ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2018

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 4, 2018, стр. 3 – 14

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. НАВАСАРДЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *ggg@ysu.am, knavasard@ysu.am*

Аннотация. Рассматривается общая система Франклина, соответствующая парно регулярному разбиению отрезка $[0;1]$. Доказываются теоремы единственности и восстановления коэффициентов для рядов по таким системам, которые удовлетворяют некоторому необходимому условию и сходятся по мере.

MSC2010 number: 42C10; 42C20.

Ключевые слова: общая система Франклина; теорема единственности; формула восстановления; A-интеграл.

1. Введение

В настоящее время общая система Франклина активно исследуется многими авторами. Некоторые свойства этой системы, полученных в работах [1]-[4], мы укажем по мере необходимости. Начнем с определения общей системы Франклина.

Определение 1.1. *Последовательность (разбиение)* $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ *называется допустимой на* $[0;1]$, *если* $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0;1)$, $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ *всюду плотно в* $[0;1]$ *и каждая точка* $t \in (0;1)$ *встречается в* $\mathcal{T}$ *не более чем два раза.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Допустим π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n-1\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через S_n обозначим пространство функций определенных на $[0;1]$, которые непрерывны слева, линейны на $(\tau_i^n; \tau_{i+1}^n)$ и непрерывны в τ_i^n, если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$. Ясно, что $dim S_n = n + 1$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, ортогональная S_{n-1} и $\|f\|_2 = 1$. Эту функцию называют n-ой функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Известно, что $f(t_n) \neq 0$. Поэтому полагается $f(t_n) > 0$.

[0]Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T–1A006

Определение 1.2. *Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $x \in [0,1]$, и для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ есть n-ая функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.*

Для последовательности $t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, получается классическая система Франклина, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином в [5]. Исследованию системы Франклина посвящены много работ. Систематическое исследование этой системы началось с работ [6], [7]. Здесь мы приведем только результаты непосредственно связанные с теоремами, которые будут доказаны в настоящей работе.

Для рядов по классической системе Франклина доказана теорема единственности, в условиях которой присутствуют одно необходимое условие на мажоранту частичных сумм ряда (см. [8], теорема 3).

Теорема 1.1. *Для того, чтобы ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$

был рядом Фурье-Франклина некоторой интегрируемой функции f, необходимо и достаточно, чтобы этот ряд п.в. сходился к $f(x)$ и

$$\liminf_{\lambda \to +\infty} \left(\lambda \cdot \operatorname{mes} \left\{ x \in [0;1] : \sup_N \left| \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x) \right| > \lambda \right\} \right) = 0,$$

где $mes(A)$ – Лебегова мера множества A.

Аналогичная теорема для общей системы Франклина доказана М. П. Погосяном в [9]. В работе [10] рассмотрены кратные ряды по системе Франклина.

Пусть d некоторое натуральное число. Рассмотрим кратные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}_0^d$-вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in [0;1]^d$ и $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1) \cdots f_{m_d}(x_d)$. Говорят, что ряд (1.1) сходится по прямоугольникам в точке $\mathbf{x}$, если существует предел

$$\lim_{\mathbf{M} \to +\infty} \sum_{\mathbf{m} \leq \mathbf{M}} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{m} \leq \mathbf{M}$ означает $m_j \leq M_j$, $j = 1, \ldots, d$, а $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_d) \to +\infty$ означает $\min_j M_j \to +\infty$.

В работах [11] и [13] для ряда (1.1) по классической системе Франклина введены обозначения

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}: m_i \le 2^\nu} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad \sigma^*(\mathbf{x}) = \sup_\nu |\sigma_\nu(\mathbf{x})|,$$

где $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_d)$, и доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. *Для того, чтобы ряд* (1.1) *был бы рядом Фурье-Франклина некоторой функции* $f \in L([0;1]^d)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись бы следующие условия*

(1) *суммы* $\sigma_\nu(x)$ *по мере сходились бы к* f;

(2) $\liminf_{\lambda \to +\infty} \left(\lambda \cdot \operatorname{mes}\left\{x \in [0;1]^d : \sup_\nu |\sigma_\nu(x)| > \lambda\right\}\right) = 0.$

В настоящей работе аналогичная теорема доказывается для рядов по общей системе Франклина, порожденной парно регулярным разбиением отрезка $[0,1]$. При этом вместо частичных сумм $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ и функции $\sigma^*(\mathbf{x})$ приходится рассмотреть всю последовательность квадратичных частичных сумм и мажоранту этой последовательности.

2. Формулировка теорем и некоторые вспомогательные леммы

При исследовании свойств общей системы Франклина рассматриваются различные условия регулярности разбиения $\mathcal{T}$, введенные в работах [2]-[4] и [14]. В настоящей работе мы предполагаем, что разбиение $\mathcal{T}$ парно регулярно.

Определение 2.1. *Говорят, что допустимая последовательность* $\mathcal{T}$ *парно регулярно с параметром* $\gamma > 1$, *если для каждого* $n \ge 2$ *и* $1 \le i \le n$ *имеем*

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n}{\tau_i^n - \tau_{i-2}^n} \le \gamma,$$

где полагается $\tau_{-1}^n = \tau_0^n = 0$, $\tau_{n+1}^n = \tau_n^n = 1$.

Далее полагается, что разбиение $\mathcal{T}$ парно регулярно с параметром $\gamma > 1$ и $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ соответствующая ей общая система Франклина. При таких предположениях для ряда (1.1) введем обозначения

$$S_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}: m_i \le n} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

и $S^*(\mathbf{x}) = \sup_n |S_n(\mathbf{x})|$. Верна следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть суммы* (2.1) *по мере сходятся к некоторой функции* f *и для некоторой последовательности* $\lambda_k \to \infty$ *выполняется*

$$\lim_{k\to+\infty}(\lambda_k \cdot \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : S^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\}) = 0. \tag{2.2}$$

Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ *имеет место*

$$a_{\mathbf{m}} = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где

$$[f(\mathbf{x})]_\lambda = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{если } |f(\mathbf{x})| \le \lambda, \\ 0, & \text{если } |f(\mathbf{x})| > \lambda. \end{cases}$$

Напомним, что функция f называется A-интегрируемой на $[0;1]^d$, если выполняется

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda \cdot \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : |f(\mathbf{x})| > \lambda\}) = 0 \tag{2.3}$$

и существует

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x} =: (A) \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Поскольку для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ функция $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ ограничена, то при выполнении (2.3) имеет место

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_\lambda f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x}) f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x},$$

если хоть один из этих пределов существует.

Поэтому из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Если суммы* (2.1) *по мере сходятся к некоторой функции* f *и выполняется условие*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda \cdot \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : S^*(\mathbf{x}) > \lambda\}) = 0,$$

то функция f *является* A*-интегрируемой и ряд* (1.1) *является рядом Фурье-Франклина в смысле* A*-интегрирования, т.е. для любого* $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ *имеем*

$$a_{\mathbf{m}} = (A) \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Отметим, что аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана в работе [12]. Однако из теоремы 2.2 не следует результат работы [12], так как там вместо $S^*(\mathbf{x})$ рассматривается $\sigma^*(\mathbf{x})$.

Нам пригодится следующая лемма, доказанная в работе [13].

Лемма 2.1. *Пусть функция G определена на $\Delta = [\alpha_1;\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_d;\beta_d]$, $d \in \mathbb{N}$, и линейная функция по каждой переменной. Тогда если $L = \max_{t\in\Delta} |G(t)|$, то*

$$\operatorname{mes}\left\{ t \in \Delta : |G(t)| \geq \frac{L}{2^d} \right\} \geq \frac{\operatorname{mes}(\Delta)}{3^d}.$$

Введем некоторые обозначения. Положим $\delta_i^n = (\tau_{i-1}^n, \tau_{i+1}^n) \cup \{\tau_i^n\}$, когда $0 \leq i \leq n$. Функции φ_i^n определим следующим образом. Если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$, то $\varphi_i^n(\tau_j^n) = \delta_{ij}$, $j = 0,1,...,n$, и φ_i^n линейна на $[\tau_{j-1}^n, \tau_j^n]$, $j = 1,...,n$, где δ_{ij} – символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Если же $\tau_{i-1}^n = \tau_i^n$, то функции φ_{i-1}^n, φ_i^n единственные кусочно линейные функции с узлами τ_j^n, принимающие значение 0 в узлах, отличных от двойного узла $\tau_{i-1}^n = \tau_i^n$, непрерывные слева в $\tau_{i-1}^n = \tau_i^n$, $\varphi_{i-1}^n(\tau_{i-1}^n) = 1$, $\varphi_{i-1}^n(\tau_{i-1}^n + 0) = 0$, $\varphi_i^n(\tau_i^n) = 0$, $\varphi_i^n(\tau_i^n + 0) = 1$.

Для натурального n положим $\mathbb{N}_n^d = \{0,1,...,n\}^d$. Для вектора $\mathbf{j} = (j_1,...,j_d) \in \mathbb{N}_n^d$ обозначим

$$\Delta_{\mathbf{j}}^n = \delta_{j_1}^n \times \cdots \times \delta_{j_d}^n, \quad \tau_{\mathbf{j}}^n = (\tau_{j_1}^n, ..., \tau_{j_d}^n)$$

и

$$\phi_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{j}}^n(t_1,...,t_d) = \varphi_{j_1}^n(t_1)\cdots\varphi_{j_d}^n(t_d) \tag{2.4}$$

Тогда

$$S_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_n^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}).$$

Нетрудно заметить, что $\sum_{j=0}^{n} \varphi_j^n(x) = 1$, когда $x \in [0;1]$. Следовательно,

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \phi_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{когда} \ \ \mathbf{x} \in [0;1]^d, \quad \text{и} \ \operatorname{supp}\phi_{\mathbf{j}}^n = \overline{\Delta_{\mathbf{j}}^n}.$$

Очевидно, что система функций $\{\phi_{\mathbf{j}}^n\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d}$ образует базис в линейном пространстве

$$\mathbf{S}_n := \left\{ \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_n^d} b_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) : b_{\mathbf{m}} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Поэтому верно следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Если $G \in S_\nu$ и $G \neq 0$, то существует $\mathbf{j} \in \mathbb{N}_n^d$, такое что*

$$(G, \phi_{\mathbf{j}}^n) := \int_{[0;1]^d} G(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{x})d\mathbf{x} \neq 0.$$

Имеем также

$$\int_{[0;1]^d} \phi_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{j}}^n} \phi_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \prod_{i=1}^{d} \int_{\delta_{j_i}^n} \varphi_{j_i}^n(x_i)dx_i = \prod_{i=1}^{d} \frac{\operatorname{mes}(\delta_{j_i}^n)}{2} = \frac{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^n)}{2^d}.$$

Обозначив

$$M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x}) = \frac{2^d}{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{n})}\phi_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

получим другой базис в $\mathbf{S}_n$, с условием

$$\int_{[0,1]^d} M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1. \tag{2.6}$$

Верна следующая лемма.

Лемма 2.3. *Для любых $M_{\mathbf{j}_0}^{n_0}(\mathbf{x})$ и $n > n_0$ существуют числа $\alpha_{\mathbf{j}}$ такие, что*

$$M_{\mathbf{j}_0}^{n_0}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x}),$$

причем

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} = 1, \quad \alpha_{\mathbf{j}} \geq 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathbf{j}} = 0, \quad \text{если} \quad \Delta_{\mathbf{j}}^{n} \not\subset \Delta_{\mathbf{j}_0}^{n_0}.$$

Доказательство. Поскольку $n > n_0$, то $\varphi_{j_i^0}^{n_0} \in S_n$, где $\mathbf{j}_0 = (j_1^0, ..., j_d^0)$. Поэтому существуют β_i^l такие что

$$\varphi_{j_l^0}^{n_0}(x_l) = \sum_i \beta_i^l \varphi_i^n(x_l). \tag{2.7}$$

Из определения функций φ_i^n, нетрудно заметить, что $\beta_i^l \geq 0$ и $\beta_i^l = 0$, если $\delta_i^n \not\subset \delta_{j_l^0}^{n_0}$. Тогда, из (2.4), (2.5) и (2.7) получим

$$M_{\mathbf{j}_0}^{n_0}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x}), \tag{2.8}$$

где $\alpha_{\mathbf{j}} \geq 0$ и $\alpha_{\mathbf{j}} = 0$, если $\Delta_{\mathbf{j}}^{n} \not\subset \Delta_{\mathbf{j}_0}^{n_0}$. Из (2.8) и (2.6) следует, что $\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} = 1$. □

Убедимся, что теорема 2.1 получается из следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть суммы* (2.1) *по мере сходятся к некоторой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_k \to \infty$ выполняется* (2.2). *Тогда для любых m_0, $\mathbf{j}^0 = (j_1^0, ..., j_d^0) \in \mathbb{N}_{m_0}^d$ и $n \geq m_0$ имеет место*

$$(S_n, M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}) = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Действительно, если $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{N}_0^d$, то для $n = \max_i m_i$ имеем, что $f_{\mathbf{m}} \in \mathbf{S}_n$. Следовательно, для некоторых $\alpha_{\mathbf{j}}$ имеет место $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x})$. Тогда, в силу теоремы 2.3, имеем

$$a_{\mathbf{m}} = (S_n, f_{\mathbf{m}}) = \sum_{\mathbf{j}} \alpha_{\mathbf{j}}(S_n, M_{\mathbf{j}}^{n}) = \sum_{\mathbf{j}} \alpha_{\mathbf{j}} \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x})d\mathbf{x} =$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]^d}[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{n}}((x))(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 2.3. Сначала напомним определение максимальной функции $\mathcal{M}(g,\mathbf{x})$ интегрируемой функции g. Полагаем

$$\mathcal{M}(g,\mathbf{x}) = \sup_{Q: Q\ni\mathbf{x}} \frac{1}{\mathrm{mes}(Q)}\int_Q |g(\mathbf{x})|d\mathbf{x},$$

где верхняя грань рассматривается по всем прямоугольникам, с гранями параллельными координатным граням и с центром в точке $\mathbf{x}$. Далее, говоря прямоугольник с центром $\mathbf{x}$, будем подразумевать множество вида $\times_{l=1}^d[x_l-\eta_l, x_l+\eta_l]$. Из известной теоремы Йенссена-Марцинкевича-Зигмунда следует, что (см. [15], §2.3) если $\chi_A(\mathbf{x})$-характеристическая функция множества A, то для множества $B=\{\mathbf{x} : \mathcal{M}(\chi_A,\mathbf{x})>\zeta\}$ выполняется $\mathrm{mes}(B)\leq C_d(\zeta)^{-1}\mathrm{mes}(A)$, где C_d - постоянная, зависящая только от размерности d.

Пусть m_0 - произвольное натуральное число и $\mathbf{j}^0\in\mathbb{N}^d_{m_0}$. Заметим, что если $\mathbf{i}=(i_1,\dots,i_d)$ и $i_{\nu_0}:=\max_\nu i_\nu>m_0$, то $(f_{\mathbf{i}}, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0})=0$. Действительно, поскольку $i_{\nu_0}>m_0$, то $\int_0^1 f_{i_{\nu_0}}(x_{\nu_0})\phi^{m_0}_{j_{\nu_0}}(x_{\nu_0})dx_{\nu_0}=0$, и поэтому

$$(f_{\mathbf{i}}, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}) = \frac{2^d}{\mathrm{mes}(\Delta^{m_0}_{\mathbf{j}^0})}\prod_{\nu=0}^{d}(f_\nu,\phi^{m_0}_{j_\nu})=0.$$

Следовательно, для любого $n\geq m_0$ имеем $(S_n, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0})=(S_{m_0}, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0})$. Поэтому, достаточно доказать, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\int([f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}-S_n(\mathbf{x}))M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)=0. \tag{3.1}$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такое k_0, что для всех $k\geq k_0$ выполнятся

$$C_d\cdot\lambda_k\cdot\mathrm{mes}(E_k)(12\gamma^2)^d<\varepsilon \tag{3.2}$$

и

$$\mathrm{mes}(E_k)<\frac{(12\gamma^2)^{-d}}{C_d}\mathrm{mes}(\Delta^{m_0}_{\mathbf{j}^0}), \tag{3.3}$$

где

$$E_k=\{\mathbf{x}\in[0,1]^d : S^*(\mathbf{x})>\lambda_k\}.$$

Обозначим

$$B_k=\{\mathbf{x}\in[0,1]^d : \mathcal{M}(\chi_{E_k},\mathbf{x})>(12\gamma^2)^{-d}\}. \tag{3.4}$$

Тогда

$$\operatorname{mes}(B_k) \le C_d(12\gamma^2)^d \cdot \operatorname{mes}(E_k). \tag{3.5}$$

Лемма 3.1. *Если $\Delta_{\mathbf{j}}^n \not\subset B_k$, то $|S_n(\mathbf{x})| < 2^d\lambda_k$, когда $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^n$.*

Доказательство. Допустим обратное, что для некоторого $\mathbf{x}^0 \in \Delta_{\mathbf{j}}^n$ имеет место $|S_n(\mathbf{x}^0)| \ge 2^d\lambda_k$. Поскольку функция $S_n(\mathbf{x})$ линейная по каждой переменной x_l, $l = 1, \dots, d$, на $\times_{l=1}^d[\tau_{\nu_l}^n, \tau_{\nu_l+1}^n]$, где ν_l принимают значения $j_l - 1$ и j_l, для $l = 1, \dots, d$, то для некоторого $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_d)$ имеем $\sup\limits_{x\in\Delta_{\mathbf{j}}^n} |S_n(\mathbf{x})| = L_{\mathbf{i}} \ge 2^d\lambda_k$, где $L_{\mathbf{i}} = \lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\tau_{\mathbf{i}}^n \\ \mathbf{x}\in\Delta_{\mathbf{j}}^n}} |S_n(\mathbf{x})|$, а $\tau_{\mathbf{i}}^n \in \overline{\Delta_{\mathbf{j}}^n}$.

В силу леммы 2.1, имеем

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{i}}^n : |S_n(\mathbf{x})| > \lambda_k\} \ge \frac{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^n)}{3^d}. \tag{3.6}$$

Поскольку $\mathcal{T}$ парно регулярно с параметром γ, то для любой точки $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^n$ прямоугольник

$$Q = \times_{l=1}^d[x_l - (\gamma+1)(\tau_{i_l+1}^n - \tau_{i_l-1}^n), x_l + (\gamma+1)(\tau_{i_l+1}^n - \tau_{i_l-1}^n)]$$

содержит $\Delta_{\mathbf{i}}^n$. Очевидно, что $\operatorname{mes}(Q) = 2^d(\gamma+1)^d\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^n)$. Поэтому из (3.6) следует

$$\mathcal{M}(\chi_{E_k}, \mathbf{x}) \ge \frac{1}{2^d(\gamma+1)^d\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^n)} \cdot \frac{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^n)}{3^d} \ge (12\gamma)^{-d}, \quad \mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^n.$$

Следовательно, $\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset B_k$. □

Фиксируем некоторое k, для которого выполняются (3.2), (3.3). Пусть m_1 наименьшее натуральное число со свойством

$$\{\mathbf{i} : \tau_{\mathbf{i}}^{m_1} \in \Delta_{\mathbf{j}_0}^{m_0} \text{ и } \Delta_{\mathbf{i}}^{m_1} \subset B_k\} \ne \emptyset. \tag{3.7}$$

Заметим, что $m_1 > m_0$. Действительно, если бы выполнилось (3.7) для некоторого $m_1 \le m_0$, то выполнилось бы

$$\operatorname{mes}(B_k) \ge \operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^{m_1}) \ge \frac{1}{\gamma^d}\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}_0}^{m_0}).$$

Но, из (3.3), (3.5) имеем, что $\operatorname{mes}(B_k) < \gamma^{-d}\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}_0}^{m_0})$. Полученное противоречие доказывает, что $m_1 > m_0$. Обозначим

$$\mathcal{I}_{m_1} = \{\mathbf{i} : \tau_{\mathbf{i}}^{m_1} \in \Delta_{\mathbf{j}_0}^{m_0}\}, \quad \mathcal{J}_{m_1} = \{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{m_1} : \ \Delta_{\mathbf{i}}^{m_1} \subset B_k\}, \quad \mathcal{K}_{m_1} = \mathcal{I}_{m_1} \setminus \mathcal{J}_{m_1}.$$

Очевидно, что $\mathcal{J}_{m_1} \bigcap \mathcal{K}_{m_1} = \emptyset$ и $\mathcal{J}_{m_1} \bigcup \mathcal{K}_{m_1} = \{\mathbf{i} : \tau_{\mathbf{i}}^{m_1} \in \Delta_{\mathbf{j}^0}^{m_0}\}$. Поэтому, применяя лемму 2.3, найдем представление

$$M_{\mathbf{j}^0}^{m_0} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_{m_1}} \alpha_{\mathbf{i}}^{(m_1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1}, \tag{3.8}$$

где

$$\alpha_{\mathbf{i}}^{(m_1)} \geq 0, \quad \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1)} \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_{m_1}} \alpha_{\mathbf{i}}^{(m_1)} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1)} = 1.$$

