

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2018

Խ Մ Բ Ա Գ Բ Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Վարդանյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

СИНУС ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Р. Г. АРАМЯН

Российско-Армянский университет, Ереван, Армения
Институт Математики НАН Армении
E-mail: rafikaramyan@yandex.com

Аннотация. В статье изучается проблема синус-представления для опорной функции центрально-симметричного выпуклого тела. Определяется подкласс центрально-симметричных выпуклых тел, плотный в классе центрально-симметричных выпуклых тел. Также найдена формула обращения для синус преобразования.

MSC2010 number: 53C45, 52A15, 53C65.

Ключевые слова: интегральная геометрия; выпуклое тело; эппид; опорная функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Косинус-представление опорной функции центрально-симметричного выпуклого тела играет фундаментальную роль в интегральной геометрии и ряде смежных областей (см. [2], [8] – [11], [17], [21]). В статье изучается (в некотором дуальном смысле) синус-представление для опорной функции центрально-симметричного выпуклого тела.

Обозначим через $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) евклидово n -мерное пространство. Пусть S^{n-1} - единичная сфера $n - 1$ размерности в $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат O , λ_{n-1} -поверхностная мера Лебега на S^{n-1} и σ_{n-1} - ее полная поверхностная мера ($\lambda_k(S^k) = \sigma_k$). Обозначим через $S_\omega \subset S^{n-1}$ большую $(n - 2)$ - мерную сферу с полюсом в $\omega \in S^{n-1}$. Класс выпуклых тел (непустые компактные выпуклые множества) симметричных относительно начала координат в $\mathbf{R}^n$ обозначим через $\mathcal{B}_0^n$ (так называемые *центрированные тела*), а класс центрально-симметричных выпуклых тел в $\mathbf{R}^n$ обозначим через $\mathcal{B}^n$.

⁰Исследования были частично поддержаны фондами, выделенными по гранту МОН РФ на финансирование деятельности РАУ и при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместной научной программы 18RF-016 и 18-61-00010, соответственно.

Наиболее полезным аналитическим описанием выпуклого тела является его опорная функция ([16]). Опорная функция $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \{\infty, \text{с.о.}\}$ выпуклого тела B определяется как

$$H(B, x) = H(x) = \sup_{y \in B} \langle y, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь и ниже $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Известно, что (см. [16]) опорная функция выпуклого тела B является положительно однородной и выпуклой. Ниже мы рассмотрим опорную функцию H как функцию, определенную на единичной сфере S^{n-1} (из-за положительной однородности H). Также известно (см. [16]), что выпуклое тело B однозначно определяется своей опорной функцией. Выпуклое тело B является k -гладким, если его опорная функция k раз непрерывно дифференцируема. Через C^k_+ обозначим класс четных k раз непрерывно дифференцируемых функций определенных на S^{n-1} .

Известно ([9], [8], [21]), что *опорная функция H симметричного относительно начала координат выпуклого тела $B \in \mathcal{B}^n_+$, являющегося пределом зонитов (сумма конечного числа отрезков) в смысле метрики Хаусдорфа, имеет следующее представление*

$$(1.1) \quad H(\xi) = \int_{S^{n-1}} |\langle \xi, \Omega \rangle| m(d\Omega), \quad \xi \in S^{n-1}$$

с четной мерой m .

Возникает вопрос. Имеет ли опорная функция любого центрированного выпуклого тела косинус-представление.

Известно также ([9], [8], [17], [21]), что *опорная функция H достаточно гладкого симметричного относительно начала координат выпуклого тела $B \in \mathcal{B}^n_+$ допускает следующее представление*

$$H(\xi) = \int_{S^{n-1}} |\langle \xi, \Omega \rangle| h(\Omega) \lambda_{n-1}(d\Omega), \quad \xi \in S^{n-1}$$

с четной непрерывной функцией $h(\cdot)$ (не обязательно положительной), определенной на S^{n-1} . Заметим, что h единственна. Выпуклое тело (опорная функция которого имеет интегральное представление (1.1) с знакопеременной четной мерой m) называется обобщенным зонитом. Если m мера на S^{n-1} то центрированное выпуклое тело B является зонитом.

(1.2) указывает, что класс обобщенных зонитов плотен в $\mathcal{B}^n$. Правая часть (1.2) называется косинус преобразованием h .

В. Вейл [20] показал, что локальная характеристизация зонкоидов не существует. Однако было показано, что в четных размерностях существует экваториальная характеристика зонкоидов (см. [18], [11]), а в нечетных измерениях экваториальная характеристика зонкоидов не существует (см. [13]). В [4] был определен подкласс зонкоидов, позволяющий экваториальную характеристизацию.

В этой статье рассматривается сумма конечного числа $n - 2$ мерных центрированных шаров и их пределы. Пусть $b = (r, \Omega)$ - $(n - 2)$ мерный центрированный шар в $\mathbb{R}^n$ с радиусом r и $\Omega \in S^{n-1}$ единичный вектор, нормальный к b . Опорная функция b имеет вид

$$(1.3) \quad H(b, \xi) = r \sin(\xi, \widehat{\Omega}), \quad \xi \in S^{n-1}.$$

Здесь и далее через $(\xi, \widehat{\Omega})$ мы обозначаем угол между двумя направлениями. Теперь рассмотрим конечную сумму (сумму Минковского) $n - 2$ мерных центрированных шаров в $\mathbb{R}^n$. Опорная функция конечной суммы $b_i = (r_i, \Omega_i)$, $i = \overline{1, m}$ (обозначим через P) имеет вид

$$(1.4) \quad H(P, \xi) = \sum_{i=1}^m r_i \sin(\xi, \widehat{\Omega}_i) = \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{2} [\sin(\xi, \widehat{\Omega}_i) + \sin(\xi, -\widehat{\Omega}_i)], \quad \xi \in S^{n-1}.$$

Определим класс выпуклых тел $\mathcal{D}$ так называемых дискондов, которые являются пределами конечных сумм $n - 2$ мерных шаров в смысле метрики Хаусдорфа. Для опорной функции центрированного дисконда сумма (1.4) преобразуется в интеграл

$$(1.5) \quad H(\xi) = \int_{S^{n-1}} \sin(\xi, \widehat{\Omega}) \nu(d\Omega), \quad \xi \in S^{n-1},$$

где ν четная мера на S^{n-1} .

Возникает вопрос. Имеет ли опорная функция любого центрированного выпуклого тела симуг-представление. В этой статье доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Центрированное симуг-тело B является дискондом тогда и только тогда, когда его опорная функция имеет представление (1.5) с четной мерой ν на S^{n-1} .*

Заметим, что класс дискондов является подмножеством класса зонкоидов, потому что любой дисконд является зонкоидом. Также заметим, что существует зонкоид, который не является дискондом, например сегмент не является дискондом. Таким образом, имеем: *дисконды нигде не плотны в $\mathcal{B}^n$.*

Теперь мы определяем класс *обобщенных дискоидов* (см. также [21]). Центрированное выпуклое тело B является *обобщенным дискоидом*, если его опорная функция H допускает следующее представление

$$(1.6) \quad H(\xi) = \int_{S^{n-1}} \sin(\xi, \Omega) v(d\Omega), \quad \xi \in S^{n-1}$$

с знакопеременной четной мерой v , или эквивалентное определение (см. также [19]): B является *обобщенным дискоидом* если $B = B_1 + B_2$, где B_1, B_2 дискоиды.

В этой статье мы доказываем утверждение, что класс обобщенных дискоидов совпадает с $\mathcal{B}^n$.

Теорема 1.2. *Опорная функция H достаточно гладкого симметричного относительно начала координат выпуклого тела $B \in \mathcal{B}^n$ допускает следующее представление*

$$(1.7) \quad H(\xi) = \int_{S^{n-1}} \sin(\xi, \Omega) h(\Omega) \lambda_{n-1}(d\Omega), \quad \xi \in S^{n-1}$$

с четной непрерывной функцией h (не обязательно положительной), определенной на S^{n-1} . Заметим, что h единственна.

Правая часть (1.7) называется синус-преобразованием h и обозначается через Qh . Теорема 2.1 (см. ниже) показывает, что мера v в (1.6) (h в (1.7)) единственна. Следовательно, преобразование $Q: \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^n$ обратимо. h в (1.7) называется порождающей плотностью $B \in \mathcal{B}^n$. Заметим, что обратимость к синус-преобразованию была показана А. Александровым в [2].

Теорему 1.2 можно доказать используя разложение h по сферическим функциям ([3]). В этой статье теорема доказывается нахождением формулы обращения для (1.7).

Р. Шнайдер, Р. Шустер в [19] и С. Алескер в [3] доказали несколько результатов для сумм подобных выпуклых тел и сферических функций. Заметим, что класс Минковского $M_{b, n-2}$, где $b - (n-2)$ -мерный центрированный шар, совпадает с классом зонноидов. В [13] рассмотрели синус-преобразования изотропных мер и получены изопериметрические неравенства.

Формула обращения для синус-преобразования. Через R обозначим преобразование Радова на сфере (преобразование Функа), определяемое формулой:

$$(1.8) \quad RH(\xi) = \frac{1}{\omega_{n-2}} \int_{S^{n-1}} H(\omega) \lambda_{n-2}(d\omega), \quad \xi \in S^{n-1}$$

для $H \in C^\infty$. Для $n \geq 3$ формула обращения для R была получена Хелгасоном в [14] (для $n = 3$ формула обращения была получена Минковским и Блэшке [9]). В [5] рассматривалось обобщенное преобразование Радона на сфере n найдена формула обращения (см. также [6]).

Также через Ξ мы будем обозначать следующее преобразование $\Xi: C^\infty \rightarrow C^\infty$ определяемое формулой:

$$(1.9) \quad \Xi = ((n-1) + \Delta),$$

где Δ является оператором Лапласа-Бельтрами на S^{n-1} . Также в этой статье найдена формула обращения сигус-преобразования.

Теорема 1.3. Пусть H - опорная функция достаточно гладкого центрированного выпуклого тела $B \in \mathcal{B}_n^c$. Тогда

$$(1.10) \quad h = Q^{-1}H = \frac{\sigma_{n-1}}{(n-2)\sigma_{n-2}} \Xi R^{-2}H,$$

является решением интегрального уравнения (1.7).

2. СИГУС-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЦЕНТРИГОВАННОГО ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Доказательство Теоремы 1.1. Необходимость: Пусть B является диском. Тогда существует последовательность P_m (конечная сумма $(n-2)$ мерных шаров) которая сходится к B в смысле метрики Хаусдорфа. Каждому P_m через (1.4), соответствует четная мера ν_m с конечным носителем на S^{n-1} . Последовательность ν_m равномерно ограничена в полной вариационной норме, поскольку

$$\nu_m(S^{n-1}) < C \cdot \mu([K]),$$

где C некоторая константа, $K \in \mathcal{B}_n^c$ - выпуклое тело, содержащее B и $\mu([K])$ - инвариантная мера гиперплоскостей пересекающих K . Следовательно можно выбрать подпоследовательность ν'_m которая слабо сходится к некоторой четной ν (мера заданная на S^{n-1}) и опорная функция $H(B, \cdot)$ имеет представление (1.5) с мерой ν .

Достаточность: Пусть опорная функция B имеет представление (1.5) с четной мерой ν на S^{n-1} . Тогда существует последовательность четных мер ν_m с конечным носителем, которая сходится (слабая сходимость) к ν . Каждой ν_m соответствует P_m (конечная сумма $(n-2)$ мерных шаров) через (1.4). Мы имеем $H(P_m, \cdot)$ сходится поточечно к $H(B, \cdot)$. Также известно, что поточечная сходимость последовательности выпуклых функций влечет равномерную сходимость

на каждом компакте. Таким образом, мы получаем, что $H(P_n, \cdot)$ равномерно сходится к $H(B, \cdot)$ на S^{n-1} . Следовательно, P_n сходится к B в метрике Хаусдорфа, и B является диском. Теорема 1.1 доказана.

Следующая теорема показывает, что мера ν в (1.5) единственна (см. также [13]).

Теорема 2.1. Пусть ν четная знакопеременная мера на S^{n-1} такая, что

$$(2.1) \quad \int_{S^{n-1}} \sin(\xi, \Omega) \nu(d\Omega) = 0$$

для любого $\xi \in S^{n-1}$, тогда $\nu \equiv 0$.

Доказательство можно дать, используя разложения по сферическим функциям. Пусть Q_d - сферическая функция порядка d . Умножим (2.1) на Q_d и проинтегрируем по S^{n-1} . Используя теорему Фубини, получим

$$(2.2) \quad \int_{S^{n-1}} \left(\int_{S^n} \sin(\xi, \Omega) Q_d(\Omega) \nu(d\Omega) \right) Q_d(\xi) \lambda_{n-1}(d\xi) = \\ = \int_{S^n} \left(\int_{S^{n-1}} \sin(\xi, \Omega) Q_d(\Omega) \nu(d\Omega) \right) Q_d(\xi) \lambda_{n-1}(d\xi) = 0$$

Формула Функ-Гекке утверждает, что (см. [12])

$$(2.3) \quad \int_{S^{n-1}} \sin(\xi, \Omega) Q_d(\xi) \lambda_{n-1}(d\xi) = a_{n,d} Q_d(\Omega),$$

где $a_{n,d}$ - коэффициент, зависящий только от d и n и $a_{n,d} \neq 0$, если d четный. Таким образом, для всех сферических функций порядка d имеем

$$(2.4) \quad \int_{S^n} Q_d(\Omega) \nu(d\Omega) = 0$$

Если d нечетно, то (2.4) верно сразу так как ν четная мера. Используя равномерную аппроксимацию непрерывной функций на S^{n-1} , для каждого непрерывного

$$(2.5) \quad \int_{S^n} f(\Omega) \nu(d\Omega) = 0$$

Принимая во внимание известные результаты теории интегрирования, можно сделать вывод, что это возможно только в случае $\nu = 0$.

3. ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ СИНОС-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть $B \in \mathcal{B}_0^n$ - выпуклое тело с достаточно гладкой границей и с положительной гауссовой кривизной в каждой точке границы ∂B . Пусть ω - точка на ∂B , $n(\omega)$ - единичная нормаль в которой совпадает с ω , $R_i(\omega)$ - главные радиусы кривизны

$(i = 1, \dots, n-1)$ ∂B в $s(\omega)$ и $k_1(\omega), \dots, k_{n-1}(\omega)$ - главные кривизны ∂B в $s(\omega)$, $\Phi_1(\omega) = \Phi_{n-1}(\omega) > 0$.

Понятие флага в R^n , которое естественно возникает в комбинаторной интегральной геометрии будет иметь важное значение ниже. Подробное определение флага в R^3 можно найти в [1]. Мы рассматриваем так называемые направленные флаги (ниже просто флаги). Назовем пару $\{g, e\}$ флагом, если g - направленная линия, содержащая начало координат O и e - ориентированная гиперплоскость (гиперплоскость с заданной положительной нормалью), содержащая g . Существует два эквивалентных представления флага:

$$(\omega, \varphi) \text{ или } (\xi, \Phi),$$

где $\omega \in S^{n-1}$ - нормаль e и φ - направление g S_ω , которое совпадает с направлением g ; $\xi \in S^{n-1}$ - пространственное направление g и Φ - направление из S_e , которое совпадает с нормалью e .

Пусть $\xi \in S^{n-1}$ и $\Phi \in S_\xi$. Через $B(\Phi)$ обозначим проекцию B на гиперплоскость с нормалью Φ содержащую $O \in R^n$. Для $n-1$ мерного объема $B(\Phi)$ имеем

$$(3.1) \quad V_{n-1}(B(\Phi)) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle \Phi, \omega \rangle| \prod_{i=1}^{n-1} R_i(\omega) \lambda_{n-1}(d\omega).$$

Через $D(O, 1)$ обозначим n -мерный шар радиуса 1 с центром в начале координат. Запишем (3.1) для суммы Минковского $B + \varepsilon D(O, 1)$ (здесь $\varepsilon > 0$). Используя классическую формулу Штейнера для объема, получим

$$(3.2) \quad V_{n-1}(B(\Phi) + \varepsilon D(O, 1)) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i \binom{n-1}{i} W_i(B(\Phi)) = \\ = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle \Phi, \omega \rangle| \prod_{i=1}^{n-1} (R_i(\omega) + \varepsilon) \lambda_{n-1}(d\omega).$$

Здесь $W_i(B(\Phi))$ является i -й основной мерой $B(\Phi)$ (см [10]). Сравнивая порядки ε с обеих сторон (3.2), получим следующую формулу

$$(3.3) \quad (n-1)W_{n-2}(B(\Phi)) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle \Phi, \omega \rangle| \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\omega) \lambda_{n-1}(d\omega).$$

Напишем $\omega = (\nu, \varphi)$ в сферических координатах где $\nu = \widehat{(\xi, \omega)}$ - полярный угол, измеренный от ξ (зенитное направление) и $\varphi \in S_\xi$. Применяя правило сферического косинуса, находим

$$(3.4) \quad |\langle \omega, \Phi \rangle| = \sin \nu |\cos(\widehat{\varphi, \Phi})|.$$

Теперь интегрируя (3.3) относительно Φ по S_ξ и используя (3.1) получим

$$(3.5) \quad \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S_{n-1}} (n-1) W_{n-2}(B(\Phi)) \lambda_{n-2}(d\Phi) = \\ = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S_{n-1}} \sin(\xi, \omega) \sum_{i=1}^{n-2} R_i(\omega) \lambda_{n-1}(d\omega) \int_{S_\xi} |\cos(\varphi, \Phi)| \lambda_{n-2}(d\Phi).$$

Принимая во внимание, что для любого $\varphi \in S^{n-2}$ (см. [4])

$$\int_{S_\xi} |\cos(\varphi, \Phi)| \lambda_{n-2}(d\Phi) = \frac{2\sigma_{n-2}}{n-2},$$

мы получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть $B \in \mathcal{B}_n^+$ - выпуклое тело с достаточно гладкой границей и с положительной гауссовой кривизной. Для любого $\xi \in S^{n-1}$ имеем

$$(3.6) \quad \int_{S_\xi} (n-1) W_{n-2}(B(\Phi)) \lambda_{n-2}(d\Phi) = \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} \int_{S_{n-1}} \sin(\xi, \omega) \sum_{i=1}^{n-2} R_i(\omega) \lambda_{n-1}(d\omega).$$

Здесь $W_{n-2}(B(\Phi))$ - $(n-2)$ -ая основная мера проекции B на гиперплоскость, ортогональная к $\Phi \in S_\xi$.

Известно (см. [16]): для $W_{n-2}(B(\Phi))$ в $n-1$ мерном пространстве имеем

$$(3.7) \quad (n-1) W_{n-2}(B(\Phi)) = \int_{S_{n-2}} H(B(\Phi), u) \lambda_{n-2}(du) = \int_{S_\Phi} H(B, u) \lambda_{n-2}(du),$$

где $H(B(\Phi), \cdot)$ - опорная функция $B(\Phi)$ что есть сужение опорной функции B на S_Φ . Пусть $B \in \mathcal{B}_n^+$ - выпуклое тело. В [7] доказано, что

$$(3.8) \quad ((n-1) + \Delta) H(B, \cdot) = \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\cdot),$$

здесь Δ является оператором Лапласа-Бельтрами на S^{n-1} . Подставляя (3.8) в (3.7) в (3.6), получим

$$(3.9) \quad \int_{S_\xi} \left[\int_{S_\Phi} H(u) \lambda_{n-2}(du) \right] \lambda_{n-2}(d\Phi) = \\ = \frac{\sigma_{n-3}}{(n-2)} \int_{S_{n-1}} \sin(\xi, \omega) [((n-1) + \Delta) H(\xi)] \lambda_{n-1}(d\omega).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.2. Пусть $B \in \mathcal{B}_n^+$ - выпуклое тело с достаточно гладкой границей и с положительной гауссовой кривизной. Для его опорной функции H имеем

$$(3.10) \quad R(RH)(\xi) = R^2 H(\xi) = \frac{\sigma_{n-3}}{(n-2)\sigma_{n-1}^2} Q(\Xi H)(\xi) \quad \xi \in S^{n-1}.$$

Теорема 1.3 является следствием Теоремы 3.2.

4. ПРИМЕР ВЫПУКЛОГО ТЕЛА С ЗАКОПЕРЕМЕННОЙ ПОРОЖДАЮЩЕЙ ПЛОТНОСТЬЮ

У нас нет оснований утверждать, что решение уравнения (1.7) для опорной функции любого достаточно гладкого центрированного выпуклого тела является неотрицательной функцией. В этом разделе мы приводим пример достаточно гладкого центрированного выпуклого тела $B \in \mathcal{B}_n^3$, для которого решение уравнения принимает также отрицательные значения. Пусть $U = \{\xi \in S^2 : \langle \xi, \bar{\Omega} \rangle < \varepsilon\}$ есть ε -окрестность точки $\Omega_0 \in S^2$ и g - достаточно гладкая четная функция, определенная на S^2 , такая, что

$$(4.1) \quad g(\Omega) = \begin{cases} \geq 1 & \text{для } \Omega \in S^2 \setminus \{U \cup \{-U\}\} \\ > -1 & \text{для } \Omega \in \{U \cup \{-U\}\}. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую функцию, определенную на $\mathbb{R}^3$

$$(4.2) \quad F(\xi) = |\xi| \int_{S^2} \sin(\vec{\xi}, \Omega) g(\Omega) \lambda_2(d\Omega), \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus O$$

где $|\xi|$ - норма ξ и $\vec{\xi} = \xi/|\xi|$. Заметим, что F является положительно однородной, и теперь мы докажем, что при достаточно малом ε функция F также выпукла.

Для частной производной первого порядка F имеем

$$(4.3) \quad \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_1} = \int_{S^2} \frac{\xi_1 - \Omega_1 \langle \xi, \Omega \rangle}{|\xi| \sin(\vec{\xi}, \Omega)} g(\Omega) \lambda_2(d\Omega), \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus O$$

здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$.

Для фиксированного $\xi \in S^2$ и $\psi \in S_\xi$ выберем ξ как zenithное направление и ψ как азимутальное направление. Для производной второго порядка по направлению ψ в $\xi = (0, 0, 1)$ получим

$$(4.4) \quad \frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial^2 \xi_1} \Big|_{\xi=(0,0,1)} = \int_{S^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\sin \vartheta} g(\Omega) \lambda_2(d\Omega),$$

здесь (ϑ, φ) - обычные сферические координаты Ω на S^2 основанный на выборе ξ в качестве северного полюса а Ψ в качестве опорного направления на S_ξ .

Из (4.4) следует, что при достаточно малом ε для всех $\xi \in S^2$ имеем

$$(4.5) \quad \frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial^2 \xi_1} > 0.$$

Следовательно, функция F выпукла и существует центрированное выпуклое тело $B \in \mathcal{B}_n^3$, для которого F является его опорной функцией.

Abstract. The problem of the sine representation for the support function of a centrally symmetric convex bodies is studied. We describe a subclass of centrally symmetric convex bodies which is dense in the class of centrally symmetric convex bodies. Also, we obtain an inversion formula for the sine-transform.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metrics and zonoids", *Acta Appl. Math.*, **20**, 3 – 27 (1987).
- [2] A. D. Alexandrov, "On the theory of mixed volumes. New inequalities between mixed volumes and their applications", *Mat. Sb.*, **44**, 1205 – 1238 (1937).
- [3] S. Alesker, "On $GL_n(\mathbb{R})$ -invariant classes of convex bodies", *Mathematika* **50**, 57 – 61 (2003).
- [4] R. Aramyan, "Zonoids with an equatorial characterization", *Applications of Mathematics (N. AM 333)*, **2015**, **61**(4), 413 – 422 (2016).
- [5] R. H. Aramyan, "Generalized Radon transform on the sphere", *Analysis Oldenbourg*, **30** (3), 271 – 281 (2010).
- [6] Р. Г. Арамян, "Решение одного интегрального уравнения на сфере методами интегральной геометрии", *Доклады Академии наук*, **426** (2), 151 – 155 (2009) [*Doklady Mathematics*, **70**(3), 325 – 328 (2009)].
- [7] C. Berg, "Corps convexes et potentiels spheriques", *Mat.-Fys.Meddel. Danske Vid. Selsk.* **37**, 3 – 58 (1969).
- [8] E. D. Bolker, "A class of convex bodies", *Trans. Amer. Math. Soc.* **145**, 323 – 315 (1969).
- [9] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, 2nd Ed., W. de Gruyter, Berlin (1956).
- [10] R. J. Gardner, *Geometric Tomography*, Second ed., Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [11] P. Goodey, W. Weil, "Zonoids and generalizations", In *Handbook of convex geometry*, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, North Holland, Amsterdam, 1297 – 1326 (1993).
- [12] H. Groemer, *Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics. Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **61**, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- [13] G. Marzell, F. B. Schuster, "The Sine Transform of Isotropic Measures" *International Mathematics Research Notices* **4**, 717 – 739 (2012).
- [14] S. Helgason, *The Radon Transform*, Birkhauser, Basel and Boston, Massachusetts (1980).
- [15] F. Nazarov, D. Ryabogin, A. Zvavitch, "On the local equatorial characterization of zonoids and intersection bodies", *Advances in Mathematics* **217** (3), 1368 – 1380 (2008).
- [16] K. Leichtweiz, *Konvexe Mengen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1980).
- [17] R. Schneider, "Über eine Integralgleichung in der Theorie der konvexen Körper", *Math. Nachr.* **44**, 55 – 75 (1970).
- [18] Г. Ю. Нанкин, "Представление n -мерного тела в виде суммы $(n-1)$ -мерных тел", *Изв. АН Арм. ССР сер. матем.* **23**(4), 385 – 395 (1988) [*Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, **23**, no. 4, 91 – 103 (1988)].
- [19] R. Schneider, F.E. Schuster, "Rotation invariant Minkowski classes of convex bodies", *Mathematika* **54**, 1 – 13 (2007).
- [20] W. Weil, "Blaschkes Problem der lokalen Charakterisierung von Zonoiden", *Arch. Math.*, **29**, 655 – 669 (1977).
- [21] W. Weil, R. Schneider, "Zonoids and related Topics", in: P. Gruber, J. Wills (Eds), *Convexity and its Applications*, Birkhauser, Basel, 296 – 317 (1983).

Поступила 19 марта 2018

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА ПО СИСТЕМАМ ВИЛЕНКИНА

М. Г. ГРИГОРЯН, С. А. САРГСЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: gmartinghysu.am; stepanyantsghysu.am

Аннотация. В работе доказано, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1)$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое что для любой функции $f \in L[0, 1)$ можно построить функцию $\tilde{f} \in L[0, 1)$, совпадающую с f на E и $\int_0^1 |\tilde{f}(x) - f(x)| dx < \varepsilon$, такую, что как ряд Фурье так и жадный алгоритм (функции f по системе Виленкина) ограниченного типа сходятся почти всюду на $[0, 1)$.

MSC2010 number: 42C10, 42C20.

Ключевые слова: Система Виленкина; сходимость; ряд Фурье; жадный алгоритм.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа продолжает исследования авторов в области сходимости жадного алгоритма и поведения коэффициентов Фурье по классическим системам с точки зрения широко известных классических теорем об “исправлении функций” Н. Н. Лузина [1] и Д. Е. Меньшова [2] (см. также [3] – [6]).

Напомним определение класса мультипликативных систем функций (см. [7] [8]). Пусть $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная последовательность простых чисел, где $p_k \geq 2$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$(1.1) \quad m_0 = 1 \text{ и } m_k = \prod_{j=1}^k p_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко заметить, что для каждой точки $x \in [0, 1)$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют числа $\alpha_j, \alpha_j \in \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$ такие, что

$$(1.2) \quad n = \sum_{j=1}^k \alpha_j m_{j-1} \text{ и } x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{m_j}.$$

⁰Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18T-1A14B.

Формулы (1.2) называют P -чными разложениями натурального числа n и $x \in [0, 1]$.

Отметим, что точки вида $\frac{l}{m_k}, l \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq m_k - 1$, имеют два различных разложения - конечное и бесконечное. В дальнейшем для таких точек условимся рассматривать только конечные разложения. Для заданной последовательности P мультипликативная система $W = \{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется следующим образом:

$$(1.3) \quad W_0(x) \equiv 1; \quad W_n(x) = \exp \left(2\pi i \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{x_i}{p_i} \right), \quad (i - \text{маямая единица}).$$

Выражение (1.3) можно записать в форме

$$W_n(x) = \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{x_j}{p_j} \right) = \prod_{j=1}^k \left(\exp \left(2\pi i \frac{x_j}{p_j} \right) \right)^{\alpha_j}.$$

Ввиду (1.3) имеем $W_{m_{j-1}}(x) = \exp \left(2\pi i \frac{x_j}{p_j} \right)$, следовательно для n -ой мультипликативной функции получаем выражение

$$W_n(x) = \prod_{j=1}^k (W_{m_{j-1}}(x))^{\alpha_j}.$$

В случае когда $P = \{2, 2, \dots\}$ система $W = \{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ совпадает с системой Хадяма-Пэли (см. [9]), а в случае $P = \{a, a, \dots\}$, где $a > 2$ простое число, система W совпадает с системой Крестисона-Левина (см. [10]). Системы вида (1.3) были введены Н. Я. Виленикиным в 1946 году (см. [8]), и поэтому эти системы часто называют системами Виленикина.

В случае $\sup \{\mu_k\} < \infty$ система $W = \{W_n(x)\}$ называется мультипликативной системой ограниченного типа. В противном случае - неограниченного типа. Пусть f вещественнозначная функция из $L[0, 1]$. Обозначим коэффициенты Фурье функции f по системе Виленикина через $c_n(f)$, а частичные суммы ряда Фурье по этой системе через $S_n(x, f)$ т.е.

$$(1.4) \quad c_n(f) = \int_0^1 f(x) W_n(x) dx, \quad S_n(x, f) = \sum_{k=0}^n c_k(f) W_k(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{где } \int_0^1 W_n(t) \overline{W_k(t)} dt = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad \overline{W_k(t)} - \text{комплексное сопряженное } W_k(t).$$

Обозначим через $\text{spec}(f)$ спектр функции f (т.е. $\text{spec}(f)$ - множество номеров ненулевых коэффициентов $\{c_k(f)\}_{k=0}^{\infty}$ (см. (1.4))).

В работах [11]–[14] для мультипликативных систем получены интересные результаты. Большинство результатов по мультипликативным системам получены для систем ограниченного типа. Многие результаты пока не имеют простых аналогов для систем неограниченного типа и изучение вопросов с точки зрения поведения последовательности $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет самостоятельный интерес. В частности, неизвестно верна ли Теорема Карлесона для мультипликативных систем неограниченного типа.

Отметим, что в 1957 году К. Ватаря [11] доказал, что система Вилленкина с $\sup\{p_k\} < \infty$ является базисом в $L^r[0, 1]$ при $r > 1$. Затем, в 1976 году, В. Ялт [12] для произвольной последовательности $\{p_k\}$ установил базисность системы Вилленкина в $L^r[0, 1]$, при $r > 1$. В случае $\limsup p_n < \infty$ известно, что $c_n(f) = O(n^{-1})$, если f имеет конечную вариацию и $c_n(f) = O(n^{-\alpha})$ в случае $f \in \text{Lip } \alpha$.

