ and 11 ", Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 85 – 84 & 576: 74, 647 – 648 & 767 (1968).
- [9] P. Gross, "On the functional equation $f^n + g^n = 1$ ", Amer. Math. Monthly, **73**, 1633 – 1636 (1966).
- [10] Q. Han, "On complex analytic solutions of the partial differential equation $(u_{x_1})^m + (u_{x_2})^n = 1$ ", Houston J. Math., **35**, 277 – 289 (2009).
- [11] H. Q. Li, "Entire solutions of $(u_{x_1})^m + (u_{x_2})^n = 1$ ", Nagoya Math. J., **178**, 151 – 162 (2005).
- [12] H. Q. Li, "Entire solutions of elliptic type equations", Arch. Math. (Basel), **89**, 339 – 357 (2007).
- [13] H. Q. Li, "On certain non-linear differential equations in complex domains", Arch. Math. (Basel), **91**, 344 – 353 (2008).
- [14] F. Lü and Q. Han, "On the Fermat-type equation $f^3(z) + f^3(z+c) = 1$ ", Aequat. Math., **91**, 129 – 136 (2017).
- [15] R. Nevanlinna, Analytic Functions, Springer-Verlag, New York-Berlin (1970).
- [16] G. Pólya, "On an integral function of an integral function", J. London Math. Soc., **1**, 12 – 18 (1928).
- [17] K. Yamanoi, "The second main theorem for small functions and related problems", Acta Math., **192**, 225 – 294 (2004).
- [18] C. C. Yung and P. Li, "On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear differential equations", Arch. Math. (Basel), **82**, 442 – 446 (2004).

Поступила 5 декабря 2016

После доработки 10 января 2017

Принята к публикации 24 января 2017

Cover to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

• Vol. 54, No. 1, 2019

CONTENTS

S. EIGEN, A. HAJIAN, V. PRASAD, SWW sequences and the infinite ergodic random walk	3
W. NAGEL, V. WEISS, Joseph Mecke's last fragmentary manuscripts – a compilation	14
S. M. SEUBERT, A moment condition and non-synthetic diagonalizable operators on the space of functions analytic on the unit disk	28
L. TANG, J. WANG, H. ZHU, Weighted norm inequalities for area functions related to Schrödinger operators	40
R. A. KILACHATRYAN, On continuous selections of set-valued mappings with almost convex values	60
S. J. CHANG, D. SKOUG, H. S. CHUNG, Some formulas for the generalized analytic Feynman integrals on the Wiener space	76 – 92

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 54, номер 2, 2019

Содержание

Г. М. АЙРАПЕТИАН, С. А. АГЕКИН, О граничной задаче Римана в полуплоскости в классе непрерывных с весом функций	3
А. А. АКОпян, Д. С. ВОСКАНИАН, О точках пересечения двух плоских алгебраических кривых	17
А. Р. ГЕВОРГЯН, Медильные в целом системы квазигрупп	31
С. ГОГЯН, Н. СРАПИОНЫАН, О квази-гриды константах для подсистем системы Хаара в $L^1(0, 1)$	37
А. Г. КАРАГУЛЫАН, Non-asymptotic guarantees for sampling by stochastic gradient descent	43
Г. А. КАРАПЕТИАН, М. А. ХАЧАТУРЯН, Предельные теоремы вложения для мультианізотропных функциональных пространств	54
В. Г. МИКАЕЛЯН, Явление Гиббса для кусочно-линейного вейвлета Стромберга	65
Д. САРГСЯН, О подмножествах линейных пространства над конечным полем, однозначно определяемых набором попарных сумм их элементов	82
Q. HAN, F. LU, On the equation $f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z + \beta}$	90 - 96

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 54, No. 2, 2019

CONTENTS

H. M. AYRAPETYAN, S. A. AGEKIN, On a Riemann boundary value problem in the half-plane in the class of weighted continuous functions	3
A. A. AKOPYAN, D. VOSKANYAN, On the intersection points of two algebraic curves	17
A. R. GEVORGYAN, Globally medial systems of quasigroups	31
S. GOGYAN, N. SRAPIONYAN, On the quasi-greedy constants for the Haar subsystems in $L^1(0, 1)$	37
A. G. KARAGULYAN, Non-asymptotic guarantees for sampling by stochastic gradient descent	43
G. A. KARAPETYAN, M. A. KHACHATRYAN, Limiting embedding theorems for multianisotropic functional spaces	54
V. G. MIKAELYAN, The Gibbs phenomenon for Stromberg's piecewise linear wavelet	65
D. SARGSYAN, Subsets in linear spaces over the finite field uniquely determined by their pairwise sums collection	82
Q. HAN, F. LU, On the equation $f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z + \beta}$	90 - 96