Применяя лемму 2.3, для каждой функции $M_{\mathbf{i}}^{m_1}$, $\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}$, найдем представление

$$M_{\mathbf{i}}^{m_1} = \sum_{\mathbf{j} : \Delta_{\mathbf{j}}^{m_1+1} \subset \Delta_{\mathbf{i}}^{m_1}} \alpha_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} M_{\mathbf{j}}^{m_1+1}, \quad \alpha_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} \geq 0. \tag{3.9}$$

Отметим, что для многих $\mathbf{i}$ в сумме (3.9) только один коэффициент $\alpha_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}$ отличен от нуля и равен единице. Обозначим

$$\mathfrak{I}_{m_1+1} = \left\{\mathbf{i} : \tau_{\mathbf{i}}^{m_1+1} \in \cup_{\mathbf{j} \in \mathcal{K}_{m_1}} \Delta_{\mathbf{j}}^{m_1}\right\}, \quad \mathcal{J}_{m_1+1} := \left\{\mathbf{j} \in \mathfrak{I}_{m_1+1} : \Delta_{\mathbf{j}}^{m_1+1} \subset B_k\right\},$$
$$\mathcal{K}_{m_1+1} = \mathfrak{I}_{m_1+1} \setminus \mathcal{J}_{m_1+1}.$$

Подставляя выражения для $M_{\mathbf{i}}^{m_1}$, $\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}$, из (3.9) во вторую сумму из (3.8), и сгруппировав подобные члены, получаем

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_{m_1+1}} \alpha_{\mathbf{i}}^{(m_1+1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1+1} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1+1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1+1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1+1}. \tag{3.10}$$

Из (3.8) и (3.10) имеем

$$M_{\mathbf{j}^0}^{m_0} = \sum_{l=m_1}^{m_1+1} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_l} \alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} M_{\mathbf{i}}^l + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1+1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1+1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1+1}, \tag{3.11}$$

где $\alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} \geq 0$, $l = m_1, m_1+1$, $\beta_{\mathbf{i}}^{(m_1+1)} \geq 0$. По индукции, для всех $n > m_1$ определим

$$\mathfrak{I}_n = \left\{\mathbf{i} : \tau_{\mathbf{i}}^n \in \cup_{\mathbf{j} \in \mathcal{K}_{n-1}} \Delta_{\mathbf{j}}^{n-1}\right\}, \quad \mathcal{J}_n = \left\{\mathbf{j} \in \mathfrak{I}_n : \Delta_{\mathbf{j}}^n \subset B_k\right\} \quad \mathcal{K}_n = \mathfrak{I}_n \setminus \mathcal{J}_n. \tag{3.12}$$

Аналогично (3.11), получим

$$M_{\mathbf{j}^0}^{m_0} = \sum_{l=m_1}^{n} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_l} \alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} M_{\mathbf{i}}^l + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_n} \beta_{\mathbf{i}}^{(n)} M_{\mathbf{i}}^n,$$

где $\alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} \geq 0$, $l = m_1, ..., n$, $\beta_{\mathbf{i}}^{(n)} \geq 0$. Из леммы 3.1 и (3.12) следует, что

$$|S_n(\mathbf{x})| \leq 2^d \lambda_k, \quad \text{когда} \;\; \mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^n, \;\; \mathbf{j} \in \mathcal{K}_n.$$

Очевидно, что для любого n имеет место (см. (3.4))

$$D_n = \bigcup_{l=m_1}^{n} \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_l} \Delta_{\mathbf{i}}^l \subset B_k.$$

С учетом (3.2) и (3.5), получим

$$\lambda_k \cdot \mathrm{mes}(D_n) < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Докажем, что для любого l, $m_1 \le l \le n$, выполняется

$$|S_l(\mathbf{x})| \le 2^d \lambda_k, \quad \text{когда } \mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{i}}^l, \ \mathbf{i} \in \mathcal{J}_l. \tag{3.14}$$

Допустим обратное. Для некоторых $l \in (m_1, ..., n)$, $\mathbf{i} \in \mathcal{J}_l$ и $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{i}}^l$ выполняется $|S_l(\mathbf{x})| > 2^d \lambda_k$. А из этого, как мы заметили при доказательстве леммы 3.1, следует, что существует $\tau_{\mathbf{j}}^l \in \overline{\Delta_{\mathbf{i}}^l}$, такое что

$$\mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^l : |S_l(\mathbf{x})| > \lambda_k\} \ge \frac{\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^l)}{3^d}.$$

Следовательно

$$\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^l \bigcap E_k) \ge \frac{\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^l)}{3^d}. \tag{3.15}$$

Пусть $\mathbf{m}$ такое, что $\Delta_{\mathbf{i}}^l \subset \Delta_{\mathbf{m}}^{l-1}$ и $\mathbf{y}$ любая точка из Δ_m^{l-1}. Из регулярности по парам разбиения $\mathcal{T}$ и $\tau_{\mathbf{j}}^l \in \overline{\Delta_{\mathbf{i}}^l}$ следует, что куб $Q = [\epsilon_1, \eta_1] \times ... \times [\epsilon_d, \eta_d]$ с центром $\mathbf{y}$ и ребрами с длинами $\eta_m - \epsilon_m = (\gamma(\gamma+1)+1)(\tau_{j_m+1}^l - \tau_{j_m-1}^l) < 3\gamma^2(\tau_{j_m+1}^l - \tau_{j_m-1}^l)$ содержит в себе $\Delta_{\mathbf{m}}^{l-1}$. Ясно, что

$$\mathrm{mes}(Q) < (3\gamma^2)^d \mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^l). \tag{3.16}$$

Из (3.15), (3.16) и $\mathbf{y} \in \Delta_{\mathbf{i}}^l \subset Q$ следует, что $\mathcal{M}(\chi_{E_k}, \mathbf{y}) > (9\gamma^2)^{-d}$.

По определению множества B_k (см. (3.4)), имеем $\mathbf{y} \in B_k$. Следовательно, $\Delta_{\mathbf{m}}^{l-1} \subset B_k$. Следовательно $\mathbf{m} \notin \mathcal{K}_{l-1}$. Поэтому $\mathbf{i} \notin \mathcal{J}_l$. Полученное противоречие доказывает (3.14).

Обозначим $H_n = \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_n} \Delta_{\mathbf{i}}^n$. Тогда из (3.12) следует, что

$$|S_n(\mathbf{x})| \le 2^d \cdot \lambda_k, \quad \text{когда } \mathbf{x} \in H_n. \tag{3.17}$$

Обозначим

$$\varrho_1^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=m_1}^{n} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_l} \alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} M_{\mathbf{i}}^l(\mathbf{x}) \ \text{ и } \ \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_n} \beta_{\mathbf{i}}^{(n)} M_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{x}).$$

Поскольку $\alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} \ge 0$, $\beta_{\mathbf{i}}^{(n)} \ge 0$ и $M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x}) = \varrho_1^{(n)}(\mathbf{x}) + \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x})$, то получаем

$$0 \le \varrho_1^{(n)}(\mathbf{x}) \le M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x}) \le \frac{2^d}{\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}^0}^{m_0})} =: C_{m_0, \mathbf{j}^0} \tag{3.18}$$

и

$$0 \le \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x}) \le M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x}) \le C_{m_0, \mathbf{j}^0}. \tag{3.19}$$

Перейдем к оценке

$$\omega_n := \int |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| M_{\mathbf{p}}^{m_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =: \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \xi_3^{(n)}, \tag{3.20}$$

где

$$\xi_1^{(n)} = \int_{E_k} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \varrho_1^{(n)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{3.21}$$

$$\xi_2^{(n)} = \int_{H_n \bigcap E_k} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{3.22}$$

$$\xi_3^{(n)} = \int_{H_n \setminus E_k} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \varrho_3^{(n)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{3.23}$$

Из (3.14) и (3.17) – (3.19) следует, что подынтегральные функции в (3.21) - (3.23) ограничены числом $C_{m_0, J^0}(2^d + 1)\lambda_k$. Поэтому, из (3.13) и (3.2) следуют, что

$$\xi_1^{(n)} < \varepsilon \cdot C_{m_0, J^0, d} \quad \text{и} \quad \xi_2^{(n)} < \varepsilon \cdot C_{m_0, J^0, d}. \tag{3.24}$$

Учитывая, что $f(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}$ для $\mathbf{x} \notin E_k$ и последовательность $S_n(\mathbf{x})$ по мере сходится к $f(\mathbf{x})$, получим, что последовательность $|[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \chi_{H_n \setminus E_k}(\mathbf{x}) \varrho_3^{(n)}(\mathbf{x})$ по мере сходится к нулю и ограничена числом $C_{m_0, J^0}(2^d + 1)\lambda_k$. Следовательно

$$\lim_{n \to \infty} \xi_3^{(n)} = 0. \tag{3.25}$$

Из (3.20) – (3.25) следует, что при достаточно больших n имеем $\omega_n < 3\varepsilon \cdot C_{m_0, J^0, d}$. Отсюда следует (3.1). Теорема 2.3 доказана.

Abstract. The paper considers the general Franklin system corresponding to a strongly regular by couples partition of the segment $[0; 1]$. For series by this system, we prove uniqueness theorems and obtain restoration formulas for coefficients, provided that the series converge in measure and satisfy some necessary condition.

Список литературы

[1] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math., **25**, 129 – 143 (1997).
[2] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), **374**, 1 – 59 (1998).
[3] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia Math., **164**, no. 2, 161 – 204 (2004).
[4] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "General Franklin system as bases in $H^1[0,1]$", Studia Math., **167**, no. 3, 259 – 292 (2005).
[5] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Annalen, **100**, 522 – 529 (1928).
[6] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., **23**, 141 – 157 (1963).
[7] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., **27**, 289 – 323 (1966).

[8] Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. Заметки. 46, no. 2, 280 – 323 (1989).

[9] М. П. Погосян, "О единственности рядов по общей системе Франклина", Изв. НАН Армении, сер. матем., 35, no. 4, 75 – 81 (2000).

[10] Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, 59, no. 4, 521 – 545 (1996).

[11] Г. Г. Геворкян, "Теоремы единственности для рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, 98, no. 5, 786 – 789 (2015).

[12] Г. Г. Геворкян, М. П. Погосян, "О восстановлении коэффициентов ряда Франклина с "хорошей" мажорантой частичных сумм", Изв. НАН Армении, сер. матем., 52, no. 5, 26 – 35 (2017).

[13] Г. Г. Геворкян, "Теорема единственности для кратных рядов Франклина", Мат. Заметки, 101, no. 2, 199 – 210 (2017).

[14] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On the trigonometric conjugate to the general Franklin system", Studia Math., 193, no. 3, 203 – 239 (2009).

[15] М. Гусман, Дифференцирование интегралов в R^n, М., Изд-во Мир (1978).

Поступила 6 декабря 2017

Известия НАН Армении. Математика. том 53, п. 4, 2018, стр. 15 – 30

Посвящена 100-летию со дня рождения выдающегося армянского математика Мхитара Мкртичевича Джрбашяна - основателя Института математики и Известий НАН Армении, Математика в Национальной Академии наук Армении

О ПРОСТРАНСТВАХ A^2_ω ТИПА ДИРИХЛЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. М. ДЖРБАШЯН, ДЖ. Х. ПЕХЕНДИНО

University of Antioquia, Medellin, Colombia[1]
E-mails: *armen_jerbashian@yahoo.com, jimmypejendino@hotmail.com*

Аннотация. В статье сначала доказаны некоторые расширения результатов первого из авторов, относящихся к гильбертовым пространствам $A^2_{\omega,0}$ функций голоморфных и в полуплоскости. Затем введены некоторые новые гильбертовы пространства A^2_ω типа Дирихле, содержащиеся в пространстве Харди H^2 в полуплоскости. В пространсвах $A^2_\omega \subset H^2$ установлен ряд результатов о представлениях, граничных свойствах, изометрии, интерполяции, биортогональных системах и базисах.

MSC2010 number: 30H99, 30E05.

Ключевые слова: пространство Дирихле; граничные значевия; биортогональность; интерполяция.

1. Введение

Данная статья посвящена исследованию некоторых гильбертовых пространств A^2_ω типа Дирихле функций голоморфных в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, которые подобны случаю $p = 2$, $\gamma = 0$ рассмотренному в [1, 2] более широких пространств $A^p_{\omega,\gamma}$. Однако, новые пространства вложены в пространство H^2 Харди в G^+. Сначала доказаны некоторые расширения утверждений теорем 4, 5 и 6 из [2], относящихся к ортогональной проекции и изометрии. Затем введены пространства $A^2_\omega \subset H^2$ условием, что производная функции принадлежит более широкому пространству $A^2_{\omega,0}$, и в пространстве $A^2_\omega \subset H^2$ доказан ряд результатов о представлениях, граничных свойствах, изометрии с H^2, интерполяции, биортогональных системах и базисах. Представляющее ядро рассматриваемых пространств A^2_ω, которым также производятся аппроксимации, в

[1]Работа выполнена в рамках исследовательского проекта CIEN Project 2016-11126 Университета Антиокии.

некотором смысле лучше ядра Коши и рациональных функций [3], так как его сингулярность на вещественной оси интегрируема.

Результаты статьи являются полуплоскостными аналогами результатов работ [4, 5], относящихся к гильбертовым пространствам $A^2_\omega \subset H^2$ типа Дирихле в единичном круге. В частности, здесь аппарат рядов Фурье-Тейлора заменен аппаратом преобразований Фурье-Лапласа.

2. Расширения результатов о пространствах A^2_{ω}

В этом параграфе даны некоторые расширения утверждений теорем 4, 5 и 6 из [2]. Эти утверждения расширены на некоторые пространства $A^2_{\omega,0}$, в которых рост функций ограничен более сильным условием в ∞, что необходимо для доказательства дальнейших результатов статьи. Начнем с некоторых определений из [1, 2].

Определение 2.1. *Класс $A^p_{\omega,\gamma}$ $(0 < p < +\infty,\ -\infty < \gamma \leq 2)$ - множество голоморфных в G^+ функций f, удовлетворяющих при достаточно малом $\rho > 0$ и $\beta = \arcsin\frac{\rho}{R} = \frac{\varepsilon}{2}$ -- к условию типа Неванлинны*

$$\varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_\beta^{\pi-\beta} \log^+|f(Re^{i\vartheta})| \left(\sin\frac{\pi(\vartheta-\beta)}{\pi-2\beta}\right)^{1-\pi/\kappa} d\vartheta = 0, \tag{2.1}$$

а также условию

$$\|f\|^p_{p,\omega,\gamma} := \iint_{G^+} |f(z)|^p \frac{d\mu_\omega(z)}{(1+|z|)^\gamma} < +\infty, \tag{2.2}$$

где $d\mu_\omega(x+iy) = dx\,d\omega(2y)$ и предполагается, что функция ω из класса Ω_α $(-1 \leq \alpha < +\infty)$, т. е. задана в $[0,+\infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

(i) *ω не убывает на $[0,+\infty)$, $\omega(+0) = 0$ и существует строго убывающая последовательность $\delta_k \downarrow 0$ такая, что $\omega(\delta_k)$ также строго убывает;*

(ii) *$\omega(t) \asymp t^{1+\alpha}$ при некотором $\Delta_0 \geq 0$ и любом $\Delta_0 \leq t < +\infty$*

($f(t) \asymp g(t)$ означает, что $m_1 f(t) \leq g(t) \leq m_2 f(t)$ с некоторыми постоянными $m_1, m_2 > 0$). Лебегово пространство $L^p_{\omega,\gamma}$ - множество тех функций в G^+, которые удовлетворяют только условию (2.2).

Отметим, что $A^p_{\omega,\gamma}$ $(1 \leq p < +\infty,\ -\infty < \gamma < 1,\ \omega \in \Omega_\alpha,\ \alpha \geq -1)$ является банаховым пространством с нормой (2.2), как это доказано в предложении 1.2 из [1], и превращается в гильбертово пространство при $p = 2$. В дальнейшем будем также использовать ядро типа Коши М. М. Джрбашяна

$$C_\omega(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt}\frac{dt}{I_\omega(t)}, \quad I_\omega(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx}d\omega(x) = t\int_0^{+\infty} e^{-tx}\omega(x)dx$$

(см. раздел 2 в [2]), которое при любом $\omega \in \Omega_\alpha$ $(-1 \leq \alpha < +\infty)$ является голоморфной в G^+ функцией и переходит в $2+\alpha$-степень обычного ядра Коши при $\omega(t) = t^{1+\alpha}$ $(\alpha > -1)$. Отметим, что по лемме 3.1 из [1] *при любых числах* $\alpha > -1$, $\beta \in ([\alpha]-1, \alpha)$ *и* $\rho > 0$ *существует постоянная* $M_{\rho,\beta} > 0$ *такая, что*

$$|C_\omega(z)| \leq \frac{M_{\rho,\beta}}{|z|^{2+\beta}}, \quad z \in G^+_\rho := \{z : \operatorname{Im} z > \rho\}. \tag{2.3}$$

Кроме того, *если* $\widetilde{\omega}$ *- квадрат Вольтерра функции* ω, *т. е.* $\widetilde{\omega}(0) = 0$ *и*

$$\widetilde{\omega}(x) = \int_0^x \omega(x-t)d\omega(t), \quad 0 < x < +\infty, \tag{2.4}$$

то $\widetilde{\omega} \in \Omega_{1+3\alpha}$ *и* $I^2_\omega(x) = I_{\widetilde{\omega}}(x)$ $(0 < x < +\infty)$ в силу леммы 4 из [2].

Теорема 2.1. *Если* $\omega \in \Omega_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ *и* $\omega(0) = 0$, *то*

1°. *Ортогональная проекция* $L^2_{\omega,0}$ *на* $A^2_{\omega,0}$ *может быть записана в виде*

$$P_\omega f(z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{G^+} f(w)C_\omega(z-\overline{w})d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+. \tag{2.5}$$

2°. *Любая функция* $f \in A^2_{\omega,0}$ *допускает следующие представления:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{G^+} f(w)C_\omega(z-w)d\mu_\omega(w) \\ &= \frac{1}{\pi}\iint_{G^+} \{\operatorname{Re} f(w)\}C_\omega(z-\overline{w})d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть $f \in L^2_{\omega,0}$. Тогда, применяя оценку (2.3) с $\beta = \alpha - \varepsilon$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$, а также неравенство Гельдера можно проверить, что при любом $f \in L^2_{\omega,0}$ интеграл (2.5) абсолютно и равномерно сходится внутри G^+ и тем самым представляет там голоморфную функцию. Кроме того, пользуясь оценкой (2.3) и неравенством Гельдера можно доказать, что при любом фиксированном $\rho > 0$ существует постоянная $M_{\rho,\varepsilon} > 0$, зависящая только от ρ и ε такая, что $\left|P_\omega f(Re^{i\vartheta})\right| \leq M_{\rho,\varepsilon}R^{\frac{3}{2}+\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}$, $\vartheta \in \left(\arcsin\frac{\rho}{R}, \pi - \arcsin\frac{\rho}{R}\right)$, если R достаточно велико. Тем самым, функция $P_\omega f$ удовлетворяет условию (2.1), и остается только доказать, что P_ω является ограниченным оператором, переводящим L^2_ω в $A^2_{\omega,0}$ и тождественным на $A^2_{\omega,0}$. С этой целью заметим, что при любом $f \in L^2_{\omega,0}$

и любом фиксированном $z = x + iy \in G^+$

$$(2.7)\qquad P_\omega f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(w)du\int_0^{+\infty} e^{it(z-\overline{w})}\frac{dt}{I_\omega(t)}\right)d\omega(2v)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\lim_{R\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{e^{-tv}}{I_\omega(t)}dt\int_{-R}^{R} e^{-itu}f(w)du\right)d\omega(2v)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} d\omega(2v)\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{e^{-tv}}{I_\omega(t)}\widehat{f}_v(t)dt \quad (w = u + iv),$$

где

$$\widehat{f}_v(t) = \underset{R\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-R}^{R} e^{-itu}f(u+iv)du$$

- преобразование Фурье функции f на уровне iv, т. е. функции $f(u+iv) \in L^2(-\infty,+\infty)$. Отметим, что равенства в (2.7) верны, так как по теореме Планшереля

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tv}}{I_\omega(t)}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-itu}f(w)du - \widehat{f}_v(t)\right|dt$$

$$\le \left[C_\omega(2i(y+v))\right]^{1/2}\left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-itu}f(w)du - \widehat{f}_v(t)\right\|_{L^2(-\infty,+\infty)} \to 0$$

при $R \to +\infty$. Из (2.7) заключаем, что при любом $z \in G^+$

$$(2.8)\qquad P_\omega f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_\omega(t)}}dt$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{I_\omega(t)}}\int_0^{+\infty} e^{-tv}\widehat{f}_v(t)d\omega(2v).$$

Далее, замена порядка интегрирования, преобразующая (2.7) в (2.8) справедлива, так как ввиду (2.3) для фиксированного $y > 0$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} d\omega(2v)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t(y+v)}}{I_\omega(t)}|\widehat{f}_v(t)|dt$$

$$\le \int_0^{+\infty}\left[C_\omega(2i(y+v))\right]^{1/2}\|\widehat{f}_v(t)\|_{L^2(0,+\infty)}d\omega(2v)$$

$$\le M\|f\|_{L^2_{\omega,0}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{d\omega(2v)}{(y+v)^{1+2\alpha-\varepsilon}}\right)^{1/2} < +\infty.$$

Используя неравенство Гельдера и теорему Планшереля, из (2.8) получаем

$$(2.9)\qquad \|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \le \|f\|_{L^2_{\omega,0}}.$$

и в силу теоремы Пэли-Винера (см. [6], стр. 130-131) из (2.8) следует, что

$$\|P_\omega f\|^2_{L^2_{\omega,0}} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} d\omega(2y)\int_0^{+\infty} e^{-2yt}\frac{|\Phi(t)|^2}{I_\omega(t)}dt = \|\Phi\|^2_{L^2(0,+\infty)}.$$

Таким образом $\|P_\omega f\|_{L^2_{\omega,0}} \le \|f\|_{L^2_{\omega,0}}$, т. е. P_ω переводит $L^2_{\omega,0}$ в $A^2_{\omega,0}$ и $\|P_\omega\| \le 1$.