В сравнении с этими результатами отметим, что Прайс [13] показал, что если $\limsup p_n = \infty$, то $\limsup n|c_n(\psi)| = \infty$ для $\psi(x) = x - [x]$. Более того, существует $f_0 \in \text{Lip } \alpha$ такая, что $\limsup n|c_n(f_0)| = \infty$. Далее, при условии $\limsup p_n = \infty$ найдется $f_0 \in G(0, 1)$ -ряд Фурье, которой по соответствующей мультипликативной системе не суммируем методом $(C, 1)$ в некоторой точке. Для мультипликативной системы с $p_n \uparrow$ и $m_{l-1}^{-1} \log p_k \rightarrow \infty$, $(C, 1)$ средние функции $x - [x]$ расходятся на счетном множестве. Отметим также [14], что в случае $\limsup p_n < \infty$, $(C, 1)$ средние любой непрерывной функции f по мультипликативной системе равномерно сходятся к f .

Напомним определение жадного алгоритма. Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — базис в банаховом пространстве X . Для каждого $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f, \Psi) \psi_k.$$

Перестановку неотрицательных целых чисел $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем убывающей, если $|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|$, $k = 1, 2, \dots$. Множество таких перестановок обозначим через $D(f, \Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f, \Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. Для каждой функции $f \in X$ и для любого элемента $\sigma \in D(f, \Psi)$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f, \Psi, \sigma)\}_{m=1}^{\infty}$, которая известна как жадный алгоритм (см. [15]), следующим образом

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi, \sigma) = \sum_{k=1}^m c_{\sigma(k)}(f) \psi_{\sigma(k)}.$$

Заметим, что оператор $G_m(f)$ зависит от σ . Говорят, что жадный алгоритм функции f по системе Ψ сходится в X , если при некотором $\sigma \in D(f, \Psi)$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = 0.$$

Метод приближения функции f последовательностью операторов $\{G_m(f, \sigma)\}_{m=1}^{\infty}$ называется жадным (жадным) алгоритмом функции f по системе $\Psi = \{u_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Жадные алгоритмы для банаховых пространств, относительно нормированных базисов изучены в работах [16]–[22].

В настоящей работе мы изучим некоторые вопросы о поведении жадного алгоритма, а также, поведения коэффициентов Фурье по мультипликативной системе после исцараживания функции, такие вопросы были рассмотрены для классических систем в работах [23]–[26].

Приведем результаты, имеющие непосредственное отношение к данной работе.

Теорема 1.1. [25] *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любой функции $f \in L(E)$ можно построить функцию $\tilde{f} \in L[0, 1]$, которая совпадает с f на E , и как жадный алгоритм так и ряд Фурье функции $\tilde{f}$ по системе Уолша сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$.*

Теорема 1.2. [26] *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любой функции $f \in L(E)$ можно построить функцию $\tilde{f} \in L[0, 1]$, которая совпадает с f на E , ряд Фурье которой по системе Уолша сходится к ней по $L^1[0, 1]$ -норме и $|\hat{b}_n(f)| > |\hat{b}_{n+1}(f)|$, $n = 0, 1, 2, \dots$.*

Отметим, что нам неизвестен ответ следующего вопроса.

Вопрос 1.1. *Верны ли Теоремы 1.1 и 1.2 для любой мультипликативной системы и для тригонометрической системы?*

В связи с этим вопросом в настоящей работе для систем Вилленкина ограниченного типа доказывается следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть $W = \{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — мультипликативная система функций определяемая ограниченной последовательностью $P = \{p_k\}_{k=0}^{\infty}$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$,*

такое что для любой функции $f \in L(E)$ можно построить функцию $\tilde{f} \in L[0, 1]$, которая совпадает с f на E , такую, что

- (1) как жадный алгоритм так и ряд Фурье функции $\tilde{f}$ по системе $\mathcal{H}$ сходятся к ней почти всюду на $[0, 1]$,
- (2) множество $D(\tilde{f}, \mathcal{H})$ содержит только один элемент.
- (3) $\int_0^1 |\tilde{f}(x) - f(x)| dx < \epsilon$.

Отметим, что нам не известно верна ли Теорема 1.3 для любой мультипликативной системы $W = \{W_k(x)\}_{k=0}^\infty$ функций определяемой неотращенной последовательностью $P = \{p_k\}_{k=0}^\infty$. Для таких систем нам удалось получить лишь следующий результат (см. [27]): для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любой функции $f \in L(E)$ можно построить функцию $\tilde{f} \in L[0, 1]$, которая совпадает с f на E и все ненулевые коэффициенты Фурье функции $\tilde{f}$ по системе Вилкинса по модулю расходятся в убывающем порядке.

2. ВОСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $W = \{W_k\}_{k=0}^\infty$ мультипликативная система функций, определяемая последовательностью $P = \{p_k\}_{k=0}^\infty$. Мы будем использовать следующее обозначение (см. (1.1)):

$$(2.1) \quad \Delta_n^{(k)} = \left[\frac{n}{m_k}, \frac{n+1}{m_k} \right), \text{ где } n = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Рассмотрим множество пар $\{\gamma, \Delta\}$, где γ пробегает множество всех действительных чисел ($\gamma \neq 0$), а Δ пробегает множество всех интервалов вида $\Delta_n^{(k)}$. Положим

$$(2.2) \quad \mathcal{B} = \{f(x) : f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \chi_{\Delta_k}, (\gamma_k, \Delta_k) \in \{\gamma, \Delta\}, \Delta_k \cap \Delta_{k'} = \emptyset, k \neq k'\}.$$

Пусть $x, y \in [0, 1]$. Напомним, что операция $x \oplus y$ определяется следующим образом:

$$(2.3) \quad x \oplus y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k \oplus y_k}{m_k},$$

где $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ коэффициенты P -итых разложений чисел x и y (см. (1.2)),

$$x_k \oplus y_k = \begin{cases} x_k + y_k, & \text{если } x_k + y_k < p_k \\ x_k + y_k - p_k, & \text{если } x_k + y_k \geq p_k \end{cases}$$

Отметим, что операция $\oplus$ определяется как обратная операция для $\ominus$. При $P = \{2, 2, \dots\}$, операции $\oplus$ и $\ominus$ совпадают.

Далее нам понадобятся следующие свойства системы W (см. также (1.1)):

$$(2.4) \quad W_n(x) = W_n\left(\frac{j}{m_k}\right), \forall x \in \Delta_j^{(k)}, \text{ при } 0 \leq n \leq m_k - 1 \text{ и } 0 \leq j < m_k.$$

$$(2.5) \quad \int_{\Delta_j^{(k)}} W_n(x) dx = 0, \text{ при } n \geq m_k \text{ и } 0 \leq j < m_k,$$

$$(2.6) \quad W_{im_k + \beta}(x) = W_{im_k}(x) W_\beta(x), \text{ при } \beta < m_k \quad (l, \beta \in \mathbb{N}),$$

$$(2.7) \quad W_n(x) W_n(y) = W_n(x \oplus y), \quad W_n(x) \overline{W}_n(y) = W_n(x \ominus y), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть $D_n(x)$ ядро Дирихле системы W , т.е.

$$(2.8) \quad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} W_k(x), \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение (см. [7], (1.5.21))

$$(2.9) \quad D_n\left(x + \frac{j}{m_k}\right) = \begin{cases} D_n(x) & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{m_k}\right), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 2.1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $W = \{W_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ -система Вилеккина определяемая последовательностью $P = \{p_1, p_2, \dots\}$, и $\tilde{W} = \{\tilde{W}_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ -система Вилеккина определяемая последовательностью $\tilde{P} = \{p_{k+1}, p_{k+2}, \dots\}$. Тогда для любых $\alpha \in \mathbb{N}$ и $l \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$

$$W_{\alpha m_k} \left(x + \frac{l}{m_k} \right) = W_\alpha(m_k x), \text{ для всех } x \in \left[0, \frac{1}{m_k}\right).$$

Доказательство. Обозначим

$$(2.10) \quad p_{j+1} = p_{k+j+1}, \quad \tilde{m}_j = \frac{m_{j+1}}{m_k}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Пусть $x \in \left[0, \frac{1}{m_k}\right)$ и $\alpha \in \mathbb{N}$, тогда существует $\nu \in \mathbb{N}$, такое, что $\tilde{m}_{\nu-1} \leq \alpha < \tilde{m}_\nu$. Пусть $\{\tilde{a}_j\}_{j=1}^\nu$ и $\{a_j\}_{j=1}^\nu$ коэффициенты разложения числа α соответственно по последовательностям $\tilde{P}$ и P , а $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\nu$ коэффициенты разложения x по P . Рассмотрим разложение натурального числа α по P :

$$(2.11) \quad \alpha = \sum_{j=1}^\nu \tilde{a}_j \tilde{m}_{j-1}.$$

Изсюда и из (2.10) следует, что $\alpha m_k = \sum_{j=1}^V \tilde{\alpha}_j m_{k+j-1}$. Учитывая также, что $q \leq \tilde{\alpha}_j \leq p_j - 1 = p_{j,k} - 1$, $j = 1, \dots, V$ отсюда получаем

$$(2.12) \quad \alpha_{j+k} = \begin{cases} \tilde{\alpha}_j, & \text{если } 0 \leq j \leq V \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Изсюда, для разложения числа αm_k по P имеем $\alpha m_k = \sum_{j=1}^V \alpha_{j+k} m_{j+k-1}$. С другой стороны, так как $x < \frac{1}{m_k}$, то $x_j = 0$, для $j = 1, \dots, k$ в P -ичное разложение числа x имеет вид

$$(2.13) \quad x = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{x_{j+k}}{m_{j+k}}.$$

Пусть $l \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$ произвольное число. Очевидно, что начиная с номера $k+1$ коэффициенты P -ичного разложения числа $x + \frac{l}{m_k}$ совпадают с $\{x_j\}_{j=k}^{\infty}$, и следовательно из определения системы Виленькина получаем

$$W_{\alpha m_k} \left(x + \frac{l}{m_k} \right) = \prod_{j=1}^V \exp \left(2\pi i \frac{x_{j+k} \tilde{\alpha}_j + l}{p_{j+k}} \right).$$

И следовательно (см. (2.10)-(2.12) и (2.13))

$$W_{\alpha m_k} \left(x + \frac{l}{m_k} \right) = \prod_{j=1}^V \exp \left(2\pi i \frac{x_{j+k} \tilde{\alpha}_j}{p_j} \right) = \tilde{W}_x \left(\sum_{j=1}^V \frac{x_{j+k}}{\tilde{m}_j} \right) = \tilde{W}_x(m_k x). \quad \square$$

Лемма 2.2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $W = \{W_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ - система Виленькина, определяемая последовательностью $P = \{p_1, p_2, \dots\}$. Для любых $n, n_0 \in \mathbb{N}$ справедливы следующие соотношения

$$(1) \quad \sum_{\alpha=2}^{m_{n_0}-1} W_{\alpha m_k}(x) = \begin{cases} \frac{m_{n_0}}{m_k} - 1, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k} + \frac{1}{m_{n_0}} \right), \quad l = 0, 1, \dots, m_k - 1, \\ -1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$(2) \quad \left| \sum_{\alpha=2}^{m_n} W_{\alpha m_k}(x) \right| \leq \frac{m_{k+n}}{m_k} + 1, \text{ если } x \in \left[\frac{1}{m_k} + \frac{1}{m_{k+n}}, \frac{(k+1)}{m_k} \right), \quad l = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Доказательство. Сперва докажем, что для любой системы Виленькина справедливо следующее утверждение:

$$(2.14) \quad |D_n(x)| < m_k, \text{ для любой } x \in \left[\frac{1}{m_k}, 1 \right), k, n \in \mathbb{N}.$$

Действительно, если $n < m_k$ то получим $|D_n(x)| = \left| \sum_{j=0}^{n-1} W_j(x) \right| \leq n < m_k$, для любой $x \in [0, 1]$. Теперь предположим, что $n \geq m_k$, тогда существуют $A \in \mathbb{N}$, и $B \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$, для которых $n = Am_k + B$, следовательно (см. (2.4)-(2.6),

(2.8)):

$$D_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} W_j(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} W_{Am_k+j}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} W_{Am_k+j}(x) = \\ = \left(\sum_{j=0}^{m_k-1} W_{Am_k+j}(x) \right) D_{m_k}(x) + W_{Am_k}(x) \sum_{j=0}^{B-1} W_j(x), \text{ где } \sum_{j=0}^{m_k-1} W_j(x) = 0 \text{ если } B = 0$$

Учитывая (см. (2.9)), что $D_{m_k}(x) = 0$, при $x \in [0, 1] \setminus \Delta_0^{(k)}$, получим (2.14).

Докажем первое утверждение леммы. Пусть $\bar{W} = \{W_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ -система Виллекиша для последовательности $\bar{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ с $p_j = p_{j+1}$ и $m_j = \frac{p_j}{p_{j+1}}$, $j = 0, 1, \dots$. Пусть $x \in \left[\frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k} + \frac{1}{m_{k+1}}\right)$, где $k \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$ произвольное число, откуда и из Леммы 2.1 получим

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} W_{Am_k+j}(x) = \sum_{j=0}^{m_k-1} W_j\left(x - \frac{1}{m_k}\right) = D_{m_k}\left(x - \frac{1}{m_k}\right) = 0.$$

Учитывая также, что

$$x - \frac{1}{m_k} \in \left[\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_k}\right] = \left[\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_k}\right],$$

$$(2.15) \quad x - \frac{1}{m_k} \in \left[\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_k}\right] = \left[\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_k}\right],$$

имеем (см. также (2.9))

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} W_{Am_k+j}(x) = \begin{cases} \frac{m_k-1}{m_k} - 1 & \text{если } x \in \left[\frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k} + \frac{1}{m_{k+1}}\right), \quad k = 0, 1, \dots, m_k - 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь докажем второе утверждение леммы. Пусть $x \in \left[\frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k} + \frac{1}{m_{k+1}}\right)$, из Леммы 2.1 следует

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} W_{Am_k+j}(x) = \sum_{j=0}^{m_k-1} W_j\left(x - \frac{1}{m_k}\right) = D_{m_k}\left(x - \frac{1}{m_k}\right) = 0.$$

Учитывая также (2.14) и (2.15), будем иметь

$$\left| \sum_{j=0}^{m_k-1} W_{Am_k+j}(x) \right| \leq \frac{m_k-1}{m_k} + 1 \text{ если } x \in \left[\frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k} + \frac{1}{m_{k+1}}\right), \quad k = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Лемма 2.2 доказана. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $W = \{W_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ -мультипликативная система функций определяемая ограниченной последовательностью $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $b = \sup\{p_j\}$. Тогда для любого интервала $\Delta = \left[\frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k} + \frac{1}{m_{k+1}}\right)$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $0 \leq k_0 \leq m_{k_0} - 1$, для любых чисел $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и для любого натурального N_0 существуют полиномы $Q(x)$

и $P(x) = \sum_{j=N_0}^{\infty} a_j W_j(x)$ и измеримое множество $E \subset \Delta$ с мерой $|E| > (1 - \varepsilon) |\Delta|$ такое, что

$$(1) \quad |a_j| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |a_j| > \gamma \quad \text{для} \quad j \in \text{spec}(P),$$

$$(2) \quad Q(x) = \begin{cases} \gamma & \text{если } x \in E, \\ 0 & \text{если } x \notin E, \end{cases} \quad \int_0^1 Q(x) dx \leq 2^{-1} |\Delta|, \quad \int_0^1 |Q(x) - P(x)| dx \leq \varepsilon,$$

$$(3) \quad \sup_{N_0 < M < N} \left| \sum_{j=N_0}^M a_j W_j(x) \right| \leq \begin{cases} \frac{2\gamma}{\varepsilon}, & \text{если } x \in \Delta, \\ 2|\gamma|, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$(4) \quad \text{Пусть } \eta \in (0, 1), \eta > \varepsilon, \text{ существует множество } G \subset \Delta \text{ с } |G| > (1 - \eta) |\Delta|$$

$$\text{для которого} \quad \sup_{N_0 < M < N} \left| \sum_{j=N_0}^M a_j W_j(x) \right| \leq \frac{2\gamma}{\eta}, \quad \text{если } x \in G.$$

Доказательство. Возьмем натуральное число k такое, что $m_k > \max \left\{ \frac{2\gamma}{\varepsilon}, N_0, m_{k_0}^2 \frac{2}{\varepsilon} \right\}$.

Обозначим

$$(2.16) \quad q_1 = \frac{m_k}{m_{k_0}}, \quad x(q) = \frac{l_0}{m_{k_0}} + \frac{q-1}{m_k}, \quad \Delta_q = [x_q, x_{q+1}), \quad \text{где } q = 1, \dots, q_0.$$

Ясно, что

$$(2.17) \quad \Delta = \bigcup_{q=1}^{q_0} \Delta_q \quad \text{и} \quad \Delta_{q'} \cap \Delta_{q''} = \emptyset, \quad \text{если } q' \neq q''.$$

Далее, будем определять по индукции числа $\{k_q\}_{q=1}^{q_0}$, $\{\nu_q\}_{q=1}^{q_0}$, полиномы $\{Q_q(x)\}_{q=1}^{q_0}$ и множества $\{E_q\}_{q=1}^{q_0}$. Возьмем $k_1 = k$. Очевидно, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$(2.18) \quad \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{m_{j+\nu-1}}{m_j}, \frac{m_{j+\nu}}{m_j} \right) = [1, \infty).$$

Отсюда следует, что существует единственное $\nu_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{m_{k_1+\nu_1-1}}{m_{k_1}} \leq \frac{1}{\varepsilon} < \frac{m_{k_1+\nu_1}}{m_{k_1}}$. Пусть j натуральное число и $j \in \{m_{k_1}, m_{k_1+\nu_1}\}$, тогда существуют целые числа $\alpha \in \left[1, \frac{m_{k_1+\nu_1}}{m_{k_1}} \right)$ и $\beta \in [0, m_{k_1})$, такие, что $j = \alpha m_{k_1} + \beta$, положим

$$c_j^{(1)} = -\frac{\gamma}{m_k} W_\beta \left(\frac{l_0}{m_{k_0}} \right),$$

$$Q_1(x) = \sum_{j=m_{k_0}}^{m_{k_1+\nu_1}-1} c_j^{(1)} W_j(x) \quad \text{и} \quad E_1 = \Delta_1 \setminus \left[x^{(1)}, x^{(1)} + \frac{1}{m_{k_1+\nu_1}} \right).$$

Предположим, что уже определены числа $k = k_1 < k_2 < \dots < k_{q-1}$, полиномы $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_{q-1}(x)$ и множества $E_1, E_2, \dots, E_{q-1}$. Положим $k_q = k_{q-1} + \nu_{q-1}$. Из (2.18) следует, что существует натуральное число ν_q такое, что

$$(2.19) \quad \frac{m_{k_q+\nu_q-1}}{m_{k_q}} \leq \frac{1}{\varepsilon} < \frac{m_{k_q+\nu_q}}{m_{k_q}}.$$

Учитывая ограниченность последовательности $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ и равенство $m_{j+1} = p_{j+1}m_j$, из (2.19) получим

$$(2.20) \quad \frac{1}{\varepsilon} < \frac{m_{k_0}}{m_{k_1}} = p_{k_0} \frac{m_{k_0-1}}{m_{k_1}} \leq p \frac{m_{k_0-1}}{m_{k_1}} < \frac{p}{\varepsilon}.$$

Пусть $j \in [m_{k_0}, m_{k_0+\nu_0})$. Тогда существуют целые числа $\alpha \in \left[1, \frac{m_{k_0+\nu_0}}{m_{k_0}}\right)$ и $\beta \in [0, m_{k_0})$, такие, что $j = \alpha m_{k_0} + \beta$, положим

$$(2.21) \quad c_j^{(q)} = \begin{cases} -\frac{\gamma}{m_2} W_\beta(x^{(q)}), & \text{если } 0 \leq \beta < m_{k_0} - 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad Q_q(x) = \sum_{j=0}^{m_{k_0+\nu_0}-1} c_j^{(q)} W_j(x).$$

$$(2.22) \quad E_q := \Delta_q \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{m_{k_0}-1} \left[x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_0}} \cdot x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_0}} + \frac{1}{m_{k_0+\nu_0}} \right) \right)$$

Отсюда и из (2.16), (2.22) следует, что

$$(2.23) \quad |E_q| = |\Delta_q| - \sum_{j=0}^{m_{k_0}-1} \left| \left[x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_0}} \cdot x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_0}} + \frac{1}{m_{k_0+\nu_0}} \right) \right| =$$

$$= |\Delta_q| \left(1 - \frac{m_{k_0}}{m_{k_0+\nu_0}} \right) > |\Delta_q| (1 - \varepsilon).$$

Далее положим

$$(2.24) \quad c_j = c_j^{(q)}, \quad a_j = \text{sign}(c_j) \left(|c_j| + \frac{\min\{\delta, |\gamma||\Delta|\}}{2^{j+1}} \right), \quad \text{где } j = m_{k_0}, \dots, m_{k_0+\nu_0} - 1,$$

$$(2.25) \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_q(x) = \sum_{j=m_{k_0}}^{\infty} c_j W_j(x), \quad \text{где } N_0 = m_{k_0}, \quad N = m_{k_0+\nu_0} - 1,$$

$$(2.26) \quad E = \bigcup_{q=0}^{\infty} E_q, \quad P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j W_j(x).$$

Покажем, что $Q(x)$, $P(x)$ и E удовлетворяют требованиям леммы.

Учитывая, что $|\Delta| = \sum_{q=0}^{\infty} |\Delta_q|$ (см. (2.17)) из (2.22), (2.24) и (2.26) получим

$$|E| = \sum_{q=0}^{\infty} |E_q| > \sum_{q=0}^{\infty} |\Delta_q| (1 - \varepsilon) = |\Delta| (1 - \varepsilon), \quad \int_{J_0}^1 |Q(x) - P(x)| dx \leq \delta.$$

Из (2.6), (2.7) и (2.21) для любого натурального $q \in [1, q_0]$ получим

$$\begin{aligned} Q_q(x) &= \sum_{j=m_{k_q}}^{m_{k_{q+1}}-1} c_j W_j(x) = \sum_{n=1}^H \sum_{\beta=0}^{m_n-1} c_{nm_{k_q}+\beta} W_{n,m_{k_q}+\beta}(x) = \\ &= -\frac{\gamma}{m_k} \sum_{n=1}^H W_{nm_{k_q}}(x) \sum_{\beta=0}^{m_n-1} \overline{W}_\beta(x^{(q)}) W_\beta(x) = \\ &= -\frac{\gamma}{m_k} \left(\sum_{n=1}^H W_{nm_{k_q}}(x) \right) \left(\sum_{\beta=0}^{m_n-1} W_\beta(x \in x^{(q)}) \right) = \\ &= -\frac{\gamma}{m_k} D_{m_k}(x \in x^{(q)}) \left(\sum_{n=1}^H W_{nm_{k_q}}(x) \right), \end{aligned}$$

где $H = \frac{m_{k_0+1} - m_{k_0}}{m_{k_q}} - 1$. Откуда и из Леммы 2.2 будем иметь

$$(2.27) \quad Q_q(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } x \in E_q, \\ \gamma \left(1 - \frac{m_{k_q+1} - m_{k_q}}{m_{k_q}} \right), & \text{если } x \in \Delta_q \setminus E_q, \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta_q. \end{cases}$$

Поэтому учитывая также (2.16), (2.22), (2.25), (2.26) получим

$$Q(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta. \end{cases}$$

Пусть натуральное число $M \in [N_0, N]$ (см. (2.25)), тогда существует $q \in [1, q_0]$, такое, что $m_{k_q} \leq M < m_{k_{q+1}}$, ($k_{q_0+1} = k_{q_0} + \nu_{q_0}$). Следовательно, существуют целые числа $\alpha_0 \in \left[1, \frac{m_{k_q+1}}{m_{k_q}}\right)$ и $\beta_0 \in [0, m_{k_q})$, такие, что

$$(2.28) \quad M = \alpha_0 m_{k_q} + \beta_0.$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=m_{k_q}}^M c_j W_j(x) = \sum_{j=1}^{q-1} Q_j(x) + \sum_{j=m_{k_q}}^M c_j W_j(x).$$

Следовательно

$$(2.29) \quad \int_0^1 \left| \sum_{j=m_{k_q}}^M c_j W_j(t) \right| dt \leq \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{q-1} Q_j(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{j=m_{k_q}}^M c_j W_j(t) \right| dt.$$

Из (2.22) и (2.27) легко вывести, что $|Q_j(x)| \leq 2|\gamma||\Delta_j|$, где $j = 1, \dots, q_0$. Отсюда

$$(2.30) \quad \int_0^1 |Q(t)| dt \leq \sum_{j=1}^{q_0} \int_0^1 |Q_j(t)| dt \leq \sum_{j=1}^{q_0} 2|\gamma||\Delta_j| = 2|\gamma||\Delta|.$$

Следовательно, доказано утверждение 2. Для доказательства утверждения 3) рассмотрим полином

$$(2.31) \quad \sum_{j=0}^{m_k} c_{\alpha_j m_k + \beta} x^j = Q_M^{(0)}(x) + Q_M^{(2)}(x) + Q_M^{(3)}(x), \text{ где}$$

$$(2.32) \quad Q_M^{(2)}(x) = \sum_{j=1}^{m_k} Q_j^{(2)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{m_k-1} \sum_{\beta=0}^{m_k-\alpha} c_{\alpha m_k + \beta} W_{\alpha m_k + \beta}(x)$$

$$(2.33) \quad Q_M^{(3)}(x) = \sum_{\beta=0}^{S_0} c_{\alpha_0 m_k + \beta} W_{\alpha_0 m_k + \beta}(x)$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $S_0 < m_k$. Действительно, в случае $S_0 \geq m_k$, как уже известно, $c_{\alpha_0 m_k + \beta} = 0$, для $m_k \leq \beta \leq S_0$, следовательно

$$\sum_{\beta=0}^{S_0} c_{\alpha_0 m_k + \beta} W_{\alpha_0 m_k + \beta}(x) = \sum_{\beta=0}^{m_k-1} c_{\alpha_0 m_k + \beta} W_{\alpha_0 m_k + \beta}(x).$$

Принимая во внимание (см. (2.7)), что

$$W_{\alpha m_k + \beta}(x) = W_{\alpha m_k}(x) W_{\beta}(x) \text{ и } \overline{W}_{\beta}(x^{(q)}) W_{\beta}(x) = W_{\beta}(x \odot x^{(q)}),$$

из (2.21) и (2.24) получаем

$$(2.34) \quad Q_M^{(2)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{m_k-1} \rho_{\alpha} (x \odot x^{(q)}) \sum_{\beta=0}^{m_k-\alpha} W_{\alpha m_k + \beta}(x),$$

$$(2.35) \quad Q_M^{(3)}(x) = \sum_{\beta=0}^{S_0} W_{\alpha_0 m_k + \beta}(x) D_{\rho_{\alpha_0+1}}(x \odot x^{(q)}).$$

Из (2.20), (2.27) и (2.32) имеем

$$(2.36) \quad \begin{aligned} |Q_M^{(i)}| &\leq \frac{q^i}{i}, \quad \text{если } i \in \Delta_j, \quad j = 1, \dots, r-1, \\ |Q_M^{(r)}| &= 0 \quad \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Учитывая, что из условия $x \odot x^{(q)} \in [0, \frac{q-1}{q}]$ следует, что $x \in \Delta_q$ и наоборот, то из (2.9) и (2.34) следует, что

$$(2.37) \quad \left| Q_M^{(i)} - \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{m_k-i} c_{\alpha_j m_k + \beta} x^j \right| \leq \frac{q^i}{i}$$

где χ_{Δ_q} — характеристическая функция множества Δ_q . Следовательно используя $k_q = k_{q-1} + \mu_{q-1}$, получаем (2.28)

$$(2.38) \quad \begin{aligned} |Q_M^{(2)}(x)| &\leq \frac{k_q}{1}, \quad \text{если } x \in \Delta_q, \\ |Q_M^{(2)}(x)| &= 0, \quad \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Далее, из (2.35) следует, что

$$(2.39) \quad |Q_M^{(3)}(x)| \leq |\gamma|.$$

Окончательно, из (2.31), (2.36), (2.38) и (2.39) следует справедливость утверждения 4).

Пусть $q \in (0, 1)$, $\eta > \varepsilon$, очевидно, что для любого $q \in \{1, \dots, q_0\}$ существует число $\mu_q \in \mathbb{N}$, для которого справедливо следующее соотношение

$$(2.40) \quad \frac{mk_q + \mu_q - 1}{m_{k_q}} \leq \frac{1}{\eta} < \frac{mk_q + \mu_q}{m_{k_q}}.$$

Обозначим

$$(2.41) \quad G_q = \bigcup_{j=0}^{\frac{mk_q + \mu_q}{m_{k_q}} - 1} \left[x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_q}} + \frac{1}{m_{k_q + \mu_q}} x^{(q)} + \frac{j+1}{m_{k_q}} \right), \quad q = 1, 2, \dots, q_0.$$

$$(2.42) \quad G = \bigcup_{q=1}^{q_0} G_q.$$

Для меры множества G_q (см. (2.41)) имеем

$$|G_q| = \frac{m_{k_q}}{m_k} \left(\frac{1}{m_{k_q}} - \frac{1}{m_{k_q + \mu_q}} \right) = \frac{1}{m_k} \left(1 - \frac{m_{k_q}}{m_{k_q + \mu_q}} \right) > |\Delta_q|(1 - \eta).$$

Отсюда, и из (2.42) получим $|G| > |\Delta|(1 - \eta)$.

Теперь докажем утверждение 4). Пусть $x \in G$, из (2.41) и (2.42) следует существование чисел $\bar{q} \in \{1, 2, 3, \dots, q_0\}$ и $\bar{j} \in \left\{0, 1, \dots, \frac{mk_{\bar{q}} + \mu_{\bar{q}}}{m_{k_{\bar{q}}}} - 1\right\}$, для которых

$$x \in \left[x^{(\bar{q})} + \frac{\bar{j}}{m_{k_{\bar{q}}}} + \frac{1}{m_{k_{\bar{q}} + \mu_{\bar{q}}}} x^{(\bar{q})} + \frac{\bar{j}+1}{m_{k_{\bar{q}}}} \right).$$

Итак, что

$$(2.43) \quad x \in \left[\frac{l}{m_{k_{\bar{q}}}} + \frac{1}{m_{k_{\bar{q}} + \mu_{\bar{q}}}}, \frac{l+1}{m_{k_{\bar{q}}}} \right), \quad \text{где } l = l_0 \frac{mk_{\bar{q}}}{m_{k_n}} + (\bar{q} - 1) \frac{mk_{\bar{q}}}{m_{k_1}} + \bar{j}.$$

Рассмотрим натуральное число $M \in [N_0, N]$. Учитывая формулу (2.28), (2.32)-(2.33) получим

$$1) \text{ Если } M < m_{k_{\bar{q}}} \text{ то } Q_M^{(1)}(x) = Q_M^{(2)}(x) = 0, \quad \left| \sum_{j=m_0}^M c_j W_j(x) \right| = |Q_M^{(3)}(x)| \leq |\gamma|.$$

2) Если $M \geq m_{k+1}$, то $Q_M^{(2)}(x) = |\gamma|$, $Q_M^{(3)}(x) = 0$ и тогда $\left| \sum_{j=m_k}^M c_j W_j(x) \right| < |Q_M^{(1)}(x)| + |Q_M^{(3)}(x)| \leq 2|\gamma|$.

3) Если же $m_k \leq M < m_{k+1}$, то тогда $Q_M^{(1)}(x) = 0$, и из утверждения 2. Леммы 2.2, получим $|Q_M^{(2)}(x)| \leq b|\gamma| \frac{m_{k+1}-m_k-2}{m_{k+1}}$, с другой стороны ясно, что $|Q_M^{(3)}(x)| \leq |\gamma|$ и, следовательно, $\left| \sum_{j=m_k}^M c_j W_j(x) \right| \leq \frac{2b}{m_{k+1}} + |\gamma|$, для всех $M \in \{N_0, N\}$. Отсюда и из (2.24) получаем справедливость утверждения 4). $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3

Пусть $\epsilon > 0$. Выберем последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}$ (см. 2.2) которая плотна в $L[0, 1]$. Определим числа ϵ_n следующим образом:

$$(3.1) \quad \epsilon_n = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{n} \left(\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Нетрудно видеть, что по индукции и лемме 2.3, можем найти последовательности множеств $\{G_n\}$, $\{E_n\}$, полиномы $\{g_n(x)\}$ и

$$(3.2) \quad Q_n(x) = \sum_{\mu=0}^{\mu_n} a_{\mu}^{(n)} W_{\mu}(x), \quad \mu_0 = 1, \quad |a_{\mu}^{(n)}| > 0,$$

которые удовлетворяют условиям:

$$(3.3) \quad g_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \quad |E_n| > 1 - \epsilon \cdot 4^{-8(n+2)}, \quad |G_n| > 1 - \epsilon,$$

$$(3.4) \quad \int_0^1 |g_n(x) - Q_n(x)| dx < \epsilon \cdot 4^{-8(n+2)},$$

$$(3.5) \quad \left| \int_0^1 g_n(x) dx \right| < \int_0^1 |g_n(x)| dx < 2 \int_0^1 |f_n(x)| dx,$$

$$(3.6) \quad \frac{1}{n} > |a_{\mu_k}^{(n)}| > |a_{\mu_{k+1}}^{(n)}| > |a_{\mu_n}^{(n)}| > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall k \in [\mu_{n-1}, \mu_n - 1].$$

$$(3.7) \quad \left| \sum_{\mu=0}^{\mu_n} a_{\mu}^{(n)} W_{\mu}(x) \right| < \frac{2b|Q_n(x)|}{m_{k+1}} + \frac{2b|Q_n(x)|}{m_{k+1}} \approx 1 + \epsilon_n.$$

Положим

$$(3.8) \quad E = \bigcap_{n=1}^\infty E_n, \quad a_{\mu_k} = a_{\mu_k}^{(n)}, \quad \text{для любого } k \in [\mu_{n-1}, \mu_n],$$

Очевидно, что (см. (3.3)) $|E| > 1 - \epsilon$.

2) Если $M \geq m_{k+1}$, то $Q_M^{(1)}(x) = |\gamma|$, $Q_M^{(0)}(x) = 0$ и тогда $\left| \sum_{j=0}^M c_j W_j(x) \right| < |Q_M^{(1)}(x)| + |Q_M^{(0)}(x)| \leq 2|\gamma|$.

3) Если же $m_k \leq M < m_{k+1}$, то тогда $Q_M^{(0)}(x) = 0$, и из утверждения 2. Леммы 2.2, получим $|Q_M^{(0)}(x)| \leq b|\gamma|$, с другой стороны ясно, что $|Q_M^{(1)}(x)| < |\gamma|$ и, следовательно, $\left| \sum_{j=0}^M c_j W_j(x) \right| \leq b|\gamma| + |\gamma|$, для всех $M \in \{N_0, N\}$. Отсюда и из (2.24) получаем справедливость утверждения 4).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3

Пусть $\epsilon > 0$. Выберем последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ (см. 2.2) которая плотна в $L(0, 1)$. Определим числа η_n следующим образом:

$$(3.1) \quad \eta_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |f_n(x)| dx \right)^{1/n} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Нетрудно видеть, что по индукции и лемме 2.3, можем найти последовательности множеств $\{G_n\}$, $\{E_n\}$, полиномы $\{q_n(x)\}$ и

$$(3.2) \quad Q_n(x) = \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} a_{s_k}^{(n)} W_{s_k}(x), \quad \mu_0 = 1, \quad |a_{s_k}^{(n)}| > 0,$$

которые удовлетворяют условиям:

$$(3.3) \quad q_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \quad |E_n| > 1 - \epsilon \cdot 4^{-8(n+2)}, \quad |G_n| > 1 - \eta_n,$$

$$(3.4) \quad \int_0^1 |q_n(x) - Q_n(x)| dx < \epsilon 4^{-8(n+2)},$$

$$(3.5) \quad \frac{1}{2} \int_0^1 |f_n(x)| dx < \int_0^1 |q_n(x)| dx < 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx,$$

$$(3.6) \quad \frac{1}{2} > |a_{s_k}^{(n)}| > |a_{s_k}^{(n-1)}| > |a_{s_k}^{(n-2)}| > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall k \in \{\mu_{n-1}, \mu_n - 1\},$$

$$(3.7) \quad \frac{1}{2} \int_0^1 |f_n(x)| dx < \int_0^1 |q_n(x)| dx < 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx$$

Положим

$$(3.8) \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \quad a_{s_k} = a_{s_k}^{(n)}, \quad \text{для любого } k \in \{\mu_{n-1}, \mu_n\}.$$

Очевидно, что (см. (3.3)) $|E| > 1 - \epsilon$.

Пусть $f(x) \in L^1(0, 1)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать последовательность k_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ такую, что

(3.9)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - f(x) \right| dx = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) = f(x) \text{ п. в. на } [0, 1] \text{ и}$$

(3.10)

$$2^{4(n-1)} \leq \int_0^1 |f_{k_n}(x)| dx \leq 2^{4(n-2)}, \quad n \geq 2, \text{ где } 2 = \min \left\{ \frac{c}{2}, \int_0^1 |f(x)| dx \right\},$$

(3.11)

$$\int_0^1 |U(x) - f_{k_1}(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f_{k_1}(x) = \sum_{k=0}^{m_1-1} b_k W_k(x).$$

Положим

(3.12)

$$\bar{G}_1 = G_{k_1}, \quad \bar{g}_1 = f_{k_1}, \quad \bar{Q}_1 = f_{k_1}.$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, $\beta_{l(j)}, \dots, \beta_{l(q-1)}$, $1 \leq n \leq q-1$, функции $f_{\nu_n}(x)$, $\bar{g}_n(x)$, $1 \leq n \leq q-1$, множества $\bar{G}_2, \dots, \bar{G}_{q-1}$ и подмножества

$$\bar{Q}_n(x) = Q_{\nu_n}(x) = \sum_{j=r_n}^{\nu_n} a_{nj} W_{nj}(x), \text{ где } r_n = \mu_{\nu_n-1}, \quad r_n = \mu_{\nu_n} - 1,$$

которые для всех $n \leq q-1$ удовлетворяют условиям

$$\bar{g}_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E \subset E_{k_n},$$

(3.13)

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n (\bar{Q}_j(x) + \beta_{l(j)} W_{l(j)}(x)) - \bar{g}_j(x) \right| dx < 2^{-(n+1)}, \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$l(n) = \min \left\{ k \in N: k \notin [1, \mu_{\nu_n}) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n-1} [r_j, \bar{r}_j] \right) \cup \{l(s)\}_{s=1}^{n-1} \right\},$$

(3.14)

$$\beta_{l(n)} = \min \left\{ 2^{-n(n+1)}, \frac{1}{2} |a_{\nu_n}^{(\nu_n)}| \right\},$$

(3.15)

$$|\bar{G}_n| > 1 - 2^{-n},$$

$$\max_{n \leq k \leq \nu_n} \left| \sum_{j=k}^{\nu_n} a_{nj} W_{nj}(x) \right| \leq \frac{|f_{\nu_n}(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |f_{\nu_n}(x)| dx}} + \sqrt{\int_0^1 |f_{\nu_n}(x)| dx} < 2^{-n} \text{ для всех } x \in \bar{G}_n.$$

Положим также, что можно выбрать натуральные числа $n_1 > n_2 > \dots$ такие, что функции $f_{n_q}(x)$ из последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяли бы следующему условию

$$(3.16) \quad \int_0^1 \left| f_{n_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\tilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \tilde{g}_i(x) \right] \right) \right| dx < 2^{-4q-1}.$$

В силу (3.10) и (3.13) имеем

$$\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\tilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \tilde{g}_i(x) \right] \right| dx < 2^{-4q}.$$

Отсюда и из (3.16) имеем

$$(3.17) \quad 2^{-4q-1} < \int_0^1 |f_{n_q}(x)| dx < 2^{-4q}.$$

Положим

$$(3.18) \quad \tilde{g}_q(x) = f_{k_q}(x) + [g_{n_q}(x) - f_{n_q}(x)].$$

$$(3.19) \quad \tilde{Q}_q(x) = \tilde{Q}_{n_q}(x) = \sum_{s_q=1}^{r_q} a_{s_q}^{(\nu_q)} W_{s_q}(x), \text{ где } r_q = r_{n_q}, \quad r_q = \mu_{n_q} - 1,$$

$$(3.20) \quad G_q = G_{n_q}.$$

$$(3.21) \quad \mathcal{H} = \left\{ x \in \mathcal{F}, x \in \bigcup_{j=1}^{q-1} \{r_j, \bar{r}_j\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} l(i) \right\}.$$

$$(3.22) \quad \beta_{l(q)} = \min \left\{ 2^{-4q-3}, \frac{1}{2} \{a_{s_q}^{(\nu_q)}\} \right\}.$$

Учитывая соотношения (3.3), (3.8) и (3.18) получаем

$$(3.23) \quad \tilde{g}_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E.$$

В силу (3.4), (3.13), (3.16), (3.18), (3.19) и (3.22) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^q \left[(\tilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \tilde{g}_i(x) \right] \right| dx = \\ & \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\tilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \tilde{g}_i(x) \right] + \tilde{Q}_q(x) + \beta_{l(q)} W_{l(q)}(x) - \tilde{g}_q(x) \right| dx = \\ & < \int_0^1 \left| f_{n_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\tilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \tilde{g}_i(x) \right] \right) \right| dx + \\ & + \beta_{l(q)} + \int_0^1 |g_{n_q}(x) - \tilde{Q}_q(x)| dx < 2^{-4q-1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из (3.5), (3.13)–(3.17) и (3.24) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\tilde{g}_q(x)| dx &\leq \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{\nu_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [(Q_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \tilde{g}_i(x)] \right) \right| dx + \\ &+ \int_0^1 |g_{\nu_q}(x)| dx + \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} [(Q_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \tilde{g}_i(x)] \right| dx < \\ (3.25) \quad &< 3 \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx + 2^{-2q} < 2^{-q+3}. \end{aligned}$$

Из (3.1), (3.7), (3.19) для всех $x \in \bar{G}_q$ получим

$$(3.26) \quad \max_{x \in \bar{G}_q} \left| \sum_{j=r_q}^m a_{qj} W_{qj}(x) \right| \leq \frac{|f_{\nu_q}(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx}} + \sqrt{\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx} < 2^{-q},$$

$$(3.27) \quad |\bar{G}_q| > 1 - 2^{-q}.$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{q_q(x)\}_{q=1}$, множеств $\{G_q\}_{q=1}$, чисел $\{l(q)\}_{q=1}^\infty$, $\{\beta_{l(q)}\}_{q=1}^\infty$ и полиномов $\{Q_q(x)\}_{q=1}$, удовлетворяющих условиям (3.31)–(3.40) для всех $q \geq 1$.

Обозначим

$$(3.28) \quad B_q = \left\{ x \in [0, 1], |f_{\nu_q}(x)| \leq 2^{-3(q+2)} \right\}, \quad q \geq 2,$$

будем иметь

$$|[0, 1] \setminus B_q| 2^{-3(q+2)} \leq \int_{[0, 1] \setminus B_q} |f_{\nu_q}(x)| dx \leq \bar{\epsilon} \cdot 2^{-4(q+2)}, \quad q \geq 2.$$

Следовательно

$$(3.29) \quad |B_q| > 1 - \epsilon \cdot 2^{-(q+2)}.$$

Далее положим

$$(3.30) \quad A_q = \{x \in [0, 1] : |\tilde{g}_q(x)| < 2^{-q}\}.$$

$$(3.31) \quad F_q = \left\{ x \in [0, 1] : \left| \sum_{j=1}^{q-1} [(Q_j(x) + \beta_{l(j)} W_{l(j)}(x)) - \tilde{g}_j(x)] \right| < 2^{-q} \right\}.$$

Аналогично (3.29) из (3.24), (3.25), (3.30), (3.31) получим

$$(3.32) \quad |A_q| > 1 - 2^{-q}, \quad |F_q| > 1 - 2^{-q}.$$

Положим

$$(3.33) \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} (B_j \cap \bar{G}_j \cap A_j \cap F_j).$$

Отсюда и из (3.27), (3.29) и (3.32) вытекает $|B| = 1$.

Учитывая выбор чисел $\{s_j\}_{j=1}^{\infty} \nearrow \cdot$, $\{(r_q, r_q)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{l(q)\}_{q=1}^{\infty}$ получим, что последовательность чисел

$$\{0, 1, \dots, \mu_{n_1} - 1, l(1), s_{r_1}, \dots, l(n-1), s_{r_{n-1}}, \dots, l(n), s_{r_n}, \dots\},$$

есть некоторая перестановка натуральных чисел. Запишем последовательность

$$(3.34) \quad \sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k), \dots\}$$

Определим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} d_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x)$ следующим образом

$$(3.35)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k W_k(x) + \beta_{l(1)} W_{l(1)}(x) + \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{r_q} a_{s_k} W_{s_k}(x) + \beta_{l(q)} W_{l(q)}(x) \right]$$

где

$$(3.36)$$

$$\{d_{\sigma(k)}\}_{k=0}^{\infty} = \{b_0, b_1, \dots, b_{\mu_{n_1}-1}, \beta_{l(1)}, \dots, \beta_{l(n-1)}, \beta_{l(n)}, \dots\}.$$

Из (3.25) вытекает, что

$$(3.37) \quad \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} d_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x) \right| dx < \infty.$$

Положим $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}_k(x)$. Из (3.6), (3.8)–(3.9), (3.12), (3.22), (3.23), (3.36) и (3.37) следует $f(x) \in L^1[0, 1]$, $f(x) = f(x)$, $x \in E$; $\int_0^1 |f(x) - f(x)| dx < \epsilon$; $|d_{\sigma(k)}| > |d_{\sigma(k+1)}|$, $\forall k \geq 2$, т.е. множество $D(f, W)$ содержит только один элемент.

Учитывая выбор чисел $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ получим, что она является перестановкой натуральных чисел $\{k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [\bar{r}_n + 1, r_{n+1}]\}$. Следовательно для каждого натурального q существуют натуральные числа n_q и j_q такие, что

$$\begin{aligned} \{\beta_{l(k)}\}_{k=1}^q &\subset \{d_k, k \in \mathbb{N} \cap \bigcup_{n=1}^{n_q} [\bar{r}_n + 1, r_{n+1}]\} = \\ &= \{\beta_k, k \in \mathbb{N} \cap \bigcup_{n=1}^{n_q} [\bar{r}_n + 1, r_{n+1}]\} \subset \{\beta_{l(k)}\}_{k=1}^{j_q}. \end{aligned}$$

отсюда и из соотношений (3.24), (3.25) для каждого $q \geq 2$ будем иметь

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^q \left[\left(\tilde{Q}_j(x) + \beta_{l(j)} W_{l(j)}(x) \right) \right] - f(x) \right| dx \right) \leq \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^q \left[\left(\tilde{Q}_j(x) + \beta_{l(j)} W_{l(j)}(x) \right) - \tilde{g}_j(x) \right] \right| dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |\tilde{g}_k(x)| dx < 2^{-q}, \forall q \geq 2 \end{aligned}$$

Следовательно, $d_k = \int_0^1 f(x) W_k(x) dx = c_k(f)$ для любого $k \geq 0$.

Теперь покажем, что на множестве B (т.е. почти всюду на $[0, 1]$) жадный алгоритм функции $\bar{f}(x)$ сходится к ней. Пусть $x \in B$, тогда существует натуральное число j_0 такое, что $x \in B_j \cap G_j \cap A_j \cap F_j \forall j \geq j_0$.

Пусть далее $m > r_{j_0}$, тогда существует натуральное число $q, q \geq j_0$ такое, что

$$(3.38) \quad N_q \leq m < N_{q+1}, \text{ где } N_q = r_1 + 1 + \sum_{k=1}^q [\bar{r}_k - r_k + 2] \quad \forall q \geq 2.$$

В силу (3.33)–(3.38) имеем

$$\begin{aligned} |G_m(x, \bar{f}) - \bar{f}(x)| &= \left| \sum_{k=1}^m d_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x) - \bar{f}(x) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^{q-1} \left[(\bar{Q}_j(x) + b_{l(j)} W_{l(j)}(x)) - g_j(x) \right] \right| + \\ &+ \sum_{k=m}^{\infty} |g_k(x)| + \max_{r_k \leq m < r_{k+1}} \left| \sum_{k=r_k}^{r_{k+1}} a_{k_n} W_{k_n}(x) \right| + b_{l(q)} < 2^{-q}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости соотношения

$$|S_N(x, \bar{f}) - \bar{f}(x)| \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \forall x \in B.$$

Теорема 1.3 доказана.

Abstract. In this paper, we prove that for any $\varepsilon \in (0, 1)$ there exists a measurable set $E \in [0, 1]$ with measure $|E| > 1 - \varepsilon$ such that for any function $f \in L^1[0, 1]$, it is possible to construct a function $\bar{f} \in L^1[0, 1]$ coinciding with f on E and satisfying $\int_0^1 |\bar{f}(x) - f(x)| dx < \varepsilon$, such that both the Fourier series and the greedy algorithm of $\bar{f}$ with respect to a bounded Vilenkin system are almost everywhere convergent on $[0, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. сб., 28, no. 2, 266 – 291 (1912).
- [2] D. R. Men'khov, "Sur la representation des fonctions mesurables des series trigonometriques", Mat. Sbornik, 0, 667 – 692 (1941).
- [3] А. А. Тихонов, "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции", Мат. заметки, 33, no. 5, 715 – 722 (1983).
- [4] А. М. Олесский, "Модификация функций и ряды Фурье", УМН, 40, no. 3, 157 – 193 (1985).
- [5] M.G. Grigorian, "On the L^p -strong property of orthonormal systems", Matem. Sbornik, 194, no. 10, 1503 – 1532 (2003).
- [6] М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Матем. сб., 181, no. 8, 1011 – 1030 (1990).

- [7] Б. Н. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скаворс, *Ряды и Преобразования Уолша: Теория и Применение*, М.: Наука (1987).
- [8] Н. Я. Виленкин, "Об одном классе полных ортогональных систем", *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, **11**, 363 – 400 (1947).
- [9] J. L. Walsh, "A closed set of normal orthogonal functions", *Amer. J. Math.*, **45**, 5 – 24 (1923).
- [10] H. E. Christenson, "A class of generalized Walsh functions", *Pacif. J. Math.*, **5**, no. 1, 17 – 31 (1955).
- [11] C. Whitt, "On generalizes Walsh-Fourier series", *J. Proc. Japan Acad.*, **73**, no. 8, 435 – 439 (1957).
- [12] W. S. Young, "Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **218**, 311 – 320 (1976).
- [13] I. J. Price, "Certain groups of orthonormal step functions", *Canad. J. Math.*, **9**, no. 3, 113–125 (1957).
- [14] T. Oikuma, "On a certain system of orthogonal step functions" *Tohoku Math. J.*, **5**, 166 – 177 (1953).
- [15] P. Wojtaszczyk, "Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems", *Journal of Approximation Theory*, **107**, 293 – 314 (2000).
- [16] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", *Advances in Computational Math.*, **5**, 173 – 187 (1996).
- [17] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on Greedy approximation in Banach spaces" *Russ. Journal on Approximations*, **5**, no. 1, 1 – 15 (1999).
- [18] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Two remarks on quasi-greedy bases in the space", *Journal Contemporary Mathematical Analysis*, **40**, no. 1, 2 – 14 (2005).
- [19] T. W. Körner, "Divergence of decreasing rearranged Fourier series", *Ann. of Math.*, **144**, 167 – 180 (1996).
- [20] T. W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", *J. Fourier Anal. Appl.*, **5**, 1 – 19 (1999).
- [21] V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", *Found. Comput. Math.*, **3**, 33 – 107 (2003).
- [22] М. Г. Григорян, С. А. Саргсян, "Нелинейная аппроксимация функций класса L^1 по системе Виленкина", *Изв. вуз. Матем.*, **2**, 30 – 39 (2013).
- [23] M. G. Grigorian, R. E. Zink, "Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system", *Proc. of the Amer. Mat. Soc.*, **134**, no. 12, 3195 – 3505 (2006).
- [24] М. Г. Григорян, О сходимости в метрике L^p грядив алгоритма по тригонометрической системе, *Изв. НАН Армении, серия Математика*, **39**, no. 5, 37 – 52 (2001).
- [25] М. Г. Григорян, "Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация", *Матем. сб.*, **203**, no. 3, 49 – 78 (2012).
- [26] М. Г. Григорян, К. А. Назаряндян, "О поведении коэффициентов Фурье по системе Уолша", *Изв. НАН Армении, серия Математика*, **51**, no. 1, 3 – 20 (2016).
- [27] M. G. Grigorian, S. A. Sargsyan "On the Fourier-Vilenkin coefficients", *Acta Mathematica Scientia*, **37(B)**, no. 2, 293 – 300 (2017).

Поступила 7 апреля 2017

SHARP NORM ESTIMATES FOR WEIGHTED BERGMAN
PROJECTIONS IN THE MIXED NORM SPACES

J. GONESSA

Université de Bangui, Bangui, République Centrafricaine¹

E-mail: gonessa.jocelyn@gmail.com

Abstract In this paper, we show that the norm of the Bergman projection on $L^{p,q}$ -spaces in the upper half-plane is comparable to $\max(\pi/q)$. Then we extend this result to a more general class of domains, known as the homogeneous Siegel domains of type II.

MSC2010 numbers: 47B35, 32A36, 30H25, 30H30, 46B70, 46M35

Keywords: Siegel domain; Bergman space; Bergman projection.

1. INTRODUCTION

In the recent paper [15], K. Zhu has obtained sharp norm estimates for Bergman projection on L^p -spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. In this paper, we first extend this result to $L^{p,q}$ -spaces in the upper half-plane, that is, $\Pi_+ = \{z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, and then, the obtained result we extend to a more general class of domains, known as the homogeneous Siegel domains of type II.

It will be convenient to introduce the mixed normed spaces for functions defined on Π_+ . Let $0 < p, q \leq \infty$ and $\nu > 0$, and let $f(x + iy)$ be a measurable function on Π_+ . Then, with the usual conventions if $p = \infty$ or $q = \infty$, we denote

$$\|f\|_{p,q,\nu} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p dx \right)^{q/p} y^{\nu-1} dy \right)^{1/q}.$$

Definition 1.1. For all $0 < p, q \leq \infty$, the mixed normed space $L^{p,q}_\nu$ is defined to be the set of measurable functions on Π_+ such that $\|f\|_{p,q,\nu} < \infty$. The space $A^{p,q}_\nu$ is defined to be the set of holomorphic functions on Π_+ such that $\|f\|_{p,q,\nu} < \infty$.

It is worth to observe that these spaces were extensively studied in the literature (see [1, 2, 4] – [8]). For instance, in [2] it was proved that $A^{p,q}_\nu = \{0\}$ if and only if $\nu \leq 0$, and that the orthogonal projection P_ν from the Hilbert space $L^{2,2}_\nu = L^2_\nu$ onto

¹Gonessa was supported by Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics.

the space $A_{\nu}^{p,q} = A_{\nu}^2$ can be extended to a bounded operator on $L_{\nu}^{p,q}$ if and only if $1 < p, q < \infty$. Also, the explicit expression of P_{ν} is given by the following formula:

$$P_{\nu}f(z)f = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\nu}(z, u + iv)f(u + iv) d\mu(u, v)$$

where

$$B_{\nu}(z, u + iv) = \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{z - u + iv}{1 - \bar{z}(u + iv)} \right)^{-\nu-1}$$

The operator P_{ν} is called the weighted Bergman projection.

Our first main result is the following theorem.

Theorem 1.1. *Let $1 < p, q < \infty$ and $\nu > 0$. Then there exist positive constants C_1 and C_2 independent of p and q such that*

$$(1.1) \quad C_1 \csc(\pi/q) \leq \|P_{\nu}\| \leq C_2 \csc(\pi/q).$$

2. PROOF OF THEOREM 1.1

The proof of the theorem is based on two estimates stated below. One of them is the refined version of the Schur lemma (see [16]). The other is an optimal pointwise estimate for functions from $A_{\nu}^{p,q}$ (see [8]).

Lemma 2.1. [16] *Suppose $H(x, y)$ is a positive kernel and*

$$Tf(x) = \int_X H(x, y)f(y)d\mu(y)$$

is the associated integral operator. Let $1 < p, q < \infty$ with $1/p + 1/q = 1$. If there exists a positive function $\varphi(x)$ and two positive constants C_1 and C_2 such that

$$\int_X H(x, y)(\varphi(y))^q d\mu(y) \leq C_1(\varphi(x))^q, \quad x \in X$$

$$\int_X H(x, y)(\varphi(x))^p d\mu(x) \leq C_2(\varphi(y))^p, \quad y \in X,$$

then the operator T is bounded on $L^p(X, d\mu)$. Moreover, the norm of the operator T on $L^p(X, d\mu)$ does not exceed

Proposition 2.1. [8] *Let $1 < p, q < \infty$ and $\nu > 0$. Then there exists a positive constant C independent of p and q such that $|f(x + iy)| \leq C \|f\|_{p,q}$ for all $f \in A_{\nu}^{p,q}$ and $x + iy \in \Pi_+$.*

In this section we prove our first main result - Theorem 1.1.

Proof of Theorem 1.1. Denote $f_y(x) = f(x + iy)$ and

$$P_\nu^+ f(x) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |B_\nu(z, u + iv)| f(u + iv) v^{\nu-1} du dv.$$

Then we can write

$$\|P_\nu^+ f\|_{p,q,\nu} = \left(\int_0^{+\infty} \|(P_\nu^+ f)_y\|_{L^p(\mathbb{R})}^q y^{\nu-1} dy \right)^{1/q}$$

and

$$(P_\nu^+ f)_y(x) = c \int_0^{+\infty} (g_{y+v} * f_v(x)) v^{\nu-1} dv,$$

where $c = \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\sqrt{\pi}}$ and $g_{y+v}(x) = \left(\frac{x + i(y+v)}{y} \right)^{-\nu-1}$. Using Minkowski and Young inequalities we obtain

$$\|(P_\nu^+ f)_y\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c \int_0^{+\infty} \|g_{y+v}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f_v\|_{L^p(\mathbb{R})} v^{\nu-1} dv.$$

Moreover, simple calculations yield:

$$\|g_{y+v}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} (y+v)^{-\nu}.$$

Therefore

$$(2.1) \quad \|P_\nu^+ f\|_{p,q,\nu}^q \leq C^q \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (y+v)^{-\nu} \|f_v\|_{L^p(\mathbb{R})} v^{\nu-1} dv \right)^q y^{\nu-1} dy,$$

where $C = \frac{2^{\nu-1} \nu \Gamma(\frac{\nu}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\nu+1}{2})}$.

Now we introduce the ingredients for Schur's lemma:

$$Th(y) = \int_0^{+\infty} (y+v)^{-\nu} h(v) v^{\nu-1} dv$$

and $\varphi(v) = v^{-\frac{\nu-1}{2}}$. Then it is easy to see that

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (y+v)^{-\nu} \varphi^{q'}(v) v^{\nu-1} dv &= \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\nu)} \varphi^{q'}(y), \\ \int_0^{+\infty} (y+v)^{-\nu} \varphi^q(y) y^{\nu-1} dy &= \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\nu)} \varphi^q(v), \end{aligned}$$

and consequently

$$(2.2) \quad \|Th\|_{L^q(0,+\infty)} \leq \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\nu)} \|h\|_{L^q(0,+\infty)}.$$

We easily deduce from (2.1) and (2.2) that

$$(2.3) \quad \|P_\nu f\|_{p,q,\nu} \leq C \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \|f\|_{p,q,\nu},$$

where

$$C = \frac{2^{\nu-1} \nu \Gamma(\frac{\nu}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu) \Gamma(\frac{\nu+1}{2})}.$$

Now the second inequality in (1.1), that is, $\|P_\nu\| \leq C \csc(\pi/q)$ follows from (2.3) and the inequality

$$(2.4) \quad f\left(\frac{z}{y}\right) \overline{f\left(\frac{z}{y}\right)} \leq C |z|^{2-2\nu} |y|^{2\nu}.$$

The proof of (2.4) is given in the second part of the paper. Note that in the above inequalities, C is a positive constant independent of p and q . To prove the first inequality in (1.1), we first apply Lemma 2.1 to get

$$(2.5) \quad \|P_\nu\| \geq \frac{C_0^{1-\frac{1}{p}} \|P_\nu f\|^{1+\frac{1}{p}}}{\|f\|_{p,q,\nu}}.$$

Then taking $f(x+iy) = 2^{\nu-\frac{p}{q}} y^{1-\nu} \chi_{D(i,1)}(x+iy)$ and $D(i, \frac{1}{2}) = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < \frac{1}{2}\}$ from the mean value property and some easy calculations, we obtain

$$(2.6) \quad P_\nu f(x+iy) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{x+iy+1}{i} \right) \quad \text{and} \quad \|f\|_{p,q,\nu} \leq C$$

for all $x+iy \in \Pi_+$.

Finally, combining (2.5) and (2.6), and taking $x = e^{-q}$ and $\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$, we obtain $\|P_\nu\| \geq Cq \geq C \csc(\pi/q)$ for all $q > 2$. In the case $1 < q \leq 2$ the result follows from duality argument. $\square$

3. BERGMAN PROJECTION AND SIEGEL DOMAINS

We fix a positive integer $n \geq 3$ and denote by D a domain in $\mathbb{C}^n$. We use dv to denote the Lebesgue measure defined in $\mathbb{C}^n$ and P to denote the orthogonal projection from the Hilbert space $L^2(D, dv)$ onto the space $A^2(D, dv)$, consisting of holomorphic functions on D . It is well-known that P is an integral operator defined on $L^2(D, dv)$. The orthogonal projection P is called *Bergman projection* and its kernel K is called *Bergman kernel*. In the following, D will be a homogeneous Siegel domain of type II. The goal of the second part of this paper is to extend the result obtained by K. Zhu [15], to the Siegel domains.

The main object in this part of the paper is the Siegel domain associated with a homogeneous cone. So, in this section, we recall the description of an open strictly convex homogeneous cone from T -algebra, introduce the notion of a homogeneous Siegel domain of type II, and state our second main result.

3.1. Homogeneous cone. We use the same notation as in [13]. We consider a (real) matrix algebra $\mathcal{U}$ of rank k with canonical decomposition:

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j}} \mathcal{U}_{ij} \oplus \mathcal{U}_{ii}$$

such that $U_{i,j}U_{j,k} \subset U_{i,k}$ and $U_{i,j}U_{i,k} = 0$ for $j \neq i$. We assume that $\mathcal{U}$ has the structure of T -algebra (in the sense of [9]), in which an involution is given by $x \mapsto x^*$. This structure implies that the subspaces $U_{i,j}$ satisfy the relation $U_{i,i} = \mathbb{R}c_i$, where $c_i^2 = c_i$ and $\dim U_{i,j} = n_{i,j} = n_{j,i}$. Also, the matrix $e = \sum_{j=1}^r c_j$ is a unit element for the algebra $\mathcal{U}$. Let ρ be the unique isomorphism from $U_{i,i}$ onto $\mathbb{R}$ with $\rho(c_i) = 1$ for all $i = 1, \dots, r$. We consider the subalgebra $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$ consisting of upper triangular matrices, and let

$$H = \{t \in \mathcal{T} : \rho(t_{i,i}) > 0, i = 1, \dots, r\}$$

be the subgroup of upper triangular matrices whose diagonal element are positive.