Пусть теперь $f \in A^2_{\omega,0}$. Тогда $f(z+i\rho) \in H^2$ при любом $\rho > 0$ ввиду результатов главы 7 в [7] (см. также раздел 1.2 в [1]). Поэтому, в силу теоремы Пэли-Винера

$$f(z+i\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{itz}\widehat{f}_\rho(t)dt, \quad z \in G^+,$$

где $\widehat{f}_\rho$ - преобразование Фурье функции f на уровне $i\rho$, и

$$\|f(t+i\rho)\|^2_{L^2(-\infty,+\infty)} = \|f(z+i\rho)\|^2_{H^2} = \|\widehat{f}_\rho\|^2_{L^2(0,+\infty)}.$$

Далее, при любом $v > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u+iv)C_\omega(z-\overline{w})du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{i(z+iv)t}\widehat{f}_v(t)\frac{dt}{tI_\omega(t)},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} (2.10) \qquad P_\omega f(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{dt}{tI_\omega(t)}\int_0^{+\infty} e^{-2tv}\{e^{tv}\widehat{f}_v(t)\}d\omega(2v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{i(z-iv)t}\widehat{f}_v(t)dt = f(z), \quad z \in G^+_v. \end{aligned}$$

Таким образом, последняя формула верна во всей полуплоскости G^+, и оператор P_ω тождественнен на $A^2_{\omega,0}$.

2°. Первая строка в (2.6) очевидна в силу доказанного утверждения 1°. Для доказательства второго представления в (2.6) предположим, что $f \in A^2_{\omega,0}$. Тогда, как было показано выше, $f(z+i\rho) \in H^2$ при любом $\rho > 0$. Поэтому, как хорошо известно (см., [6], гл. VI(E)),

$$\widehat{f}_\rho(t) = \underset{R\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-itu}f(u+i\rho)du = 0 \quad \text{для п.в.} \quad t < 0.$$

Тем самым для п.в. $t > 0$

$$\widehat{f}_\rho(t) = \widehat{f}_\rho(t) + \overline{\widehat{f}_\rho(-t)} = \underset{R\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-itu}\{\mathrm{Re}\ f(u+i\rho)\}du,$$

и как в (2.10) заключаем, что при любых $v > 0$ и $z \in G_v^+$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\iint_{G^+}\{\mathrm{Re}\, f(w)\}C_\omega(z-w)d\mu_\omega(w) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{dt}{I_\omega(t)}\int_0^{+\infty} e^{-2tv}\{e^{tv}[\widetilde{f}_v(t)+\overline{\widetilde{f}_v(-t)}]\}d\omega(2v) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{i(z-iv)t}\widetilde{f}_v(t)dt = f(z).
\end{aligned}
$$

Остается заметить, что это представление справедливо во всей полуплоскости G^+. □

Замечание 2.1. *В случае степенных функций* $\omega(t) = t^{1+\alpha}$ $(\alpha > -1)$ *формула* (2.6) *переходит в представления, найденные в* [8, 9] *(см. также в* [10]*). Для абсолютно непрерывных мер* $d\omega$ *и пространств, определенных в несколько иной форме, и на многомерных трубчатых областях, первая строка формулы* (2.6) *была доказана в* [11, 12].

Следующая теорема является аналогом теоремы Пэли-Винера для пространств $A^2_{\omega,0}$.

Теорема 2.2. *Если* $\omega \in \Omega_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ *и* $\omega(0) = 0$, *то пространство* $A^2_{\omega,0}$ *совпадает со множеством функций представимых в виде*

$$
f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_\omega(t)}}dt, \quad z \in G^+, \quad \Phi(t) \in L^2(0,+\infty), \tag{2.11}
$$

где $\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} = \|f\|_{A^2_{\omega,0}}$, *и*

$$
\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{I_\omega(t)}}\int_0^{+\infty} e^{-tv}\widetilde{f}_v(t)d\omega(2v), \tag{2.12}
$$

где $\widetilde{f}_v$ *- преобразование Фурье функции* f *на уровне* iv.

Доказательство. Пусть $f \in A^2_{\omega,0}$. Тогда формулы (2.11) и (2.12) следуют из (2.8), а из (2.9) следует, что $\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \le \|f\|_{A^2_{\omega,0}}$, поскольку $P_\omega = I$ на пространстве $A^2_{\omega,0} \subset L^2_{\omega,0}$. Обратно, если функция f представима в виде (2.11)-(2.12), то

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{A^2_{\omega,0}} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} d\omega(2y)\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2dx\\ &= \int_0^{+\infty}\left\|\frac{e^{-yt}\Phi(t)}{\sqrt{L_\omega(t)}}\right\|^2_{L^2(0,+\infty)} d\omega(2y)\\ &= \int_0^{+\infty} d\omega(2y)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2yt}}{L_\omega(t)}|\Phi(t)|^2dt = \|\Phi\|^2_{L^2(0,+\infty)}.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что если функция представима в виде (2.11), то она ограничена в любой полуплоскости G^+_ρ $(\rho > 0)$, и, тем самым, справедливо (2.1). □

Замечание 2.2. *Для несколько иных пространств на трубчатых областях $\mathbb{C}^n$, с абсолютно непрерывными мерами $d\omega$, аналог теоремы 2.2 доказан в* [11].

Следующее утверждение справедливо в силу замечания 5 из [2].

Замечание 2.3. *Пусть $S = \bigcup_{\alpha=-1}^{+\infty}\Omega_\alpha$. Тогда объединение $\bigcup_{\omega\in S} A^2_{\omega,0}$ совпадает со множеством всех функций представимых в виде*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{itz}\Psi(t)dt, \quad z \in G^+,$$

где $e^{-\varepsilon t}\Psi(t) \in L^2(0,+\infty)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Теорема 2.3. *Если $\omega \in \Omega_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$, $\omega(0) = 0$, а $\tilde{\omega}$ является квадратом Вольтерра функции ω (2.4), то пространство $A^2_{\tilde{\omega},0}$ совпадает со множеством всех функций представимых в G^+ в виде*

(2.13) $$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t)\varphi(t)dt, \quad \text{где} \quad \varphi \in L^2(-\infty,+\infty).$$

При любом $f \in A^2_{\tilde{\omega},0}$ функция

$$\varphi_0(z) = L_\omega f(z) := \int_0^{+\infty} f(z+i\sigma)d\omega(\sigma)$$

является единственной функцией из пространства Харди H^2 на G^+, с которой справедливо представление (2.13). Кроме того, $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{A^2_{\tilde{\omega},0}}$ и $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ при любой функции $\varphi \in L^2(-\infty,+\infty)$, обеспечивающей представление (2.13). Далее, оператор L_ω является изометрией $A^2_{\tilde{\omega},0} \to H^2$, а интеграл (2.13) определяет $(L_\omega)^{-1}$ на H^2.

Доказательство. В силу леммы 5 из [2]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)C_\omega(z-t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{itz}\frac{\hat{\varphi}(t)}{I_\omega(t)}\,dt,\quad z\in G^+, \tag{2.14}$$

где интегралы равномерно сходятся в G^+ и представляют голоморфную в G^+ функцию f такую, что

$$L_\omega f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{itz}\hat{\varphi}(t)\,dt,\quad z\in G^+. \tag{2.15}$$

Тем самым, в силу теоремы 2.2 пространство $A^2_{\omega,0}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде (2.13). Далее, если $f\in A^2_{\omega,0}$, то $L_\omega f\in H^2$, и очевидно, что это единственная функция из H^2, для которой верны формулы (2.13) и (2.15). Кроме того, $\|L_\omega f\|_{H^2}=\|f\|_{A^2_{\omega,0}}$ в силу теоремы 2.2, и если другая функция $\varphi\in L^2(-\infty,+\infty)$ обеспечивает представление (2.13), то преобразование Фурье функции $\varphi-L_\omega f$ равняется нулю вне $(0,+\infty)$, т. е. $\varphi-L_\omega f\perp H^2$. Наконец, остается заметить, что L_ω является взаимооднозначным отображением $A^2_{\omega,0}\to H^2$ и интеграл (2.13) задает $(L_\omega)^{-1}$, поскольку операторы L_ω и $(L_\omega)^{-1}$ действуют как умножение и деление на I_ω подынтегральных функций в (2.14) и (2.15). $\square$

3. Определение пространств типа Дирихле A^2_ω. Представления, изометрия, граничное свойство

Теперь введем некоторые пространства A^2_ω типа Дирихле, содержащиеся в пространстве Харди H^2 в G^+, установим представления, найдем явную форму изометрии с H^2 и установим некоторые граничные свойства функций из A^2_ω.

Определение 3.1. *Полагая, что функция* $\omega_0\in\Omega_\alpha$ $(0\le\alpha<+\infty)$ *непрерывно дифференцируема на* $(0,+\infty)$ *и такова, что* $\omega_0(x)\ge Mx$ $(0<x<+\infty)$ *с некоторой постоянной* $M>0$, *положим*

$$\omega(x)=\omega_0'(x),\quad \omega_1(x)=\int_{+0}^{x}\omega_0(x-t)\,d\omega_0(t),\quad 0\le x<+\infty,$$

и определим A^2_ω *как множество функций* f *голоморфных в* G^+, *для которых*

$$f'\in A^2_{\omega_1,0}\quad \text{и}\quad \lim_{y\to+\infty}f(x+iy)=0,\quad -\infty<x<+\infty. \tag{3.1}$$

Также, положим $\|f\|_{A^2_\omega}=\|f'\|_{A^2_{\omega_1,0}}$.

Отметим, что это определение корректно, так как $\omega_1\in\Omega_{1+2\alpha}$ в силу леммы 4 из [2]. Кроме того, при любом $0<x<+\infty$

$$[I_{\omega_0}(x)]^2=\left(\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,d\omega_0(t)\right)^2=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,d\omega_1(t):=I_{\omega_1}(x),$$

и, как нетрудно убедиться,

$$\omega_1'(x) = \int_0^x \omega_0'(x-t)\omega_0'(t)dt, \quad 0 < x < +\infty.$$

Всюду ниже будем полагать, что функции ω, ω_0 и ω_1 таковы как сказано выше.

Далее, нетрудно заметить, что лемма 4.2 из [13] верна также при значении $\alpha = 0$, и поэтому, если функция $\omega = \omega_0'$ положительна, не возрастает на $(0, +\infty)$ и такова, что

$$\int_0^1 \{t\omega_0'(t)\}^{-1}dt < +\infty,$$

то для любого $z = x + iy \in G^+$

$$C_\omega(z) = L_\gamma\left(\frac{1}{-iz}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{-i(z+it)}d\gamma(t),$$

где γ является неубывающей функцией на $(0, +\infty)$, такой что $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(t) \leq [\omega_0'(t)]^{-1}$, $0 < t < +\infty$. Тем самым, функция C_ω голоморфна вне отрицательной мнимой полуоси, и ее сингулярность в начале координат интегрируема.

Первое из представлений следующей теоремы является аналогом теоремы Пэли-Винера (см. [14], теорему 11.9 на стр. 186), а второе в явном виде задает изометрию между A^2_ω и пространством Харди H^2 в полуплоскости.

Теорема 3.1. 1°. *A^2_ω является гильбертовым пространством, $A^2_\omega \subset H^2$ и A^2_ω совпадает с множеством функций представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{\Phi(t)}{tI_{\omega_0}(t)}dt, \quad z \in G^+, \tag{3.2}$$

где $\Phi(t) \in L^2(0, +\infty)$, и $\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} = \|f\|_{A^2_\omega}$.

2°. *A^2_ω совпадает с множеством всех функций представимых в G^+ в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t)\varphi(t)dt, \quad \varphi(z) \in H^2, \tag{3.3}$$

где $\|\varphi\|_{H^2} = \|f\|_{A^2_\omega}$. Формула (3.3) задает изометрию $H^2 \to A^2_\omega$, обращением которой является

$$\varphi(z) = L_\omega f(z) := \int_0^{+\infty} f'(z+it)\omega(t)dt, \quad z \in G^+. \tag{3.4}$$

Доказательство. 1°. Начнем с доказательства представления (3.2). С этой целью заметим, что в силу теоремы 2.2 класс $A^2_{\omega_1,0}$ совпадает с множеством всех функций F вида

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_{\omega_1}(t)}}dt, \quad z \in G^+,$$

где $\Phi(t) \in L^2(0,+\infty)$, и $\|F\|_{A^2_{\omega_1,0}} = \|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)}$. Далее, заметим, что ввиду (3.1) для любой функции $f \in A^2_{\omega}$ и любого $z \in G^+$

$$f(z) = -i \int_y^{+\infty} f'(x+i\sigma)d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int_y^{+\infty} d\sigma \int_0^{+\infty} e^{i(x+i\sigma)t} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_{\omega_1}(t)}} dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int_0^{+\infty} e^{ixt} \frac{\Phi(t)}{I_{\omega_1}(t)} dt \int_y^{+\infty} e^{-\sigma t} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{\Phi(t)}{t I_{\omega_1}(t)} dt,$$

где $\Phi(t) \in L^2(0,+\infty)$ и $\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} = \|f'\|_{A^2_{\omega_1,0}} = \|f\|_{A^2_{\omega}}$. Итак, формула (3.2) доказана. Далее, легко проверить, что $tI_{\omega_1}(t) \geq M > 0$ $(0 < t < +\infty)$, и поэтому $\|\Phi(t)/\{tI_{\omega_1}(t)\}\|_{L^2(0,+\infty)} \leq M^{-1}\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} < +\infty$. Следовательно, получаем

$$\|f\|_{A^2_{\omega}} = \|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \geq M \|\Phi(t)/\{tI_{\omega_1}(t)\}\|_{L^2(0,+\infty)},$$

где $\|\Phi(t)/\{tI_{\omega_1}(t)\}\|_{L^2(0,+\infty)} = \|f\|_{H^2}$ по теореме Пэли-Винера. Таким образом,

$$\|f\|_{H^2} \leq M^{-1}\|f\|_{A^2_{\omega}} < +\infty, \quad \text{т. е.} \quad A^2_{\omega} \subset H^2. \tag{3.5}$$

Обратно, если f представима в виде (3.2), то при любом вещественном x

$$|f(x+iy)| \leq M_1^{-1}\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \left\{\int_0^{+\infty} e^{-2yt} dt\right\}^{1/2}$$
$$= M_1^{-1}(2y)^{-1/2}\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \to 0 \quad \text{при} \quad y \to +\infty.$$

Итак, соотношение (3.1) справедливо. Кроме того, очевидно что

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_{\omega_1}(t)}} dt, \quad z \in G^+,$$

и поэтому $f' \in A^2_{\omega_1,0}$ по теореме 2.2. Для завершения доказательства утверждения 1° докажем полноту пространства A^2_{ω}. Действительно, если имеется последовательность Коши $\{f_n\}_1^{\infty} \subset A^2_{\omega}$, то производные $\{f'_n\}_1^{\infty} \subset A^2_{\omega_1,0}$ образуют последовательность Коши в $A^2_{\omega_1,0}$ и их предел F_0 принадлежит $A^2_{\omega_1,0}$, так как $A^2_{\omega_1,0}$ является гильбертовым пространством. Отметим, что последовательность f'_n равномерно сходится к F_0 внутри G^+. С другой стороны, ввиду оценки нормы (3.5) $\{f_n\}_1^{\infty}$ является последовательностью Коши в H^2, и тем самым имеет предел $f_0 \in H^2$ к которому f_n стремится равномерно внутри G^+, и для f_0 выполнено соотношение (3.1). Таким образом, $F_0 \equiv f'_0 \in A^2_{\omega_1,0}$, и $f'_n \to f'_0$ в норме пространства $A^2_{\omega_1,0}$, т. е. $f_n \to f_0$ в норме пространства A^2_{ω}, $f_0 \in A^2_{\omega}$ и f_0 удовлетворяет (3.1).

2°. В силу теоремы 2.3 пространство $A^2_{\omega_1,0}$ совпадает с множеством всех функций F вида

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega_0}(z-t)\varphi(t)dt, \quad z \in G^+, \tag{3.6}$$

где $\varphi = L_\omega F \in H^2$ в G^+, а $\|\varphi\|_{H^2} = \|F\|_{A^2_{\omega_1,0}}$. Если $f \in A^2_\omega$, то $f' := F \in A^2_{\omega_1,0}$, и приходим к формуле (3.4) и равенствам $\|\varphi\|_{H^2} = \|f'\|_{A^2_{\omega_1,0}} = \|f\|_{A^2_\omega}$. Для доказательства представления (3.3) заметим, что при любом $y > 0$

$$\int_y^{+\infty} C_{\omega_0}(x+i\sigma)d\sigma = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{L_{\omega_0}(t)} \int_y^{+\infty} e^{i(x+i\sigma)t}d\sigma = C_\omega(z),$$

где интегралы абсолютно и равномерно сходятся по $z = x + iy$ внутри G^+. Поэтому, интегрируя представление (3.6) функции f' получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_y^{+\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega_0}(x+i\sigma-t)\varphi(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t)\varphi(t)dt, \quad z = x+iy \in G^+, \end{aligned}$$

где интегралы абсолютно и равномерно сходятся внутри G^+ в силу (2.3) с любым $\beta \in (|\alpha| - 1, \alpha)$. Обратно, если справедливо представление (3.3), то для любого $z \in G^+$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t)\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_y^{+\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega_0}(x+i\sigma-t)\varphi(t)dt,$$

и, тем самым, f' обладает преставлением (3.6), из которого следует, что $f' \in A^2_{\omega_1,0}$. Поэтому, используя неравенство Гельдера и (2.3) получаем, что при любом $z = x + iy \in G^+_\rho$ и $\rho > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |f(x+iy)| &\le \|\varphi\|_{H^2}\int_y^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|C_{\omega_0}(x+i\sigma-t)|^2dt\right\}^{1/2} d\sigma \\ &\le \frac{M_{\rho,\beta}}{\sqrt{2\pi}}\int_y^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+\sigma)^{4+2\beta}}\right\}^{1/2} d\sigma \\ &= \frac{M_{\rho,\beta}}{\sqrt{2\pi}}2^{1+\beta/2}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^{4+2\beta}}\right\}^{1/2}\int_y^{+\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^{3/2+\beta}} < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо соотношение (3.1) и $f \in A^2_\omega$. □

Теперь покажем, что функции пространств типа Дирихле A^2_ω обладают некасательными граничными значениями вне некоторых исключительных множеств нулевой омега-емкости на вещественной оси. Отметим, что отмеченная омега-емкость введена в [15] как обобщение рассмотренного в [7] полуплоскостного аналога общеизвестной альфа-емкости Фростмана. Мы же используем приведенное ниже, несколько модифицированное, но эквивалентное введенному в [15], определение, а также некоторые результаты из [15].

Определение 3.2. *Пусть $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ - измеримое по Борелю множество. Тогда E положительной ω-емкости (или $C_\omega(E) > 0$), если для любого $R > 0$ существует конечная борелева мера $\sigma \geq 0$ с носителем $E \cap (-R, R)$ ($\sigma \prec E \cap (-R, R)$) такая, что*

$$S_R := \sup_{z \in G^+} \int_{-R}^{R} |C_\omega(z-t)| d\sigma(t) < +\infty.$$

Если же нет такой меры, т. е. $S_R = +\infty$ при некотором $R > 0$ и любой конечной, неотрицательной борелевой мере $\sigma \prec E \cap (-R, R)$, то множество E обладает нулевой ω-емкостью (или $C_\omega(E) = 0$).

Предложение 3.1. *Поскольку функции $f \in A^2_\omega$ представимы в виде (3.3), то в силу леммы 4.4 из [15] эти функции имеют некасательные граничные значения $f(x)$ во всех точках $-\infty < x < +\infty$, кроме множества нулевой ω-емкости.*

4. Биортогональные системы, базисы и интерполяция

Явная форма (3.3) изометрии между пространством Харди H^2 в G^+ и пространствами A^2_ω позволяет перевести любой результат аддитивного характера в пространстве H^2 в подобный же результат в пространствах A^2_ω. В частности, при $p = 2$ результаты [16, 17] о биортогональных системах и интерполяции в H^p $(1 < p < +\infty)$ индуцируют такие же утверждения в A^2_ω. Почти все эти утверждения даны в нижеследующих предложениях, доказательства которых очевидны и поэтому не приводятся.

Для простоты будем рассматривать случай, когда узлы интерполяции первого порядка, т. е. всюду ниже будем полагать, что $\{z_k\}_1^\infty$ - последовательность *попарно различных* точек в G^+. Принято говорить, что $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ равномерно разделена, т. е.

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{j=1,\, j \neq k} \left| \frac{z_j - z_k}{z_j - \bar{z}_k} \right| = \delta > 0. \tag{4.1}$$

Отметим, что выполнение этого условия влечет выполнение условия Бляшко

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_k}{1 + |z_k|^2} < +\infty, \tag{4.2}$$

необходимого и достаточного для сходимости произведения Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z - \overline{z_k}} \frac{|1 + z_k^2|}{1 + z_k^2}$$

с нулями $\{z_k\}_1^\infty$ к функции голоморфной всюду, кроме замыкания множества $\{\overline{z_k}\}_1^\infty$. Неравенство (3.21) из [16] переходит в неравенство следующего предложения.

Предложение 4.1. *Если $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, то для любой функции $f \in A^2_\omega$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k \left|L_\omega f(z_k)\right|^2 \le C \|f\|^2_{A^2_\omega},$$

где $C > 0$ - постоянная, не зависящая от f.

Прежде чем привести ряд предложений об аппроксимации и интерполяции в A^2_ω, отметим, что функции

$$r_k(z) = \frac{1}{z - \overline{z_k}} \quad \text{и} \quad \Omega_k(z) = \frac{B(z)}{z - z_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

принадлежат H^2 в G^+. Тем самым, функции

$$L_\omega^{-1} r_k(z) = r_{k,\omega}(z) \quad \text{и} \quad L_\omega^{-1} \Omega_k(z) = \Omega_{k,\omega}(z), \quad k = 1, 2, \dots,$$

принадлежат A^2_ω, и, как нетрудно проверить, $r_{k,\omega}(z) = -i C_\omega(z - \overline{z_k})$.

Ввиду теоремы D и некоторых других результатов из [16] справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ не удовлетворяет условию Бляшке, т. е. ряд (4.2) расходится, то системы*

$$\left\{ -i C_\omega(z - \overline{z_k}) \right\}_1^\infty \quad \text{и} \quad \left\{ \Omega_{k,\omega}(z) \right\}_1^\infty$$

полны в A^2_ω.

Далее, некоторая трансформация в условиях (1.16), (1.17) из [16] (или (2.2), (2.3) из [17]) приводит к определению подмножества $A^2_\omega\{z_k\} \subset A^2_\omega$ функций f, для которых существуют некоторые $g \in H^2$ такие, что для почти всех $-\infty < x < +\infty$ некасательные граничные значения функции $g(-z)B(z)$ изнутри нижней полуплоскости $G^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ совпадают с некасательными же граничными значениями функции $L_\omega f \in H^2$ изнутри G^+. Ясно, что $A^2_\omega\{z_k\}$ можно рассматривать только при условии (4.2). Из теоремы 2 из [17] приходим к следующему предложению.

Предложение 4.3. *Системы* $\{-iC_\omega(z-\overline{z_k})\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_{k,\omega}(z)\}_1^\infty$ *биортогональны в* A^2_ω, *т. е.*

$$\left(-iC_\omega(z-\overline{z_k}), \Omega_{\nu,\omega}(z)\right)_\omega = \iint_{G^+} \left[-iC_\omega(z-\overline{z_k})\right] \overline{\Omega_{\nu,\omega}(z)}d\mu_\omega(z)$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \nu = k, \\ 0, & \text{если.} \quad \nu \neq k. \end{cases}$$

Следующее утверждение вытекает из лемм B и 1.1 работы [16].

Предложение 4.4. *Если* $f \in A^2_\omega$, *то:*

1° f *принадлежит множеству* $A^2_\omega\{z_k\}$ *тогда и только тогда, когда*
$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_\omega f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z} = 0, \quad z \in G^+,$$
где $L_\omega f(t)$ *и* $B(t)$ *- граничные значения функции* $L_\omega f \in H^2$ *и* $B \in H^2$.

2° *Справедливо следующее ортогональное разложение:*
$$f(z) = F(z) + R(z) \quad (z \in G^+), \quad \|f\|^2_{2,\omega} = \|F\|^2_{2,\omega} + \|R\|^2_{2,\omega},$$
где $F \in A^2_\omega\{z_k\}$ *и* $R = L_\omega^{-1}[B\Psi] \in A^2_\omega$.

Из теорем 4.1 и 5.2 работы [16] приходим к следующему результату.

Предложение 4.5. *Каждая из систем*
$$\left\{-iC_\omega(z-\overline{z_k})\right\}_1^\infty \quad \text{и} \quad \left\{\Omega_{k,\omega}(z)\right\}_1^\infty$$
является базисом в $A^2_\omega\{z_k\}$ *тогда и только тогда, когда* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$.

Пользуясь формулами (4.29), (4.31) и формулой разложения в конце доказательства теоремы 5.2 из [16] приходим к следующему результату.

Предложение 4.6. *Если* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, *то любая функция* $f \in A^2_\omega\{z_k\}$ *представима в* G^+ *обеими рядами*
$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty c_k(f)\, C_\omega(z-\overline{z_k}) = \sum_{k=1}^\infty L_\omega f(z_k)\Omega_{k,\omega}(z), \quad \text{где} \quad c_k(f) = (f, \Omega_{k,\omega})_\omega,$$
которые сходятся в норме пространства A^2_ω *и равномерно внутри* G^+.

В силу теоремы 4.2 из [16] справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.7. *Если* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, *то любая функция* $f \in A^2_\omega$ *представима в виде*
$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty c_k(f)\, C_\omega(z-\overline{z_k}) + \psi(z),$$

где ряд сходится в норме A^2_ω и равномерно внутри G^+, а также верны следующие вложения:

$$\psi(z) = L_\omega^{-1}\left[B(z)\Phi(z)\right] \in A^2_\omega \quad \text{и} \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_\omega f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z} \in H^2.$$

В силу теорем 5.1 и 5.2 из [16] имеет место следующее предложение.

Предложение 4.8. *Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ - последоватльность попарно различных точек G^+. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$ и $\{w_k\}_1^\infty$ - последовательность комплексных чисел, для которой*

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k |w_k|^2 < +\infty,$$

то существует единственная функция $f_0 \in A^2_\omega\{z_k\}$ такая, что

$$L_\omega f_0(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad \|f_0\|_{A^2_\omega} \le C_\delta A,$$

где $C_\delta > 0$ - постоянная, зависящая только от δ из (4.1). Эта функция разлагается в ряд

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_{k,\omega}(z), \quad z \in G^+,$$

сходящийся в норме пространства A^2_ω и равномерно внутри G^+.

2°. *Обратно, если множество последовательностей $\left\{(\operatorname{Im} z_k)^{1/2} f'(z_k)\right\}_1^\infty$ со всевозможными функциями $f \in A^2_\omega$ совпадает с пространством ℓ^2 последовательностей комплексных чисел с конечными суммами квадратов модулей, то $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$.*

Abstract. Some extensions of the results of the first author related with the Hilbert spaces $A^2_{\omega,0}$ of functions holomorphic in the half-plane are proved. Some new Hilbert spaces A^2_ω of Dirichlet type are introduced, which are included in the Hardy space H^2 over the half-plane. Several results on representations, boundary properties, isometry, interpolation, biorthogonal systems and bases are obtained for the spaces $A^2_\omega \subset H^2$.

Список литературы

[1] A. M. Jerbashian, "On $A^p_{\omega,\gamma}$ spaces in the half-plane", in: Operator Theory: Advances and Applications, **158**, 141 – 158 Birkhäuser (2005).

[2] A. M. Jerbashian, V. A. Jerbashian, "Functions of ω-bounded type in the half-plane", Calculation Methods and Function Theory (CMFT) **7**, 205 – 238 (2007).

[3] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XX (1950).
[4] A. M. Jerbashian, "On the theory of weighted classes of area integrable regular functions", Complex Variables, 50, 155 – 183 (2005).
[5] А. М. Джрбашян, "О граничных свойствах и биортогональных системах в пространствах $A^2 \subset H^2$", Известия НАН Армении, Математика, 49, 17 – 22 (2014).
[6] P. Koosis, Introduction to H_p Spaces, Cambridge University Press (1998).
[7] A. M. Jerbashian, Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane, Springer, Advances in Complex Analysis and Applications (2005).
[8] M. M. Djrbashian, A. E. Djrbashian, "Integral representation for some classes of analytic functions in a half-plane", Dokl. Akad. Nauk USSR, 285, 547 – 550 (1985).
[9] F. A. Shamoian, A. E. Djrbashian, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner Texte zur Mathematics, Berlin (1988).
[10] F. Ricci, M. Taibleson, "Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure", Annali Scuola Normale Superiore - Pisa, Classe di Scienze, Ser. IV, X, 1 – 54 (1983).
[11] А. О. Карапетян, "Интегральные представления в трубчатых областях", Изв. АН Арм. ССР, Математика, 23 (1), 91 – 96 (1988).
[12] А. О. Карапетян, "Интегральные представления для весовых пространств функций голоморфных в трубчатых областях", Изв. АН Арм. ССР, Математика, 25 (4), 1 – 19 (1990).
[13] А. М. Джрбашян, Дж. Э. Рестрепо, "О некоторых классах гармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости", Изв. НАН Армении. Математика, 51 (2), 17 – 31 (2016).
[14] P. L. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press (1970).
[15] А. М. Джрбашян, Дж. Э. Рестрепо, "О некоторых классах дельта-субгармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, 51 (3), 9 – 27 (2016).
[16] M. M. Dzrbasjan, "A characterization of the closed linear span of two families of incomplete systems of analytic functions", Math. USSR Sbornik 42, 1 – 70 (1982).
[17] M. M. Džrbašjan, "Basicity of some biorthogonal systems and the solution of a multiple interpolation problem in the classes H^p over the half-plane", Math. USSR Izvestiya 13, 589 – 646 (1979).

Поступила 28 ноября 2017

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 4, 2018, стр. 31 – 45.

METHOD OF MOMENTS ESTIMATORS AND MULTI-STEP MLE FOR POISSON PROCESSES

A. S. DABYE, A. A. GOUNOUNG, YU. A. KUTOYANTS

Université Gaston Berger, Saint Louis, Sénégal
Le Mans University, France, Tomsk State University, Tomsk, Russia
E-mails: *Dabye_ali@yahoo.fr; goun.oungaliz@yahoo.fr; kutoyants@univ-lemans.fr*

Abstract. We introduce two types of estimators of the finite-dimensional parameters in the case of observations of inhomogeneous Poisson processes. These are the estimators of the method of moments and Multi-step MLE. It is shown that the estimators of the method of moments are consistent and asymptotically normal and the Multi-step MLE are consistent and asymptotically efficient. The construction of Multi-step MLE-process is done in two steps. First we construct a consistent estimator by the observations on some learning interval and then this estimator is used for construction of One-step and Two-step MLEs. The main advantage of the proposed approach is its computational simplicity.

MSC2010 numbers: 62F10, 62F12, 62M05, 62G20.

Keywords: Inhomogeneous Poisson process; method of moments estimator; consistency; asymptotic normality; asymptotic efficiency; Multi-step MLE.

1. Introduction

This work is devoted to the problem of parameter estimation in the case of continuous time observations of inhomogeneous Poisson processes. The Poisson process is one of the main models in the description of the series of events in real applied problems in optical telecommunications, biology, physics, financial mathematics etc. (see, e.g., [1], [2], [3], [19], [21]). Note that the intensity function entirely identifies the process and therefore the statistical inference is concerned this function only. We suppose that the intensity function of the observed Poisson process is a known function which depends on some unknown finite-dimensional parameter. We consider the problem of this parameter estimation in the asymptotic of large samples. We have to note that the estimation theory (parametric and

[0]This work was done under partial financial support of the grant of RSF number 14-49-00079.

non parametric) is well developed and there exists a large number of publications devoted to this class of problems (see, e.g., [5], [9], [22], [10] and the references therein). The method of moments and One-step estimation procedure in the case of i.i.d. observations are well known too. Our goal is to apply the method of moments to the estimation of the parameters of inhomogeneous Poisson processes and to present a version of One-step and Multi-step procedures with the help of some preliminary estimators obtain on the small learning interval.

We are given n independent observations $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ of the Poisson processes $X_j = (X_j(t), t \in \mathbb{T})$ with the same intensity function $\lambda(\vartheta, t), t \in \mathbb{T}$. Here $\mathbb{T}$ is an interval of observations. It can be finite, say, $\mathbb{T} = [0, T]$ or infinite $\mathbb{T} = [0, \infty)$, $\mathbb{T} = (-\infty, \infty)$. The unknown parameter $\vartheta \in \Theta$, where the set Θ is an open, convex and bounded subset of $\mathcal{R}^d$. Recall that the increments of the Poisson process (X_j is a counting process) on disjoint intervals are independent and for any $k = 0, 1, 2, \ldots$ and $t_1 < t_2$

$$\mathbf{P}_\vartheta\Big(X_j(t_2) - X_j(t_1) = k\Big) = \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} \lambda(\vartheta, s)\,\mathrm{d}s\right]^k}{k!} \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(\vartheta, s)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Recall that

$$\mathbf{E}_\vartheta X_j(t) = \Lambda(\vartheta, t) = \int^t \lambda(\vartheta, s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

We have to estimate the true value of $\vartheta = \vartheta_0$ by the observations X^n and to describe the asymptotic ($n \to \infty$) properties of estimators. It is known that under regularity conditions the method of moments estimators in the case of i.i.d. observations of the random variables are consistent and asymptotically normal (see, e.g. [4], [17]). Our goal is to introduce the method of moments estimators (MME) in the case of observations of inhomogeneous Poisson processes. This method of estimation was introduced by Karl Pearson in 1894 in the case of observations of the i.i.d. random variables. Then it was extended to many other models of observations and widely used in applied problems. It seems that till now this method was not yet used for the estimation of the parameters of inhomogeneous Poisson processes.

The maximum likelihood estimator (MLE) $\hat\vartheta_n$ (under regularity conditions) is consistent, asymptotically normal $\sqrt{n}\left(\hat\vartheta_n - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbf{I}(\vartheta_0)^{-1}\right)$ and asymptotically efficient (see, e.g., [9]). Here $\mathbb{I}(\vartheta_0)$ is the Fisher information matrix

$$\mathbb{I}(\vartheta_0) = \int_{\mathbb{T}} \dot\lambda(\vartheta_0, t)\, \dot\lambda(\vartheta_0, t)^{\top}\, \lambda(\vartheta_0, t)^{-1}\, \mathrm{d}t.$$

Here and in the sequel dot means derivation with respect to (w.r.t.) ϑ and $A^{\top}$ means the transpose of the vector (or matrix) A.

Recall that in the regular case the following lower bound (called Hajek-Le Cam) holds: for any estimator $\bar\vartheta_n$ and any $\vartheta_0 \in \Theta$ we have

$$\lim_{\nu\to 0} \lim_{n\to\infty} \sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} n\mathbf{E}_\vartheta \left|\mathbb{I}(\vartheta_0)^{1/2} \left(\bar\vartheta_n - \vartheta\right)\right|^2 \geq d.$$

This bound allows us to define the asymptotically efficient estimator $\tilde\vartheta_n$ as estimator satisfying the equality

$$\lim_{\nu\to 0} \lim_{n\to+\infty} \sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} n\mathbf{E}_\vartheta \left|\mathbb{I}(\vartheta_0)^{1/2} \left(\tilde\vartheta_n - \vartheta\right)\right|^2 = d$$

for all $\vartheta_0 \in \Theta$.

If we verify that the moments of the MLE converge uniformly on ϑ then this proves the asymptotic efficiency of the MLE (see [6], [9]). In the present work we introduce two classes of estimators. The first one is the class of the method of moments estimators and the second class is the Multi-step MLEs.

We show that the MMEs for many models of inhomogeneous Poisson processes are easy to calculate, but these estimators as usual are not asymptotically efficient. The MLEs are asymptotically efficient, but their calculation is often a difficult problem. The main result of this work is the introduction of the Multi-step MLEs which are easy to calculate and which are asymptotically efficient. These Multi-step MLEs are calculated in several steps. For example, One-step MLE is calculated as follows. First we fix the *learning observations* $X^N = (X_1, \ldots, X_N)$, where $N = [n^\delta]$ with $\delta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Here $[a]$ is the entier part of a. By the observations X^N we construct the MME ϑ_N^* and then with the help of it we introduce the One-step MLE by the equality

$$\vartheta_n^\star = \vartheta_N^* + \frac{1}{n}\mathbb{I}(\vartheta_N^*)^{-1} \sum_{j=N+1}^{n} \int_{\mathbb{T}} \dot\lambda(\vartheta_N^*, t)\, \lambda(\vartheta_N^*, t)^{-1} \left[\mathrm{d}X_j(t) - \lambda(\vartheta_N^*, t)\, \mathrm{d}t\right].$$

It is shown that this estimator is asymptotically normal

$$\sqrt{n}\left(\vartheta_n^\star - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right)$$

and is asymptotically efficient.

Recall that the MLE can be explicitly written for the very narrow class of intensities. Therefore it is important to have other estimators, which are consistent and asymptotically normal and the same time can be easily calculated.

2. Method of moments for Poisson processes

Let us construct the method of moments estimator in the case of observations of inhomogeneous Poisson process. We have n independent observations $X^n = (X_1, ..., X_n)$ of the Poisson processes $X_j = (X_j(t), t \in \mathbf{T})$ with the intensity function $(\lambda(\theta, t), t \in \mathbf{T})$.

The unknown parameter $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^d$. Here Θ is an open, convex, bounded set.

In the construction of the method of moments estimator we follow the same way as in the construction of MME in the case of i.i.d. random variables. Introduce the vector-function $\mathbf{g}(s) = (g_1(s), ..., g_d(s)), t \in \mathbf{T}$ and the vector of integrals $\mathbf{I}^{(d)} = (I_1, \ldots, I_d)$, where

$$I_l = \int_{\mathbf{T}} g_l(s)\, \mathrm{d}X_1(s), \qquad l = 1, \ldots, d.$$

We have

$$\mathbf{E}_\theta \mathbf{I}^{(d)} = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{g}(s)\, \lambda(\theta, s)\, \mathrm{d}s.$$

Let us denote $\mathbf{M}(\vartheta) = \mathbf{E}_\vartheta \mathbf{I}^{(d)}$ and suppose that the function $\mathbf{g}(\cdot)$ is such that the equation $\mathbf{M}(\vartheta) = \mathbf{a}$ for all $\vartheta \in \Theta$ has a unique solution $\vartheta = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{a}) = \mathbf{H}(\mathbf{a})$. Here $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ is the inverse function for $\mathbf{M}(\cdot)$.

The method of moments estimator ϑ_n^* is defined by the equation $\vartheta_n^* = \mathbf{H}(\mathbf{a}_n)$, where

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbf{T}} \mathbf{g}(s)\, \mathrm{d}X_j(s)$$

Introduce the *Regularity conditions* $\mathcal{R}_0$:

- *For any* $\nu > 0$ *and any* $\vartheta_0 \in \Theta$

$$\inf_{|\vartheta - \vartheta_0| > \nu} |\mathbf{M}(\vartheta) - \mathbf{M}(\vartheta_0)| > 0.$$

- *The vector-function* $\mathbf{H}(\cdot)$ *is continuously differentiable.*

Introduce the matrix

$$\mathbf{D}(\vartheta) = \frac{\partial \mathbf{H}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \mathbf{G}(\vartheta) \frac{\partial \mathbf{H}(\vartheta)}{\partial \vartheta}^T$$

Here the matrices

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)_{lk}=\frac{\partial H_l(\vartheta)}{\partial \vartheta_k},\qquad \mathbf{G}(\vartheta)_{l,k}=\int_{\mathbf{T}} g_l(s)\,g_k(s)\,\lambda(\vartheta,s)\,\mathrm{d}s.$$

Theorem 2.1. *Suppose that the vector-function* $\mathbf{g}(\cdot)$ *is such, that the regularity conditions* $\mathcal{R}_0$ *are fulfilled. Then the MME* ϑ^*_n *is consistent and asymptotically normal*

$$\sqrt{n}\,(\vartheta^*_n-\vartheta_0)\Longrightarrow \mathcal{N}\left(0,\mathbf{D}(\vartheta_0)\right). \tag{2.1}$$

Proof. By the Law of Large Numbers

$$a_{l,n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbf{T}} g_l(s)\,\mathrm{d}X_j(s)\longrightarrow\int_{\mathbf{T}} g_l(s)\,\lambda(\vartheta_0,s)\,\mathrm{d}s,\quad l=1,...,d$$

and hence by the well-known Continuous Mapping Theorem $\mathbf{H}(\mathbf{a}_n)\longrightarrow\mathbf{H}(\mathbf{a}_0)=\vartheta_0$. Here we put $\mathbf{a}_0=\mathbf{M}(\vartheta_0)$. To show asymptotic normality we write

$$\sqrt{n}\,(\vartheta^*_n-\vartheta_0)=\sqrt{n}\,(\mathbf{H}(\mathbf{a}_n)-\mathbf{H}(\mathbf{a}_0))=\sqrt{n}\,(\mathbf{H}(\mathbf{a}_0+b_n\eta_n)-\mathbf{H}(\mathbf{a}_0))$$

where $b_n=n^{-1/2}$ and the vector

$$\eta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbf{T}}\mathbf{g}(s)\left[\mathrm{d}X_j(s)-\lambda(\vartheta_0,s)\,\mathrm{d}s\right].$$

By the Central Limit Theorem $\eta_n\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathbf{G}(\vartheta)\right)$. The asymptotic normality (2.1) now follows from this convergence and the presentation

$$\sqrt{n}\,(\vartheta^*_n-\vartheta_0)=\frac{\partial\mathbf{H}(\vartheta)}{\partial\vartheta}\eta_n\,(1+o(1)).$$

Recall that the vector-function $H(a)$ is continuously differentiable.