Denote by V the vector space of Hermitian matrices in $\mathcal{U}$ $V = \{x \in \mathcal{U} : x^* = x\}$.

We set $n_i = \sum_{j=1}^{r-1} n_{j,i}$, $m_i = \sum_{j=i+1}^r n_{i,j}$, and observe that

$$\dim V = n = r + \sum_{i=1}^r m_i = r + \sum_{i=1}^r n_i.$$

The vector space V becomes an Euclidean space with the inner product: $(x|y) = \text{tr}(xy^*)$, where $\text{tr}(x) = \sum_{i=1}^r \rho(x_{i,i})$. Next, we define $\Omega = \{ss^* : s \in H\}$, and observe that, by a theorem of Vinberg (see [14], p. 384), Ω is an open convex homogeneous cone containing no entire straight lines, in which the group H acts simply transitively via the transformation:

$$\pi(w) : uu^* \mapsto \pi(w)[uu^*] = (wu)(u^*w^*) \quad (w, u \in H).$$

Thus, to every element $y \in \Omega$ corresponds a unique $t \in H$ such that $y = \pi(t)[e] = t \cdot e$.

We assume that Ω is irreducible, and hence $\text{rank}(\Omega) = r$. Note that all homogeneous convex cones can be constructed in this way (see [14] p. 397). As in [13], we denote by Q_j the fundamental rational functions in Ω given by $Q_j(y) = \rho(t_{j,j})^2$, when $y = t \cdot e \in \Omega$.

We consider the matrix algebra with involution $\mathcal{U}'$ which differs from $\mathcal{U}$ only on its grading, and put $U'_{i,j} = U_{r+1-i, r+1-j}$ ($i, j = 1, \dots, r$). In [14], it was proved that $\mathcal{U}'$ is also a T -algebra and $V' = V$, where V' is the subspace of $\mathcal{U}'$ consisting of Hermitian matrices. We define the subalgebra

$$\mathcal{T}' = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq r} U'_{i,j}$$

of $\mathcal{U}'$, consisting of lower triangular matrices, and the subgroup H' of $\mathcal{T}'$ whose diagonal elements are positive. We have $\mathcal{T}' = \{t^* : t \in \mathcal{T}\}$ and $H' = \{t' : t \in H\}$. The

corresponding homogeneous cone coincides with the dual cone of Ω , namely

$$\Omega^* = \{\xi \in V' : (x|\xi) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}\}$$

One also has (see [14], p. 390) $\Omega^* = \{t^*t : t \in H\}$. For $\xi = t^*t \in \Omega^*$, we define $Q^*(\xi) = \rho(t_{jj}^2)$, and observe that the following identity holds: $Q_j^*(t^* \cdot c) = Q_j(t \cdot c)$. We use the following notation: for all $x \in \Omega$, $\xi \in \Omega^*$ and $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}$, we

$$Q^\alpha(x) = \prod_{j=1}^r Q_j^{\alpha_j}(x) \quad \text{and} \quad (Q^*)^\alpha(\xi) = \prod_{j=1}^r (Q_j^*)^{\alpha_j}(\xi).$$

We put $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \mathbb{R}^r$ with $\tau_i = 1 + \frac{1}{2}(m_i + n_i)$. For $y \in \Omega$ and $j = 1, \dots, r$, we have $Q_j(\pi(t)y) = Q_j(x)Q_j(y)$. Therefore, for any $s \in H$, we get $Q^\tau(\pi(s)x) = \det \pi(s)Q^\tau(x)$ since (see [14], p. 388) $\det \pi(s) = Q^\tau(s \cdot c)$. Note that the above properties are also valid if we replace Q_j by Q_j^* and $x \in \Omega$ by $\xi \in \Omega^*$. In the following we call c_Ω the element c .

3.2. Homogeneous Siegel domains. Let $V^{\mathbb{C}} = V + iV$ be the complexification of V . Then each element of $V^{\mathbb{C}}$ is identified with a vector in $\mathbb{C}^n$. The coordinates of a point $z \in \mathbb{C}^n$ are arranged in the form $z = (z_1, \dots, z_n)$, where $z_j = (z_{1j}, \dots, z_{r-1,j})$, $j = 2, \dots, r$, and

$$z_{jj} \in \mathbb{C}, \quad z_{ij} = (z_{ij}^{(1)}, \dots, z_{ij}^{(n_i)}) \in \mathbb{C}^{n_i}, \quad 1 \leq i < j < r.$$

For all $j = 1, \dots, r$ we set $e_{jj} = z$, where $z_{jj} = 1$ and the other coordinates are equal to zero, and denote

$$e_\Omega = \sum_{j=1}^r e_{jj} = (1, 0, 1, \dots, 0, 1).$$

Let $m \in \mathbb{N}$. For each row vector $u \in \mathbb{C}^m$, we denote by u' the transpose of u . Given $m \times m$ Hermitian matrices $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_n$, we define an Ω -Hermitian homogeneous form $F: \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ as $F(u, v) = (u\tilde{H}_1v', \dots, u\tilde{H}_nv')$, $(u, v) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$, such that

- (i) $F(u, u) \in \bar{\Omega}$;
- (ii) $F(u, u) = 0$ if and only if $u = 0$;
- (iii) for every $t \in H$, there exists $\tilde{t} \in GL(m, \mathbb{C})$ such that $t \cdot F(u, u) = F(tu, \tilde{t}u)$.

The homogeneous Siegel domain of type II associated with the cone Ω and with a V -Hermitian homogeneous form $F: \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ is defined by

$$D(\Omega, F) = \{(z, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : \Im m z = F(u, u) \in \Omega\}.$$

Using the above decomposition of an element in $\mathbb{C}^m$, we can write

$$F(u, u) = (F_{11}(u, u), F_{21}(u, u), F_{22}(u, u), \dots, F_r(u, u), F_{rr}(u, u)),$$

where for $i = 1, \dots, r$ and $j = 2, \dots, r$,

$$F_{ii}(u, u) = uH_i u^t, \quad F_{ij}(u, u) = (F_{1ij}(u, u), \dots, F_{j-1ij}(u, u))$$

and for $1 \leq i < j \leq r$ and $l = 1, \dots, n_{ij}$,

$$F_{ij}^{(l)}(u, u) = uH_{ij}^{(l)} u^t, \quad F_{ji}(u, u) = (F_{ji}^{(1)}(u, u), \dots, F_{ji}^{(n_{ij})}(u, u)).$$

We have the decomposition $\mathbb{C}^m = \prod_{i=1}^r C_i$, where C_i is the subspace of $\mathbb{C}^m$ on which F_{ii} is positive definite. In what follows, we denote by b the vector $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{R}^r$ and by D the Siegel domain of second kind associated with the open convex homogeneous cone Ω and the Ω -Hermitian homogeneous form F .

3.3. Statement of the second main result. For each $(z, u) \in D$, we adopt the following notation:

$$dV_\nu(z, u) = Q^{\nu-\frac{1}{2}-r}(\Im m z - F(u, u))dv(z)dv(u)$$

with the convention that if $y = \Im m z$, then

$$dV_\nu(y, u) = Q^{\nu-\frac{1}{2}-r}(y - F(u, u))dydv(u),$$

where dv is the Lebesgue measure on $\mathbb{C}^l$, and $l = n$ or $l = m$.

For $p, q \in [1, +\infty]$ and $\nu \in \mathbb{R}^r$, let $L_{\nu}^{p,q}$ denote the (Banach) space of measurable functions on D such that

$$\|f\|_{p,q,\nu} := \left(\int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(u,u)} \left(\int_V |f(x+iy, u)|^p dx \right)^{q/p} dV_\nu(y, u) \right)^{1/q} < +\infty.$$

We define the weighted Bergman space $A_{\nu}^{p,q}$ to be the subspace of $L_{\nu}^{p,q}$, formed by its holomorphic functions. Observe that $Q^{b-2r}(\Im m z - F(u, u))dv(z)dv(u)$ is the invariant measure with respect to the group of automorphism of D (see [9], p. 56). We denote by P_ν the integral operator on $L_{\nu}^{p,q}$ defined by

$$P_\nu f(z) = \int_D B_\nu((z, u), (w, t)) f(w, t) dV_\nu(w, t),$$

and by P_ν^* we denote the weighted Bergman projection, defined by

$$P_\nu^* f(z) = \int_D |B_\nu((z, u), (w, t))| f(w, t) dV_\nu(w, t),$$

where

$$B_\nu((z, u), (w, v)) = d_{\nu,1} Q^{-\nu-\frac{1}{2}-r} \left(\frac{z-\bar{w}}{2i} - F(u, v) \right)$$

is the weighted Bergman kernel, that is, the reproducing kernel of $A^2_\nu(D)$.

Also, we denote by $\|P_\nu\|$ the norm of P_ν on L^2_ν . It is well known (see, e.g., [12]) that P_ν and P_ν can be extended to bounded operators on $L^{p,q}_\nu$ for some $p, q \in [1, +\infty]$ and $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{R}^r$ such that $\nu_j > \frac{m_j + n_j + 1}{2}$, $j = 1, \dots, r$.

The following theorem is the second main result of this paper. The proof is given in Section 5.

Theorem 3.1. *If P^+ is extended to a bounded operator on $L^{p,q}_\nu$, then there exist positive constants C_1 and C_2 , depending only on ν , m and n but not on p and q , such that*

$$C_1 \csc^r(\pi/q) \leq \|P_\nu\| \leq C_2 \csc^r(\pi/q).$$

Now we state two lemmas and a proposition, proved in [13] and [12], which will play a key role in our analysis in the subsequent parts of this paper. We first adopt the following notation for the generalized gamma functions:

$$\begin{aligned} \Gamma_\Omega(\alpha) &= \int_\Omega e^{-\langle z, z \rangle} Q^{-\alpha} |dz| e^{-\tau} \prod_{i=1}^r \Gamma\left(\alpha_i - \frac{m_i}{2}\right), \quad \alpha_i > \frac{m_i}{2}, \\ \Gamma_{\Omega^*}(\alpha) &= \int_\Omega e^{-\langle z, z \rangle} (Q^*)^{\alpha-\tau}(\xi) d\xi = \pi^{\frac{n-\tau}{2}} \prod_{i=1}^r \Gamma\left(\alpha_i - \frac{n_i}{2}\right), \quad \alpha_i > \frac{n_i}{2}, \end{aligned}$$

where Γ is the usual gamma function.

Lemma 3.1. [13, Lemma 4.20]. *Let $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$. The integral*

$$J_n(y) = \int_\Omega \left| Q^{-\alpha} \left(\frac{z+y}{i} \right) \right| dz \quad (y \in \Omega)$$

converges if and only if $\alpha_j > 1 + n_j + \frac{m_j}{2}$, $j = 1, \dots, r$. In this case, we have $J_n(y) = c_n Q^{-\alpha+\tau}(y)$, where

$$c_n = \frac{(2\pi)^n 2^{-|\alpha|+\tau} \Gamma_{\Omega^*}(\alpha-\tau)}{\Gamma_{\Omega^*}^2(\alpha/2)}.$$

Lemma 3.2. [13, Lemma 4.19]. *Let $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) \in \mathbb{R}^r$ and $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$. For all $y \in \Omega$, the integral*

$$J_{\mu\lambda}(y) = \int_\Omega Q^\mu(y+v) Q^{\lambda-\tau}(v) dv$$

is finite if and only if $\lambda_j > \frac{m_j}{2}$, $\mu_j + \lambda_j < -\frac{n_j}{2}$, $j = 1, \dots, r$. In this case, we have $J_{\mu\lambda}(y) = M_{\lambda\mu} Q^{\mu+\lambda}(y)$, where

$$M_{\lambda\mu} = \frac{\Gamma_\Omega(\lambda) \Gamma_{\Omega^*}(-\mu - \lambda)}{\Gamma_{\Omega^*}(-\mu)},$$

Proposition 3.1. [12, Proposition 5.2]. Let $u, t \in \mathbb{C}^n$, $y \in \Omega + F(u, u)$ and $\bar{y} \in \Omega + F(t, t)$. For $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, the integral

$$I(y, u, \bar{y}) = \int_{\mathbb{C}^n} Q^{-\lambda}(y + \bar{y} + F(t, t) - 2\operatorname{Re} F(u, t)) d\nu(t)$$

converges if $\lambda_j - b_j > \frac{n_j}{2}$, $j = 1, \dots, r$. In this case, there is a positive constant C_λ such that $I(y, u, \bar{y}) = C_\lambda Q^{-\lambda+b}(y - F(u, u) + \bar{y})$.

4. AN OPTIMAL POINTWISE ESTIMATE IN SIEGEL DOMAINS

The proof of our second main result - Theorem 3.1, requires pointwise estimates in tubular (resp. Siegel) domains. So, we need more precise versions of pointwise estimates in the above domains.

Lemma 4.1. Let $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{R}^r$ be such that $\nu_j > \frac{n_j + n_{j+1}}{2}$, $j = 1, \dots, r$, and let f be a holomorphic function on tube domains $T_\Omega := V + i\Omega$ (the so-called Siegel domains of type I), such that

$$\|f\|_{p,q,\nu} = \left(\int_\Omega \left(\int_V |f(x + iy)|^p dx \right)^{q/p} Q^{\nu-\nu}(y) dy \right)^{1/q} < +\infty.$$

Then there is a positive constant C independent of p and q such that

$$|f(x + iy)| \leq C Q^{-\frac{k}{2} - \frac{\nu}{2}}(y) \|f\|_{p,q,\nu}$$

for all $x + iy \in T_\Omega$.

Proof. Let $t^{\mathbb{C}}$ be an extension of $t = \pi(s)$ to $V^{\mathbb{C}} = V + iV$, defined as follows: $t^{\mathbb{C}}(x + iy) = tx + ity$ and $t^{\mathbb{C}}(iy) = ity$ for all $x + iy \in V^{\mathbb{C}}$. Then using the mean value property, the Hölder inequality and formulas (2.9) - (2.10) from [13] (p. 484), we can write

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= f \circ t^{\mathbb{C}}(t^{-1}x + i\bar{e}_\Omega) \\ |f(x + iy)| &\leq \int_{\bar{y} \in B(e_\Omega, 1)} \int_{|\bar{z} - t^{-1}x| < 1} |f \circ t^{\mathbb{C}}(x + \bar{y})| d\bar{z} d\bar{y} \\ &\leq C \|f \circ t^{\mathbb{C}}\|_{p,q,\nu} \leq C Q^{-\frac{k}{2} - \frac{\nu}{2}}(y) \|f\|_{p,q,\nu}, \end{aligned}$$

where $B(e_\Omega, 1)$ is the Bergman ball of radius 1 centered at e_Ω , and

$$C = \pi^n \sup_{y \in B(e_\Omega, 1)} Q^{\tau-\nu}(y) \max\{1, Q^{\tau-\nu}(y)\}.$$

□

Proposition 4.1. *Let $v = (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^r$ be such that $v_j > \frac{n+2p_j+2b_j}{2}$, $j = 1, \dots, r$, and let f be a holomorphic function on D . Then there exists a positive constant C independent of p and q such that*

$$|f(x+iy, u)| \leq CQ^{-\frac{n+2}{2}-\frac{\tau}{2}}(y-F(u, u))\|f\|_{p,q,v}$$

for all $(x+iy, u) \in D$.

Proof. Consider the following functions: $f_1(x+iy) = f(x+iy, u)$, $f_2(u) = f(x+iy, u)$, $t(x+iy, u) = (x+i(y+F(u, u)), u)$, and use the pointwise estimate in tube domains, to obtain

$$\begin{aligned} |f(x+iy, u)| &= |(f \circ t)_1(x+i(y-F(u, u)))| \\ &\leq CQ^{-\frac{n+2}{2}-\frac{\tau}{2}}(x-F(u, u))\|f \circ t\|_{p,q,v} \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \|(f \circ t)_1\|_{p,q,v} &= \left(\int_{\Omega} \left(\int_V |f(\bar{x}+i(\bar{y}+F(u, u)), u)|^{2p} Q^{-2(n+2)+2\tau} dV \right)^{1/p} d\bar{x} \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\Omega} \left(\int_V |f(\bar{x}+i(\bar{y}-F(u, u)), u)|^{2p} Q^{-2(n+2)+2\tau} dV \right)^{1/p} d\bar{x} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

where $h(u) = \tau + u$. Finally, using the mean value property for holomorphic function $f_2 \circ h$, the Minkowski and Hölder inequalities, and Fubini's theorem we conclude that

$$\|(f \circ t)_1\|_{p,q,v} \leq \pi^{\frac{n}{2}} \|f\|_{p,q,v}. \quad \square$$

The next lemma play a key role to estimate the Bergman projection in the Siegel domains. We use the following notation:

$$K_\nu((y, u), (\bar{y}, t)) = Q^{-\nu-\frac{1}{2}}(y+\bar{y}-2\Re F(u, t)).$$

Lemma 4.2. *There exists a positive constant C independent of p such that*

$$\|(P_\nu f)_{y,u}\|_{L^p(V, dV)} \leq C \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(u,t)} K_\nu((y, u), (\bar{y}, t)) \|f\|_{L^p(V, dV)} dV d\bar{t} dt$$

where $f_{y,u}(x) = f(x+iy, u)$.

Proof. We set

$$K_{\nu+\frac{1}{2}+\tau}(t) = Q^{-\nu-\frac{1}{2}-\tau} \left(\frac{x+i(y+\bar{y}-2F(u, t))}{2i} \right)$$

and use Minkowski and Young inequalities, and Lemma 3.2 to obtain

$$\begin{aligned}
 \|(P_\nu f)_{y,u}\|_{L^p(V,dx)} &\leq d_{\nu,b} \left(\int_V \left| \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(t,t)} g_{y+\tilde{y},(u,t)} * f_{\tilde{y},t}(x) dV_\nu(\tilde{y},t) \right|^p dz \right)^{1/p} \\
 &\leq d_{\nu,b} \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(t,t)} \left(\int_V |g_{y+\tilde{y},(u,t)} * f_{\tilde{y},t}(x)|^p dz \right)^{1/p} dV_\nu(\tilde{y},t) \\
 &= d_{\nu,b} \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(t,t)} \|g_{y+\tilde{y},(u,t)} * f_{\tilde{y},t}\|_{L^p(V,dx)} dV_\nu(\tilde{y},t) \\
 &\leq d_{\nu,b} \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(t,t)} \|g_{y+\tilde{y},(u,t)}\|_{L^p(V,dx)} \|f_{\tilde{y},t}\|_{L^p(V,dx)} dV_\nu(\tilde{y},t) \\
 &\leq C \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(t,t)} K_\nu((y,u),(\tilde{y},t)) \|f_{\tilde{y},t}\|_{L^p(V,dx)} dV_\nu(\tilde{y},t),
 \end{aligned}$$

where the symbol $*$ stands for convolution. $\square$

5. PROOF OF THEOREM 3.1

Observe first that by Lemma 4.2 we have

$$\|P_\nu f\|_{p,q} \leq \left(\int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(u,u)} (T\|f_{\tilde{y},t}\|_{L^p(V,dx)}(y,u))^q dV_\nu(y,u) \right)^{1/q},$$

where

$$Tg(y,u) = \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(t,t)} K_\nu((y,u),(\tilde{y},t)) g(\tilde{y},t) dV_\nu(\tilde{y},t).$$

Next, it is easy to see that

$$(5.1) \quad \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(u,u)} K_\nu((y,u),(\tilde{y},t)) \varphi^q(y,u) dV_\nu(y,u) \leq CM \varphi^q(y,t)$$

and

$$(5.2) \quad \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\Omega+F(t,t)} K_\nu((y,u),(\tilde{y},t)) \varphi^{q'}(\tilde{y},t) dV_\nu(\tilde{y},t) \leq CM \varphi^{q'}(y,u),$$

where $\varphi(y,u) = Q^\gamma(y - F(u,u))$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \mathbb{R}^r$. Therefore, we have

$$\gamma_j = -\frac{\nu_j - \frac{b_j}{q} - \frac{m_j}{q'}}{q^2} - \frac{\nu_j}{qq'}, \quad j = 1, \dots, r$$

and

$$M = \frac{\prod_{j=1}^r \Gamma\left(\frac{\nu_j - \frac{m_j}{q} - \frac{b_j}{q}}{q}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_j - \frac{m_j}{q'}}{q'} - \frac{b_j}{q}\right)}{\Gamma n \cdot (\nu - \frac{b}{2})} \text{ with } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

So, using Schur's lemma, we get $\|P_\nu\| \leq CM$.

Next, taking into account the symmetry of sine function and the conjugacy between q and q' , we only need to consider the case where q is very large. In this case,

the function $\Gamma\left(\frac{z-\bar{z}-2}{2}\right)$ is bounded from above and below, and satisfies the relation:

$$\Gamma\left(\frac{z-\bar{z}-2}{2}\right) \sim e^{-\frac{\pi}{2}} \quad (z \rightarrow 1, \infty)$$

because $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \sim 1$ when x is a small positive number. Thus, there exists a positive constant C_1 independent of p and q , but depending on ν , m , n and r , such that $\|P_\nu\| \leq C_1 \csc^r \frac{\pi}{q}$. Now, we estimate $\|P_\nu\|$ from below, assuming that $q > 2$. In the case $1 < q \leq 2$, the estimate will follow by duality argument and the symmetry of function $\sin \frac{\pi}{q}$. Noting that for $q > 2$ the constant $\sin(\pi/q)$ is comparable to $1/q$, in view of the pointwise estimate, we obtain

$$\|P_\nu\| \geq \frac{C|P_\nu f(x+iy, u)|Q^{-\nu-\frac{1}{2}+\tau}(y-F(u, u))}{\|f\|_{p,q,\nu}}$$

for all $(x+iy, u) \in D$. So, taking

$$f(x+iy, u) = d_{ie}^{-1} Q^{-\nu+\frac{1}{2}+\tau}(y-F(u, u)) \chi_{B((ie_\Omega, 0), 1)}(x+iy, u),$$

where $B((ie_\Omega, 0), 1)$ is the Euclidean ball of radius 1 centered at $(ie_\Omega, 0)$, we obtain

$$\|P_\nu\| \geq C \left| Q^{-\nu-\frac{1}{2}+\tau} \left(\frac{2+i(y+e_\Omega)}{2} \right) \right| Q^{-\frac{1}{2}+\tau}$$

for all $y \in (\Omega - e_\Omega) \cap \Omega$. Here

$$P_\nu f(x+iy, u) = \pi^{\frac{2n-m}{2}} Q^{-\nu-\frac{1}{2}+\tau} \left(\frac{2+i(y+e_\Omega)}{2} \right)$$

and $\|f\|_{p,q,\nu} \leq C$. Finally, for $x = e^{-q}e_\Omega$, $u = 0$ and $y \in B(e_\Omega, 1)$, we get $\|P_\nu\| \geq Cq^r$, and the result follows. $\square$

As an immediate consequence of Theorem 3.1, we can state the following result.

Corollary 5.1. *Let $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{R}^r$ be such that $\nu_j > \frac{2n_j-1}{2}$, $j = 1, \dots, r$. If $P_\nu^\pm$ is extended to a bounded operator on $L^{p,q}_\nu$ -spaces of tube domains T_Ω , then there exist positive constants C_1 and C_2 , depending on ν , m and n , but not on p and q , such that*

$$C_1 \csc^r(\pi/q) \leq \|P_\nu\| \leq C_2 \csc^r(\pi/q).$$

Proof. The result follows from Theorem 3.1. It suffices to see that if $F \equiv 0$ and $m = 0$, then $D = T_\Omega$. $\square$

Remark 5.1. Our main results show how fast the norm of the weighted Bergman projection P_ν on $L^{p,q}_\nu$ -spaces grows as q increases and ν is fixed. Moreover, the results

do not depend on p . In this respect, it would be of interest to determine how the norm of P_ν grows when ν increases and q is fixed.

Acknowledgment. This work was done when the author visited Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics in Italy, and the author is very thankful to the members of the mathematics section, and the head of the section Fernando Rodriguez Villegas for their hospitality during the visit. I would like to express my sincere gratitude to K. Zhu with whom I had have many useful discussions on the similar topics which enabled me to investigate the problem in the Siegel domains. Special thanks to the associate editor and referee for all remarks and suggestions that led to considerable improvement of the paper.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. L. Aveluyan, "Fractional integro-differentiation in harmonic mixed norm spaces on a half-space", *Comment. Math. Univ. Carolinae* **42**, no. 4, 691 – 709 (2001).
- [2] D. Bekollé, A. Bonami, G. Garrigós, C. Nana, M. M. Peloso, F. Ricci, "Lecture notes on Bergman projections in tube domains over cones: an analytic and geometric viewpoint", *Math. Pures Appl.*, **5**(1), (2004).
- [3] D. Deherin, "Besov spaces and the boundedness of weighted Bergman projections over symmetric tube domains", *Publ. Math., Barc.*, **40**(1), 21 – 72 (2005).
- [4] M. M. Djrbashian, A. E. Djrbashian, "Integral representation for some classes of functions in a half-plane [in Russian]", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **285**, 547 – 550 (1985).
- [5] M. M. Djrbashian, A. H. Karapetyan, "Integral representations for some classes of functions holomorphic in a Siegel domain", *J. Math. Anal. Appl.*, **170**, no. 1, 91 – 109 (1993); See also: *Soviet Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **32**, no. 4, 86 – 93 (1987).
- [6] M. M. Djrbashian, A. H. Karapetyan, "Integral representations in the generalized upper half-plane", *Soviet Math. Dokl.*, **41**, no. 3, 430 – 433 (1990); See also: *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **25**, no. 6, 1 – 28 (1990).
- [7] T. M. Flett, "On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions", *Proc. London Math. Soc.*, **20**, 749 – 768 (1970).
- [8] F. Ricci, M. Taibleson, "Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure", *Annali Scuola Nor. Sup. Pisa.*, ser. **4**, no. 10, 1 – 54 (1983).
- [9] S. G. Gindikin, "Analysis on homogeneous domains", *Russ. Math. Surv.*, **10**, , 1 – 83 (1964).
- [10] J. Gonessa, "Espaces de type Bergman dans les domaines homogènes de Siegel de type II^p , Décomposition atomique et interpolation. Thèse de Doctorat-Ph. D, Université de Yamoussoukro (2006).
- [11] J. Gonessa, K. Zhu, "A sharp norm estimate for weighted Bergman projections on the minimal ball", *New York Math.*, **17A**, 101 – 112 (2011).
- [12] C. Nana, " $L^{p,q}$ -boundedness of Bergman projections in homogeneous Siegel domains of type II^p ", *J. Fourier Anal. Appl.*, **19**, 997 – 1019 (2013).
- [13] C. Nana, B. Trojan, " L^p -Boundedness of Bergman projections in tube domains over homogeneous cones", *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.*, **X**(5), 477 – 511 (2011).
- [14] E. B. Vinberg, "The theory of convex homogeneous cones", *Tr. Moskov. Mat. Obsc.*, **12**, 359 – 388 (1963).
- [15] K. Zhu, "A Sharp norm estimate of the Bergman projection on L^p spaces", *Contemporary Math.*, **404**, 190 – 205 (2006).
- [16] K. Zhu, *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Springer-Verlag, New York (2005).

Поступила 30 августа 2016

О КОМПАКТНОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1

В. Н. ЕНГИВАРЯН, И. В. ЕНГИВАРЯН

Институт Математики НАН Армении

E-mails: b.yengibaryan@eif.am, yengib@instmath.sci.am

Аннотация. Получены достаточные условия полной непрерывности интегральных операторов типа Фредгольма в пространстве $L_1(a, b)$. Построены равномерные аппроксимации операторов с вырожденными ядрами гори-зонтально волновой структуры. Получена количественная оценка погрешности. Также исследованы предельные свойства и интегральные преобразования типа Фурье, включая уравнения Шредингера на компактных интервалах, и уравнения с вырожденными ядрами, в частности уравнения с ядром Бит-то, содержащим, в явном и неявном виде функции Бесселя и модифицированной Бесселя.

MSC2010 number: 45A05, 45H05, 45D05

Ключевые слова: компактность интегрального оператора в пространстве суммируемых функций; оценка погрешности; ядро типа потепциала; уравнение Шредингера; уравнение переноса

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим линейный интегральный оператор K :

$$(1.1) \quad Kf(x) = \int_a^b K(x, t)f(t)dt, \quad -\infty < a < b < \infty,$$

где K - измеримая функция на $(a, b) \times (a, b)$.

Пусть K переводит пространство $L_p(a, b)$ в $L_q(a, b)$, где $p, q \geq 1$. Регулярность K означает, что оператор $|K|$ с ядром $|K(x, t)|$ также переводит $L_p(a, b)$ в $L_q(a, b)$. Из регулярности K следует его ограниченность (см. [1]). Имеет место следующая теорема о компактности (полной непрерывности) регулярных операторов (см. [1]).

Теорема 1.1. *Линейный регулярный компактный оператор, действующий из $L_p(a, b)$ в $L_q(a, b)$, где $p > q \geq 1$, вполне непрерывен.*

Утверждение теоремы не имеет места в случае $p = q$, который представляет основной интерес с точки зрения теории и решения интегральных уравнений второго рода

$$(1.2) \quad f(x) = g(x) + \int_a^b K(x, t) f(t) dt.$$

В математической физике, в теории случайных процессов и др., возникает вопрос решения уравнения (1.2) в пространстве $L_1(a, b)$. Регулярность K в $L_1(a, b)$ эквивалентна выполнению условия

$$(1.3) \quad \mu(K) = \sup_{x \in a, b} \int_a^b |K(x, t)| dx < +\infty.$$

Имеет место неравенство $\|K\|_{L_1} \leq \mu(K)$. В настоящей работе приводится достаточное условие компактности одного широкого класса интегральных операторов в $L_1(a, b)$. Доказательство носит конструктивный характер. Использование простой и естественный, конечномерный аппроксимирующий агрегат, структура которого согласована с определением величины $\mu(K)$. Получена априорная оценка погрешности. Специально рассмотрен оператор с ядром вида

$$(1.4) \quad K(x, t) = \lambda(x, t) T(x - t),$$

где $T \in L_1(-r, r)$, $r = b - a$ а функция λ ограничена:

$$(1.5) \quad |\lambda(x, y)| \leq \lambda_0.$$

Обозначим через W класс ядер, удовлетворяющих условию (1.3). Класс W является банаховой алгеброй с μ -нормой $\mu(K)$, в которой умножение определяется через композицию ядер.

Введем подкласс $W_U \subset W$ ядер, обладающих свойствами

$$(1.6) \quad \int_a^b |K(x, t) - K(x, y)| dx \leq \sigma(|y - t|), \quad \text{где } \sigma(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0+.$$

Через W и W_U обозначаются алгебры операторов вида (1.1) с ядрами из W и W_U соответственно. W_U является подалгеброй и правосторонним идеалом в W .

Отметим, что выполнение условия (1.6) не предполагает непрерывность или ограниченность ядра по второму аргументу.

2. Аппроксимация оператора $K \in W_U$

Ниже будет представлен способ конечномерной аппроксимации оператора $K \in W_U$. Этот способ приемыкает к методу усреднения ядра (МУЯ) работы [2] и имеет некоторое сходство с методом полос (см. [3], статью "Полос метод").