Example 2.1. Suppose that the intensity function is

$$\lambda(\theta,t)=\sum_{l=1}^{d}\theta_l h_l(t)+\lambda_0,\qquad t\in\mathbf{T}.$$

Introduce the vector-function $\mathbf{g}(\cdot)$ and the corresponding integrals $\mathbf{I}^{(d)}$. The vector $\mathbf{M}(\vartheta)=\mathbf{A}\vartheta+\lambda_0\mathbf{G}$, where

$$\mathbf{A}_{kl}=\int_{\mathbf{T}} g_k(t)\,h_l(t)\,\mathrm{d}t,\qquad G_k=\int_{\mathbf{T}} g_k(t)\,\mathrm{d}t$$

in obvious notations. Hence we can write

$$\vartheta=\mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{M}(\vartheta)-\lambda_0\mathbf{G}\right]=\mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{a}-\lambda_0\mathbf{G}\right]=\mathbf{H}(\mathbf{a}).$$

Therefore the MME ϑ_n^* is given by the equality

$$\vartheta_n^* = \mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{a}_n - \lambda_0\mathbf{G}\right] = \mathbf{A}^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbf{T}} \mathbf{g}(t)\left[\mathrm{d}X_j(t) - \lambda_0\mathrm{d}t\right]. \tag{2.2}$$

This estimator by the Theorem 2.1 is consistent and asymptotically normal. To simplify its calculation we can take such functions $\mathbf{g}(\cdot)$ that the matrix **A** became diagonal.

Example 2.2. Suppose that the inhomogeneous Poisson processes $X^{(n)}$ are observed on the time interval $\mathbf{T} = [0,\infty)$ and have the intensity function

$$\lambda(\vartheta,t) = \frac{t^{\beta-1}\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\exp(-\alpha t), t \geq 0,$$

i.e., we have Poisson processes with the Gamma intensity function. The unknown parameter is $\vartheta = (\alpha,\beta)$. We know, that

$$M_1(\vartheta) = \int_0^{\infty} t\,\lambda(\vartheta,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad M_2(\vartheta) = \int_0^{\infty} t^2\lambda(\vartheta,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2}.$$

Hence, if we take $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (t, t^2)$, then the system $\mathbf{M}(\vartheta) = \mathbf{a}$ has the unique solution

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2 - a_1^2}, \qquad \beta = \frac{a_1^2}{a_2 - a_1^2}.$$

Therefore the MME $\vartheta_n^* = (\alpha_n^*, \beta_n^*)$ is

$$\alpha_n^* = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} t\mathrm{d}X_j(t)}{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} t^2\mathrm{d}X_j(t) - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} t\mathrm{d}X_j(t)\right)^2\right)}, \tag{2.3}$$

$$\beta_n^* = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} t\mathrm{d}X_j(t)\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} t^2\mathrm{d}X_j(t) - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} t\mathrm{d}X_j(t)\right)^2\right)}. \tag{2.4}$$

This estimator is consistent and asymptotically normal.

The similar example can be considered and in the case of observations on $\mathbf{T} = (-\infty,+\infty)$ and the Gaussian intensity function with $\vartheta = (\alpha,\sigma^2)$:

$$\lambda(\vartheta,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Further examples and the convergence of moments of these estimators can be found in [13].

3. One-step MLE

The One-step MLE was introduced by Fisher (1925). This One-step procedure allows to improved a consistent estimator $\overline{\vartheta}_n$ up to asymptotically efficient (One-step MLE) $\vartheta_n^\star$. We consider the similar construction in the case of inhomogeneous Poisson processes. Suppose that the observations $X^n = (X_1, ..., X_n)$ are Poisson processes with the intensity function $\lambda(\vartheta, t), t \in \mathbb{T}$.

Condition $\mathcal{P}_0$. We have a (preliminary) estimator $\overline{\vartheta}_n$, which is consistent and such that $\sqrt{n}\left(\overline{\vartheta}_n - \vartheta_0\right)$ is bounded in probability.

Introduce the learning observations $X^N = (X_1, ..., X_N)$, $N = \left[n^\delta\right]$, $\delta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and the One-step MLE

$$\vartheta_n^\star = \overline{\vartheta}_N + \frac{\mathbb{I}\left(\overline{\vartheta}_N\right)^{-1}}{n} \sum_{j=N+1}^{n} \int_{\mathbb{T}} \frac{\dot\lambda\left(\overline{\vartheta}_N, t\right)}{\lambda\left(\overline{\vartheta}_N, t\right)} \left[\mathrm{d}X_j(t) - \lambda\left(\overline{\vartheta}_N, t\right)\mathrm{d}t\right].$$

Here $\overline{\vartheta}_N$ is the preliminary estimator constructed by the first N observations.

Regularity conditions $\mathcal{L}_0$:

- *The function $\ell(\vartheta, t) = \ln\lambda(\vartheta, t)$ has three continuous bounded derivatives. w.r.t. ϑ*
- *The Fisher information matrix $\mathbb{I}(\vartheta)$ is uniformly on $\vartheta \in \Theta$ non degenerated:*

$$\inf_{\vartheta\in\Theta}\inf_{|\mu|=1} \mu^\top \mathbb{I}(\vartheta)\,\mu > 0.$$

Here $\mu \in \mathbb{R}^d$.

Theorem 3.1. *Suppose that the conditions $\mathcal{P}_0$ and $\mathcal{L}_0$ are fulfilled. Then the One-step MLE $\vartheta_n^\star$ is asymptotically normal*

$$\sqrt{n}\left(\vartheta_n^\star - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

Proof. We have the equality

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\vartheta_n^\star - \vartheta_0\right) &= \sqrt{n}\left(\overline{\vartheta}_N - \vartheta_0\right) + \\ &+ \mathbb{I}\left(\overline{\vartheta}_N\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=N+1}^{n}\int_{\mathbb{T}} \dot\ell\left(\overline{\vartheta}_N, t\right)\left[\mathrm{d}X_j(t) - \lambda(\vartheta_0, t)\,\mathrm{d}t\right] + \\ &+ \mathbb{I}\left(\overline{\vartheta}_N\right)^{-1}\frac{n-N}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{T}} \dot\ell\left(\overline{\vartheta}_N, t\right)\left[\lambda(\vartheta_0, t) - \lambda\left(\overline{\vartheta}_N, t\right)\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

As $\bar\vartheta_N \longrightarrow \vartheta_0$ we can write

$$\mathbb{I}\left(\vartheta_N\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=N+1}^{n}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[{\rm d}X_j\left(t\right)-\lambda\left(\vartheta_0,t\right){\rm d}t\right]$$

$$=\mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=N+1}^{n}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\vartheta_0,t\right)\left[{\rm d}X_j\left(t\right)-\lambda\left(\vartheta_0,t\right){\rm d}t\right]+o\left(1\right).$$

By the Central Limit Theorem

$$\mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=N+1}^{n}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\vartheta_0,t\right)\left[{\rm d}X_j\left(t\right)-\lambda\left(\vartheta_0,t\right){\rm d}t\right]\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right).$$

Let us consider the remainder

$$\begin{aligned}R_n&=\sqrt{n}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)\\&\quad+\mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\frac{n-N}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[\lambda\left(\vartheta_0,t\right)-\lambda\left(\bar\vartheta_N,t\right)\right]{\rm d}t\\&=\sqrt{n}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)\mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\left[\mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)-\int_{\mathbb{T}}\dot\lambda(\bar\vartheta_N,t)^{\top}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right){\rm d}t\right]\\&\quad+\sqrt{n}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)O\left(\frac{N}{n}\right)+O\left(\sqrt{n}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)^2\right)=o\left(1\right),\end{aligned}$$

where we used the equality

$$\mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)=\int_{\mathbb{T}}\dot\lambda(\bar\vartheta_N,t)^{\top}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right){\rm d}t$$

and the Taylor expansion at the point $\bar\vartheta_N$:

$$\begin{aligned}\lambda\left(\vartheta_0,t\right)-\lambda\left(\bar\vartheta_N,t\right)&=-\int_0^1\dot\lambda\left(\bar\vartheta_N+s\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right),t\right)^{\top}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right){\rm d}s\\&=-\dot\lambda\left(\bar\vartheta_N,t\right)^{\top}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)+O\left(\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)^2\right).\end{aligned}$$

Remind that $\sqrt{n}O\left(\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)^2\right)\sim\sqrt{n}O\left(n^{-\delta}\right)=o\left(1\right)$. Therefore we obtained the representation

$$\sqrt{n}\left(\vartheta_n^{\star}-\vartheta_0\right)\quad=\quad\mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=N+1}^{n}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\vartheta_0,t\right)\left[{\rm d}X_j\left(t\right)-\lambda\left(\vartheta_0,t\right){\rm d}t\right]+o\left(1\right)$$

which proves the theorem.

Remark 3.1. If we suppose that the moments of the preliminary estimator are bounded, say, $\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\bar\vartheta_n-\vartheta_0\right|^p\leq C$, where $p\geq 2$ and $C>0$ does not depend on n, then the presented proof allows to verify that the moments of the One-step MLE are bounded too and that $\vartheta_n^{\star}$ is asymptotically efficient.

In all examples below the MLEs have no explicit expression.

Example 3.1. Suppose that the intensity function is

$$\lambda(\vartheta,t)=\sum_{l=1}^{d}\vartheta_l h_l(t)+\lambda_0,\ t\in\mathbb{T}$$

and ϑ_n^* is the MME defined in (2.2).

The Fisher information matrix is

$$\mathbb{I}(\vartheta)_{lk}=\int_{\mathbb{T}}\frac{h_l(t)\,h_k(t)}{h(t)^\top\vartheta+\lambda_0}\,\mathrm{d}t,\qquad l,k=1,\ldots,d$$

and the One-step MLE in this case is

$$\vartheta_n^\star=\vartheta_N^*+\mathbb{I}(\vartheta_N^*)^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n}\int_{\mathbb{T}}\frac{h(t)}{h(t)^\top\vartheta_N^*+\lambda_0}\left[\mathrm{d}X_j(t)-h(t)^\top\vartheta_n^*\mathrm{d}t-\lambda_0\mathrm{d}t\right].$$

Here $N=[n^\delta]$ and $\delta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. By the Theorem 3.1 this estimator is consistent and asymptotically normal. Therefore we improved the preliminary estimator ϑ_N^* up to asymptotically efficient $\vartheta_n^\star$.

Example 3.2. Suppose that the intensity function is

$$\lambda(\vartheta,t)=\frac{t^{\beta-1}\alpha^\beta\exp(-\alpha t)}{\Gamma(\beta)},\qquad t\geq 0,$$

where the unknown parameter is $\vartheta=(\alpha,\beta)$. Once more we have a situation, where the explicit calculation of the MLE is impossible. The preliminary estimator can be the MME $\vartheta_n^*=(\alpha_n^*,\beta_n^*)$ (see (2.3) and (2.4)).

The vector $\dot{l}(\vartheta,t)=\left(\frac{\beta}{\alpha}-t,\ln(\alpha t)-\frac{\dot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)}\right)$ and the Fisher information matrix $\mathbb{I}(\vartheta)=(\mathbb{I}_{ik}(\vartheta))_{2\times 2}$ is

$$\mathbb{I}_{11}(\vartheta)=\frac{\beta}{\alpha^2},\qquad \mathbb{I}_{12}(\vartheta)=-\frac{1}{\alpha},\quad \mathbb{I}_{22}(\vartheta)=\frac{\ddot\Gamma(\beta)\Gamma(\beta)-\dot\Gamma(\beta)^2}{\Gamma(\beta)^2}.$$

Hence the One-step MLE is

$$\vartheta_n^\star=\vartheta_N^*+\mathbb{I}(\vartheta_N^*)^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n}\int_{\mathbb{T}}\dot{l}(\vartheta_N^*,t)\left[\mathrm{d}X_j(t)-\lambda(\vartheta_N^*,t)\,\mathrm{d}t\right]$$

and this estimators is asymptotically normal with the limit covariance matrix $\mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}$.

4. One-step MLE-process

Suppose that we have the same model of observations of n independent inhomogeneous Poisson processes: $X^n=(X_1,\ldots,X_n)$ with the intensity function $\lambda(\vartheta,t),t\in\mathbb{T}$, where ϑ is unknown parameter. Our goal is to construct an estimator process $\vartheta_n^\star=\left(\vartheta_{k,n}^\star,k=1,\ldots,n\right)$, where the estimator $\vartheta_{k,n}^\star$ satisfies the following conditions

(1) *The estimator $\vartheta^\star_{k,n}$ is based on the first k observations $X^{(k)}$.*

(2) *The calculation of this estimator has to be relatively simple.*

(3) *The estimator $\vartheta^\star_{k,n}$ is asymptotically efficient.*

Note that the MLE $\hat\vartheta_{k,n}$ defined by the relations

$$V\left(\hat\vartheta_{k,n}, X^k\right) = \sup_{\vartheta\in\Theta} V\left(\vartheta, X^k\right), \qquad k = 1, ..., n \tag{4.1}$$

satisfies the conditions (1) and (3), but not (2). is The likelihood ratio function [18] $V\left(\vartheta, X^k\right), \vartheta \in \Theta$ is

$$V\left(\vartheta, X^k\right) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{T}} \ln \lambda\left(\vartheta, t\right) \mathrm{d}X_j\left(t\right) - k \int_{\mathbb{T}} \left[\lambda\left(\vartheta, t\right) - 1\right] \mathrm{d}t\right\}.$$

Remind that the solutions of the equations (4.1) in the case of non linear intensity functions $\lambda(\vartheta, \cdot)$ can be computationally difficult problems. This is typical situation of "on-line"estimation.

The construction of such estimator-process is very close to the given above construction of the One-step MLE. Introduce the same learning observations $X^N = (X_1, ..., X_N)$, where $N = [n^\delta]$, with $\delta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and suppose that we have a preliminary estimator $\bar\vartheta_N$ such that $\sqrt{N}\left(\bar\vartheta_N - \vartheta_0\right)$ is bounded in probability (condition $\mathcal{P}_0$).

The One-step MLE-process is

$$\vartheta^\star_{k,n} = \bar\vartheta_N + \mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1} \frac{1}{k} \sum_{j=N+1}^{k} \int_{\mathbb{T}} \dot\ell\left(\bar\vartheta_N, t\right) \left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\bar\vartheta_N, t\right) \mathrm{d}t\right],$$

where $k = N + 1, ..., n$.

Theorem 4.1. *Suppose that the conditions $\mathcal{P}_0$ and $\mathcal{L}_0$ are fulfilled. Then the One-step MLE-process $\vartheta^\star_n = \left(\vartheta^\star_{k,n}, k = N+1, ..., n\right)$ is consistent and asymptotically normal $\sqrt{k}\left(\vartheta^\star_{k,n} - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right)$, where we put $k = [sn]$. Here $s \in (0, 1]$.*

Proof. There is no need to present a new proof because it is a slight modification of the given above proof of the Theorem 3.1.

5. Two-step MLE-process

The one step MLE-process presented in the preceding section allows us to calculate the values $\vartheta^\star_{k,n}$ for $k = N + 1, ..., n$, where $N = \left[n^\delta\right]$ with $\delta \in (\frac{1}{2}, 1]$. Therefore we have no estimators for $k = 1, ..., N$.

It is interesting to reduce the learning interval and to start the estimation process earlier. Let us see how it can be done with the learning interval $X^N = (X_1, \ldots, X_N)$ with $N = [n^\delta]$ and $\delta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

We suppose that a preliminary estimator $\bar\vartheta_N$ is given. Then we define the second preliminary estimator

$$\bar\vartheta_{k,n} = \bar\vartheta_N + \mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\frac{1}{k}\sum_{j=N+1}^{k}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\bar\vartheta_N,t\right)\mathrm{d}t\right],$$

and the Two-step MLE-process is defined by the relation

$$\vartheta^{**}_{k,n} = \bar\vartheta_{k,n} + \mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\frac{1}{k}\sum_{j=N+1}^{k}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\bar\vartheta_{k,n},t\right)\mathrm{d}t\right],$$

where $k = N+1, \ldots, n$. Let us show that it is asymptotically normal

$$\sqrt{k}\left(\vartheta^{**}_{k,n} - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right).$$

Here $k = [sn]$ and $s \in (0,1]$. We have

$$\begin{aligned}\sqrt{k}\left(\vartheta^{**}_{k,n} - \vartheta_0\right) &= \sqrt{k}\left(\bar\vartheta_{k,n} - \vartheta_0\right) + \\ &\quad + \mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\frac{1}{k}\sum_{j=N+1}^{k}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\vartheta_0,t\right)\mathrm{d}t\right] \\ &\quad + \mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\frac{(k-N)}{k}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[\lambda\left(\vartheta_0,t\right) - \lambda\left(\bar\vartheta_{k,n},t\right)\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

We can write for some $\gamma > 0$, which we chose later

$$\begin{aligned}n^\gamma\left(\bar\vartheta_{k,n} - \vartheta_0\right) &= n^\gamma\left(\bar\vartheta_N - \vartheta_0\right) \\ &\quad + \mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\frac{n^\gamma}{k}\sum_{j=N+1}^{k}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\vartheta_0,t\right)\mathrm{d}t\right] \\ &\quad + \mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\frac{n^\gamma(k-N)}{k}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[\lambda\left(\vartheta_0,t\right) - \lambda\left(\bar\vartheta_N,t\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= n^\gamma\left(\bar\vartheta_N - \vartheta_0\right)\left[J - \left(1 - \frac{N}{k}\right)\mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\dot\lambda(\tilde\vartheta,t)\mathrm{d}t\right]. \\ &\quad + \mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\frac{n^\gamma}{k}\sum_{j=N+1}^{k}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\vartheta_0,t\right)\mathrm{d}t\right] \\ &= O\left(n^\gamma\left|\bar\vartheta_N - \vartheta_0\right|^2\right) + O\left(\frac{N}{k}\right) \\ &\quad + \mathbb{I}\left(\bar\vartheta_N\right)^{-1}\frac{n^\gamma}{k}\sum_{j=N+1}^{k}\int_{\mathbb{T}}\dot\ell\left(\bar\vartheta_N,t\right)\left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\vartheta_0,t\right)\mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

If we take $\gamma < \delta$ then we have

$$n^{\gamma} n^{-\delta} \left(n^{\frac{\delta}{2}} \left| \bar{\vartheta}_N - \vartheta_0 \right) \right|^{2} \longrightarrow 0.$$

Further, as $\gamma < \delta \leq \frac{1}{2}$ we have

$$\frac{n^{\gamma}}{k} \sum_{j=N+1}^{k} \int_{\mathbb{T}} \dot{\ell}\left(\bar{\vartheta}_N, t\right) \left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\vartheta_0, t\right) \mathrm{d}t \right]$$

$$= \frac{n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\sqrt{sk}} \sum_{j=N+1}^{k} \int_{\mathbb{T}} \dot{\ell}\left(\bar{\vartheta}_N, t\right) \left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\vartheta_0, t\right) \mathrm{d}t \right] = o\left(n^{\gamma-\frac{1}{2}}\right) \rightarrow 0.$$

Hence for $\gamma < \delta$, $n^{\gamma}\left(\bar{\vartheta}_{k,n} - \vartheta_0\right) \longrightarrow 0$. Therefore

$$\sqrt{k}\left(\vartheta^{**}_{k,n} - \vartheta_0\right) = O\left(\sqrt{k}\left|\bar{\vartheta}_{k,n} - \vartheta_0\right| \left|\bar{\vartheta}_N - \vartheta_0\right|\right)$$

$$+ \mathrm{I}\left(\bar{\vartheta}_{k,n}\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=N+1}^{k} \int_{\mathbb{T}} \dot{\ell}\left(\bar{\vartheta}_N, t\right) \left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\vartheta_0, t\right) \mathrm{d}t \right].$$

We see that if we take $\frac{1}{2} - \gamma - \frac{\delta}{2} < 0$ then

$$\sqrt{k}\left|\bar{\vartheta}_{k,n} - \vartheta_0\right| \left|\bar{\vartheta}_N - \vartheta_0\right| \quad = \quad n^{\frac{1}{2}} n^{-\gamma} n^{-\frac{\delta}{2}} \left(n^{\gamma}\left|\bar{\vartheta}_{k,n} - \vartheta_0\right|\right) n^{\frac{\delta}{2}} \left|\bar{\vartheta}_N - \vartheta_0\right| \rightarrow 0$$

Therefore if $\delta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, then we can take such γ, that $\gamma < \delta$ and $\gamma > \frac{1-\delta}{2}$. Finally we obtain

$$\sqrt{k}\left(\vartheta^{**}_{k,n} - \vartheta_0\right) = \frac{\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}}{\sqrt{k}} \sum_{j=N+1}^{k} \int_{\mathbb{T}} \dot{\ell}\left(\vartheta_0, t\right) \left[\mathrm{d}X_j\left(t\right) - \lambda\left(\vartheta_0, t\right) \mathrm{d}t \right] + o\left(1\right)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right).$$

Therefore we proved the following statement.

Theorem 5.1. *Let conditions $\mathcal{P}_0$ and $\mathcal{L}_0$ be fulfilled. Then the Two-step MLE-process $\left(\vartheta^{**}_{k,n}, k = N+1, ..., n\right)$ is asymptotically normal*

$$\sqrt{k}\left(\vartheta^{**}_{k,n} - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right).$$

Here $k = [sn]$.

Example 5.1. Suppose that the intensity function of the observed inhomogeneous Poisson process is $\lambda\left(\vartheta, t\right) = A \sin\left(2\pi t + \vartheta\right) - \lambda_0$, $0 \leq t \leq 1$, where $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ and $A < \lambda_0$. Let us take $g\left(t\right) = \cos\left(2\pi t\right)$ and note that

$$M\left(\vartheta\right) = \int_0^1 g\left(t\right) \lambda\left(\vartheta, t\right) \mathrm{d}t = \frac{A}{2} \cos\left(\vartheta\right), \qquad \vartheta = \arccos\left(\frac{2M\left(\vartheta\right)}{A}\right).$$

The MME is

$$\vartheta_n^* = \arccos\left(\frac{2}{An}\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 \cos\left(2\pi t\right) \mathrm{d}X_j\left(t\right)\right).$$

The Fisher information

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{A^2\cos^2\left(2\pi t\right)}{A\sin\left(2\pi t\right)+\lambda_0}\mathrm{d}t$$

does not depend on ϑ. Let us take $N = \left[n^{\frac{2}{3}}\right]$ and introduce the Two-step MLE-process as follows

$$\overline{\vartheta}_{k,n} = \vartheta_N^* + \frac{1}{\mathrm{I}k}\sum_{j=N+1}^{k}\int_0^1 \frac{A\cos\left(2\pi t+\vartheta_N^*\right)}{A\sin\left(2\pi t+\vartheta_N^*\right)+\lambda_0}\,\mathrm{d}X_j\left(t\right), \quad k = N+1,\ldots,n,$$

$$\vartheta_{k,n}^{**} = \overline{\vartheta}_{k,n} + \frac{1}{\mathrm{I}k}\sum_{j=N+1}^{k}\int_0^1 \frac{A\cos\left(2\pi t+\vartheta_N^*\right)}{A\sin\left(2\pi t+\vartheta_N^*\right)+\lambda_0}\,\mathrm{d}X_j\left(t\right)$$

$$-\frac{k-N}{\mathrm{I}k}\int_0^1 \frac{\left[A\cos\left(2\pi t+\vartheta_N^*\right)\right]\left[A\sin\left(2\pi t+\overline{\vartheta}_{k,n}\right)+\lambda_0\right]}{A\sin\left(2\pi t+\vartheta_N^*\right)+\lambda_0}\,\mathrm{d}t$$

because

$$\int_0^1 A\cos\left(2\pi t+\vartheta_N^*\right)\mathrm{d}t = 0.$$

By the Theorem 5.1 $\sqrt{k}\left(\vartheta_{k,n}^{**}-\vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}^{-1}\right)$.

6. Discussions

It is clear that we can continue the process and to reduce the time of learning using three and more-step MLE (see [13], where the construction of the Three-step MLE-process is discussed). The space $\mathbf{T}$ can be of more general nature. For example, it can be $\mathbb{R}^m$. The similar construction of one, two and Three-step MLE-processes in the case of nonlinear time-series were realized in the work [15]. The numerical simulation of the Two-step MLE-process presented there show the good convergence of the estimation process to the true value. The same construction was used in [8] in the problem of parameter estimation for partially observed system. Note that the Multi-step MLE-processes were used in the problems of approximation of the solution of the Backward Stochastic Differential Equation (see, e.g. [11], [14]).

Acknowledgement. We are grateful to the Referee for the careful reading of this manuscript and the useful comments.

Список литературы

[1] S. Albeverio, L.-J Lacb and X.-L. Zhace, Continuous Time Financial Market with a Poisson Process, Springer, N.Y. (2002).

[2] I. Bar-David, "Communication under Poisson regime", IEEE Trans. Inform. Theory, IT-15, 1, 31 – 37 (1969).

[3] P. Blæsild, J. Granfeldt, Statistics with Applications in Biology and Geology, Chapman & Hall, London (2003).

[4] A. A. Borovkov, Mathematical Statistics, Gordon & Breach, Amsterdam (1998).

[5] R. Davies, "Testing the hypothesis that a point process is Poisson", Adv. Appl. Probab., 9, 724 – 746 (1977).

[6] I. A. Ibragimov, R. Khasminskii, Statistical Estimation - Asymptotic Theory, Springer-Verlag, New York (1981).

[7] K. Kamatani, M. Uchida, Hybrid Multi-step estimators for stochastic differential equations based on sampled data, Stat. Inference Stoch. Process., 18, no. 2, 177 – 204 (2015).

[8] R. Z. Khasminskii, Yu. A. Kutoyants, "On parameter estimation of hidden telegraph process", Bernoulli, 24, no. 3, 2064 – 2090 (2018).

[9] Yu. A. Kutoyants, Parameter Estimation for Stochastic Processes, Heldermann, Berlin (1984).

[10] Yu. A. Kutoyants, Statistical Inference for Spatial Poisson Processes, Springer-Verlag, N. Y. (1998).

[11] Yu. A. Kutoyants, "On approximation of the backward stochastic differential equation. Small noise, large samples and high frequency cases", Proc. Steklov Inst. Math., 287, 133 – 154 (2014).

[12] Yu. A. Kutoyants, "On the Multi-step MLE-process for ergodic diffusion", Stoch. Process. Appl., 127, 2243 – 2201 (2017).

[13] Yu. A. Kutoyants, Introduction to Statistics of Poisson Processes,. to appear (2019).

[14] Yu. A. Kutoyants, "On approximation of BSDE and Multi-step MLE-processes", Probab. Uncertain. Quant. Risk., 1, no. 4, 23 – 41 (2016).

[15] Yu. A. Kutoyants, A. Motrunich, "On Multi-step MLE-process for Markov sequences", Metrika, 79, no. 6, 705 – 724 (2016).

[16] L. Le Cam, "On the asymptotic theory of estimation and testing hypotheses", Proc. 3rd Berkeley Symposium I, 355 – 368 (1956).

[17] E. L. Lehmann, Elements of Large-Sample Theory, Springer, N. Y. (1999).

[18] R. Liptser, A. N. Shiryayev, Statistics of Random Processes, 2-nd ed., 1, 2, Springer, N.Y. (2005).

[19] S. E. Rigdon, A. P. Basu, Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems, New York: John Wiley & Sons, Inc. (2000).

[20] P. M. Robinson, "The stochastic difference between econometric statistics", Econometrica, 56, no. 3, 531 – 548 (1988).

[21] S. K. Sarkar, Single Molecule Biophysics and Poisson Process Approach to Statistical Mechanics, Morgan & Claypool, San Rafael CA (2016).

[22] D. R. Snyder, M. I. Miller, Random Point Processes in Time and Space, Springer, N. Y. (1991).

[23] M. Uchida, N. Yoshida, "Adaptive estimation of ergodic diffusion process based on sampled data", Stoch. Process. Appl., 122, 2885 – 2924 (2012).

[24] T. Utsu, Y. Ogata, R. Matsu'ura, "The centenary of the Omori formula for a decay law of aftershock activity", J. Phys. Earth, 43, 1 – 33 (1995).

Поступила 4 июля 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 4, 2018, стр. 46 – 65

О РАЗРЕШИМОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В R^n

Г. А. КАРАПЕТЯН, Г. А. ПЕТРОСЯН

Российско-Армянский университет
E-mails: *garnik_karapetyan@yahoo.com, heghin.petrosyan@gmail.com*

Аннотация. В работе с помощью специальных интегральных представлений функций через регулярный оператор доказывается однозначная разрешимость регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных весовых функциональных пространствах. Причем существование решений доказывается через построения приближенных решений с помощью мультианизотропных интегральных операторов.

MSC2010 number: 32Q40.

Ключевые слова: мультианизотропное пострaнство; гипоэллиптическое уравнение; интегральное представление; фундаментальное семейство операторов.

1. Введение

В данной работе изучается разрешимость одного класса гипоэллиптических уравнений в R^n. Она является обобщением результатов работ Г.В. Демиденко [1]-[3], где с помощью специального интегрального представления, полученного С.В. Успенским в работе [4], построены приближенные решения для квазиэллиптических уравнений во всем пространстве. Трудность изучения регулярных гипоэллиптических уравнений заключается в том, что если старшие части эллиптических и квазиэллиптических операторов соответственно однородны и обобщенно однородны, то старшая часть регулярного оператора – мультинеоднородная. Регулярные операторы введены С.М. Никольским (см. [5]) и В.П. Михайловым (см. [6]) (см. также [7]). При получении настоящих результатов, по сущеcтву, были использованы специальное интегральное представление через мультианизотропные ядра и оценки для мультианизотропных ядер, полученных в работах [8]-[11]. Отметим, что первые такие приближения изучались в работе [12] С.Л. Соболева, где получены итегральное представление функций через саму

[0]Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОН РФ и при поддержке тематического финансирования комитета науки при министерстве образования и науки РА (код проекта SCS # 15T-1A197).

функцию и ее производные. В дальнейшем эти результаты были обобщены для функций, принадлежащих обобщенно однородным пространствам (см. [13]-[15]). В работе доказывается разрешимость регулярных уравнений в специальных весовых пространствах. Подобные пространства в случае $\sigma = 1$ для эллиптических операторов изучались в работах [16]-[17], а для квазиэллиптических операторов – в работе [18]. В случае же произвольных $\sigma \in (0,1)$ подобные пространства были введены в работах Г. В. Демиденко (см. [1]).

2. Приближенные решения для регулярных уравнений и их свойства

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидовое пространство, а $\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов из $\mathbb{R}^n$. Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $t > 0$ введем следующие обозначения: $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $t^\eta = (t^{\eta_1}, \dots, t^{\eta_n})$, $D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, \dots, n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ есть обобщенная производная по С.Л. Соболеву порядка α.

Для данного набора мультииндексов обозначим через $\mathfrak{N}$ наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки этого набора. Многогранник $\mathfrak{N}$ называется вполне правильным, если имеет вершину в начале координат и на всех координатных осях, а внешние нормали всех $(n-1)$-мерных некоординатных граней имеют положительные координаты. Через $\mathfrak{N}_i^{n-1}$ $(i = 1, \dots, I_{n-1}, I_{n-1} \geq n)$ обозначим $(n-1)$-мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{N}$, через $\partial'\mathfrak{N}$ – множество всех тех мультииндексов, которые принадлежат хотя бы одной $(n-1)$-мерной некоординатной грани многогранника $\mathfrak{N}$, через $\mathfrak{N}^{(0)} = \mathfrak{N} \setminus \partial'\mathfrak{N}$, а $\{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^M\}$ – множество всех вершин многогранника $\mathfrak{N}$, отличных от нуля.

Пусть μ^i $(i = 1, \dots, I_{n-1})$ есть такая внешняя нормаль грани $\mathfrak{N}_i^{n-1}$, при которой уравнение гиперплоскости, содержащей данную грань, задается формулой $(\alpha, \mu^i) = 1$ $(i = 1, \dots, I_{n-1})$. Далее будем считать, что многогранник $\mathfrak{N}$ имеет $(n-1)$-мерные грани, содержащие точки $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\} \setminus \{\alpha^i\}$ $(i = 1, \dots, n)$, где $\alpha^i = (0, \dots, 0, l_i, 0, \dots, 0)$. Внешнюю нормаль данной грани обозначим через μ^i $(i = 1, \dots, n)$. Обозначим также через $\lambda_i = \frac{1}{l_i}$ $(i = 1, \dots, n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ есть точка пересечения гиперплоскостей, содержащих n-мерные грани с внешними нормалями $\mu^1, \dots, \mu^n$, и для определенности предположим, что $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{n-r} \leq \gamma_{n-r+1} \leq \dots \leq \gamma_n$, где $r = 0, 1, \dots, n-1$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P(D) = \sum_{\alpha \in \partial'\mathfrak{N}} a_\alpha D^\alpha \tag{2.1}$$

с действительными коэффициентами a_α. Предположим, что оператор $P(D)$ есть регулярный оператор, то есть существует постоянное число $\chi > 0$ такое, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$(2.2) \qquad |P(\xi)| = \left| \sum_{\alpha \in \partial'\mathfrak{N}} a_\alpha \xi^\alpha \right| \geq \chi \sum_{\alpha \in \partial'\mathfrak{N}} |\xi^\alpha|.$$

Для положительного параметра ν и натурального k положим $G_0(\xi, \nu) = e^{-(\nu P(\xi))^{2k}}$, $G_1(\xi, \nu) = 2ke^{-(\nu P(\xi))^{2k}}(\nu P(\xi))^{2k-1}$, а $\hat{G}_0(t, \nu)$, $\hat{G}_1(t, \nu)$ есть преобразование Фурье для данных функций. Известны (см. [10]) следующие оценки для функций $\hat{G}_l(t, \nu)$, $(l = 0, 1)$.

Лемма 2.1. *Пусть* $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{n-r} \leq \gamma_{n-r+1} \leq \cdots \leq \gamma_n$ $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$. *Тогда для любого мультииндекса* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *и любого четного числа* N $(N > N_0)$ *существуют постоянные* C_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, *такие, что для любого* $\nu : 0 < \nu < 1$ *имеют места нерваенства*

$$\left| D^m \hat{G}_l(t, \nu) \right| \leq \nu^{-\max\limits_{i=1,\ldots,n-1}(|\mu^i| + (m, \mu^i))}$$

$$(2.3) \qquad \frac{C_{n-1}|\ln \nu|^{n-1} + \cdots + C_1|\ln \nu| + C_0}{(1 + \nu^{-N}(t^{N\gamma} + t^{N\beta} + \cdots + t^{N\sigma})) \ldots (1 + \nu^{-N}(t^{N\gamma} + t^{N\delta} + \cdots + t^{N\tau}))},$$

где $(\{\gamma, \beta, \ldots, \sigma\}, \ldots, \{\gamma, \delta, \ldots, \tau\})$ *есть некоторый комплект* n *векторов, а* $l = 0, 1$.

Лемма 2.2. *Пусть вектор* γ *удовлетворяет условию леммы 2.1. Тогда существуют такие числа* C_i $(i = 0, 1, \ldots, l)$ *и такое натуральное* N_0, *что для любого числа* $N : N > N_0$ *и любого* $\nu : 0 < \nu < 1$ *имеет место неравенство*

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{dt_1 dt_2 \ldots dt_n}{(1 + \nu^{-N}(t^{N\gamma} + t^{N\beta} + \cdots + t^{N\sigma})) \ldots (1 + \nu^{-N}(t^{N\gamma} + t^{N\delta} + \cdots + t^{N\tau}))} \leq$$

$$(2.4) \qquad \nu^{\min\limits_{i=1,\ldots,r+1}|\mu^i|} \Big(C_l|\ln \nu|^l + \cdots + C_1|\ln \nu| + C_0 \Big),$$

где l — *количество равенств между координатами вектора* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.

Лемма 2.3. *Существует постоянная* $C > 0$, *что для любого* $\nu > 1$ *имеют места неравенства*

$$(2.5) \qquad \left| D^m \hat{G}_l(t, \nu) \right| \leq \frac{C\nu^{-(|\lambda| + (m, \lambda))}}{1 + \nu^{-N}|t|_\lambda^N},$$

где $|t|_\lambda = \left(t_1^{2l_1} + \cdots + t_n^{2l_n} \right)^{1/2}$, *а* $l = 0, 1$.

Для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначим (см. [8])

$$U_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_h^{h^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t-x,\xi)} G_1(\xi,\nu) d\xi dt. \tag{2.6}$$

С помощью вершин $\alpha^i : \alpha^i \neq 0$ ($i = 1, \dots, M$) многогранника $\mathfrak{N}$ введем мультианизотропное расстояние $\rho_{\mathfrak{N}}(x) = \left(\sum_{i=1}^{M} x^{2\alpha^i}\right)^{1/2}$ и весовые пространства $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, которые являются пополнением пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} \left\| (1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1 - \max_i (\mu^i, \alpha))} D_x^\alpha U(x) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.7}$$

где $0 < \sigma < 1$.

Обозначим также через $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ пространство суммируемых функций, имеющих конечную норму $\|U\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \left\| (1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\gamma} U(x) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$.

Через $\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ обозначим подпространство функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma = -(\sigma + N|\lambda|)$, таких, что $\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta f(x) dx = 0$, $|\beta| = 0, 1, \dots, N-1$.

Лемма 2.4. *Пусть $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$ при $h : 0 < h < 1$*

$$\left\| D^\beta U_h \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.8}$$

и при $0 < h_1 < h_2 < 1$

$$\left\| D^\beta U_{h_1} - D^\beta U_{h_2} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon(h_1, h_2) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.9}$$

где $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$ при $h_1, h_2 \to 0$.

Доказательство. Пусть $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$, то есть существует μ^{i_0}, что $(\beta, \mu^{i_0}) = 1$. Из представления для $U_h(x)$ имеем, что

$$D_x^\beta U_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_h^{h^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t-x,\xi)} \xi^\beta G_1(\xi,\nu) d\xi dt.$$

Отсюда, применяя теорему Фубини, имеем

$$D_x^\beta U_h(x) = \int_h^{h^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \xi^\beta e^{i(x,\xi)} G_1(\xi,\nu) d\xi.$$

В последней формуле, еще раз применяя теорему Фубини, получаем

$$D_x^\beta U_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \xi^\beta e^{i(x,\xi)} (2k) \int_h^{h^{-1}} (\nu P(\xi))^{2k-1} e^{-(\nu P(\xi))^{2k}} d\nu d\xi =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (2k) \frac{\hat{f}(\xi)\xi^\beta}{P(\xi)} e^{i(x,\xi)} \int_{hP(\xi)}^{h^{-1}P(\xi)} t^{2k-1} e^{-t^{2k}} dt d\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widetilde{F_h(\xi)\hat{f}(\xi)}, \tag{2.10}$$

где $\hat{f}$ есть обратное преобразование Фурье, а

$$F_h(\xi) = (2k)\frac{\xi^\beta}{P(\xi)}\int_{hP(\xi)}^{h^{-1}P(\xi)} t^{2k-1}e^{-t^{2k}}dt.$$

Из представления (2.10) следует, что для некоторой постоянной $C > 0$ будет иметь место неравенство (2.8), если докажем, что функция $F_h(\xi)$ есть (L_p, L_p) мультипликатор (см. [19]), который равномерно ограничен по h.

Имеем

$$|F_h(\xi)| \le C\left|\frac{\xi^p}{P(\xi)}\right| \cdot \int_0^{+\infty} t^{2k-1}e^{-t^{2k}}dt \le M,$$

потому что при $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$, как показано в работе [20], $\xi^\beta/P(\xi)$ является мультипликатором, следовательно, для некоторой постоянной $M_1 > 0$ $|\xi^\beta/P(\xi)| \le M_1$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$. Так как произведение двух мультипликаторов опять мультипликатор, то достаточно показать, что $\int_{hP(\xi)}^{h^{-1}P(\xi)} t^{2k-1}e^{-t^{2k}}dt$ является мультипликатором. Для этого оценим

$$\left|\xi_i D_{\xi_i}\int_{hP(\xi)}^{h^{-1}P(\xi)} t^{2k-1}e^{-t^{2k}}dt\right| \le$$

$$\left|\xi_i h^{-1}P'_{\xi_i}(\xi)\big(h^{-1}P(\xi)\big)^{2k-1}e^{-\left(h^{-1}P(\xi)\right)^{2k}}\right| + \left|\xi_i hP'_{\xi_i}(\xi)(hP(\xi))^{2k-1}e^{-(hP(\xi))^{2k}}\right| =$$

$$\left|\frac{\xi_i P'_{\xi_i}(\xi)}{P(\xi)}\right|\big(h^{-1}P(\xi)\big)^{2k}e^{-\left(h^{-1}P(\xi)\right)^{2k}} + \left|\frac{\xi_i P'_{\xi_i}(\xi)}{P(\xi)}\right|(hP(\xi))^{2k}e^{-(hP(\xi))^{2k}} \le C,$$

где C, не зависящее от h, постоянное число, а $i = 1, \dots, n$.

Аналогичным образом можно доказать, что $\left|\xi_1^{k_1}\dots\xi_n^{k_n}\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial\xi_1^{k_1}\dots\partial\xi_n^{k_n}}F_h(\xi)\right| \le M$, где k_i $(i = 1, \dots, n)$ равны 0 или 1. То есть выполняются условия теоремы П.И. Лизоркина (см. [19]), откуда следует, что $F_h(\xi)$ есть (L_p, L_p) мультипликатор, и, следовательно, для некоторой постоянной $C > 0$ имеет место неравенство (2.8).