Пусть $\Pi = (s_m)_{m=0}^n$ - некоторое разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b \quad \text{и} \quad G_m = [s_m, s_{m+1}], \quad m = 0, \dots, (n-1).$$

Для $K \in W_U$ обозначим

$$(2.1) \quad \delta_m = \delta_m(K) \equiv \sup_{t, y \in G_m} \int |K(x, y) - K(x, t)| dx < +\infty.$$

Определение 2.1. Разбиение Π назовем δ -разбиением для ядра $K \in W_U$, где $\delta > 0$, если $\delta_m(K) \leq \delta$, $m = 0, \dots, (n-1)$.

Из леммы Гейля-Бореля следует, что для произвольного $\delta > 0$ существует конечное δ -разбиение для $K \in W_U$:

$$(2.2) \quad \int |K(x, t) - K(x, y)| dx \leq \delta \quad \text{при} \quad t, y \in G_m, \quad m = 0, \dots, (n-1).$$

Пусть $\eta_m \in G_m$, $m = 0, \dots, (n-1)$. Обозначим через Γ набор $\{\Pi, \{\eta_m\}\}$. Пару Γ назовем **интегральный оператор K_Γ со следующим вырожденным ядром K_Γ "гори контально полосатой" структуры**:

$$K_\Gamma(x, t) = K(x, \eta_m), \quad t \in G_m, \quad m = 0, \dots, (n-1).$$

Имеем:

$$(2.3) \quad K_\Gamma(x, t) = \sum_{m=0}^{n-1} K(x, \eta_m) \chi_{G_m}(t),$$

где χ_{G_m} - характеристическая функция промежутка G_m . Легко проверить, что $\mu(K_\Gamma) \leq \mu(K)$.

Конечномерный оператор K_Γ переводит $L_1(a, b)$ в подпространство линейных комбинаций вида $\sum_{m=0}^{n-1} c_m K(x, \eta_m)$.

Займемся оценкой близости K и K_Γ по μ -норме. При $t \in G_m$ имеем

$$(2.4) \quad \int |K(x, t) - K_\Gamma(x, t)| dx = \int |K(x, t) - K(x, \eta_m)| dx \leq \delta_m(K).$$

где η_m определяется согласно (2.1). Если Π является δ -разбиением ядра K , то $\mu(K - K_\Pi) \leq \delta$, при произвольном выборе промежуточных точек $\{\eta_m\}$. Нами получен следующий результат.

Теорема 2.1. *Оператор $K \in W_U$ вполне непрерывный в $L_1(a, b)$ и допускает равномерную аппроксимацию конечномерными операторами с ядрами вида (2.3). В случае δ -разбиения Π имеет место оценка*

$$(2.5) \quad \|K - K_\Pi\| \leq \delta.$$

3. ОПЕРАТОРЫ С ЯДРАМИ ВИДА (1.4)

Рассмотрим оператор K в случае ядра K вида (1.4), (1.5). Из (1.5) следует, что $K \in W$ и имеет место неравенство

$$(3.1) \quad \mu(K) \leq \lambda_0 \int_{-a}^b |T(x)| dx,$$

где $\mu(K)$ определяется согласно (1.3). Поэтому оператор K ограниченно действует в пространстве $L_1(a, b)$. Интегральное уравнение (1.2) с таким ядром имеет широкие применения в математической физике. Отметим некоторые известные классы уравнений с ядром (1.4), (1.5).

- Если $\lambda(x, t) = \lambda = \text{const}$, то (1.2) обращается в уравнение свертки на конечном промежутке.
- Если $T(x) = |x|^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, то (1.2) представляет собой одномерное уравнение с ядром типа потенциала. Если к тому же функция $\lambda(x, t)$ непрерывна в квадрате $[a, b] \times [a, b]$, то (1.4) является полярным ядром.
- Если функция зависит только от второго аргумента t :

$$(3.2) \quad \lambda(x, t) = \lambda(t), \quad \lambda \in C[a, b],$$

то уравнением (1.2) описывается большой круг задач переноса излучения в неоднородном плоском слое. В этих задачах λ представляет собой альбедо рассеяния, зависящее от глубины t .

Уравнение (1.2) с полярным ядром достаточно подробно изучено в пространствах $C[a, b]$ и $L_2(a, b)$ (см. [4]). Приведем основной результат по компактности оператора с ядром (1.4) (см. [5]).

Лемма 3.1. Пусть ядро K оператора (1.1) имеет вид (1.4). Если функция λ непрерывна в квадрате $[a, b] \times [a, b]$, то оператор K компактен в пространствах $L_1(a, b)$ и $C[a, b]$.

Применение теоремы в прикладных вопросах выглядит проблематичным. В случае ядер типа потенциала не предполагается выполнение условия теоремы В о непрерывности функции λ .

Ниже будет установлена компактность оператора с ядром (1.4) при более слабом ограничении на функцию λ по сравнению с теоремой В. Предполагается, что λ обладает следующим свойством равномерной непрерывности по второму аргументу:

$$(3.3) \quad |\lambda(x, y) - \lambda(x, t)| \leq \omega(|y - t|), \quad \text{где } \omega(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

Теорема 3.1. Пусть ядро K имеет вид (1.4), где функция λ удовлетворяет условиям (1.5) и (3.3). Тогда $K \in W_U$ и тем самым имеет место утверждение теоремы 2.1.

Доказательство. Можно считать, что функция T задана на всей вещественной оси и равна 0 вне промежутка $(-r, r)$. Проверим, что ядро (1.4) удовлетворяет условию (1.6). Воспользуемся неравенством

$$|K(x, y) - K(x, t)| \leq |\lambda(x, y) - \lambda(x, t)| |T(x - y)| + |\lambda(x, t)| |T(x - y) - T(x - t)|.$$

С учетом (3.1) и (1.5) получаем

$$(3.4) \quad \int_a^b |K(x, y) - K(x, t)| dy \leq \omega(|y - t|) \int_a^b |T(z)| dz + \lambda_0 \int_a^b |T(z) - T(z - (y - t))| dz$$

Нам остается воспользоваться свойством абсолютной непрерывности интеграла Лебега, согласно которому второй интеграл в правой части (3.4) стремится к 0 при $|y - t| \rightarrow 0$. □

4. Метод усреднения ядра

Метод усреднения ядра основан на приближенной замене уравнения (1.2) уравнением с ядром K_T вида (2.3):

$$(4.1) \quad \Phi(x) = \varphi(x) + \int_a^b K_T(x, y) \Phi(y) dy$$

Из оценки (2.5) следует, что если оператор $I - K$ (где I - единичный оператор) обратим в $L_1(a, b)$, то при достаточно малом δ уравнение (4.1) имеет единственное решение, которое сходится к решению уравнения (1.2) при $\delta \rightarrow 0+$. Имеет место известная оценка близости f и $\tilde{f}$ через $\|K - K_\Gamma\|$, $\|(I - K)^{-1}\|$ и $\|g\|_{L_1}$.

Сведем уравнение (4.1) к алгебраической системе. Из (4.1) и (2.3) изведем

$$(4.2) \quad \tilde{f}(x) = g(x) + \sum_{m=0}^{n-1} K(x, \eta_m) f_m,$$

где $f_m = \int \tilde{f}(t) dt$. Интегрируя (4.2) по x на G_j , $j = 0, \dots, (n-1)$ приходим к следующей линейной алгебраической системе относительно $\{f_j\}$:

$$(4.3) \quad f_j = g_j + \sum_{m=0}^{n-1} a_{jm} f_m,$$

где

$$(4.4) \quad a_{jm} = \int_{G_j} K(x, \eta_m) dx, \quad g_j = \int_{G_j} g(x) dx, \quad m, j = 0, \dots, (n-1).$$

Известными рассуждениями проверяется эквивалентность уравнения (3.4) и (4.3). Отсюда следует единственность решения уравнения (4.3). Приближенное решение уравнения (1.2) определяется по формуле (4.2).

4.1. Замечания. Применение метода усреднения ядра к уравнению (1.2) предполагает выбор набора Γ и вычисление интегралов (4.4) (это небольшая цена, которую мы должны платить за дискретизацию уравнения (1.2)). В этом отношении достаточно благоприятным является ядро вида (1.4) в случае (3.2) (выбор равноотстоящих узлов аналогичен [2]). Как уже было отмечено, уравнение (1.2) с ядром, удовлетворяющим (1.4), (3.2) возникает в теории переноса. Способ дискретизации, рассмотренный в настоящей работе, может быть использован в вопросе построения треугольной факторизации интегральных операторов второго рода в пространстве L_1 (см. [6]).

Abstract. In this paper we obtain a sufficient condition for quite continuity of Fredholm type integral operators in the space $L_1(a, b)$. Uniform approximations by operators with degenerate kernels of horizontally striped structures are constructed. A quantitative error estimate is obtained. We point out the possibility of application of the obtained results to second kind integral equations, including convolution equations

on a finite interval, equations with polar kernels, one-dimensional equations with potential type kernels, and some transport equations in non-homogeneous layers.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Крамосьельский, П. П. Зябрейно, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, Интегральные Операторы в Пространствах Суммируемых Функций, М., Наука (1966).
- [2] А. Г. Барсегян, Н. Б. Енгиварян, "Приближенное решение интегральных и дискретных уравнений Винера-Хопфа", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **55**, no. 5, 836 – 843 (2015).
- [3] Математическая Энциклопедия. **4**, Изд. "Советская энциклопедия" (1984).
- [4] В. В. Владимирова, Уравнения Математической Физики, М., Наука (1981).
- [5] С. Г. Крейн, Линейные Уравнения в Банаховом Пространстве, М., Наука (1971).
- [6] Н. Б. Енгиварян, "О факторизации интегральных операторов в пространствах суммируемых функций", Известия РАН, Математика, **73**, no. 5, 67 – 82 (2009)

Поступила 12 января 2018

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СЛАБО ГИПЕРВОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В. Н. МАРГАРИН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - Армянский (Славянский) Университет, Армения
Институт Математики НАН Армении
E-mails: haikghazaryan@mail.ru, vachagan.margaryan@yandex.com

Аннотация. Рассматривается задача Коши в мультиинвариантных пространствах типа пространств Жевре, наложено необходимое условие для существования разрешимости этой задачи и выполнены свойства гиперволического оператора (многочленов) с определенным весом.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: гиперволический с весом оператор (многочлен); мультиинвариантное пространство Жевре; явное правильное многогранник Ньютона.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть E^n и R^n - n -мерные вещественные пространства точек соответственно $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $R^{n,+} = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$, $C^n = R^n \times iR^n$, N -множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times \dots \times N_0$ -множество n -мерных мультииндексов. Для $\xi, \eta \in R^n$, $\alpha \in N_0^n$ и $\nu \in R^{n,+}$ положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$, $|\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \dots |\xi_n|^{\nu_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial \xi_j$ либо $D_j = \frac{1}{i} \cdot \partial/\partial x_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha D^\alpha$, где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов ($P) = \{\alpha \in N_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, через $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ обозначим характеристический многочлен (полный символ) отвечающий этому оператору, через $m = m(P)$ обозначим его порядок, а через P_m его главную (m -однородную) часть и представим многочлен P в виде суммы j -однородных многочленов ($j = 1, \dots, m$)

⁶Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 1ST - 1A 197 в тематического фонда Российско - Армянского (Славянского) университета министерства образования и науки Российской Федерации.

$$(1.1) \quad P(\xi) = \sum_j P_j(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^n \gamma_{\alpha j} \xi^\alpha.$$

Пусть $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{E}^n$. Ω_N — полупространство, заданное неравенством $(x, N) > 0$, f — заданная функция с носителем $\text{supp } f \subset \bar{\Omega}_N$. Задача Коши для оператора $P(D)$ в Ω_N с однородными начальными данными состоит в нахождении решения уравнения $P(D)u = f$ в $\mathbb{E}^n$ такого, что $\text{supp } u \subset \Omega_N$. Далее, не оговаривая это каждый раз, будем полагать, что N — единичный вектор.

Определение 1.1. Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гиперболическим (по Гордиугу) относительно вектора $N \in \mathbb{E}^n$, если $P_m(N) \neq 0$ и для некоторого вещественного τ_0 $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\tau < \tau_0$.

Замечание 1.1. Легко убедиться, что, если многочлен $P(\xi)$ и вектор $N \in \mathbb{E}^n$ такие, что $P_m(N) = 0$, то существует вещественное число C такое, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для всех $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $|\tau| \geq C(|\xi| + 1)$.

Если $N = (1, 0, \dots, 0)$ часто бывает удобно рассматривать $(n+1)$ -мерное пространство $\mathbb{E}^{n+1}$ (или $\mathbb{R}^{n+1}$) и выделить одну из переменных, которую обычно обозначают через t , а группу переменных через $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$. Чтобы изложить некоторые известные результаты, непосредственно связанные с настоящей работой, мы поступим следующим образом: будем временно считать, что $N = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{E}^{n+1}$ и вместо $P(D)$ запишем $P(D_t, D_x)$, а вместо $P(\xi)$ соответственно $P(\lambda, \xi)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Оператор

$$(1.2) \quad P(D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{|\alpha| \leq m-1} a_\alpha D^\alpha$$

с постоянными коэффициентами называется слабо гиперболическим относительно t , или, что то же самое, относительно $(n+1)$ -мерного вектора $N = (1, 0, \dots, 0)$ если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ корни (по λ) многочлена

$$(1.3) \quad P_m(\lambda, \xi) = \lambda^m + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \gamma_{\alpha j} \xi^\alpha \lambda^j$$

вещественны. При этом, если все эти корни простые, то оператор называется строго гиперболическим или гиперболическим по Петровскому.

Изучение задачи Коши для общих гиперболических и в частности слабо гиперболических уравнений началось с работы [3] Е. Е. Леви, где рассматривался

двумерный случай. В 1951 - ом году Л.Гординым было введено понятие общего гиперболического оператора (уравнения, многочлена), обобщающее понятие гиперболичности по Петровскому (см. [4], [5] или [6, определение 12.3.3]). Было доказано, что условие гиперболичности (и тем самым условие слабой гиперболичности) необходимо для того, чтобы нехарактеристическая задача Коши имела решение в классе распределений $D'(\mathbb{E}^n)$ Л. Шварца (см., например, [7], [8] или [6, теорема 12.3.1]).

Нахождение наиболее широких функциональных пространств, где задача Коши для гиперболического оператора поставлена корректно, привело к классам Жевре (см. [9]). Эти классы являются промежуточными между классами бесконечно дифференцируемых и вещественно - аналитических функций. Однако, если условие строгой гиперболичности является достаточным для корректности постановки задачи Коши в C^∞ , эта задача вообще перестает быть корректно поставленной для слабо гиперболических уравнений, и тем легко убедится даже на примере оператора теплопроводности, для которого задача Коши поставлена корректно в классе Жевре G^s при $s < 2$, но поставлена некорректно в G^s при $s \geq 2$ или в C^∞ (см., например, [6, пункт 4.2]). При этом $G^s(\Omega)$ — это множество функций $u \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $C = C(K) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s \quad \text{для любого } \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Для слабо гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами критерии корректности задачи Коши получены в работах Леви, Гординга, Лакса, Свенссона и других (см., например, [3], [10] - [13]).

Оператор $P(D_t, D_x)$ называется s -гиперболическим ($1 < s < \infty$) относительно t , или, что то же самое относительно $(n+1)$ -мерного вектора $N = (1, 0, \dots, 0)$, если существует число $c > 0$ такое, что $\text{Im} \lambda \geq -c(1 + |\xi|)^{\frac{1}{s}}$ для тех точек $(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$ для которых $P(\lambda, \xi) = 0$. Если $\text{Im} \lambda \geq -c$, то оператор $P(D_t, D_x)$ называют гиперболическим (по Гордигу) (см. [5], [15]). Для более подробных сведений см. монографию Л. Родиво [16, глава 12].

В работах [12] и [13] доказано, что для s -гиперболического оператора (1.2) задача Коши с начальными условиями $D_t^k u(0, x) = f_k(x)$ ($x \in \mathbb{E}^n$) и начальными функциями $f_k \in G_0^{s_1}(\mathbb{E}^n) := G^{s_1}(\mathbb{E}^n) \cap C_0^\infty(\mathbb{E}^n)$ $k = 0, 1, \dots, m-1$, ($1 < s_1 < s$),

имеет решение $u \in C^{s_1}(\mathbb{E}^{n+1})$. При этом оказалось, что каждый s -гиперболический оператор является слабо гиперболическим и каждый слабо гиперболический оператор является $\frac{1}{r}$ -гиперболическим, где r — максимальная кратность характеристик (нулей символа $P_{tt}(\lambda, \xi)$ по λ) (см. [13] и [9]).

В работе [14] О. Лиссом и Л. Родино (для более подробных сведений см. монографию [16]) для символа $P(t, \xi)$ оператора $P(D_t, D_x)$ введено понятие весовой функции гиперболичности, зависящей только от переменных $\xi = (1, \dots, 1)$ и определены неоднородные классы Жевре, порожденные такими весами. Имя, а также в более общем случае Д. Калло в [17] изучены вопросы существования решения задачи Коши в этих пространствах.

Д. Калло в [17] введено также понятие $(s, \mathbb{R})$ -гиперболического (мультипликативногиперболического) относительно $(n+1)$ -мерного вектора $N = (1, 0, \dots, 0)$ оператора, обобщающее понятие s -гиперболичности. Это оператор $P(D_t, D_x)$ вида (1.2), для которого существует число $s > 0$ такое, что символ (1.3) удовлетворяет условию: если $P(\lambda, \xi) = 0$, то $\operatorname{Im} \lambda \geq -h(\xi)$ для $h(\xi) \equiv |\xi|_s$ — некоторый (полностью определенный) вес, зависящий от ξ , но не зависящий от t . В [17] доказывается существование единственного решения соответствующей задачи Коши в $C^\infty([0, T]) \cap C^{s_1, \mathbb{R}}(\mathbb{E}_x^n)$ для любых $(T, s) : T > 0, 1 < s_1 < s$ и для произвольных начальных данных из $C_0^{s_1, \mathbb{R}}(\mathbb{E}_x^n)$.

Во всех работах, посвященных s -гиперболическим или $(s, \mathbb{R})$ -гиперболическим относительно вектора $N \in \mathbb{E}^{n+1}$ операторам $P(D_t, D_x)$, выделялось одно переменное t , т. е. рассматривался случай $N = (1, 0, \dots, 0)$, при этом вес гиперболичности не зависел от t .

В настоящей работе мы выводим необходимые условия для существования единственного решения нехарактеристической задачи Коши для гиперболических уравнений с весом, когда а) (единичный) вектор $N \in \mathbb{E}^{n+1}$ произвольный, б) вес гиперболичности зависит от всех переменных, следовательно, мультипликативное пространство Жевре, где ищется решение, порождается общим весом. При этом, так как переменные будут играть одинаковую роль, то будем считать, что изучаемые операторы действуют в n -мерном пространстве. Исследуются свойства символов, отвечающих рассмотренным линейным дифференциальным операторам.

Для набора точек $N = \{a^1, \dots, a^{2l}\}$, $a^k \in \mathbb{R}^{n,0}$ ($k = 1, \dots, 2l$) невыпуклый выпуклый многогранник $R(N)$ в $\mathbb{R}^{n,0}$, содержащий все точки набора N называется **многогранником Ньютона** набора N (см [1] или [2]).

Многогранник $\mathcal{R}$ с вершинами из $\mathbb{R}^{n,-1}$ называется **полным**, если $\mathcal{R}$ имеет вершину в начале координат и дополнительную вершину на каждой оси координат $\mathbb{R}^{n,-1}$. Полный многогранник $\mathcal{R}$ называется **вполне правильным**, если (единичные) внешние нормали всех $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\mathcal{R}$ (множество которых обозначим через $\Lambda(\mathcal{R})$) имеют положительные координаты.

Мы намерены, используя установленные в настоящей работе свойства h -гиперболических многочленов, в другой работе привести достаточные условия корректной постановки задачи Коши в соответствующих пространствах Жезре для уравнений, символы которых являются h -гиперболическими.

Пусть $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n,-1}$ вполне правильный многогранник и $\lambda \in \Lambda(\mathcal{R})$. Через $\mathcal{R}^0$ обозначим множество его вершин и положим

$$d(\lambda) = d(\lambda, \mathcal{R}) = \max_{\nu \in \mathcal{R}^0} (\nu, \lambda) = \max_{\nu \in \mathcal{R}^0} \sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j.$$

$$r_j = r_j(\mathcal{R}) = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{R})} \frac{d(\lambda)}{\lambda_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad r_0 = \max_{1 \leq j \leq n} r_j.$$

$$h_{\mathcal{R}}(\xi) = \sum_{\nu \in \mathcal{R}^0} |\xi|^\nu = \sum_{\nu \in \mathcal{R}^0} |\xi_1|^{\nu_1} \dots |\xi_n|^{\nu_n}; \quad g(\xi) = 1 + |\xi|^{r_0}.$$

В [18] доказано существование числа $C = C(\mathcal{R}) > 0$ такого, что

$$(1.4) \quad h_{\mathcal{R}}(\xi + \eta) \leq C[h_{\mathcal{R}}(\xi) + g(\eta)] \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{C}^n$$

Для вполне правильного многогранника $\mathcal{R}$, числа $r \geq 1$ в области $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ введём следующие анизотропные и мультианизотропные классы в пространствах Жезре.

Через $\Gamma^r(\Omega)$ обозначим (см. [18]) множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \subset \Omega$ существует число $C = C(f, K) > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1} |\alpha|^{r|\alpha|} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Положим $\mathcal{R}^j = \{\nu \in \mathbb{R}^{n,0}; \nu/j \in \mathcal{R}, (j = 1, 2, \dots)\}$ и обозначим через $\Gamma^{\mathcal{R}}(\Omega)$ множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \subset \Omega$ существует число $C = C(f, K) > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{j+1} j^j \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}^j, j = 0, 1, \dots$$

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{R}$ вполне правильным многогранником, для которого $\epsilon_0 = \epsilon_0(\mathcal{R}) < 1$. Пусть $N \in \mathbb{E}^n$ и $P(D)$ линейный дифференциальный оператор такой, что для любой $f \in G_0^{\mathcal{R}}(\Omega_N)$ уравнение $P(D)u = f$ имеет единственное решение $u \in G_0^{\mathcal{R}}(\Omega_N)$. Тогда существует вещественное число c такое, что

$$(2.1) \quad P(\xi + i\tau N) \neq 0 \quad \forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \tau \leq c h_{\mathcal{R}}(\xi).$$

Замечание 2.1. Очевидно, любой гиперболический по Гордизу оператор удовлетворяет условию (2.1).

Доказательство теоремы 2.1 Так как $G_0^{\mathcal{R}}(\Omega_N)$ является замкнутым подпространством пространства Фрише $G^{\mathcal{R}}(\mathbb{E}^n)$, отображение $P(D) : G^{\mathcal{R}}(\mathbb{E}^n) \rightarrow G^{\mathcal{R}}(\mathbb{E}^n)$ непрерывно и по условию теоремы задача Коши для уравнения $P(D)u = f$ при всех $f \in G_0^{\mathcal{R}}(\Omega_N)$ имеет единственное решение с носителем в Ω_N , то из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор $P(D)$ порождает автоморфизм пространства $G_0^{\mathcal{R}}(\Omega_N)$.

Пусть $y \in \Omega_N$ и $\sigma = \frac{1}{\kappa}(y, N)$. В силу сказанного, для точки $y \in \Omega_N$ существует компакт $K \subset \Omega_N$ и число $\kappa > 0$ такие, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$(2.2) \quad |u(y)| \leq C_1 |||P(D)u|||_{\mathcal{A}, \kappa, \kappa} \quad \forall u \in G_0^{\mathcal{R}}(\Omega_N).$$

Выберем функцию $\chi \in \Gamma^{1/r_0}$ такую, что $\chi(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > \sigma$. (Существование такой функции доказано в [21]).

Предположим обратное, что существует последовательность $\{(\xi^s, \tau_s)\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что $\tau_s/h_{\mathcal{R}}(\xi^s) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $P(\xi^s) = P(\xi^s + i\tau_s N) = 0$ ($s = 1, 2, \dots$). Положим

$$u_s(x) = e^{i(x-y, \xi^s)} \chi((x, N)) \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Так как (см. [18]) $f\varphi \in G^{\mathcal{R}}(\Omega)$ для любых $f \in G^{\mathcal{R}}(\Omega)$ и $\varphi \in \Gamma^{1/r_0}(\Omega)$, то по определению функции χ имеем $u_s \in G_0^{\mathcal{R}}(\Omega_N)$ ($s = 1, 2, \dots$). Поэтому, в силу (2.2) и определения последовательности $\{z_s\}$, применяя обобщенную формулу Лейбница, имеем с некоторой постоянной $C_2 > 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} 1 &= |u_s(y)| \leq C_1 |||P(D)u_s|||_{\mathcal{A}, \kappa, \kappa} \\ &\leq C_2 \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^n} |P^{(\alpha)}(\xi^s)| |||D^{\alpha} \chi((x, N)) e^{i(x-y, \xi^s)}|||_{\mathcal{A}, \kappa, \kappa} \end{aligned}$$

где $P^{(\alpha)}(\xi) = D^{\alpha} P(\xi)$.

Отметим, что в правой части (2.3) стоит конечная сумма, так как $P^{(\alpha)}(\xi) = 0$ при $|\alpha| > m$.

В силу определения функции χ отсюда следует существование положительных чисел $\kappa_1 = \kappa_1(\kappa, \chi)$ и $C_3 = C_3(C_2, \chi)$ таких, что

$$1 \leq C_3 \sum_{|a| \leq m} |P^{(a)}(z^s)| e^{-\sigma|x-N|} \quad (s=1, 2, \dots)$$

где $K = \{x \in K, 0 \leq (x, N) \leq \sigma\}$.

В силу определения потурны $||| \cdot |||$ отсюда имеем для всех $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} 1 &\leq C_3 \sum_{|a| \leq m} |P^{(a)}(z^s)| \sup_j \max_{x \in K} \sup_{x' \in K} |D^a e^{i(x-x')}| \frac{\kappa_1^j}{j!} = \\ &= C_3 \sum_{|a| \leq m} |P^{(a)}(z^s)| \sup_j \max_{x \in K} |(z^s)^a| \sup_{x' \in K} |e^{i(x-x')}| \frac{\kappa_1^j}{j!}. \end{aligned}$$

Так как многогранник $\mathcal{K}$ полный, то существует натуральное число l такое, что $\{a \in \mathcal{N}_0^n, |a| \leq m\} \subset \mathcal{R}^l$. Тогда (см. [1], Лемма 2.1) существует число $C_4 > 0$ такое, что

$$\sum_{\beta \in \mathcal{R}^l} |\eta^\beta| \leq C_4 h_{\mathcal{K}}^l(\eta) \quad \text{для всех } \eta \in \mathbb{C}^n$$

Из последних двух неравенств следует существование постоянной $C_5 > 0$ такой, что для всех $s = 1, 2, \dots$

$$1 \leq C_5 \sup_{|a| \leq m} |P^{(a)}(z^s)| e^{-\sigma|x-N|} \frac{C_6}{j!} \quad (s=1, 2, \dots)$$

Отсюда, в свою очередь имеем для $\kappa_2 = C_1 \kappa_1$ и с некоторой постоянной $C_6 > 0$

$$1 \leq C_6 \sup_{|a| \leq m} |P^{(a)}(z^s)| e^{-\sigma|x-N|} \frac{C_6}{j!} \quad (s=1, 2, \dots)$$

Отсюда и из свойства (1.4) весовой функции $h_{\mathcal{K}}$ имеем

$$(2.4) \quad 1 \leq C_6 \sup_{|a| \leq m} |P^{(a)}(\xi^s)| + 1 + |\tau_a|^{r_0} e^{-\sigma|\tau_a|} \frac{C_6}{j!} \quad (s=1, 2, \dots),$$

где C - постоянная из (1.4).

Так как последовательности $\{x_n = C\kappa_2[h_{\mathcal{K}}(\xi^s) + 1]\}_{s=1}^\infty$ и $y_n = \{|\tau_n| (C\kappa_2)^{1/r_0}\}$ при $r = r_0 < 1$ и $\sigma > 0$ удовлетворяют условиям леммы 2.1, то из (2.4) следует,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_j |h_{\mathcal{K}}(\xi^s) + 1 + |\tau_n|^{r_0} \frac{C_6}{j!} e^{-\sigma|\tau_n|} = 0,$$

что противоречит (2.4) и доказывает теорему 2.1.

Исходя из теоремы 2.1, введем понятие весовой функции гиперклинности и понятие гиперболического оператора с весом. Причем введенное здесь понятие весовой функции отличается от соответствующего понятия, введенного

Л. Хёрмандером. О. Листом, Л. Радиясо и другими (см. [14] или Определение 1.8.1 в [16]) тем, что весовая функция h может не удовлетворять неравенству $h(\xi + \eta) \leq C h(\xi) (1 + |\eta|^M)$.

Определение 2.1. Локально ограниченную функцию h , определенную в $\mathbb{R}^n$ назовем *весом гиперболическим*, если h удовлетворяет следующим условиям

$$1) \ h(\xi) \geq c > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 2) \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} h(\xi)/|\xi| = 0.$$

3) для каждого $t > 0$ существуют числа $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t)$ такие, что

$$\alpha_1(t) h(\xi) \leq h(t\xi) \leq \alpha_2(t) h(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Множество всех весовых функций обозначим через H . Очевидно, что для любой функции $h \in H$ и числа $C > 0$ $Ch \in H$.

Определение 2.2. Пусть $N \in \mathbb{R}^n$ и $h \in H$. Многочлен P назовем *h -гиперболическим относительно вектора N* если (см. представление (1.1)) $P_m(N) \neq 0$ и существует вещественное число c такое, что

$$(2.5) \quad P(\xi + i\tau N) \neq 0 \quad \forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \tau < ch(\xi).$$

Из условия 1) на функцию h непосредственно следует, что гиперболический по Гордингу (относительно вектора N) многочлен является h -гиперболическим (относительно N) для любой весовой функции $h \in H$.

3. СВОЙСТВА h -ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Теорема 3.1. Пусть $h \in H$. Если многочлен P вида (1.1) h -гиперболичесен относительно $N \in \mathbb{R}^n$, то его главная часть P_m гиперболическа по Гордингу относительно $N \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы существует вещественное число τ_0 , для которого

$$(3.1) \quad P_m(\xi + i\tau N) \neq 0 \quad \forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \tau < \tau_0.$$

Положим для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$

$$O(\xi, t) = \{\theta = \theta(\xi, t) \in \mathbb{C}, P(t\xi + it\theta N) = 0\}.$$

Так как для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ и $\theta \in O(\xi, t)$

$$0 = P(t\xi + it\theta N) = P(t[\xi - (Im \theta) N] + it(Re \theta) N),$$

то из h -гиперболичности многочлена P следует существование числа C_1 такого,

$$(3.2) \quad t \operatorname{Re} \theta \geq C_1 h(t[\xi - (Im \theta) N]) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0, \theta \in O(\xi, t).$$

Очевидно, для каждой пары $(\xi, \theta) : \xi \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{C}$

$$P_m(\xi + i\theta N) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-m} P(t\xi + i t \theta N).$$

Так как $P_m(N) \neq 0$, то нули (по θ) многочлена $Q_t(\theta) := P(t\xi + i t \theta N)$ непрерывно зависят от t . Следовательно, в силу (3.2), нули (по θ) многочлена $P_m(\xi + i\theta N)$ принадлежат множеству

$$\bigcap_{t>0} \{\theta \in \mathbb{C}, t \operatorname{Re} \theta \geq C_1 h(t[\xi - (Im \theta) N])\} = \bigcap_{t>0} \{\theta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \theta \geq \frac{C_1}{t} h(t[\xi - (Im \theta) N])\}.$$

Отсюда непосредственно получаем, что для тех θ , для которых $P_m(\xi + i\theta N) = 0$

$$\operatorname{Re} \theta \geq c \lim_{t \rightarrow 0} h(t[\xi - (Im \theta) N]) / t,$$

где c — постоянная из (2.5).