Докажем оценку (2.9). Так как

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_t^m\hat{G}_1(t,\nu)t^\alpha dt = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t,\xi)}(-\xi)^m G_1(\xi,\nu)d\xi dt =$$

$$\frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} D_\xi^\alpha((-\xi)^m G_1(\xi,\nu))e^{-i(t,\xi)}d\xi\right)dt =$$

$$(-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{\frac{n}{2}}D_\xi^\alpha((-\xi)^m G_1(\xi,\nu))|_{\xi=0},$$

то k можно выбрать так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_t^m\hat{G}_1(t,\nu)t^\alpha dt =$$

$$(-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{\frac{n}{2}}D_\xi^\alpha\left((-\xi)^m e^{-(\nu P(\xi))^{2k}}(2k)(\nu P(\xi))^{2k-1}\right)|_{\xi=0} = 0 \tag{2.11}$$

для любого $\alpha : |\alpha| \leq l$, где l – наперед заданное число.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Выберем функцию $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, чтобы $\left\|f - \tilde{f}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$ и $\left\|D^\alpha \tilde{f}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\alpha,\varepsilon}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ для любого $\alpha : |\alpha| \leq l$.

Допустим, что $h_1 < h_2 < 1$. Тогда имеем

$$\left\|D^\beta U_{h_1} - D^\beta U_{h_2}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\left\|\int_{h_1}^{h_1^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta \hat{G}_1(t - \cdot, \nu)[f - \tilde{f}]dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\int_{h_2}^{h_2^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta G_1(t - \cdot, \nu)[f - \tilde{f}]dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ \left\|\int_{h_2^{-1}}^{h_1^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta \hat{G}_1(t - \cdot, \nu)\tilde{f}dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\int_{h_1}^{h_2} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta \hat{G}_1(t - \cdot, \nu)\tilde{f}dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. С помощью уже доказанного неравенства (2.8) для I_1 и I_2 имеем оценку $I_1, I_2 \leq C\left\|f - \tilde{f}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$. Оценим I_3. Так как $1 < h_2^{-1} < h_1^{-1}$, то, применяя неравенство Юнга и оценку (2.5) для $\hat{G}_1(t,\nu)$ при $\nu > 1$ (см. лемму 2.3), имеем

$$I_3 \leq C\int_{h_2^{-1}}^{\infty} \left\|D^\beta \hat{G}_1(\cdot,\nu)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\nu \cdot \left\|\tilde{f}\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$C\int_{h_2^{-1}}^{\infty} \nu^{-|\lambda|-(\lambda,\beta)+\frac{|\lambda|}{p}} \left\|\frac{1}{1+|t|_\lambda^N}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\nu \cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$Ch_2^{|\lambda|+(\lambda,\beta)-\frac{|\lambda|}{p}-1}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $h_2 \to 0$, так как $(\lambda, \beta) \geq 1$.

Оценим I_4.

$$I_4 = \left\|\int_{h_1}^{h_2} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D_t^\beta \hat{G}_1(t,\nu)\tilde{f}(x+t)dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$\left\|\int_{h_1}^{h_2} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D_t^\beta \hat{G}_1(t,\nu)\left[\tilde{f}(x+t) - \sum_{|\alpha|\leq l}\frac{t^\alpha}{\alpha!}\tilde{f}^{(\alpha)}(x)\right]dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где в квадратной скобке по свойству (2.11) при интегрировании все члены приравниваются к нулю, кроме $\tilde{f}(x+t)$. Так как по формуле Тейлора квадратная скобка равна $\sum\limits_{|\alpha|=l+1}\frac{t^\alpha}{\alpha!}\tilde{f}^{(\alpha)}(t + \theta_\alpha(t)x)$, то при $\nu < 1$, из (2.3) и (2.4) следует, что

$$\left|t^\alpha D^\beta \hat{G}_1(t,\nu)\right| \leq \nu^{\min(-|\alpha^*|-(\beta,\alpha^*)+(\alpha,\alpha^*))}.$$

$$\frac{C_{n-1}|\ln\nu|^{n-1}+\cdots+C_1|\ln\nu|+C_0}{(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+t^{N\beta}+\cdots+t^{N\sigma}))\dots(1+\nu^{-N}+(t^{N\gamma}+t^{N\delta}+\cdots+t^{N\tau}))},$$

и, следовательно, применяя неравенство Юнга, для I_4 имеем

$$I_4 \le C\sum_{|\alpha|=l+1}\int_0^{h_2}\left\|t^\alpha D_t^\beta \hat{G}_1(t,\nu)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}d\nu\cdot\left\|\bar{f}^{(\alpha)}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\sum_{|\alpha|=l+1}\int_0^{h_2}\nu^{-\max_i(|\mu^i|+(\beta,\mu^i)-(\alpha,\mu^i))+\min_{i=1,\dots,r+1}|\mu^i|}.$$

$$(C_{n+l-1}|\ln\nu|^{n+l-1}+\cdots+C_1|\ln\nu|+C_0)d\nu\cdot C_{\alpha,\varepsilon}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\sum_{|\alpha|=l+1}h_2^{-\max_i(|\mu^i|+(\beta,\mu^i)-(\alpha,\mu^i))+\min_{i=1,\dots,r+1}|\mu^i|+1}.$$

$$(a_{\alpha,n+l-1}|\ln h_2|^{n+l-1}+\cdots+a_{\alpha,1}|\ln h_2|+a_{\alpha,0})\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для некоторых постоянных $a_{\alpha,0},a_{\alpha,1},\dots,a_{\alpha,n+l-1}$. Так как l — произвольное число, то l можно выбрать так, чтобы функция по h_2 в последней формуле стремилась к нулю при $h_2\to 0$. Тогда имеем, что $I_4\to 0$ при $h_2\to 0$, и тем самым лемма 2.4 доказала. □

Предположим, что для многогранника $\mathfrak{N}$ выполняется условие $\max\limits_{\substack{i=1,\dots,I_{n-1}\\ \beta\in\mathfrak{N}^{(0)}}}(|\mu^i|+(\beta,\mu^i))-\min\limits_{i=1,\dots,r+1}|\mu^i|<1$.

Лемма 2.5. *Пусть $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^\sigma f\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $|\lambda|>1$, $\frac{|\lambda|}{p}>\sigma>1-\frac{|\lambda|}{p'}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$. Тогда для любого $\beta\in\mathfrak{N}^{(0)}$ при $h:0<h<1$*

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}D_x^\beta U_h(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}+\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right)\tag{2.12}$$

и при $0<h_1<h_2<1$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}(D_x^\beta U_{h_1}(x)-D_x^\beta U_{h_2}(x))\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\varepsilon(h_1,h_2)\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}+\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right),\tag{2.13}$$

где $\varepsilon(h_1,h_2)\to 0$ при $h_1,h_2\to 0$.

Доказательство. В силу неравенства Минковского имеем

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}D_x^\beta U_h(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}\int_h^1 d\nu\int_{\mathbb{R}^n}f(t)D_x^\beta\hat{G}_1(t-x,\nu)dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}+$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}\int_1^{h^{-1}} d\nu\int_{\mathbb{R}^n}f(t)D_x^\beta\hat{G}_1(t-x,\nu)dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=I_1+I_2.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Применяя оценки (2.3) и (2.4) для $\hat{G}_1(t,\nu)$ при $0<\nu<1$ и неравенство Юнга, для I_1 получим

$$I_1\le C\int_h^1 d\nu\left\|D^\beta\hat{G}_1(t,\nu)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\cdot\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le\int_h^1 d\nu\,\nu^{-\max_j(|\mu^j|+(\beta,\mu^j))}\cdot$$

$$\left(C_{n-1}|\ln\nu|^{n-1}+\cdots+C_1|\ln\nu|+C_0\right)\cdot$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dt_1\dots dt_n}{(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+\cdots+t^{N\sigma}))\dots(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+\cdots+t^{N\gamma}))}\cdot\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\int_h^1\nu^{-\max_j(|\mu^j|+(\beta,\mu^j))+\min_{j=1,\dots,n+1}|\mu^j|}\cdot$$

$$\left(C_{n+l-1}|\ln\nu|^{n+l-1}+\cdots+C_1|\ln\nu|+C_0\right)d\nu\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Оценим I_2. Учитывая, что $\rho_{\mathfrak{N}}(x-y)(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-1}\le a(1+\rho_{\mathfrak{N}}(y))$ и, применяя неравенство Юнга, имеем

$$I_2\le C\int_1^{h^{-1}}d\nu$$

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\rho_{\mathfrak{N}}(x-t)^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}D_x^\beta\hat{G}_1(t-x,\nu)(1+\rho_{\mathfrak{N}}(t))^{\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}f(t)dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$C\int_1^{h^{-1}}d\nu\left\|\rho_{\mathfrak{N}}(x)^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x,\xi)}\xi^\beta G_1(\xi,\nu)d\xi\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\cdot$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(t))^{\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}f(t)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.\tag{2.14}$$

Используя неравенство (2.5) при $\nu>1$, первая норма будет меньше или равна

$$C\left\|\left(\sqrt{x_1^{2l_1}+\cdots+x_n^{2l_n}}\right)^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}\frac{\nu^{-(|\lambda|+(\beta,\lambda))}}{1+\nu^{-N}|x|_\lambda^N}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

В полученной оценке, делая замену переменных $x=\nu^\lambda\eta$ и, учитывая, что $N>N_0$, имеем, что первый множитель неравенства (2.14) оценивается через интеграл

$$C\int_1^{h^{-1}}\frac{d\nu}{\nu^{|\lambda|+(\beta,\lambda)+\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))-\frac{|\lambda|}{p}}}.$$

Так как $\sigma p < |\lambda|$, $1-\frac{|\lambda|}{p} < \sigma$, $|\lambda| > \max_{j} |\mu^j|$, $\sigma < 1$, то $\frac{|\lambda|}{p} + \sigma + (\beta, \lambda) - \sigma \max_{j}(\beta, \mu^j) > 1$, данный интеграл сходится, и для I_2 имеем оценку

$$I_2 \leq C \left\| (1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max_{j}(\beta,\mu^j))} f(x) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Тем самым неравенство (2.12) доказано. Неравенство (2.13) доказывается так же, как и в лемме 2.4. $\square$

Предложение 2.1. *Пусть $\theta(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ — многочлен с постоянными коэффициентами и $\mathfrak{N}(\theta) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, \gamma_\alpha \neq 0\}$. Для того чтобы существовала постоянная $C > 0$ такая, чтобы имело место неравенство*

$$|\theta(\xi)| \leq C \rho_{\mathfrak{N}}(\xi)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, при которых $\rho_{\mathfrak{N}}(\xi) > 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathfrak{N}(\theta) \subset \mathfrak{N}.$$

Доказательство см. в [7].

Обозначим через $c_0 = \min_{1\leq i\leq n} \frac{\min_{1\leq l\leq I_{n-1}} \mu_i^l}{\max_{1\leq l\leq I_{n-1}} \mu_i^l}$ и назовем показателем регулярности оператора $P(D)$.

Лемма 2.6. *Для того чтобы для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, при которых $|P(\xi)| > 1$, с некоторыми положительными постоянными $c > 0$ и A выполнялось неравенство*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right| < A |P(\xi)|^{-c \max_{1\leq l\leq I_{n-1}} (\alpha,\mu^l)}, \tag{2.15}$$

необходимо и достаточно, чтобы $c \leq c_0$.

Доказательство. Если $|P(\xi)| > 1$, то для любого $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ с некоторой постоянной $C > 1$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{C} \sum_{j=1}^{M} \left|\xi^{\alpha^j}\right|^{1-c \max_{1\leq l\leq I_{n-1}} (\alpha,\mu^l)} \leq |P(\xi)|^{1-c \max_{1\leq l\leq I_{n-1}} (\alpha,\mu^l)} \leq C \sum_{j=1}^{M} \left|\xi^{\alpha^j}\right|^{1-c \max_{1\leq l\leq I_{n-1}} (\alpha,\mu^l)}.$$

Следовательно, в силу предположеная 2.1 оценка (2.15) эквивалентна следующему вложению:

$$\mathfrak{N}\left(P^{(\alpha)}\right) \subset \mathfrak{N}\left(1 - c \max_{1\leq l\leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^l)\right) \tag{2.16}$$

для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что вложение (2.16) выполняется тогда и только тогда, когда $c \leq c_0$.

Сначала покажем, что если имеет место вложение (2.16), то $c \leq c_0$.

Пусть $\alpha = e^j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)$. Для любых i, j: $1 \leq i \leq I_{n-1}$, $1 \leq j \leq n$ очевидно существует вершина β на $\mathfrak{N}^{n-1}$ такая, что $(\beta, \mu^i) = 1$ и $\beta_j \geq 1$.

Так как $\beta - \alpha = \beta - e^j \in \mathfrak{N}\left(P^{(\alpha)}\right)$, то по условию (2.16) $\mathfrak{N}(P^{(\alpha)}) \subset \mathfrak{N}\left(1 - c \max\limits_{1 \leq l \leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^l)\right)$ и

$$(\beta - \alpha, \mu^i) \leq 1 - c \max_{1 \leq l \leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^l)$$

для любого $i : i \leq 1 \leq I_{n-1}$, то есть

$$1 - \mu^i_j = (\beta, \mu^i) - (\alpha, \mu^i) = (\beta - \alpha, \mu^i) \leq 1 - c \max_{1 \leq l \leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^l) \leq 1 - c \max_{1 \leq l \leq I_{n-1}} \mu^l_j.$$

Откуда

$$c \leq \frac{\mu^l_j}{\max\limits_{1 \leq l \leq I_{n-1}} \mu^l_j}$$

для любого $1 \leq l \leq I_{n-1}$, $1 \leq j \leq n$. Следовательно,

$$c \leq \min_{1 \leq j \leq n} \frac{\min\limits_{1 \leq l \leq I_{n-1}} \mu^l_j}{\max\limits_{1 \leq l \leq I_{n-1}} \mu^l_j} = c_0.$$

Обратное. Покажем, что при $c \leq c_0$ имеет место вложение (2.16). Пусть $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$. Так как $\mathfrak{N}(P^{(\alpha)}) \subset \mathfrak{N}\{\beta - \alpha, \beta \in (P^{(\alpha)}), \beta \geq \alpha\}$, то для любого $l : 1 \leq l \leq I_{n-1}$ имеем

$$(\beta - \alpha, \mu^l) = (\beta, \mu^l) - (\alpha, \mu^l) \leq 1 - (\alpha, \mu^l) = 1 - c_0 \left(\alpha, \frac{\mu^l}{c_0}\right).$$

В силу определения числа c_0 для любых $l, i : 1 \leq l, i \leq I_{n-1}$

$$\frac{\mu^l}{c_0} \geq \mu^i.$$

Следовательно, для любых $l, i : 1 \leq l, i \leq I_{n-1}$

$$(\beta - \alpha, \mu^l) = 1 - c_0 \left(\alpha, \frac{\mu^l}{c_0}\right) \leq 1 - c_0 (\alpha, \mu^i) \leq 1 - c_0 \max_{1 \leq i \leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^i),$$

то есть

$$(\beta - \alpha, \mu^l) \leq 1 - c_0 \max_{1 \leq i \leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^i) \leq 1 - c \max_{1 \leq i \leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^i)$$

для любого $l : 1 \leq l \leq I_{n-1}$, значит

$$\beta - \alpha \in \mathfrak{N}(1 - c \max_{1 \leq i \leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^i))$$

при всех $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ и $\beta \in (P)$.

Так как $\mathfrak{N}(1 - c \max\limits_{1 \leq i \leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^i))$ — выпуклый многогранник и $(P^{(\alpha)}) = \{\beta - \alpha, \beta \in (P), \beta \geq \alpha\}$, то $\mathfrak{N}(P^{(\alpha)}) \subset \mathfrak{N}(1 - c \max\limits_{1 \leq i \leq I_{n-1}} (\alpha, \mu^i))$ для любого $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$. $\square$

Пусть $\chi(s) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le s \le 1 \\ 0 \text{ при } s \ge 2 \end{cases}$ и $\chi \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^1_+})$.

Лемма 2.7. *Если выполняются условия леммы 2.5, то для любых h и σ $(0 < h < 1, 0 \le \sigma < 2c_0)$ и для любого мультииндекса $\beta \in \mathfrak{N}$ при $\rho \to \infty$ имеет место соотношение*

(2.17)
$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max(\beta,\mu^i))}\left(D_x^\beta\left(U_h(x) - U_h(x)\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)\right)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Доказательство. Пусть $\beta = 0$. Тогда из определения функции $\chi(s)$ имеем
$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}\left(U_h(x) - U_h(x)\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$
$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}U_h(x)\right\|_{L_p(\rho_{\mathfrak{N}}(x)>\rho)} \to 0$$
при $\rho \to \infty$, так как из леммы 2.5 $U_h \in L_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь $\beta \ne 0$. Тогда по формуле Лейбница имеем
$$D_x^\beta\left(U_h(x) - U_h(x)\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right) = D_x^\beta U_h(x)\left(1-\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right) -$$
$$U_h(x)D_x^\beta\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right) - \sum_{\substack{s+q=\beta \\ |s|,|q|>0}} C_{s,q}D_x^s U_h(x) D_x^q\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right) = \Phi_{1,\rho} + \Phi_{2,\rho} + \Phi_{3,\rho}.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Учитывая леммы 2.4 и 2.5, как и в работе [1], для $\Phi_{1,\rho}$ имеем
$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max(\beta,\mu^i))}\Phi_{1,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$
$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max(\beta,\mu^i))}D^\beta U_h(x)\right\|_{L_p(\rho_{\mathfrak{N}}(x)>\rho)} \to 0$$
при $\rho \to \infty$, так как $D^\beta U_h \in L_{p,\sigma}$ для любого $\beta \in \mathfrak{N}$. Аналогичные оценки докажем для $\Phi_{2,\rho}$ и $\Phi_{3,\rho}$. По формуле Франкела (см. [21]) о производной сложной функции имеем, что

(2.18)
$$D^\beta\chi(\varphi(x_1,\dots,x_n)) = \sum_{i=1}^{|\beta|}\chi_s^{(i)}(s)|_\varphi \cdot Q_{\beta,i}(\varphi),$$

где $Q_{\beta,i}(\varphi)$ есть однородный многочлен порядка i и имеет вид
$$Q_{\beta,i}(\varphi) = \sum_{r^1+\dots+r^n=\beta} P^i_{r^1}(\varphi)\dots P^i_{r^n}(\varphi),$$

где $i = 1, \ldots, |\beta|$. Причем при $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \rho^2_{\mathfrak{N}}(x)/\rho^2$ каждый из $P^l_{r^k}$ ($l = 1, \ldots, |\beta|$) имеет вид

$$P^l_{r^k}\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right) = \sum_{\theta \in R(r^k)} \frac{l!}{\theta!}\left(D^{\alpha^1}\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)^{\theta_1} \cdots \left(D^{\alpha^l}\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)^{\theta_l},$$

где $R(r^k) = \{\theta; \sum\limits_{i=1}^{l} \theta_i \alpha^i = r^k; |\theta| = l\}$, а $\alpha^1, \ldots, \alpha^l$ — векторы, для которых $0 < \alpha^i \leq r^k$ ($i = 1, \ldots, l$).

По лемме 2.6 для любого $i = 1, \ldots, l$ при $\rho_{\mathfrak{N}}(x) > 1$

$$\left(D^{\alpha^i}\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)^{\theta_i} \leq C\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)^{\theta_i} (\rho^2_{\mathfrak{N}}(x))^{-c_0\theta_i \max\limits_j(\alpha^i, \mu^j)}.$$

Так как

$$\sum_i \theta_i \max_j(\alpha^i, \mu^j) \geq \max_j \sum_i (\theta_i \alpha^i, \mu^j) = \max_j(r^k, \mu^j),$$

то имеем, что

$$\left|D^\beta_x \chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right| \leq \left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)^l (\rho^2_{\mathfrak{N}}(x))^{-c_0 \max\limits_j(\beta, \mu^j)},$$

где в силу определения функции $\chi(s)$ переменные $x_1, \ldots, x_n$ меняются в компакте $\overline{K_\rho} = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho \leq \rho_{\mathfrak{N}}(x) \leq \sqrt{2}\rho\}$. Следовательно, из леммы 2.6 следует, что для любого $\beta \in \mathfrak{N}$ существует некоторая постоянная $C > 0$, что имеет место неравенство

$$\left|D^\beta_x \chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right| \leq C\rho^{-2c_0 \max\limits_i(\beta, \mu^i)}, \tag{2.19}$$

и $\rho : \rho \geq 1$.