Если $\xi - (Im \theta) N = 0$ для пары (ξ, θ) , то отсюда следует, что $\operatorname{Re} \theta \geq 0$. Если же $\xi - (Im \theta) N \neq 0$, то в силу условия 2) на функцию h имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t[\xi - (Im \theta) N])}{t[\xi - (Im \theta) N]} = \frac{h(\xi - (Im \theta) N)}{\xi - (Im \theta) N} > 0.$$

Это значит, что нули (по $\tau = \tau(\xi)$) многочлена $P_m(\xi + i\theta N)$ лежат в полупространстве $\operatorname{Re} \tau \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Поэтому $P_m(\xi + i\theta N) \neq 0$ для любых $\xi \in \mathbb{R}^n, \tau < 0$, что и означает, что многочлен P_m гиперболичесен по Горднунгу относительно вектора N . $\square$

Теорема 3.2. Если многочлен P h -гиперболичесен относительно вектора N , то он h -гиперболичесен относительно вектора $-N$.

Доказательство. По теореме 3.1 многочлен P_m гиперболичесен по Горднунгу относительно N , поэтому (см. [6], лемма 8.7.3) можно считать, что коэффициенты P_m вещественны.

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\{\tau_j(\xi) : j = 1, \dots, m\}$ нули (по τ) многочлена $P(\xi + i\theta N)$. Применяя формулу Тейлора, получим для каждого $l = 0, 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} P_{m-l}(\xi + i\tau N) &= \sum_{\alpha=0}^{\xi^\alpha} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_{m-l}(iN) = \\ &= \tau^{m-l} P_{m-l}(iN) + \sum_{j=1}^{m-l} \tau^{m-l-j} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_{m-l}(iN). \end{aligned}$$

Поэтому

$$P(\xi + i\tau N) = \tau^m P_m(iN) + \tau^{m-1} \left[\sum_{j=1}^n (D_j P_m)(iN) \xi_j + P_{m-1}(iN) \right] + \dots$$

где не выписаны члены, содержащие τ в степени меньше $(m-1)$. Следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tau_j(\xi) &= -i \left[\sum_{j=1}^n (D_j P_m)(iN) \xi_j + P_{m-1}(iN) \right] / P_m(iN) = \\ &= i \left[\sum_{j=1}^n (D_j P_m)(N) \xi_j + P_{m-1}(N) \right] / P_m(N). \end{aligned}$$

Так как P_m — многочлен с вещественными коэффициентами и $N \in \mathbb{R}^n$, то для $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^n \tau_j(\xi) \right] = \operatorname{Re} [i P_{m-1}(N) / P_m(N)] \equiv \operatorname{const} = C_1.$$

Тогда в силу h -гиперболичности многочлена P и условия 1) на функцию $h \in H$ имеем с некоторыми вещественными постоянными C_2, C_3

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tau_k &= C_1 - \sum_{j \neq k} \operatorname{Re} \tau_j \leq C_1 - C_2 \sum_{j \neq k} h(\xi - \operatorname{Im} \tau_j(\xi) N) \leq \\ &\leq C_3 \sum_{j \neq k} h(\xi - \operatorname{Im} \tau_j(\xi) N); \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно получаем, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для произвольных $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\tau > C_3(n-1)h(\xi)$, т.е. многочлен P h -гиперболичен относительно вектора $-N$. $\square$

Из этой теоремы непосредственно следует следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Многочлен P h -гиперболичен относительно вектора N тогда и только тогда, когда существует положительное число c такое, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для всех $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|\tau| \geq c h(\xi)$.*

Следуя Л. Хермандеру для точки $\xi \in \mathbb{R}^n$, многочлена P и числа $l > 0$ введём следующие функции (Хермандера) (см. [6], формулы (10.1.7) и (10.4.2))

$$R(\xi) = \sqrt{\sum_{\alpha} |R^{\alpha}(\xi)|^2}, \quad R(\xi, l) = \sqrt{\sum_{\alpha} |R^{\alpha}(\xi)|^2 l^{2|\alpha|}}.$$

Говорят, что многочлен P сильнее многочлена Q и записывают $Q \ll P$, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$\tilde{Q}(\xi) \leq C \tilde{P}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Оказывается (см. [6], теорема 10.4.1), что $Q \prec P$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$Q(\xi, t) \leq C_1 P(\xi, t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 1.$$

Определение 3.1. Пусть $h \in H$. Будем говорить, что многочлен P h -сильнее многочлена Q и запишем $Q \prec^h P$, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$Q(\xi, t) \leq CP(\xi, t) \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \forall t \geq h(\xi).$$

Из условия 1) на функции множества H следует, что $Q \prec P$ влечет $Q \prec^h P$ для любой $h \in H$. Обратное не верно, что подтверждается следующим примером.

Пример 3.1. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2$, $Q(\xi) = \xi_1^3$ и $h(\xi) = (1 + |\xi|)^{1/2}$. Легко проверить, что с некоторыми положительными постоянными C_1, C_2 многочлены P и Q на последовательности $\xi^s = (s, s)$: $s = 1, 2, \dots$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$C_1^{-1} s^3 \leq Q(\xi^s) \leq C_1 s^3; \quad C_2^{-1} s^2 \leq P(\xi^s) \leq C_2 s^2; \quad s = 1, 2, \dots$$

т.е. P не сильнее Q .

С другой стороны, простые подсчеты показывают, что с некоторыми положительными постоянными C_3, C_4 и для всех $\xi \in \mathbb{R}^2, t > 0$ многочлены P и Q удовлетворяют соотношениям

$$Q(\xi, t) \leq C_3(|\xi_1|^3 + |\xi_1|^2 t + |\xi_1| t^2 + t^3), \quad h(\xi) \geq C_4((\xi_1^2 + \xi_2^2)t + t^4);$$

из которых непосредственно следует существование постоянной $C_5 > 0$ такой, что $Q(\xi, t) \leq C_5 P(\xi, t)$ для всех $(\xi, t) \in \mathbb{R}^3, t \geq h(\xi)$ т.е. $Q \prec^h P$.

Лемма 3.1. Пусть P и Q многочлены от n переменных, а функции $h, h_1 \in H$ удовлетворяют условию

$$(3.3) \quad C_1 h(\xi) \leq h_1(\xi) \leq C_2 h(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где C_1 и C_2 некоторые положительные постоянные. Тогда 1) $Q \prec^h P$ тогда и только тогда, когда $Q \prec^{h_1} P$, 2) $Q(\theta) \prec^h P(\theta)$ для любого $\theta > 0$.

Доказательство. Ясно, что для любого многочлена R порядка не выше m и для произвольных $\tau > 0, \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0$

$$\max\{1, \tau^m h_1(\xi)\} \leq R(\xi, t) \leq (\max\{1, t\})^m R(\xi, t).$$

Следовательно $Q \prec^h P$ тогда и только тогда, когда для любого $\tau > 0$ существует число $C_1 = C_1(\tau) > 0$ такое, что $Q(\xi, \tau) \leq C_1 P(\xi, \tau)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \geq h(\xi)$, или, что то же самое $Q(\xi, \theta) \leq C_1 P(\xi, \theta)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\theta \geq \tau h(\xi)$.

Пусть $\tau = C_1$ (см. неравенство (3.3)). Тогда в силу левой части (3.3) неравенство $\theta \geq h_1(\xi)$ влечёт неравенство $\theta \geq \tau h(\xi)$, поэтому отсюда следует, что $Q(\xi, \theta) \leq C_1 P(\xi, \theta)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\theta \geq h_1(\xi)$, т.е. $Q \prec^{h_1} P$.

Для доказательства того, что $Q \prec^{h_1} P$ влечёт $Q \prec^h P$ достаточно воспользо-ваться неравенством $\frac{1}{C_1} h_1(\xi) \leq h(\xi) \leq \frac{1}{C_1} h_1(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, являющимся следствием неравенства (3.3).

Докажем пункт 2) леммы. Пусть $Q \prec^h P$, т.е. с некоторой постоянной $C_1 > 0$ $Q(\xi, t) \leq C_1 P(\xi, t)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \geq h(\xi)$, или, что тоже самое

$$Q(\theta\eta, t) \leq C_1 P(\theta\eta, t) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n, t \geq h(\theta\eta).$$

Применяя свойство 3) функций $h \in H$ и доказавший пункт настоящей леммы, получаем доказательство пункта 2). $\square$

Лемма 3.2. Если однородный многочлен P_m гиперболичесен относительно вектора $N \in \mathbb{R}^n$, то существует число $c > 0$ такое, что

$$(3.4) \quad c^{-1} \bar{P}_m(\xi, t) \leq |P_m(\xi + itN)| \leq c P_m(\xi, t) \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t > 0$$

Доказательство. В монографии [6], формула (12.4.3) доказано, что в условиях настоящей леммы, с некоторым числом $C_1 > 0$ имеет место неравенство

$$C_1 \bar{P}_m(\eta) \leq |P_m(\eta + iN)| \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда и из однородности многочлена P_m следует, что

$$C_1 t^m |P_m(\frac{\xi}{t})| \leq t^m |P_m(\frac{\xi}{t} + iN)| = |P_m(\xi + itN)| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Так как для однородного многочлена P_m справедливо тождество

$$\begin{aligned} t^m \bar{P}_m(\frac{\xi}{t}) &= \sqrt{\sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}(\frac{\xi}{t})|^2} t^{2m} = \\ &= \sqrt{\sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 \frac{t^{2m}}{t^{2(m-|\alpha|)}}} = \bar{P}_m(\xi, t) \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t > 0, \end{aligned}$$

то из последних двух соотношений получаем

$$C_1 \bar{P}_m(\xi, t) \leq |P_m(\xi + itN)| \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t > 0,$$

что доказывает левую часть (3.4). Правая часть (3.4) получается непосредственным применением формулы Тейлора. $\square$

Лемма 3.3. Пусть $h \in H$, P_m — однородный многочлен порядка m и Q — многочлен порядка $k \leq m$, представленный в виде суммы j — однородных многочленов

$$(3.5) \quad Q(\xi) = \sum_{j=0}^k Q_j(\xi).$$

Если $Q \prec^h P_m$, то $Q_j \prec^h P_m$, $j = 0, 1, \dots, k$.

Доказательство. Пусть $t_0, t_1, \dots, t_k$ попарно различные, отличные от нуля числа. Так как определитель матрицы $(t_j^l)_{j,l=0}^k$ отличен от нуля и

$$Q(t_j \xi) = \sum_{l=0}^k t_j^l Q_l(\xi) \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

то существуют числа $\{b_{lj}\}_{j,l=0}^k$ такие, что

$$(3.6) \quad Q_l(\xi) = \sum_{j=0}^k b_{lj} Q(t_j \xi) \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Применяя лемму 3.1, в силу условий настоящей леммы и тождества (3.6), получим существование положительных чисел C_1, C_2 таких, что для всех $l = 0, 1, \dots, k$

$$Q_l(\xi, t) \leq C_1 \sum_{j=0}^k Q(t_j \xi, t) \leq C_2 \sum_{j=0}^k P_m(t_j \xi, t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t \geq h(\xi).$$

С другой стороны, из однородности многочленов $\{P_m^{(\alpha)}\}$ следует, что для любого числа $\theta \neq 0$ справедливо неравенство

$$P_m(\theta \xi, t) = \sqrt{\sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}(\theta \xi)|^2 t^{2|\alpha|}} = \sqrt{\sum_{\alpha} \theta^{2|\alpha|} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}} \leq \\ \leq C(\theta) P_m(\xi, t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

где $C(\theta) = \max\{1, \theta^n\}$. Поэтому положив $C_3 = \max\{C(t_j) \mid 0 \leq j \leq k\}$ получим для всех $l = 0, 1, \dots, k$ $Q_l(\xi, t) \leq C_3 P_m(\xi, t)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \geq h(\xi)$. $\square$

Теорема 3.3. Пусть $h \in H$ и P_m — однородный многочлен порядка m гиперболический по Гордону относительно N . Если многочлен Q порядка $\text{ord} Q = k < m$ h — слабее P_m , то многочлен $P_m + Q$ h — гиперболический относительно N .

Доказательство. В силу леммы 3.3 имеем (см. (3.5)), что $Q_j \prec^h P_m$, $j = 0, 1, \dots, k$.

Применяя формулу Тейлора и лемму 3.2, получим с некоторыми положительными числами C_1, C_2, C_3 для всех $j = 0, 1, \dots, k$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\tau \in \mathbb{R}^1$, $|\tau| > h(\xi)$

$$|Q_j(\xi + i\tau N)| \leq C_1 Q_j(\xi, \tau) \leq C_2 P_m(\xi, \tau) \leq C_3 |P_m(\xi + i\tau N)|.$$

Отсюда для любого $\sigma > 0$ и для всех $j = 0, 1, \dots, k$ получим

$$|Q_j(\sigma\xi - i\tau N)| \leq C_2 |P_m(\sigma\xi + i\tau N)| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^1, |\tau| > h(\sigma\xi).$$

В силу однородности многочленов P_m и $\{Q_j\}$ отсюда получаем для всех $\xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^1, |\tau| > h(\sigma\xi)$

$$(3.7) \quad |Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma}N)| \leq C_2 \sigma^{m-1} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma}N)| \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Выберем число $\sigma_0 > 0$ так, чтобы $C_2 \sum_{j=0}^k \sigma_0^{m-1} \leq \frac{1}{2}$. Тогда в силу (3.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| &\leq |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| - \sum_{j=0}^k |Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq \\ &\leq |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N) + \sum_{j=0}^k Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| = |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N) + \\ &+ Q(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| + \sum_{j=0}^k |Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq \\ &\leq \frac{3}{2} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^1, |\tau| > h(\sigma_0\xi). \end{aligned}$$

В итоге получается, что при соответствующем выборе числа σ_0 для всех $\xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^1, |\tau| > h(\sigma_0\xi)$ справедливо соотношение

$$(3.8) \quad \frac{1}{2} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq |(P_m + Q)(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq \frac{3}{2} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)|.$$

Так как в силу условий теоремы (см. также доказательство теоремы 3.1) $P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma}N) \neq 0$ при $\tau \neq 0$, то (см. Определение 2.1) имеем $P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma}N) \neq 0$ при $|\tau| \geq h(\sigma_0\xi)$. Тогда из (3.8) непосредственно следует, что $P_m(\xi + i\theta N) + Q(\xi + i\theta N) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}^1$ и $\theta > \sigma_0 h(\sigma_0\xi)$.

Отсюда и из условия 3) на функцию h получаем, что многочлен $P_m + Q$ h -гиперболичесен относительно N . $\square$

Приведем два примера многочленов, не являющимися гиперболическими по Гордингу, но являющимися h -гиперболическими для определенных функций $h \in H$. При этом во втором примере обе координаты вектора N отличны от нуля.

Пример 3.2. Пусть $n = 2$ и $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + \xi_1^3 = P_4(\xi) + P_3(\xi)$. Легко убедиться, что многочлен P_4 гиперболичесен по Гордингу относительно вектора $N = (0, 1)$. С другой стороны, так как многочлен P_3 не слабее многочлена P_4 (см. пример 3.1), то по теореме Гординга - Свенссона (см. [11] или [6], теорема 12.4.6)

многочлен P не является гиперболическим по Горднгу относительно $N = \{0, 1\}$. Однако, так как (см. пример 3.1) $P_3 \prec^h P_1$ для $h(\xi) = (1 + |\xi|)^{1/2} \in H$, то по теореме 3.3 многочлен P является h -гиперболическим относительно вектора $N = \{0, 1\}$.

Пример 3.3. Пусть $n = 2$, $P_{10}(\xi) = \xi_1 \xi_2$, $Q(\xi) = \xi_1^3 \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_1^2 + \xi_2^2$, $h(\xi) = 1 + |\xi_1|^{1/4} + |\xi_2|^{2/3}$, $N = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Легко убедиться в том, что P_{10} гиперболический по Горднгу относительно N многочлен, $Q \prec^h P_{10}$, но Q не слабее P_{10} . Поэтому многочлен $P_{10} \prec Q$ не является гиперболическим по Горднгу, но является h -гиперболическим относительно N .

Abstract. The paper considers Cauchy problem in the Gevrey type multiisotropic spaces. Necessary and sufficient conditions for unique solvability of this problem are obtained and the properties of operators (polynomials) that are hyperbolic with a specified weight are investigated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МН-АН СССР, **91**, 58 - 91 (1967).
- [2] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гиперболических операторов", Мат. Сборник, **75** (117), no. 3, 400 - 416 (1968).
- [3] E. E. Levi, "Caracteristico multiple e problema di Cauchy", Ann. Mat. Pure Appl., **16** (3), 161 - 201 (1909).
- [4] Н. Г. Петровский, "О проблеме Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области аналитических функций", Вестн. Моск. ун-та. Мат., **1**, no. 7, 1 - 72 (1951).
- [5] L. Gårding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math., **85**, 1 - 62 (1951).
- [6] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. 2, Springer - Verlag (1968).
- [7] S. Mizohata, On the Cauchy Problem, Notes and Reports in Mathematics, in Science and Engineering **3**, Academic Press, Inc., Orlando, FL, Science Press, Beijing (1985).
- [8] W. Matsumoto, H. Yamahara, "On Cauchy - Kowalevskaya theorem for system", Proc. Japan Acad. ser. A, Math. Sci., **67**, no. 6, 183 - 185 (1991).
- [9] M. Gevrey, "Sur la nature analytique des solutions des equations aux derivatives partielles", Ann. Ec. Norm. Sup., Paris **35**, 129 - 190 (1918).
- [10] P. D. Lax, "Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems", Duke Math. J., **24**, 627 - 646 (1974).
- [11] S. L. Sjöstrand, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal parts", Ark. Mat., **8**, 145 - 162 (1966).
- [12] E. Larsson, "Generalized hyperbolicity", Ark. Mat., **7**, 11 - 32 (1967).
- [13] L. Cattabriga, Alcuni Problemi per Equazioni Differenziali Lineari con Coefficienti Costanti, Quad. Un. Mat. It., **24**, Pitagora, Bologna (1983).
- [14] O. Liess, L. Rodino, "Inhomogeneous Gevrey classes and related pseudodifferential operators", Anal. Funct. Appl. Suppl. Boll. Un. Mat. It., **3C**, no. 1, 233 - 323 (1984).
- [15] L. Gårding, "Local hyperbolicity", Proc. of the International Symposium on Partial Diff. Equations (Jerusalem, 1972) Israel J. Math., **13**, 65 - 81 (1972).
- [16] L. Rodino, Linear Partial Diff. Operators in Gevrey Spaces, World Scientific, Singapore (1993).

- [17] D. Calvo, "Multianisotropic Gevrey Classes and Cauchy Problem", Ph. D. Thesis in Mathematics, Università degli Studi di Pisa.
- [18] W. N. Margaryan, G. H. Hakobyan, "On Gevrey type solutions of hypoelliptic equations", *Contemporary Math. Analysis*, **31**, no. 2, 33 – 47 (1996).
- [19] A. Corli, "Un teorema di rappresentazione per certe classi generalizzate di Gevrey", *Boll. Un. Mat. It. Serie* **8**, 4-C, no. 1, 245 – 257 (1985).
- [20] L. Zanghirati, "Iterati di operatori e regolarità Gevrey microlocale anisotropa", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **87**, 85 – 104, (1982).
- [21] H. Kurokawa, "Ultradistributions. Structure theorems and a characterisation", *J. Pac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I A*, **20**, 25 – 105 (1973).

Поступила 19 сентября 2016

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ТИПА В КРУГЕ

ДЖ. Э. РЕСТРЕПО

Институт математики, Университет Антиокиа, Медельин, Колумбия
E-mail: cocoloe189@yahoo.es

Аннотация. В статье дано дельта-субгармоническое расширение части теории факторизации М. М. Джрбашина - В. С. Захаряна, относящейся к параметрическим представлениям классов $N\{\omega\}$ мероморфных в единичном круге функций, содержащихся в классе H^p . Обсуждаются вопросы о граничных случаях.

MSC2010 number: 31A05, 31A20.

Ключевые слова: дельта-субгармонические функции; потенциалы Грина; заряды.

1. Введение

Данная статья распространяет на дельта-субгармонические функции часть теории факторизации М. М. Джрбашина - В. С. Захаряна [1, 2], относящейся к параметрическим представлениям классов $N\{\omega\}$ мероморфных в единичном круге функций, содержащихся в классе P . Независимы N (для аналогов результатов статьи в полуплоскости см. [3, 4]). Применяются обозначения [1, 2] и их модификации.

Всюду ниже будем говорить, что функция $\omega(t)$ принадлежит классу Ω , если

- (i) $\omega(t) > 0$, непрерывна и не убывает в $[0, 1]$,
- (ii) $\omega(0) = 1$ и $\int_0^1 \omega(t) dt < +\infty$,
- (iii) $\omega(t)$ удовлетворяет условию Липшица с $\lambda_t \in (0, 1]$ во всех точках $t \in [0, 1]$.

При функциональном параметре $\omega(t) \in \Omega$, будем применять следующие операторы, определенные формально на функциях $u(z)$, заданных в единичном круге

^{*}Работа выполнена при финансовой поддержке Colciencias Scholarship Program No. 647, в рамках University of Antioquia CIEN Project 2016-11126.

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, следующим образом:

$$(1.1) \quad L_{\omega_1} u(z) = - \int_0^1 u(zt) d\omega_1(t), \quad \text{где} \quad \omega_1(t) = \int_1^t \frac{\omega(s)}{s} ds,$$

$$(1.2) \quad L_{\omega} u(z) = u(0) + L_{\omega_1} U(z), \quad \text{где} \quad U(z) = |z| \frac{\partial}{\partial |z|} u(z).$$

Отметим, что L_{ω} является упрощенной формой оператора, использованного в [1, 2] (см. лемму 1.1 в [5]). Кроме того, используем ядро типа Копля [1, 2]

$$(1.3) \quad C_{\omega}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_k = k \int_0^1 t^{k-1} \omega(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots),$$

которое при любом $\omega(t) \in \Omega$ является голоморфной в $\mathbb{D}$ функцией и в частном случае степенных функций $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}$ ($-1 < \alpha < 0$) совпадает со степенью $1 + \alpha$ обычного ядра Копля:

$$C_{\omega}(z) = \frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}} = C_{\alpha}(z), \quad C_{\alpha}(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Также будем пользоваться аналогичным ядром типа Шварца

$$S_{\omega}(z) := 2C_{\omega}(z) - 1 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \quad z \in \mathbb{D},$$

для которого

$$S_{\omega}(z) \Big|_{\omega(x)=(1-x)^{\alpha}} = \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 := S_{\alpha}(z), \quad S_0(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Легко видеть, что

$$(1.4) \quad L_{\omega}[r^k] = r^k \Delta_k, \quad r \in [0, 1], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad L_{\omega} u(z) \Big|_{u(z)=1} = 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

и по (1.3), (1.4), $L_{\omega} C_{\omega}(z) = C_0(z)$, $z \in \mathbb{D}$.

2. ФАКТОРЫ ТИПА ВЛЯШКЕ

2.1. Как и в [2], мы используем следующее представление обычного фактора Вляшко

$$(2.1) \quad \log h_0(z, \zeta) = \log \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta} = - \int_{|\zeta|}^1 \left\{ \frac{1}{1 - \frac{z}{t}} + \frac{1}{1 - \frac{\bar{z}}{t}} - 1 \right\} \frac{dt}{t}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D},$$

которое верно при всех $z \neq \zeta$, исключая отрезок $I_{\zeta} = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} \zeta, |z| \geq |\zeta|\}$, где интеграл понимается в смысле главного значения. При фиксированном $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ используем фактор типа Вляшко М. М. Джрбантия

$$(2.2) \quad h_{\omega}(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-W_{\omega}(z, \zeta)\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

где функция

$$(2.3) \quad b_{\omega}(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z \frac{\omega(x)}{x} dx - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \int_0^1 x^n e^{-x\zeta} dx - C_n \int_0^1 x^n e^{-x|z|} dx \right) \frac{z^n}{\zeta^n}$$

голоморфна в $\mathbb{D}$ (см. [2], стр. 42-43, формулы (1.60), (1.65)). Таким образом, функция $b_{\omega}(z, \zeta)$ голоморфна в $\mathbb{D}$, где имеет единственный, простой нуль в точке $z = \zeta$. Отметим, что $b_{\omega}(z, \zeta)|_{\zeta=1} = b_0(z, \zeta)$, $z, \zeta \in \mathbb{D}$. Кроме того, справедливо представление

$$(2.4) \quad b_{\omega}(z, \zeta) = \exp\{-\Omega(z, \zeta)\}, \quad 0 \leq |z| < |\zeta| < 1,$$

где

$$\Omega(z, \zeta) = \int_{|z|}^1 \left[C_{\omega} \left(\frac{z\zeta}{x} \right) + C_{\omega} \left(\frac{x\zeta}{z} \right) - 1 \right] \frac{\omega(x)}{x} dx$$

(см. [2], стр. 43-44, формулы (1.67), (1.68)). Мы будем пользоваться также другими свойствами функций $b_{\omega}(z, \zeta)$ и $b_0(z, \zeta)$, которые приводим ниже.

Лемма 2.1. Если $\omega(t) \in \Omega$, то в любой точке $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$

$$(2.5) \quad L_{\omega} \log b_0(z, \zeta) = \log |\zeta| + \int_0^1 \frac{\omega(t)t}{1-t} dt + \zeta z \int_0^1 \frac{\omega(t)t}{1-\zeta t} dt,$$

$$(2.6) \quad L_{\omega} \log b_{\omega}(z, \zeta) = - \int_{|\zeta|}^1 \left\{ \frac{1}{1-\frac{z\zeta}{t}} + \frac{1}{1-\frac{t\zeta}{z}} - 1 \right\} \frac{\omega(t)}{t} dt,$$

$$(2.7) \quad L_{\omega} \log b_{\omega}(z, \zeta) = -(1-z\zeta) \int_{|\zeta|}^1 \frac{1-t \left(\frac{z\zeta}{t} + \frac{t\zeta}{z} \right) \exp\{-\Omega(z, \zeta) + \Omega(t, t)\}}{\left| 1 - \frac{z\zeta}{t} \right| \left| 1 - \frac{t\zeta}{z} \right|} \frac{\omega(t)}{t} dt.$$

Доказательство. Формулы (2.5) и (2.6) следуют из (2.15) и первой формулы на стр. 50 [2], поскольку значения $\log b_0(0, \zeta) = \log |\zeta|$ и $\log b_{\omega}(0, \zeta) = - \int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(x)}{x} dx$ не существенны. Формула (2.7) та же, что (2.12) на стр. 49 [2]. Сходимость интегралов на отрезке $I_{\zeta} = \{z \in \mathbb{D} : \text{Arg } z = \text{Arg } \zeta, |z| \geq |\zeta|\}$ обеспечена липшицевым свойством функции $\omega(t)$. $\square$

Доказательство следующего утверждения можно найти на стр. 52-53 монографии [2]

Лемма 2.2. Если $\omega(t) \in \Omega$, то при любом фиксированном ζ ($0 < |\zeta| < 1$)

$$\varphi_{\omega}(z, \zeta) = L_{\omega} \log \frac{b_{\omega}(z, \zeta)}{b_{\omega}(z, 1)},$$

- голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, и $\text{Re } \varphi_{\omega}(z, \zeta) \leq 0$, $z \in \mathbb{D}$.

Лемма 2.3. Если $\omega(t) \in \Omega$, то при любом фиксированном ζ ($0 < |\zeta| \leq 1$) и любом $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}$

$$(2.8) \quad \log \frac{b_\omega(z, \zeta)}{b_\omega(z, \zeta)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\omega(ze^{-i\vartheta}) L_\omega \log |b_\omega(e^{i\vartheta}, \zeta)| d\vartheta := J_\omega(z, \zeta).$$

Если $0 < d_0 \leq |\zeta| < 1$, то при любом $z \in \mathbb{D}_\rho := \{z : |z| < \rho\}$ ($0 < \rho < 1$)

$$(2.9) \quad |J_\omega(z, \zeta)| \leq C_{\rho, d_0, \omega} \int_{\mathbb{D}_\rho} \omega(x) dx < +\infty,$$

где $C_{\rho, d_0, \omega} > 0$ - постоянная, зависящая только от ρ , d_0 и ω .

Доказательство. Ввиду (2.2), (2.3) и (2.1) функция $\log \frac{b_\omega(z, \zeta)}{b_\omega(z, \zeta)}$ голоморфна в $\mathbb{D}$, и (2.8) следует из леммы 2.2 и теоремы 1.6 на стр. 38-39 [2], поскольку ввиду (2.7) $L_\omega \log |b_\omega(e^{i\vartheta}, \zeta)| = 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, кроме $\vartheta = \arg \zeta$. Далее, используя (1.1), (1.2) и (2.1) получаем

$$\begin{aligned} L_\omega \log |b_\omega(e^{i\vartheta}, \zeta)| &= \log |\zeta| + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \log |b_\omega(re^{i\vartheta}, \zeta)| \omega(r) dr \\ &= \log |\zeta| - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\zeta e^{i\vartheta} d\sigma}{(\zeta - \sigma r e^{i\vartheta})^2} \right) \omega(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\bar{\zeta} e^{-i\vartheta} d\sigma}{(\bar{\zeta} - \sigma r e^{-i\vartheta})^2} \right) \omega(r) dr \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\bar{\zeta} e^{i\vartheta} d\sigma}{(\sigma - \zeta r e^{i\vartheta})^2} \right) \omega(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\zeta e^{-i\vartheta} d\sigma}{(\sigma - \zeta r e^{-i\vartheta})^2} \right) \omega(r) dr. \end{aligned}$$

Тем самым

$$J_\omega(z, \zeta) = \log |\zeta| - \frac{1}{2} \int_0^1 \omega(r) dr \int_{|\zeta|}^1 [I_1(\sigma) + I_2(\sigma) + I_3(\sigma) + I_4(\sigma)] d\sigma,$$

где в силу интегральной формулы Коши

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \frac{\zeta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{S_\omega(ze^{-i\vartheta}) e^{i\vartheta}}{(\zeta - \sigma r e^{i\vartheta})^2} d\vartheta = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 \frac{S_\omega(ze^{i\vartheta}) e^{i\vartheta}}{(\zeta e^{i\vartheta} - \sigma r)^2} d\vartheta \\ &= \frac{\zeta}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{S_\omega(zw)}{(w\zeta - \sigma r)^2} dw = \begin{cases} \frac{1}{2} S'_\omega\left(\frac{\sigma r}{\zeta}\right), & \sigma < \frac{|\zeta|}{r}, \\ 0, & \sigma > \frac{|\zeta|}{r}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(\sigma) &= \frac{\bar{\zeta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{S_\omega(ze^{-i\vartheta}) e^{-i\vartheta}}{(\bar{\zeta} - \sigma r e^{-i\vartheta})^2} d\vartheta = \frac{\bar{\zeta}}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 \frac{S_\omega(ze^{i\vartheta}) e^{i\vartheta}}{(\bar{\zeta} - \sigma r e^{i\vartheta})^2} d\vartheta \\ &= \frac{\bar{\zeta}}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{S_\omega(zw)}{(\bar{\zeta} - \sigma r w)^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{(2\pi)^2} S'_\omega\left(\frac{\pi}{\sigma r}\right), & \sigma > \frac{|\zeta|}{r}, \\ 0, & \sigma < \frac{|\zeta|}{r}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(\sigma) &= \frac{\zeta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{S_\omega(z e^{-i\sigma} w)}{(\sigma - \zeta e^{-i\sigma} r)^2} dw = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 \frac{S_\omega(z e^{i\delta} w)}{(\sigma e^{i\delta} - \zeta w)^2} dw \\
 &= \frac{\zeta}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{S_\omega(z w)}{(\sigma w - \zeta)^2} dw = \begin{cases} \frac{\zeta}{\sigma^2} S'_\omega\left(\frac{z\zeta}{\sigma}\right), & \sigma > |\zeta|r, \\ 0, & \sigma < |\zeta|r. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3(\sigma) &= \frac{\zeta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{S_\omega(z e^{-i\sigma} w)}{(\sigma - \zeta e^{-i\sigma} r)^2} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{S_\omega(z w) \zeta dw}{(\sigma - \zeta w r)^2} \\
 &= \begin{cases} \frac{\zeta}{r^2 \sigma^2} S'_\omega\left(\frac{z\sigma}{\zeta r}\right), & \sigma < |\zeta|r, \\ 0 & \sigma > |\zeta|r. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned}
 J_\omega(z, \zeta) &= \log |\zeta| - \frac{1}{2} \int_{|\zeta|}^1 \omega(r) dr \int_{|\zeta|/r}^{|\zeta|/\rho} \frac{z}{\zeta} S'_\omega\left(\frac{z\sigma r}{\zeta}\right) d\sigma \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{|\zeta|}^1 \omega(r) dr \int_{|\zeta|/r}^{\frac{|\zeta|}{(\sigma r)^2}} S'_\omega\left(\frac{z\zeta}{\sigma r}\right) d\sigma - \frac{1}{2} \int_0^\rho \omega(r) dr \int_{|\zeta|}^{\frac{z\zeta}{\sigma^2}} S'_\omega\left(\frac{r\zeta}{\sigma}\right) d\sigma \\
 &:= \log |\zeta| + K_1 + K_2 + K_3.
 \end{aligned}$$

Если $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}_\rho$ (и $d_0 \leq |\zeta| \leq 1$), то

$$|\log |\zeta|| = \log \frac{1}{|\zeta|} \leq \frac{1}{\omega(d_0)} \int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(t)}{t} dt \leq \frac{1}{d_0 \omega(d_0)} \int_{|\zeta|}^1 \omega(t) dt.$$

Далее, при $|\zeta| \leq \sigma \leq |\zeta|/r$

$$\left| \frac{z}{\zeta} S'_\omega\left(\frac{z\sigma r}{\zeta}\right) \right| \leq \frac{1}{d_0} S'_\omega(\rho), \quad \text{и, тем самым,} \quad |K_1| \leq \frac{S'_\omega(\rho)}{2d_0} \int_{|\zeta|}^1 \omega(r) dr.$$

При $|\zeta|/r \leq \sigma \leq 1$

$$\left| \frac{|\zeta|}{(\sigma r)^2} S'_\omega\left(\frac{z\zeta}{\sigma r}\right) \right| \leq \frac{S'_\omega(\rho)}{d_0}, \quad \text{и, тем самым,} \quad |K_2| \leq \frac{S'_\omega(\rho)}{2d_0} \int_{|\zeta|}^1 \omega(r) dr.$$

Наконец, при $|\zeta| \leq \sigma \leq 1$

$$\left| \frac{z\zeta}{\sigma^2} S'_\omega\left(\frac{r\zeta}{\sigma}\right) \right| \leq \frac{S'_\omega(\rho)}{d_0^2}, \quad \text{и, тем самым,} \quad |K_3| \leq \frac{S'_\omega(\rho)}{2d_0^2 \omega(d_0)} \int_0^\rho \omega(r) dr \int_{|\zeta|}^1 \omega(t) dt.$$

Из этих оценок следует неравенство (2.9). $\square$

3. ПОТЕНЦИАЛЫ ТИПА ГРИНА

Как хорошо известно, обобщенным потенциалом Грина в $\mathbb{D}$ является интеграл

$$(3.1) \quad P_0(z) = - \iint_{|\zeta| < 1} \log \left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \right| d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D},$$

сходящийся при любой борелевой мере $\nu(\zeta) \geq 0$, подчиняющейся условию Бляшке

$$\iint_{|\zeta| < 1} (1 - |\zeta|) d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Следующая теорема относится к сходимости потенциалов типа Грина, содержащих факторы Бляшке-Джрбатыяна (2.2)-(2.3).

Теорема 3.1. Пусть $\omega(t) \in \Omega$ и $\nu(\zeta) \geq 0$ - борелева мера в $\mathbb{D}$, с носителем в кольце $\{\zeta \in \mathbb{D} : 0 < d_0 \leq |\zeta| < 1\}$ и такая, что

$$(3.2) \quad \iint_{|\zeta| < 1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(t) dt \right) d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Тогда потенциал типа Грина

$$P_\omega(z) = \iint_{|\zeta| < 1} \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta)$$

сходится в $\mathbb{D}$, где является субгармонической функцией с риссовской мерой $\nu(\zeta)$.

Доказательство. В любом круге D_ρ ($0 < d_0 < \rho < 1$) будем понимать потенциал типа Грина как сумму $P_\omega(z) = P_0(z, \rho) + U_\omega(z, \rho)$, $z \in D_\rho$, где

$$P_0(z, \rho) = \iint_{D_\rho} \log \left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{z}\zeta} \right| d\nu(\zeta) = \iint_{D_\rho} \log |b_0(z, \zeta)| d\nu(\zeta)$$

- обычный потенциал Грина, сходящийся в $\mathbb{D}$, поскольку

$$+\infty > \iint_{|\zeta| < 1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(t) dt \right) d\nu(\zeta) \geq \omega(d_0) \iint_{|\zeta| < 1} (1 - |\zeta|) d\nu(\zeta).$$

а

$$\begin{aligned} U_\omega(z, \rho) &= \iint_{\mathbb{D} \setminus D_\rho} \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta) + \iint_{D_\rho} \log \left| \frac{b_\omega(z, \zeta)}{b_0(z, \zeta)} \right| d\nu(\zeta) \\ &= U_\omega^{(1)}(z, \rho) + U_\omega^{(2)}(z, \rho). \end{aligned}$$

Докажем, что $P_\omega(z)$ сходится в $\mathbb{D}$ в том смысле, что при любом $\rho \in (d_0, 1)$ потенциал $P_0(z, \rho)$ сходится в $\mathbb{D}$, а функция $U_\omega(z, \rho)$ является гармоничной в D_ρ .

Ввиду голоморфности функции $b_\omega(z, \zeta)$ в $\mathbb{D}$ и ее единственного нуля в точке $z = \zeta$, в $U_\omega^{(1)}(z, \rho)$ подынтегральная функция $\log |b_\omega(z, \zeta)|$ гармонична в D_ρ . Поэтому, полагая, что $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = \lambda e^{i\psi}$, где $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$, $r < \rho_1$, а $\rho_1 \in (0, \rho)$ фиксируемо, затем используя определение (2.4) $b_\omega(z, \zeta)$ получаем

$$\begin{aligned} |\log |b_\omega(z, \zeta)|| &\leq \int_0^1 \left| C_\omega \left(\frac{\bar{\zeta}x}{r} \right) + C_\omega \left(\frac{rx}{\zeta} \right) - 1 \right| \frac{\omega(x)}{x} dx \\ &\leq \frac{1}{d_0} \left[C_\omega(\rho_1) + C_\omega \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right) + 1 \right] \int_0^1 \omega(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$|U_{\omega}^{(1)}(z, \rho)| \leq \int \int_{\mathbb{D}_\rho} |\log |h_{\omega}(z)|| M \iint_{\mathbb{D}_\rho} \left(\int_K |\omega(x)| dx \right) d\mu(z) < +\infty,$$

где $M > 0$ постоянная, зависящая только от ρ_1 , ρ и d_0 . Тем самым, модуль подинтегральной функции в $U_{\omega}^{(1)}(z, \rho)$ обладает независимой от $z \in \mathbb{D}_\rho$, суммируемой мажорантой, и следовательно, интеграл $U_{\omega}^{(1)}(z, \rho)$ гармонична в $\mathbb{D}_\rho$. Для доказательства гармоничности $U_{\omega}^{(2)}(z, \rho)$ в $\mathbb{D}_\rho$, заметим, что его подинтегральная функция гармонична в $z \in \mathbb{D}$, а интеграл равномерно сходится внутри $\mathbb{D}_\rho$ ввиду оценок (2.9). $\square$

Следующая лемма относится к обратному оператору для L_{ω} .

Лемма 3.1. Если $\omega \in \Omega$, то уравнение Вольтерра

$$(3.3) \quad - \int_x^1 \omega\left(\frac{x}{t}\right) d\tilde{\omega}(t) = 1 \quad \text{для п.в. } x \in (0, 1)$$

имеет неубывающее решение $\tilde{\omega}(x)$ такое, что $\tilde{\omega}(1) = 0$, $\tilde{\omega}(+0) = 1$ и $\tilde{\omega}(x) \leq [\omega(x)]^{-1}$ для всех $0 < x < 1$. Более того, оператор L_{ω} взаимнооднозначно переводит любую гармоническую в круге $|z| < R < +\infty$ функцию в функцию гармоническую в том же круге, и

$$L_{\omega}^{-1}u(z) = L_{\tilde{\omega}}u(z) = - \int_{\mathbb{D}} u(z\sigma) d\tilde{\omega}(\sigma), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Доказательство. Пользуясь теоремой 1.1 из [6] с $\omega_1(x) = 1$, $\omega_2(x) = \omega(x)$ получаем функцию $\tilde{\omega}(x) := \beta(x)$ с нужными свойствами. Далее, нетрудно видеть, что применение оператора L_{ω} к функции $u(z)$ гармонической в круге $|z| < R < +\infty$ означает лишь умножение коэффициентов гармонического ряда $u(z)$ на $\Delta_k := \Delta_k(\omega)$. Таким образом, L_{ω} является взаимнооднозначным соответствием между гармоническими функциями. С другой стороны, в силу (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= \int_+^1 x^{k-1} dx = - \int_{+0}^1 x^{k-1} dx \int_x^1 \omega\left(\frac{x}{t}\right) d\tilde{\omega}(t) \\ &= - \int_{+0}^1 d\tilde{\omega}(t) \int_{+0}^1 x^{k-1} \omega\left(\frac{x}{t}\right) dx = - \int_{+0}^1 t^k d\tilde{\omega}(t) \int_0^1 x^{k-1} \omega(x) dx \\ &= -k \int_0^1 t^{k-1} \tilde{\omega}(t) dt \int_0^1 x^{k-1} \omega(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно $\Delta_k(\omega) = \{\Delta_k(\tilde{\omega})\}$ и применение $L_{\tilde{\omega}}$ означает умножение коэффициентов гармонического ряда на $\Delta_k(\tilde{\omega})$. $\square$

Теперь применим оператор L_{ω} к потенциалу типа Грина.

Теорема 3.2. Пусть $\omega(z) \in \Omega$ и борелево мера $\nu(\zeta) \geq 0$ с носителем в $0 < d_\omega \leq |\zeta| < 1$ потенциала типа Грина $P_\omega(z)$ удовлетворяет условию (3.2). Далее пусть при любом $\rho \in (0, 1)$ замкнутое множество $\text{Arg}\{(\text{support } \nu) \cap D_\rho\}$ имеет нулевую лебегову меру. Тогда функция $L_\omega P_\omega(z)$ гармонична в области

$$D = \left\{ z \in D : z \notin \bigcup_{\zeta \in \text{support } \nu} l_\zeta \right\}$$

и внутри D представляема абсолютно и равномерно сходящимся интегралом:

$$(3.4) \quad L_\omega P_\omega(z) = \iint_{|\zeta| < 1} L_\omega \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta), \quad z \in D.$$

Кроме того,

$$(3.5) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} |L_\omega P_\omega(re^{i\theta})| d\theta = 0.$$

Доказательство. Отметим, что функция

$$(3.6) \quad F(z) = \iint_{|\zeta| < 1} L_\omega \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta)$$

гармонична в D . Действительно, любой компакт $K \subset D$ на расстоянии $\rho_1 > 0$ от ∂D , и оценивая модули подынтегральных функций в (2.6) получаем мажоранту модуля подынтегральной функции (3.6) в любой точке $z = re^{i\theta} \in K$: при любом $t \in (0, 1]$

$$L_\omega \log |b_\omega(zt, \zeta)| = -\text{Re} \int_{|\zeta|}^1 \left(\frac{1}{\frac{\zeta}{re^{i\theta}} - x} + \frac{1}{x - \bar{\zeta} re^{i\theta}} \right) \omega(x) dx = J_1 + J_2,$$

и очевидно

$$|J_1| \leq M'_{d_\omega, \rho_1} \int_{|\zeta|}^1 \omega(x) dx, \quad |J_2| \leq M''_{d_\omega, \rho_1} \int_{|\zeta|}^1 \omega(x) dx,$$

где $M'_{d_\omega, \rho_1}, M''_{d_\omega, \rho_1}$ - постоянные, зависящие только от d_ω и ρ_1 . Тем самым,

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \iint_{|\zeta| < 1} |L_\omega \log |b_\omega(z, \zeta)|| d\nu(\zeta) \\ &\leq M_{d_\omega, \rho_1} \iint_{|\zeta| < 1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(t) dt \right) d\nu(\zeta) < +\infty, \end{aligned}$$

где $M_{d_\omega, \rho_1} = \max\{M'_{d_\omega, \rho_1}, M''_{d_\omega, \rho_1}\}$, а интеграл в (3.6) абсолютно и равномерно сходится в K , внутри которого представляет гармоническую функцию, поскольку ввиду (2.6) функция $L_\omega \log |b_\omega(z, \zeta)|$ гармонична в $D \setminus l_\zeta$.

Теперь, применяя лемму 3.1, где $\bar{\omega}(t)$ - невозрастающая на $0 < t \leq 1$ функция такая, что $\bar{\omega}(1) = 0$, $\bar{\omega}(0) = 1$ и $\bar{\omega}(t) \leq [\omega(t)]^{-1}$, при $z \in \mathcal{K}$ получаем

$$|L_{\omega}F(z)| \leq M_{d_0, \rho_1} \iint_{| \zeta | < 1} \left(\int_{| \zeta |}^1 \omega(z) d\bar{\omega} \right) d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Эта мажоранта подынтегральной функции в (3.6) обеспечивает гармоничность функции $L_{\omega}F(z)$ во всем круге $\mathcal{D}$ и позволяет перенести примененный к $F(z)$ оператор L_{ω} под знак интеграла по $| \zeta | < 1$. Таким образом, в силу (2.6) и равенства $L_{\omega}L_{\omega}C_{\omega}(z) = C_{\omega}(z)$ получаем, что при любом $z \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} L_{\omega}F(z) &= - \int_{z_0}^1 F(z\sigma) d\bar{\omega}(\sigma) = \iint_{| \zeta | < 1} \left[- \int_{z_0}^1 L_{\omega} \log |b_{\omega}(z\sigma, \zeta)| d\bar{\omega}(\sigma) \right] d\nu(\zeta) \\ &= \iint_{| \zeta | < 1} L_{\omega}L_{\omega} \log |b_{\omega}(z, \zeta)| d\nu(\zeta) = \iint_{| \zeta | < 1} \log |b_{\omega}(z, \zeta)| d\nu(\zeta) = P_{\omega}(z), \end{aligned}$$

что верно для всех $z \in \mathcal{D}$ в силу единственности гармонической функции.

Отсюда применяя оператор L_{ω} в силу леммы 3.1 заключаем, что $L_{\omega}P_{\omega}(z) = F(z)$, $|z| < d_0$, т.е. формула (3.4) верна в $|z| < d_0$ и, тем самым, во всей области $\mathcal{D}$. Наконец, для доказательства (3.5) отметим, что

$$(3.7) \quad \int_0^{2\pi} |L_{\omega}P_{\omega}(re^{i\theta})| d\theta \leq C_{\omega, d_0} \int_{| \zeta |}^1 \omega(t) dt, \quad | \zeta | < 1,$$

где C_{ω, d_0} постоянная, зависящая лишь от ω и d_0 (см. (2.14) на стр. 50 [2]), и очевидно

$$(3.8) \quad \int_0^{2\pi} |L_{\omega}P_{\omega}(re^{i\theta})| d\theta \leq C_{\omega, d_0} \iint_{| \zeta | < 1} \left(\int_{| \zeta |}^1 \omega(t) dt \right) d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Поэтому, в силу (3.4), одной версии леммы Фату (см. [7], том I, III.9.35) и формулы (2.7) получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} |L_{\omega}P_{\omega}(re^{i\theta})| d\theta &\leq \limsup_{r \rightarrow 1-0} \iint_{| \zeta | < 1} d\nu(\zeta) \int_0^{2\pi} |L_{\omega} \log |b_{\omega}(re^{i\theta}, \zeta)|| d\theta \\ &\leq \iint_{| \zeta | < 1} d\nu(\zeta) \int_0^{2\pi} \limsup_{r \rightarrow 1-0} |L_{\omega} \log |b_{\omega}(re^{i\theta}, \zeta)|| d\theta = 0 \quad \square \end{aligned}$$

4. ВЕСОВЫЕ КЛАССЫ ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Всюду ниже полагаем, что $U(z)$ - дельта-субгармоническая в $\mathcal{D}$ функция, т.е. является разностью $U(z) = U_1(z) - U_2(z)$ двух субгармонических в $\mathcal{D}$ функций. Кроме того, полагаем, что рисовская ассоциированная мера функции $U(z)$, т.е. ее заряд $\nu(\zeta)$, минимально разложен в смысле Жордана, т.е. $\nu(\zeta) = \nu_+(\zeta) - \nu_-(\zeta)$, где $\nu_{\pm}(\zeta)$ - положительная и отрицательная вариации меры $\nu(\zeta)$ - суть

неотрицательные борелевы меры с не пересекающимися носителями в $\mathbb{D}$. Две дельта-субгармонические в $\mathbb{D}$ функции $U(z) = U_1(z) - U_2(z)$ и $V(z) = V_1(z) - V_2(z)$ равны, т.е. $U(z) = V(z)$, если $U_1(z) - V_2(z) = U_2(z) + V_1(z)$ всюду в $\mathbb{D}$.

Отметим, что если заряд $\nu(\zeta)$ функции $U(z)$ таков, что потенциал $P_\omega(z)$ сходится, то функция $u(z) = U(z) - P_\omega(z)$ гармонична в $\mathbb{D}$, и $L_\omega U(z) = L_\omega u(z) + L_\omega P_\omega(z)$, $z \in \mathbb{D}$, где $L_\omega u(z)$ и $L_\omega P_\omega(z)$ вполне определены выше. Далее, если функция $U(z)$ дельта-субгармонична в круге $\mathbb{D}_R$ ($0 < R < 1$), то при любом $r \in (0, R)$

$$u(z) = U(z) - \iint_{|\zeta| < r} \log \left| h_\omega \left(\frac{z}{r}, \frac{\zeta}{r} \right) \right| d\nu(\zeta)$$

гармонична в $|z| < r$. Тем самым, ввиду леммы 3.1 и теоремы 3.2 функция

$$(4.1) \quad L_\omega u(z) = L_\omega U(z) - \iint_{|\zeta| < r} L_\omega \log \left| h_\omega \left(\frac{z}{r}, \frac{\zeta}{r} \right) \right| d\nu(\zeta)$$

гармонична в $|z| < r$, и в силу (3.7)

$$\sup_{0 < \rho < r'} \int_0^{2\pi} |L_\omega u(\rho e^{i\theta})| d\theta < +\infty$$

при любом $r' \in (0, r)$. Очевидно, этот супремум ограничен и при $r' = r$. Следовательно, по (3.5) приходим к пуассоновскому представлению

$$L_\omega u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} L_\omega U(re^{i\theta}) d\theta, \quad |z| < r.$$

Подставляя $z = 0$ в разности двух представлений (4.1) в $|z| < r < R$ и в $|z| < r_0 < r$, где r_0 фиксировано, приходим к аналогу формулы Йенсена-Неванлинны:

$$(4.2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_\omega U(r_0 e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_\omega U(re^{i\theta}) d\theta - \iint_{r_0 < |\zeta| < r} \left(\int_{|\zeta|/r}^1 \frac{\omega(x)}{x} dx \right) d\nu(\zeta) - \iint_{|\zeta| \leq r_0} \left(\int_{|\zeta|/r}^{|\zeta|/r_0} \frac{\omega(x)}{x} dx \right) d\nu(\zeta),$$

где $r_0 < r < R$. Далее, вводим ω -характеристики неванлинновского типа:

$$n_\omega(r, \pm\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L_\omega U(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

$$\begin{aligned} N_\omega(r, r_0, \pm\infty) &= \int_{r_0}^r \frac{n_\pm(t) - n_\pm(r_0)}{t} \omega\left(\frac{t}{r}\right) dt + \int_0^{r_0} \left(\int_{t/r}^{t/r_0} \frac{\omega(x)}{x} dx \right) dn_\pm(t), \\ &= \int_{r_0}^r \frac{n_\pm(t) - n_\pm(r_0)}{t} \omega\left(\frac{t}{r}\right) dt \\ &\quad + \left\{ n_\pm(r_0) \int_{r_0/r}^1 \frac{\omega(x)}{x} dx + \int_0^{r_0} \frac{n_\pm(t)}{t} \left[\omega\left(\frac{t}{r}\right) - \omega\left(\frac{t}{r_0}\right) \right] dt \right\}. \end{aligned}$$

$$T_\omega(r, r_0, \pm\infty) = n_\omega(r, \pm\infty) + N_\omega(r, r_0, \pm\infty),$$

где $n_{\pm}(t) = \iint_{|\zeta| \leq t} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} d\zeta d\bar{\zeta}$ а $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = a^+ - a$. Отметим, что приведенные величины с $+\infty$ характеризуют близость функции $L_{\omega}U(z)$ к $+\infty$, а те, которые с $-\infty$ - близость $L_{\omega}U(z)$ к $-\infty$. Тем самым, формулу (4.2) можно написать в виде равновесия между характеристиками роста и убывания функции $L_{\omega}U(z)$:

$$(4.3) \quad L_{\omega}U(r, r_0, +\infty) - L_{\omega}U(r, r_0, -\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{\omega}U(r_0 e^{i\theta}) d\theta, \quad r < r_0 < 1,$$

где интеграл справа - постоянная.

Определение 4.1. Если $\omega(z) \in \Omega$, то N_{ω} - класс дельта-субгармонических в $\mathbb{D}$ функций $U(z)$ таких, что:

- (i) носитель ассоциированного с $U(z)$ заряда ν лежит вне круга $|z| < r_0 < 1$ и при любом $\rho \in (0, 1)$ замыкание множества $\{\text{Arg}(\text{supp } \nu) \cap \mathbb{D}_{\rho}\}$ имеет нулевую лебегову меру.
- (ii) При некотором $0 < r_0 < 1$

$$(4.4) \quad \sup_{r > r_0} T_{\omega}(r, r_0, +\infty) < +\infty,$$

Отметим, что если соотношение (4.3) имеет место при каком-либо $0 < r_0 < 1$, то оно справедливо при любом $r_0 \in (0, 1)$.

В следующей теореме дано параметрическое представление классов N_{ω} .

Теорема 4.1. При любом $\omega \in \Omega$ класс N_{ω} совпадает с множеством функций представимых в виде

$$(4.5) \quad U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re}\{z/\rho e^{-i\theta}\} d\mu(\theta) + \iint_{\mathbb{D}_{\rho}} \log|z/\zeta| d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D},$$

где $\mu(\nu)$ - функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, а $\nu(\zeta) = \nu_+(\zeta) + \nu_-(\zeta)$, где $\nu_{\pm}(\zeta) \geq 0$ - борелевы меры с носителями в каком-либо кольце $r_0 < |\zeta| < 1$ далее, при любом $\rho \in (0, 1)$ замыкание множества $\{\text{Arg}(\text{supp } \nu_{\pm}) \cap \mathbb{D}_{\rho}\}$ имеет нулевую лебегову меру, и

$$(4.6) \quad \iint_{\mathbb{D}_{\rho}} \left(\int_0^{2\pi} \log|z/\zeta| d\mu \right) d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Меру $\mu(\nu)$ в (4.5) можно найти по формуле обращения Стильтьеса:

$$(4.7) \quad \mu(\nu) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} L_{\omega}U(r e^{i\theta}) d\theta, \quad \text{для н.в. } 0 < \theta < 2\pi.$$

Доказательство. Если $U(z) \in \mathcal{K}_\omega$ то ввиду (4.3) условие (4.4) обеспечивает ограниченность характеристик $N_\omega(r, r_0, \pm\infty)$, откуда следует (3.2). Таким образом, потенциалы типа Грива с мерой $\nu_\pm$ сходятся. Следовательно, функция

$$V(z) = U(z) - \iint_{|\zeta| < 1} \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta)$$

гармонична в $\mathbb{D}$, что верно также для функции

$$L_\omega V(z) = L_\omega U(z) - \iint_{|\zeta| < 1} L_\omega \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta).$$

Кроме того, ясно что $\sup_{r_0 < r < 1} m_\omega(r, r_0, +\infty, \pm L_\omega U) < +\infty$, и поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{r_0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L_\omega U(re^{i\theta})| d\theta \\ \leq \sup_{r_0 < r < 1} [m_\omega(r, r_0, +\infty, L_\omega U) + m_\omega(r, r_0, +\infty, -L_\omega U)] < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду (3.8)

$$\sup_{r_0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |L_\omega V(re^{i\theta})| d\theta < +\infty,$$

и воспользовавшись теоремой 1.5 на стр. 37 [2] приходим к представлению (4.5):

$$V(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{ S_\omega(z e^{-i\theta}) \} d\mu(\theta) = U(z) - \iint_{|\zeta| < 1} \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D},$$

где $\mu(\theta)$ - функция ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$. Далее, применив оператор L_ω приходим к следующему пуассоновскому представлению, влекущую (4.7):

$$L_\omega V(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu(\theta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Обратно, если $U(z)$ представима в виде (4.5), то функция $u(z) = U(z) - P_\omega(z)$ гармонична в $\mathbb{D}$ и принадлежит классу U_ω из теоремы 1.5 на стр. 37 [2], т.е.

$$\sup_{r_0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |u_\omega(re^{i\theta})| d\theta \right\} < +\infty \quad \text{для} \quad u_\omega(z) := L_\omega u(z).$$

Кроме того, это соотношение верно для $P_\omega(z)$ в силу (3.8). Следовательно,

$$\sup_{r_0 < r < 1} m_\omega(r, +\infty, L_\omega U) < +\infty.$$

Отсюда и из (4.6) получаем

$$\sup_{r_0 < r < 1} T_\omega(r, r_0, +\infty, L_\omega U) < +\infty, \quad \text{т.е.} \quad U(z) \in N_\omega.$$

□

Автор благодарен академику В.С. Захаряну за полезные обсуждения и ценные советы.

Abstract. The paper gives the delta-subharmonic extension of the part of the factorization theory of M. M. Djrbashian - V. S. Zakaryan, which relates with the descriptive representations of the classes $N\{\omega\}$ of functions meromorphic in the unit disc, contained in Nevanlinna's class N of functions of bounded type.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. M. Djrbashian, Theory of Factorization and Boundary Properties of Functions Meromorphic in the Disc, Proc. International Congress of Mathematicians (Vancouver 1974), 2, Canad. Math. Congress. Montreal (1975).
- [2] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, Классы и Граничные Свойства Функций Мероморфных в Круге, Наука, Москва (1993).
- [3] А. М. Джрбашян, Дж. Э. Рестрено, "О некоторых классах гармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами и полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, **51** (2), 51 – 61 (2016).
- [4] А. М. Джрбашян, Дж. Э. Рестрено, "О некоторых подклассах дельта-субгармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами и полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, **51**, no. 3, 111 – 124 (2016).
- [5] А. М. Джрбашян, "Расширение теории факторизации М. М. Джрбашяна", Изв. НАН Армении, Математика, **30**, no. 2, 39 – 61 (1995).
- [6] А. М. Джрбашян, "О вложениях класса N_ω типа Неванлинны", Изв. РАН, **63**, 59 – 78 (1999).
- [7] N. Dunford, J. J. Schwarz, Linear operators, Vol. I, New York: Interscience Publishers (1971).

Поступила 23 декабря 2016

CERTAIN CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS RELATED TO
THE CRESCENT-SHAPED REGIONS

R. K. RAINA, P. SHARMA AND J. SOKÓŁ

University of Agriculture and Technology, Udaipur, India

University of Lucknow, India

University of Rzeszów, Rzeszów, Poland

E-mails: rkaina_79@hotmail.com; sharma_poonam@lko.univ.ac.in; jsokol@prz.edu.pl

Abstract. In this paper, we study certain classes of analytic functions which satisfy a subordination condition and are associated with the crescent-shaped regions. We first give certain integral representations for the functions belonging to these classes and also present a relevant example. Making use of some known lemmas, we derive sufficient conditions for the functions to be in these classes. Some results on coefficient estimates are also obtained.

MSC2010 numbers: 30C45.

Keywords: analytic function; convex function; starlike function; subordination; k -uniformly convex; k -uniformly starlike.

1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let $\mathcal{H}(\mathbb{U})$ denote the class of functions analytic in the open unit disc $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$ on the complex plane $\mathbb{C}$, and for $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ and $a \in \mathbb{C}$, let

$$\mathcal{H}[a, m] = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) : f(z) = a + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots\}.$$

Denote $\mathcal{H}[1, 1]$ by $\mathcal{H}$, and let a class of normalized analytic functions $\mathcal{A}_m$ be defined by

$$\mathcal{A}_m = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) : f(z) = z + a_{m+1} z^{m+1} + \dots\}$$

with $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. A subclass of $\mathcal{A}$ consisting of univalent functions is denoted by $\mathcal{S}$. Also, let $\mathcal{S}^*$ and $\mathcal{C}$ be the subclasses of $\mathcal{S}$ comprising of functions f which are, respectively, starlike and convex and which map the unit disk $\mathbb{U}$ onto starlike and convex regions, respectively. Analytically, a function f belonging to the classes $\mathcal{S}^*$ and $\mathcal{C}$ satisfies the inequalities

$$(1.1) \quad \Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \quad \text{and} \quad \Re \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

respectively.

We say that an analytic function f is subordinate to an analytic function g , and write $f(z) \prec g(z)$, if and only if there exists a function ω analytic in $\mathbb{U}$ such that $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ for $z \in \mathbb{U}$ and $f(z) = g(\omega(z))$. In particular, if g is univalent in $\mathbb{U}$, then we have the following equivalence:

$$(1.2) \quad f(z) \prec g(z) \iff f(0) = g(0) \text{ and } f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U}).$$

Denote by $\mathcal{P}$ the class of functions p analytic in $\mathbb{U}$, such that $p(0) = 1$ and $\Re\{p(z)\} > 0$ ($z \in \mathbb{U}$).

In [12], Ma and Minda unified the approach to several classes by introducing a generalized subclass $\mathcal{P}(\phi)$ of $\mathcal{P}$. In terms of the subordination, a function $p \in \mathcal{P}$ is said to be in the class $\mathcal{P}(\phi)$ if it satisfies the condition $p \prec \phi$, where ϕ is analytic univalent with positive real part in $\mathbb{U}$, $\phi(\mathbb{U})$ is symmetric with respect to the real axis and is starlike with respect to $\phi(0) = 1$ and $\phi'(0) > 0$. Furthermore, the classes defined by

$$\mathcal{S}^*(\phi) = \{f \in \mathcal{A} : zf'(z)/f(z) \in \mathcal{P}(\phi)\}$$

$$\mathcal{C}(\phi) = \{f \in \mathcal{A} : 1 + zf''(z)/f'(z) \in \mathcal{P}(\phi)\}$$

become, respectively, the classes $\mathcal{S}^*$ and $\mathcal{C}$ when we choose $\phi(z) = (1+z)/(1-z)$. Recently, several results were obtained when $\phi(z) = p_k(z)$, where $p_k(z)$ is convex univalent in $\mathbb{U}$ and has the form:

$$p_k(z) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{1-k} \sinh^2 \left\{ \left(\frac{2}{\pi} \arccos k \right) \operatorname{arctanh} \sqrt{z} \right\}, & 0 \leq k < 1, \\ 1 + \frac{1}{2k} \left(\log \left| \frac{1+z}{1-z} \right| \right)^2, & k = 1, \\ 1 + \frac{1}{k^2-1} \sin \left(\frac{\pi}{2R(t)} \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{R(t)-k^2}} \right), & k > 1, \end{cases}$$

where $u(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{U}$ and $t \in (0, 1)$ is chosen such that

$$k = \cosh \left(\pi R(\sqrt{1-t^2})/R(t) \right),$$

$R(t)$ is the Legendre's complete elliptic integral of the first kind (see [7]–[10]). Also, we obtain the class $\mathcal{S}^*(p_k)$ of k -uniformly starlike and the class $\mathcal{C}(p_k)$ of k -uniformly convex functions defined, respectively, by

$$\mathcal{S}^*(p_k) = \{f \in \mathcal{A} : zf'(z)/f(z) \in \mathcal{P}(p_k)\}$$

$$\mathcal{C}(p_k) = \{f \in \mathcal{A} : 1 + zf''(z)/f'(z) \in \mathcal{P}(p_k)\}.$$

Motivated by the above defined class $\mathcal{P}(\phi)$, we consider the function $\phi(z) = z + \sqrt{1+z^2}$ ($z \in \mathbb{U}$), and define the following classes:

$$(1.3) \quad \Delta = \left\{ p \in \mathcal{H} : p(z) \prec z + \sqrt{1+z^2} \quad (z \in \mathbb{U}) \right\},$$

$$(1.4) \quad \Delta^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec z + \sqrt{1+z^2} \quad (z \in \mathbb{U}) \right\}$$

and

$$(1.5) \quad \Delta^{\mathcal{C}} = \left\{ f \in \mathcal{A} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec z + \sqrt{1+z^2} \quad (z \in \mathbb{U}) \right\}.$$

Observe that the function $\phi(z) = z + \sqrt{1+z^2}$ ($z \in \mathbb{U}$) is analytic univalent and

$$(1.6) \quad \Re \{ \phi(e^{it}) \} = \begin{cases} \cos t + \sqrt{2} \cos t |\cos t/2| & \text{for } t \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ \cos t + \sqrt{2} |\cos t| \sin t/2 & \text{for } t \in (\pi/2, 3\pi/2), \\ 0 & \text{for } t = \pi/2, 3\pi/2, \end{cases}$$

which shows that $\Re \{ \phi(z) \} > 0$ in $\mathbb{U}$. We note that $\phi(e^{it})$ for $t \in [0, 2\pi)$ traverses a *crescent* which is symmetric and convex along the real axis (see Fig.1 below, and [16]). Also, in view of (1.2), we infer that

$$(1.7) \quad \Delta \subset \mathcal{P},$$

implying that $\Delta^* \subset \mathcal{S}^*$ and $\Delta^{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$. The subordination condition in (1.3) may equivalently be given by

$$(1.8) \quad \left| (p(z))^2 - 1 \right| < 2|p(z)| \quad (z \in \mathbb{U}),$$

and the class Δ^* as a subclass of $\mathcal{S}^*$ with the equivalent condition (1.8) is the class, which was recently studied in [16]. Also, in view of Theorem 2.4 from [16], we observe that if $p \in \Delta$, then

$$(1.9) \quad |p(z) + 1| > \sqrt{2} \quad \text{and} \quad |p(z) - 1| < \sqrt{2} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

The condition (1.9) implies that if $p \in \Delta$, then $p(\mathbb{U})$ is the interior of the right-crescent formed by the circles (see Fig. 1):

$$(1.10) \quad |w + 1| = \sqrt{2} \quad \text{and} \quad |w - 1| = \sqrt{2},$$

and is starlike with respect to 1. Thus, the above defined classes Δ, Δ^* and $\Delta^{\mathcal{C}}$ are associated with the right-crescent, formed by the circles given by (1.10), and our attempt to define these classes are in the line of investigations of various other classes defined earlier and having geometric interpretations. For example, the class of

functions $f \in \mathcal{A}$ satisfying $zf'(z)/f(z) \prec \sqrt{1+z}$ ($z \in \mathbb{U}$) was considered in [17] and is associated with the Bernoulli lemniscate, while the class of functions $f \in \mathcal{A}$ satisfying $zf'(z)/f(z) \prec \sqrt{1+cz}$ was considered in [1]. It should be noted that in some recent papers (see, e.g., [2, 3, 4, 5]), certain function classes were considered, which were defined by the condition $zf'(z)/f(z) \prec \bar{g}(z)$, where $\bar{g}(z)$ was not univalent, and these classes created difficult problems when considering their geometric properties.



Fig. 1. $\phi(e^{it})$.

The aim of this paper is to study the class Δ and, in particular, the classes Δ^* and Δ^c , and to obtain integral representations for functions from these classes and to derive sufficient conditions for functions to belong to these classes by making use of certain well-known results. Some results on the coefficients estimates for these functions are also derived.

The following two lemmas will be used in the proof of our main results.

Lemma 1.1 (see [14], Theorem 3.4h, p. 132, and [13]). *Let q be univalent in $\mathbb{U}$ and let θ and φ be analytic in a domain D containing $q(\mathbb{U})$ with $\varphi(w) \neq 0$ when $w \in q(\mathbb{U})$. Set $Q(z) = zq'(z) \cdot \varphi[q(z)]$, $h(z) = \theta[q(z)] + Q(z)$, and suppose that either*

(i) *h is convex, or (ii) Q is starlike.*

In addition, assume that

$$(iii) \operatorname{Re} \left\{ \frac{zq'(z)}{Q(z)} \right\} > 0.$$

If p is analytic in $\mathbb{U}$, with $p(0) = q(0)$, $p(\mathbb{U}) \subset D$ and

$$\theta[p(z)] + zp'(z) \cdot \varphi[p(z)] = \theta[q(z)] + zq'(z) \cdot \varphi[q(z)] = h(z).$$

then $p \prec q$, and q is the best dominant in the sense that $p \prec s \Rightarrow q \prec s$, $\forall s$.

If we set $\theta(w) = 0$ in the above Lemma 1.1, then the conditions (ii) and (iii) become identical and we have the following simplified version of Lemma 1.1.

Lemma 1.2 (see [14], Corollary 3.4b.1, p. 135). *Let q be univalent in U , and φ be analytic in a domain D containing $q(U)$. If $zq'(z) \cdot \varphi[q(z)]$ is starlike, then*

$$zp'(z) \cdot \varphi[p(z)] \prec zq'(z) \cdot \varphi[q(z)] \Rightarrow p \prec q,$$

and q is the best dominant.

2. MAIN RESULTS

We first give certain integral representations for functions belonging to the classes Δ^* and Δ^e , which we use to construct a specific example demonstrating the application of these classes. These integral representations follow directly from the definitions of Δ^* and Δ^e . Thus, we have the following assertions.

- (i) A function $f \in \Delta^*$ if and only if there exists an analytic function $p \in \Delta$ such that

$$f(z) = z \exp \left(\int_0^z \frac{p(t) - 1}{t} dt \right).$$

- (ii) A function $f \in \Delta^e$ if and only if there exists an analytic function $p \in \Delta$ such that

$$f(s) = \int_0^s \left\{ \exp \left(\int_0^u \frac{p(t) - 1}{t} dt \right) \right\} du.$$

Choosing $p(z) = z + \sqrt{1+z^2}$ in the above representations (i) and (ii), we find that

$$f_0(z) = z \exp \left(\int_0^z \frac{t + \sqrt{1+t^2} - 1}{t} dt \right) \in \Delta^*$$

and

$$g_0(z) = \int_0^z \left\{ \exp \left(\int_0^u \frac{t + \sqrt{1+t^2} - 1}{t} dt \right) \right\} du \in \Delta^e.$$

and obviously, we have $zg_0'(z) = f_0(z)$. Further, observe that for some A ($-1 < A < 1$), the function $p(z) = \frac{1+A}{1-Az}$ maps the unit disc U onto the disc

$$(2.1) \quad \left| p(s) - \frac{1+|A|^2}{1-|A|^2} \right| < \frac{2|A|}{1-|A|^2},$$

and hence, if

$$p(z) = \frac{1 + Az}{1 - Az} \in \Delta,$$

then the endpoints $\left(\frac{1-|A|}{1+|A|}, 0\right)$ and $\left(\frac{1+|A|}{1-|A|}, 0\right)$ of the diameter of the disc in (2.1), satisfy the inequality:

$$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{1-|A|}{1+|A|} \leq \frac{1+|A|}{1-|A|} \leq \sqrt{2} + 1.$$

Therefore, we can assert that for some A ($-1 < A < 1$),

$$p(z) = \frac{1 + Az}{1 - Az} \in \Delta \Leftrightarrow A \in [1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1],$$

and hence, by using the representations given in (i) and (ii) for $p(z) = \frac{1+Az}{1-Az}$, we have the following example.

Example 2.1. Let $1 - \sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2} - 1$, then

$$f_1(z) = \frac{z}{(1 - Az)^2} \in \Delta^* \quad \text{and} \quad f_2(z) = \frac{z}{1 - Az} \in \Delta^*.$$

Now, by using Lemmas 1.1 and 1.2, we establish some sufficient conditions involving subordination for the class Δ , where Δ is defined by (1.3):

Theorem 2.1. Let $q(z) = z + \sqrt{1 + z^2}$. If $p \in \mathcal{H}$ satisfies

$$(2.2) \quad p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)} < q(z) + \frac{zp'(z)}{q(z)}, \quad z \in \mathbb{U},$$

then

$$(2.3) \quad p \in \Delta.$$

Proof. To prove the result, we need to show that

$$(2.4) \quad p(z) < q(z), \quad z \in \mathbb{U}.$$

Let

$$(2.5) \quad \theta[w] = w, \quad \varphi[w] = \frac{1}{w}$$

be analytic in the domain $\mathbb{D}$ such that $q(\mathbb{U}) \subset \mathbb{D}$. Then, it follows that

$$(2.6) \quad \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{\varphi'(q(z))}{\varphi(q(z))} = \frac{-q'(z)}{q^2(z)} = -Q(z).$$

Now, for $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ such that $Q(z_1) = Q(z_2)$, we have

$$\frac{z_1^2}{z_1 + z_1^2} = \frac{z_2^2}{z_2 + z_2^2} \Rightarrow z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow z_1 = \pm z_2.$$

The case $z_1 = -z_2$ is impossible because $Q(z)$ is an odd function. So, we have only the case $z_1 = z_2$, and hence $Q'(z)$ is univalent in U . Also, $Q(z)$ is starlike in U because

$$\frac{zQ'(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1+z^2}$$

$$(2.7) \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{zQ'(z)}{Q(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{1+z^2} \right\} > \frac{1}{2}, \quad z \in U.$$

Further, in view of (2.6), for function $h(z) = \theta[q(z)] + Q(z) = q(z) + Q(z)$ we have

$$\frac{zh'(z)}{Q(z)} = q(z) + \frac{zQ'(z)}{Q(z)},$$

and hence, from (1.6) and (2.7), we infer that

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zh'(z)}{Q(z)} \right\} > \frac{1}{2} > 0, \quad z \in U.$$

Thus, the conditions (ii) and (iii) of Lemma 1.1 are satisfied. By applying Lemma 1.1 and using the substitutions given by (2.5), we observe that the subordination relation

$$(2.8) \quad \theta[p(z)] + zp'(z) \cdot \varphi[p(z)] \prec \theta[q(z)] + zq'(z) \cdot \varphi[q(z)]$$

becomes the subordination condition (2.2), which implies the subordination (2.4).

This proves the desired result (2.3) of the theorem. $\square$

Theorem 2.2. Let $q(z) = z + \sqrt{1+z^2}$ ($z \in U$) and $p \in \mathcal{H}$. Then

$$(2.9) \quad \frac{zp'(z)}{p(z)} \prec \frac{zq'(z)}{q(z)} \Rightarrow p \in \Delta.$$

Proof. Let $\varphi[w] = \frac{1}{w}$ be analytic in the domain D such that $q(U) \subset D$. Then, for $q(z) = z + \sqrt{1+z^2}$, we find from (2.6) and (2.7) that $zq'(z) \cdot \varphi[q(z)]$ is starlike in U , and the condition

$$zp'(z) \cdot \varphi[p(z)] \prec zq'(z) \cdot \varphi[q(z)]$$

yields the subordination $\frac{zp'(z)}{p(z)} \prec \frac{zq'(z)}{q(z)}$. Now, by Lemma 1.2, we have $p \prec q$, which in view of (1.3) establishes the desired result (2.9). $\square$

In particular, choosing the substitutions: $p(z) = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ and $p(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$, respectively, in Theorems 2.1 and 2.2, we get the following results for the classes Δ^* and Δ^c , defined above by (1.4) and (1.5), respectively.

Corollary 2.1. If $f \in A$ satisfies the condition:

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec z + \sqrt{1+z^2} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad z \in U,$$

then $f \in \Delta^*$.

Corollary 2.2. *If $f \in \mathcal{A}$ satisfies the condition:*

$$1 + \frac{z(zf'(z))''}{(zf'(z))'} < z + \sqrt{1+z^2} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad z \in \mathbb{U},$$

then $f \in \Delta^{\mathcal{C}}$.

Corollary 2.3. *If $f \in \mathcal{A}$ satisfies the condition:*

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{zf'(z)}{f(z)} < \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad z \in \mathbb{U},$$

then $f \in \Delta^$.*

Corollary 2.4. *If $f \in \mathcal{A}$ satisfies the condition:*

$$\frac{z(zf'(z))''}{(zf'(z))'} - \frac{zf''(z)}{f'(z)} < \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad z \in \mathbb{U},$$

then $f \in \Delta^{\mathcal{C}}$.

3. CERTAIN COEFFICIENT ESTIMATES

In this section we obtain some coefficient estimates for functions belonging to the classes Δ , Δ^* and $\Delta^{\mathcal{C}}$. To this end, we use certain inequalities stated in the following lemma (see [15, p. 108] and [11, p. 10]).

Lemma 3.1. *Let $w(z)$ be a Schwarz function given by*

$$(3.1) \quad w(z) = w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \dots \quad (z \in \mathbb{U}),$$

then $|w_1| \leq 1$, $|w_2 - tw_1^2| \leq 1 + (|t| - 1)|w_1|^2 \leq \max\{1, |t|\}$, where $t \in \mathbb{C}$. The result is sharp for functions $w(z) = z$ or $w(z) = z^2$.

Theorem 3.1. *Let $p \in \mathcal{H}$ be of the form:*

$$(3.2) \quad p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

If $p \in \Delta$, where Δ is defined by (1.3), then $|p_i| \leq 1$ for $i = 1, 2$.

Proof. Let $p \in \Delta$ be of the form (3.2), then there exists some Schwarz function $w(z)$ of the form (3.1) with $|w(z)| < 1$ such that

$$(p(z))^2 - 1 = 2p(z) \cdot w(z).$$

Hence, we have

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n\right)^2 - 1 = 2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n\right) (w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \dots).$$

Comparing the coefficients of z and z^2 on both sides of the last equality, we get

$$p_1 = w_1 \text{ and } 2p_2 + p_1^2 = 2(w_2 + p_1 w_1).$$

Now, applying Lemma 3.1, we obtain

$$|p_1| = |w_1| \leq 1 \text{ and } |p_2| = \left| w_2 + \frac{w_1^2}{2} \right| \leq 1,$$

and the result follows. $\square$

Using Theorem 3.1, we obtain the following result that contains coefficient estimates for functions belonging to the class Δ^* .

Corollary 3.1. *Let $f \in \Delta^*$ be defined by*

$$(3.3) \quad f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

then

$$(3.4) \quad |a_2| \leq 1 \text{ and } \left| a_3 - \frac{1}{2} a_2^2 \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Proof. Let

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

be of the form (3.2), then $p \in \Delta$. Hence, using the series expansions (3.2) and (3.3), we obtain

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \right) \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} \right).$$

Comparing the coefficients of z and z^2 on both sides of the last equality, we get

$$(3.5) \quad 2a_2 = p_1 + a_2 \text{ and } 3a_3 = p_2 + p_1 a_2 + a_3.$$

Now, applying Theorem 3.1, from (3.5) we obtain $|p_1| = |a_2| \leq 1$ and $|p_2| = |2a_3 - a_2^2| \leq 1$. This proves the estimates in (3.4). $\square$

We observe that if $f \in \Delta^c$, then $zf' \in \Delta^*$. Hence, applying Corollary 3.1 to function zf' , and replacing a_n by na_n in (3.4), we obtain coefficient estimates for functions $f \in \Delta^c$, which are given by the following corollary.

Corollary 3.2. *Let $f \in \Delta^c$ be of the form (3.3), then*

$$|a_2| \leq \frac{1}{2} \text{ and } \left| a_3 - \frac{2}{3} a_2^2 \right| \leq \frac{1}{6}.$$

The next theorem contains coefficient estimates in the case where the function $g(z)$ has a specific form.

Theorem 3.2. Let $g \in \mathcal{P}$ be of the form $g(z) = 1 + c_n z^n$ ($|c_n| < 1, n \in \mathbb{N}$), then $g \in \Delta$ if and only if

$$(3.6) \quad |c_n| \leq 2 - \sqrt{2}.$$

Proof. Define a function $\omega(z)$ to satisfy

$$(3.7) \quad g(z) = 1 + c_n z^n = \omega(z) + \sqrt{1 + 4\omega(z)^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

and observe that $\omega(z)$ is analytic in $\mathbb{U}$ with $\omega(0) = 0$. To show that $g \in \Delta$, we need to prove that $|\omega(z)| < 1$. By simple calculations, from (3.7) we find

$$\omega(z) = c_n z^n \left(1 + \frac{1}{1 + c_n z^n} \right), \quad z \in \mathbb{U},$$

showing that

$$(3.8) \quad |\omega(z)| \leq \frac{|c_n|}{2} \left(1 + \frac{1}{1 - |c_n|} \right) \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{1 - (2 - \sqrt{2})} \right) = 1,$$

provided that the condition (3.6) holds. Conversely, if $g \in \Delta$, then in view of (3.7), we have $|\omega(z)| < 1, z \in \mathbb{U}$, which, in view of (3.8), shows that

$$\frac{|c_n|}{2} \left(1 + \frac{1}{1 - |c_n|} \right) \leq 1$$

or $(|c_n| - 2)^2 \geq 2$. This implies that either $|c_n| \geq 2 + \sqrt{2}$ or $|c_n| \leq 2 - \sqrt{2}$. Since $g \in \mathcal{P}$, in view of Caratheodory condition $|c_n| \leq 2$ (see [6, p. 41]), we obtain the inequality (3.6). $\square$

Applying Theorem 3.2, we can determine certain functions belonging to the classes Δ^* and Δ^c as follows.

Corollary 3.3. Let $f \in \mathcal{A}$ be of the form:

$$(3.9) \quad f(z) = z \exp(az) \quad (|a| < 1, z \in \mathbb{U}),$$

then $f \in \Delta^*$ if and only if $|a| \leq 2 - \sqrt{2}$.

Proof. Observe that for $f \in \mathcal{A}$ of the form (3.9), we have

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + az = g(z).$$

Hence, by Theorem 3.2, $g \in \Delta$ or $f \in \Delta^*$ if and only if $|a| \leq 2 - \sqrt{2}$. $\square$

Similarly, we can prove the following result.

Corollary 3.4. *Let $f \in \mathcal{A}$ be such that*

$$(3.10) \quad f'(z) = \exp(bz) \quad (|b| < 1, z \in \mathbb{U}).$$

then $f \in \Delta^c$ if and only if $|b| \leq 2 - \sqrt{2}$.

Acknowledgement: The authors sincerely thank the referee for a number of useful comments and suggestions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. K. Aouf, J. Dziok and J. Sokół, "On a subclass of strongly starlike functions", *Appl. Math. Letters* **24**, 27 – 32 (2011).
- [2] J. Dziok, R. K. Raina and J. Sokół, "On alpha-convex functions related to shell-like functions connected with Fibonacci numbers", *Appl. Math. Comput.* **218**, 966 – 1002 (2011).
- [3] J. Dziok, R. K. Raina and J. Sokół, "Certain results for a class of convex functions related to a shell-like curve connected with Fibonacci numbers", *Comput. Math. Appl.* **61** (9), 2605 – 2613 (2011).
- [4] J. Dziok, R. K. Raina and J. Sokół, "On a class of starlike functions related to a shell-like curve connected with Fibonacci numbers", *Math. Comput. Modelling* **57**, 1203 – 1211 (2013).
- [5] J. Dziok, R. K. Raina and J. Sokół, "Differential subordinations and alpha-convex functions", *Acta Math. Scientia* **33B**, 609 – 620 (2013).
- [6] P. L. Duren, *Univalent Functions*, New York, Springer-Verlag (1983).
- [7] S. Kanas, "Alternative characterisation of the class k -UCV and related classes of univalent functions", *Serdica Math. J.* **25**, 341 – 350 (1996).
- [8] S. Kanas and A. Wiśniowska, "Conic regions and k -uniform convexity", *J. Comput. Appl. Math.*, **105**, 327 – 336 (1999).
- [9] S. Kanas and H. M. Srivastava, "Linear operators associated with k -uniformly convex functions", *Integral Transform. Spec. Funct.* **9**, 121 – 132 (2000).
- [10] S. Kanas and A. Wiśniowska, "Conic domains and starlike functions", *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **45**, 647 – 657 (2000).
- [11] F. R. Kersh and R. P. Merkes, "A coefficient inequality for certain classes of analytic functions", *Proc. Amer. Math. Soc.* **20**, 8 – 12 (1969).
- [12] W. Miao and D. A. Minda, "Unified treatment of some special classes of univalent functions", in: *Proceedings of the Conference on Complex Analysis*, Eds. Li, Z., Ren, F., Yang, L. and Zhang, S. Int. Press, 157 – 169 (1994).
- [13] S. S. Miller and P. T. Mocanu, "On some classes of first order differential subordinations", *Michigan Math. J.* **32**, 185 – 195 (1985).
- [14] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Differential Subordinations, Theory and Applications*, Series of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **225**, Marcel Dekker Inc., New York / Basel (2000).
- [15] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York (1952).
- [16] R. K. Raina and J. Sokół, "Some properties related to a certain class of starlike functions", *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **353**, 873 – 878 (2015).
- [17] J. Sokół, "Coefficient estimates in a class of strongly starlike functions", *Kyungpook Math. J.* **49**, 319 – 353 (2009).

Поступила 19 июля 2016

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 53

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ серия Математика

номер

Вычисление геометрических вероятностей с помощью картинок выпуклых тел	
Н. Г. АГАРОНЯН, В. К. ОГАНЯН	2
On generalized derivations and centralizers of operator algebras with involution	
S. ALI, A. FOŠNER, W. JING,	1
Об однородном интегральном уравнении с двумя ядрами	
Л. Г. АРАБАДЖЯН, С. А. ХАЧАТРЯН	1
Синус представление центрально-симметричных выпуклых тел	
Р. Г. АРАМЯН	6
Об интегральных уравнениях, ядра которых однородные функции степени (-1)	
А. Г. ВАРСЕГЯН	1
Группы обратимых бинарных операций топологического пространства	
П. С. ГЕВОРКЯН	1
О единственности рядов по системе Хаара	
Г. Г. ГЕВОРКЯН	3
Об M^p -множествах рядов по системе Франклина	
Г. Г. ГЕВОРКЯН	5
Теоремы единственности для системы Вилленкина	
Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. НАВАСАРДЯН	2
О единственности рядов по общей системе Франклина	
Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. НАВАСАРДЯН	4
Goodness-of-fit tests for continuous-time stationary processes	
M. S. GINOVYAN	3
Almost everywhere strong summability of Fejer means of rectangular partial sums of two-dimensional Walsh-Fourier series	
U. GOGINAVA	2
Almost everywhere convergence of strong Norlund logarithmic means of Walsh-Fourier series	
U. GOGINAVA	5
Sharp norm estimates for weighted Bergman projections in the mixed norm spaces	
J. GONESSA	6
Сходимость почти всюду жадного алгоритма по системам Вилленкина	
М. Г. ГРИГОРЯН, С. А. САРГСЯН	6
On a composition preserving inequalities between polynomials	
S. GULZAR AND N. A. RATHER	1
Method of moments estimators and multi-step MLE for Poisson processes	
A. S. DABYE, A. A. GOUNOUNG, YU. A. KUTOVANTS	4

Conjugate functions and the modulus of smoothness of fractional order A. DANIELA	3
Об априорных оценках и фредгольмовости дифференциальных операторов в анизотропных пространствах А. А. ДАРВИНЯН, А. Г. ТУМАНЯН	2
О пространствах A^2 типа Дирихле в полуплоскости А. М. ДЖРБАШЯН, ДЖ. Х. ПЕХЕНДИНО	4
О компактности регулярных интегральных операторов в пространстве L_1 Б. Н. ЕНГИБАРЯН, Н. Б. ЕНГИБАРЯН	6
Hankel and Herzog type operators on weighted Besov spaces of holomorphic functions on polydisks A. V. HARUTYUNYAN, G. MARINESCU	2
On perturbations of ℓ_p -localized frames M. A. HASANKHANI FARD	2
Об одном классе операторов L -Витера-Хопфа А. Г. КАМАЛЯН, М. И. КАРАХАНИЯН, А. О. ОГАНЕСЯН ...	3
О разрешимости регулярных гиперэллиптических уравнений в R^n Г. А. КАРАПЕТАН, Г. А. ПЕТРОСЯН	4
On the solvability of a mixed problem for an one-dimensional semilinear wave equation with a nonlinear boundary condition S. S. KHANQEDASHVILI, N. N. SITAVLAKADZE, O. M. JOKNADZE	5
Об одном аналоге формулы Плава В. И. КУЗОВАТОВ, А. М. КЫТМАНОВ	3
Meromorphic solutions for a class of differential equations and their applications W. LU, F. LO, L. WU AND J. YANG	5
О выделения гладких решений одного класса почти гиперэллиптических уравнений постоянной мощности В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН	1
Сравнение ряд многочленов двух переменных В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН	3
Об одном классе слабо гиперболических операторов В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН	6
Обобщенные характеристики для мероморфных в полуплоскости функций Г. В. МИКАЕЛЯН	3
Eigenfunctions of composition operators on block-type spaces B. PAUDYAL	5
Распределение максимума, минимума и диапазона выборки Т. В. ПИЛИПОСЯН	3
Об интерполяции по модифицированной тригонометрической системе А. ПОГОСЯН, Т. БАКАРЯН	3
Certain classes of analytic functions related to the Crescent-shaped regions R. K. RAJKA, P. SHARMA AND J. SOKOL	6
О некоторых классах дельта-субгармонических функций ограниченного вида в круге ДЖ. Э. РЕСТРЕПО	6
On an equivalency of rare differentiation bases of rectangles M. H. SARARYAN	1

On the convergence of partial sums with respect to Vilenkin system on the martingale Hardy spaces G. TERHNADZE	1
On the parameters estimators for a discrete analog of the generalized exponential distribution D. FARBOO	3
First passage time distribution for linear functions of a random walk B. FATHI-VAJARGAN, M. NAVIDI	4
Однопараметрическое семейство положительных решений для одного нелинейного интегрального уравнения, возникающего в физической кинетике А. Х. ХАЧАТРИАН, Х. А. ХАЧАТРИАН, А. А. ХАЧАТРИАН	5
Однопараметрическое семейство ограниченных решений для одной системы нелинейных интегральных уравнений на всей прямой Х. А. ХАЧАТРИАН, Ц. Э. ТЕРДЖЯН, М. О. АВЕГЯСИАН	4
A sub-density theorem of Sturm-Liouville eigenvalue problem with finitely many singularities L.-H. CHEN	1

Cover to cover translation of the present **IZVESTIYA** is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 53, No. 5, 2018

CONTENTS

S. S. KHARIBEGASHVILI, N. N. SHAVLAKADZE. O. M. JOKHADZE, On the solvability of a mixed problem for an one-dimensional semilinear wave equation with a nonlinear boundary condition.....	247
W. LÜ, F. LÜ, L. WU AND J. YANG. Metamorphic solutions for a class of differential equations and their applications	260
B. PAUDYAL, Eigenfunctions of composition operators on bloch-type spaces.....	266
G. G. GEVORKYAN, On a M^* -sets of series by Franklin system	276
I. GOGINAVA, Almost everywhere convergence of strong Nörlund logarithmic means of Walsh-Fourier series.....	281
A. DANELIA, Conjugate functions and the modulus of smoothness of fractional order	288
G. TEPHNADZE, On the convergence of partial sums with respect to Vilenkin system on the martingale Hardy spaces.....	294 - 306

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 53, номер 6, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Г. Арамян. Синус представление центрально-симметричных выпуклых тел	3
М. Г. Григорян, С. А. Саргсян. Сходимость почти всюду жадного алгоритма по системам Виленкина	13
J. GONESSA, Sharp norm estimates for weighted Bergman projections in the mixed norm spaces	33
Б. Н. Енгибарян, Н. Б. Енгибарян, О компактности регулярных интегральных операторов в пространстве L_1	46
В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, Об одном классе слабо гиперболических операторов	53
Дж. Э. Рестрено, О некоторых классах дельта-субгармонических функций ограниченного вида в круге	70
R. K. RAINA, P. SHARMA AND J. SOKOL, Certain classes of analytic functions related to the Crescent-shaped regions	83
Содержание тома 53, номера 1 – 6, 2018	94–96

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 53, No. 6, 2018

CONTENTS

R. G. ARAMYAN, The Sine representation of a centrally symmetric convex bodies	3
M. G. GRIGORYAN, S. A. SARGSYAN, Almost everywhere convergence of greedy algorithm with respect to Vilenkin system	13
J. GONESSA, Sharp norm estimates for weighted Bergman projections in the mixed norm spaces	33
B. N. YENGIBARYAN, N. B. YENGIBARYAN, On compactness of regular integral operators in the space L_1	46
V. N. MARGARYAN, G. G. KAZARYAN, On a class of weakly hyperbolic operators	53
J. E. RESTREPO, On some subclasses of delta-subharmonic functions of bounded type in the disc	70
R. K. RAINA, P. SHARMA AND J. SOKOL, Certain classes of analytic functions related to the Crescent-shaped regions	83
Author Index to Volume 53, numbers 1 – 6, 2018	94–96