Исходя из неравенства (2.19), оценим $\Phi_{2,\rho}$ и $\Phi_{3,\rho}$. Так как функция $\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)$ отлична от нуля только в компакте $\overline{K_\rho}$, и все производные функции $\chi(s)$ ограничены, то для $\Phi_{2,\rho}$ имеем

$$\left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1 - \max\limits_i(\beta, \mu^i))} \Phi_{2,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1 - \max\limits_i(\beta, \mu^i))} U_h(x) D^\beta_x \chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right\|_{L_p(K_\rho)} \leq$$

$$C\rho^{-2c_0 \max\limits_i(\beta, \mu^i)} (1 + \sqrt{2}\rho)^{\sigma \max\limits_i(\beta, \mu^i))} \left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma} U_h(x)\right\|_{L_p(K_\rho)}.$$

Так как по лемме 2.5 $U_h \in L_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, то при $\sigma < 2c_0$ имеем, что

$$\left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1 - \max\limits_i(\beta, \mu^i))} \Phi_{2,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $\rho \to \infty$. Для $\Phi_{3,\rho}(x)$ имеем

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{M}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))}\Phi_{3,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$C\sum_{s+q=\beta}\left\|(1+\rho_{\mathfrak{M}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))}D_x^s U_h(x) D_x^q \chi\left(\frac{\rho_{\mathfrak{M}}^2(x)}{\rho^2}\right)\right\|_{L_p(K_\rho)} \leq$$

$$C\sum_{s+q=\beta}\rho^{-2c_0\max_i(q,\mu^i)}\left\|(1+\rho_{\mathfrak{M}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(s+q,\mu^i))}D_x^s U_h(x)\right\|_{L_p(K_\rho)} \leq$$

$$C\sum_{s+q=\beta}\rho^{-2c_0\max_i(q,\mu^i)}\rho^{\sigma\max_i(q,\mu^i)}\left(\sqrt{2}\right)^{\sigma\max_i(q,\mu^i)}\cdot$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{M}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(s,\mu^i))}D_x^s U_h(x)\right\|_{L_p(K_\rho)},$$

так как $\max_i(s+q,\mu^i) \leq \max_i(s,\mu^i) + \max_i(q,\mu^i)$.

По лемме 2.4 и 2.5 отсюда имеем, что при $\sigma < 2c_0$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{M}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))}\Phi_{3,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $\rho \to \infty$. □

Определение 2.1. *(см. [1]) Пусть V и W есть нормированные пространства. Семейство линейных операторов P_h $(h \in (0,1))$ фундаментально в паре $\{V, W\}$ при $h \to 0$, если для любого $h \in (0,1)$ оператор $P_h : V \to W$ ограничен, при этом*

$$\sup_h \|P_h\| \leq C < \infty, \tag{2.20}$$

и имеет место сходимость

$$\|P_{h_1} - P_{h_2}\| \to 0 \tag{2.21}$$

при $h_1, h_2 \to 0$.

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ обозначим $U_h = P_h f$. Исходя из лемм 2.4, 2.5 и 2.7, докажем следующую теорему:

Теорема 2.1. *Пусть $|\lambda| > 1$, $\frac{|\lambda|}{p} > \sigma > 1 - \frac{|\lambda|}{p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. Тогда семейство операторов P_h фундаментально в паре пространств $\{L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$.*

Доказательство. Из лемм 2.4, 2.5 и 2.7 следует, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ функция $U_h = P_h f$ принадлежит пространству $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (см. лемму 2.7), причем (см. леммы 2.4, 2.5)

$$\|U_h\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma} f(x)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right),$$

где постоянная C не зависит от f и h, $h \in (0,1)$, следовательно, выполняется условие (2.20), и

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max(\alpha,\mu^i))}(D^{\alpha}_x U_{h_1}(x) - D^{\alpha}_x U_{h_2}(x))\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\varepsilon(h_1,h_2)\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max(\alpha,\mu^i))} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right),$$

где $\varepsilon(h_1,h_2) \to 0$ при $h_1, h_2 \to 0$, то есть выполняется условие (2.21), следовательно, теорема 2.1 доказана. □

Для $|\lambda| \le 1$ имеем следующие аналоги лемм 2.5 и 2.7.

Лемма 2.8. *Пусть* $1 \ge |\lambda| > 1 - N\lambda_{\min}$, $\sigma < \min\{c_0, \frac{|\lambda|}{p}\}$, $\sigma > 1 - |\lambda| + \frac{|\lambda|}{p} - N\lambda_{\min}$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ *и для любых* $\beta \in \mathfrak{N}$ *при* $h: 0 < h < 1$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max(\beta,\mu^i))} D^{\beta}_x U_h(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max(\beta,\mu^i))+N|\lambda|} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right), \tag{2.22}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* h *и* f, *и при* $0 < h_1 < h_2 < 1$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max(\beta,\mu^i))}(D^{\beta}_x U_{h_1}(x) - D^{\beta}_x U_{h_2}(x))\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\varepsilon(h_1,h_2)\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max(\beta,\mu^i))+N|\lambda|} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right), \tag{2.23}$$

где $\varepsilon(h_1,h_2) \to 0$ *при* $h_1, h_2 \to 0$.

Доказательство. Докажем неравенство (2.22). Рассмотрим случай $\beta = 0$ (остальные случаи аналогичны). Как и в лемме 2.5, имеем

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma} U_h(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}\int_h^1 d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t-x,\xi)} G_1(\xi,\nu)\, d\xi\, dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} +$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}\int_1^{h^{-1}}d\nu\int_{\mathbb{R}^n}f(t)\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(t-x,\xi)}G_1(\xi,\nu)d\xi dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=I_1+I_2.$$

I_1 оценивается так же, как и в лемме 2.5. Оценим I_2. Так как $f\in\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$, то есть $\int_{\mathbb{R}^n}x^\beta f(x)dx=0$ при $|\beta|=0,1,\ldots,N-1$, то преобразование Фурье функции f можно записать в виде (см. [1])

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^1\cdots\int_0^1\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(\lambda_1\ldots\lambda_N y,\xi)}(-iy,\xi)^N f(y)dy\right)\cdot$$
$$\lambda_1^{N-1}\ldots\lambda_{N-2}^2\lambda_{N-1}d\lambda_1\ldots d\lambda_N.$$

Учитывая данную формулу, для I_2 имеем

$$I_2\leq C\int_1^{h^{-1}}d\nu\int_0^1\cdots\int_0^1\lambda_1^{N-1}\ldots\lambda_{N-2}^2\lambda_{N-1}\cdot$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x-\lambda_1\ldots\lambda_N y,\xi)}G_1(\xi,\nu)(-iy,\xi)^N f(y)d\xi dy\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}d\lambda_1\ldots d\lambda_N\leq$$

$$\sum_{|\rho|=N}C_\rho\int_1^{h^{-1}}d\nu\left\|(\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x,\xi)}G_1(\xi,\nu)\xi^\rho d\xi\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\cdot\|y^\rho(1+\rho_{\mathfrak{N}}(y))^\sigma f(y)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq\sum_{|\rho|=N}C_\rho\int_1^{h^{-1}}\nu^{-|\lambda|-(\lambda,\rho)}d\nu\,\|y^\rho(1+\rho_{\mathfrak{N}}(y))^\sigma f(y)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\cdot$$

$$\left\|\left(\sqrt{x_1^{2l_1}+\cdots+x_n^{2l_n}}\right)^{-\sigma}\frac{1}{1+\nu^{-K}\left(\sqrt{x_1^{2l_1}+\cdots+x_n^{2l_n}}\right)^{K}}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\leq$$

$$\sum_{|\rho|=N}C_\rho\int_1^{h^{-1}}\nu^{-|\lambda|-(\lambda,\rho)+\frac{|\lambda|}{p}-\sigma}d\nu\,\|y^\rho(1+\rho_{\mathfrak{N}}(y))^\sigma f(y)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\cdot$$

$$\left\|\frac{1}{\left(\sqrt{y_1^{2l_1}+\cdots+y_n^{2l_n}}\right)^\sigma\left(1+\left(\sqrt{y_1^{2l_1}+\cdots+y_n^{2l_n}}\right)^K\right)}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

В последнем интеграле сделали замену переменных $x=\nu^\lambda y$. Так как $\frac{|\lambda|}{p}>\sigma$, то при достаточно больших K интеграл по L_p сходится. Интеграл по ν тоже сходится, так как по условию $|\lambda|+(\lambda,\rho)-\frac{|\lambda|}{p}+\sigma>|\lambda|+N\lambda_{\min}-\frac{|\lambda|}{p}+\sigma>1$. В итоге имеем, что

$$I_2\leq C\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma+N|\lambda|}f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Аналогично доказывается неравенство (2.23). □

Лемма 2.9. *Пусть выполняются условия леммы 2.8, а функция $\chi(s)$ определена как выше. Тогда для любого $h \in (0,1)$ и $\beta \in \mathfrak{N}$ имеет место соотношение (2.17).*

Для доказательства нужно повторить те же шаги, что и при доказательстве леммы 2.7 с применением лемм 2.4 и 2.8.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия леммы 2.8. Тогда семейство операторов P_h фундаментально в паре пространств $\{\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$.*

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 2.1 (с применением лемм 2.8 и 2.9).

Для невесовых пространств (при $\sigma = 0$) имеем следующую теорему.

Теорема 2.3. *Пусть $|\lambda|\left(1-\frac{1}{p}\right) > 1$. Тогда семейство операторов P_h фундаментально в паре пространств $\{L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_1(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{N}}_p(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$. Если $|\lambda|\left(1-\frac{1}{p}\right) \le 1$ и $|\lambda|\left(1-\frac{1}{p}\right) + N\lambda_{\min} > 1 \ge |\lambda|\left(1-\frac{1}{p}\right) + (N-1)\lambda_{\min}$, то семейство операторов P_h фундаментально в паре пространств $\{\mathfrak{L}_{p,0,N}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{N}}_p(\mathbb{R}^n)\}$.*

3. Регулярные уравнения в $\mathbb{R}^n$

Исходя из результатов §2, докажем следующие теоремы о существовании и единственности решения следующего уравнения

$$P(D)U = f, \tag{3.1}$$

где $P(D)$ есть оператор (2.1), удовлетворяющий условию регулярности (2.2).

Теорема 3.1. *Пусть $|\lambda| > 1$, $\frac{|\lambda|}{p} > \sigma > 1 - |\lambda| + \frac{|\lambda|}{p}$. Тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ уравнение (3.1) имеет единственное решение U из класса $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, которое является пределом в классе $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ приближенных решений U_h, определенных формулой (2.6), при $h \to 0$. и существует постоянная $C > 0$, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ имеет место оценка*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим семейство операторов P_h и построим последовательность функций $U_k(x)$ по формуле

$$U_k(x) = P_{h_k} f(x), \tag{3.3}$$

где $h_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Если $|\lambda| > 1$, то, применяя теорему 2.1, имеем, что семейство операторов P_h фундаментально в паре пространств $\{L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_{1,\sigma}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$. А если $|\lambda| \le 1$, то по теореме 2.2 семейство операторов P_h фундаментально в паре $\{\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$. То есть при любом $|\lambda| > 0$, последовательность $\{U_k(x)\}$ фундаментальна в пространстве $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ по норме (2.7). А в силу полноты пространтсва $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ существует функция $U \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, такая, что

$$\|U_k - U\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $k \to \infty$. При этом при $|\lambda| > 1$ имеет место неравенство (2.12), а при $|\lambda| \le 1$ имеет место неравенство (2.22).

Из представления (2.1) работы [8] и из свойств усреднения f_h имеем, что почти для всех x-ов из $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_h^{h^{-1}} d\nu \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt. \tag{3.4}$$

С другой стороны, применяя формулу (2.6) и представление (3.3), имеем, что

$$P(D_x)U_k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{h_k}^{h_k^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} P(D_x)e^{-i(t-x,\xi)}G_1(\xi,\nu)d\xi dt =$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{h_k}^{h_k^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t-x,\xi)} \frac{\partial}{\partial \nu} G_0(\xi,\nu)d\xi dt =$$

$$-\int_{h_k}^{h_k^{-1}} d\nu \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ и применяя интегральное представление (3.4), можем утверждать, что U является решением уравнения (3.1). Учитывая лемму 2.4, имеем, что для любого $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ имеет место неравенство

$$\|D_x^\beta U\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.5}$$

Докажем единственность. Вначале предположим, что $U(x)$ есть финитное решение уравнения (3.1). Тогда после преобразования Фурье имеем, что $P(i\xi)\hat{U}(\xi) = 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. А так как $P(i\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то по свойству преобразования Фурье имеем, что $\hat{U}(\xi) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Но так как $\hat{U}(\xi)$ есть непрерывная функция, то $\hat{U}(\xi) = 0$ в $\mathbb{R}^n$, следовательно, $U(\xi) = 0$ в $\mathbb{R}^n$. То есть единственность решения уравнения (3.1) для финитных функций из $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ доказана.

Учитывая оценку (3.5), можно сказать, что для любой гладкой финитной функции $v \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ и для любого $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ имеет место неравенство

$$\left\|D^{\beta}_x v\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|P(D)v\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Рассмотрим общий случай. Пусть $U \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ является решением однородного уравнения $P(D)U = 0$. Докажем, что для любой ограниченной области G

$$\|U\|_{L_p(G)} = 0.$$

Так как $U \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, то из-за плотности финитных функций в $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ следует существование $U_\varepsilon \in W^{\mathfrak{N}}_p(\mathbb{R}^n)$, такой, что

$$\|U - U_\varepsilon\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \tag{3.6}$$

и по (3.5) для любого $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ имеет место неравенство

$$\left\|D^{\beta}_x U_\varepsilon\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|P(D_x)U_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Учитывая, что U является решением однородного уравнения $P(D)U = 0$, имеем, что

$$\left\|D^{\beta}_x U\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|D^{\beta}_x(U - U_\varepsilon)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C\|P(D)U_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как для оператора $P(D)$ отличны от нуля только те коэффициенты a_α, для которых $\alpha \in \partial'\mathfrak{N}$, то, применяя оценку (3.6), получим

$$\left\|D^{\beta}_x U\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{\beta\in\partial'\mathfrak{N}} |a_\beta| \left\|D^{\beta}_x(U - U_\varepsilon)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon \leq \varepsilon \cdot C \sum_{\beta\in\partial'\mathfrak{N}} |a_\beta| + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем, что $\left\|D^{\beta}_x U\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 0$ для любого $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$. Следовательно, для любой ограниченной области G $\|U\|_{L_p(G)} = 0$, и $U(x) = 0$ почти всюду на G. Так как G – произвольная область, то $U(x) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$. □

Аналогично для случая $|\lambda| \leq 1$ имеем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть* $1 \geq |\lambda| > 1 - N\lambda_{\min}$, $\sigma < \min\left\{c_0, \frac{|\lambda|}{p}\right\}$, $1 - |\lambda| + \frac{|\lambda|}{p} - (N - 1)\lambda_{\min} \geq \sigma > 1 - |\lambda| + \frac{|\lambda|}{p} - N\lambda_{\min}$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ *существует единственное решение* $U \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *уравнения (3.1), и существует постоянная* $C > 0$, *что для любой функции* $f \in \mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ *имеет место неравенство*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma+N|\lambda|} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{3.7}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 с применением теоремы 2.2.

Наконец, применяя теорему 2.3, для обычного мультианизотропного пространства имеем следующую теорему.

Теорема 3.3. *Если* $|\lambda| - \frac{|\lambda|}{p} > 1$, *то для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$ *уравнение (3.1) имеет единственное решение* $U \in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, *для которого справедливо неравенство (3.2) при* $\sigma = 0$. *Если* $|\lambda| - \frac{|\lambda|}{p} \leq 1$, $|\lambda| - \frac{|\lambda|}{p} + N\lambda_{\min} > 1 > |\lambda| - \frac{|\lambda|}{p} + (N-1)\lambda_{\min}$, *то при* $f \in \mathfrak{L}_{p,0,N}(\mathbb{R}^n)$ *уравнение (3.1) имеет единственное решение в* $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, *для которого имеет место неравенство (3.7) при* $\sigma = 0$.

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 3.1 (с применением теоремы 2.3).

Abstract. In this paper the unique solvability of regular hypoelliptic equations in multianisotropic weighted functional spaces is proved by means of special integral representation of functions through a regular operator. The existence of the solutions is proved by constructing approximate solutions using multianisotropic integral operators.

Список литературы

[1] Г. В. Демиденко, "Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями I", Сиб. мат. журнал, **34**, no. 5, 52 – 67 (1993).
[2] Г. В. Демиденко, "О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$", Сиб. мат. журнал, **39**, no. 5, 1028 – 1037 (1998).
[3] Г. В. Демиденко, "Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа", Сиб. мат. журнал, **49**, no. 5, 1064 – 1076 (2008).
[4] С. В. Успенский, "О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов", Тр. МИАН СССР, **117**, 292 – 299 (1972).
[5] С. М. Никольский, "Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных", Сиб. мат. журнал, **61(103)**, no. 2, 224 – 252 (1963).
[6] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Тр. МИАН СССР, **91**, 58 – 81 (1967).
[7] S. Gindikin, L. Volovich, The Method of Newton's Polyhedron in the theory of Partial Differential Equations, K.A.P., London, 86, 266p. (1992).
[8] Г. А. Карапетян, "О стабилизации в бесконечности к полиному решений одного класса регулярных уравнений", Тр. МИАН СССР, **187**, 116 – 129 (1989).
[9] G. A. Karapetyan, "Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces for the three-dimensional case", Eurasian Mathematical Journal. ISSN, **7**, no. 4, 19 – 39 (2016).
[10] Г. А. Карапетян, "Интегральное представление и теоремы вложения для n-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности", Сиб. мат. журнал, **58**, no. 3, 573 – 590 (2017).
[11] Г. А. Карапетян, М. К. Аракелян, "Теоремы вложения для общих мультианизотропных пространств", Математические заметки (в печати).
[12] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, (1962).

[13] В. П. Ильин, "Интегральное представление дифференцируемых функций классов $W_p^1(G)$", Сиб. мат. журнал, 8, no. 3, 573 – 586 (1967).
[14] О. В. Бесов, "О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева", Мат. сб. 73(115), no. 4, 585 – 599 (1967).
[15] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М. Наука (1975).
[16] О. В. Бесов, В. П. Ильин, Л. Д. Кудрявцев, П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Теория вложений дифференцируемых функций многих переменных. Дифференциальные уравнения с частными производными", М. Наука, 38 – 63 (1970).
[17] Л. А. Багиров, В. А. Кондратьев, "Об эллиптических уравнениях в R^n" Диф. уравнения, 11, no. 3, 498 – 504 (1975).
[18] Л. А. Багиров, "Априорные оценки. Теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в R^n", Мат. сб., 110, no. 4, 475 – 492 (1979).
[19] П. И. Лизоркин, "(L_q, L_q) мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, 152, 808 – 811 (1963).
[20] Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы", Тр. МИАН СССР, 140, 130 – 161 (1976).
[21] L. E. Frankel, "Formula for higher derivatives of composite functions", Math. Proc. of the Cambridge Phil. Society, 83, no. 2, 159 – 165 (1978).

Поступила 20 марта 2017

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 4, 2018, стр. 66 – 71.

FIRST PASSAGE TIME DISTRIBUTION FOR LINEAR FUNCTIONS OF A RANDOM WALK

B. FATHI-VAJARGAH, M. NAVIDI

University of Guilan, Rasht, Iran
E-mails: *fathi@guilan.ac.ir, navidimahmod@yahoo.com*

Abstract. In this paper, theorems about asymptotic behavior of the local probabilities of crossing the linear boundaries by a perturbed random walk are proved.

MSC2010 numbers: 60Fxx, 60Hxx

Keywords: First passage time; local limit theorem; perturbed random walk.

1. Introduction

The paper investigates the asymptotic behavior of local probabilities of crossing the linear boundaries by a perturbed random walk. This problem was studied by M. Woodroofe in [1]. The goal is to extend some results from [1].

Let $\{\varepsilon_n \ \ n = 1, 2, \ldots\}$ be a sequence of independent identically distributed random variables defined on some probability space (Ω, F, P) with $E|\varepsilon_i| < \infty$ and $\sigma^2 = \operatorname{Var}\varepsilon_i < \infty$. Let $\Delta(x)$ be a strictly convex and continuously differentiable in R function, and let $V = E\varepsilon_i < \infty$. In [1], M. Woodroofe described the asymptotic distribution of the first passage time in the case where the function $\Delta(x)$ satisfies the condition $\Delta'(v) > 0$. In this paper, we examine the case $\Delta'(v) < 0$. Denote

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_n, \quad \overline{S_n} = \frac{1}{n} S_n, \quad T_n = n\Delta(\overline{S_n}), \qquad n = 1, 2 \ldots$$

Also, define the stopping times:

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : T_n > a\}, \qquad R_a = T_{\tau_a} - a, \quad a > 0.$$

Note that the family of the first passage times was investigated in the papers [2]-[5].

2. Assumptions and formulation of the main results

We assume that $\Delta(x)$ is a strictly convex and continuously differentiable function in R with $V = E\varepsilon_1, \mu = \Delta(v)$ and $\delta = \Delta'(v)$. For sequence $\{\varepsilon_n, \ n = 1, 2, \ldots\}$ we assume that $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|^m dt < \infty$ for some m, where Ψ is the characteristic function of ε_n. With this assumption, for n big enough, by a local limit theorem, the sum

S_n has a continuous probability density function $p_{S_n}(s)$, such that

$$p_{S_n}(s) = (\frac{1}{\sigma\sqrt{n}})\varphi\left[\frac{s-nv}{\sigma\sqrt{n}}\right] + O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \quad \text{as} \quad n\to\infty. \tag{2.1}$$

Here, and in what follows. φ denotes the density function of standard normal distribution. According to the definition of T_n, it can always be represented as $T_n = n\Delta(S_n) = Z_n + e_n$, where

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad X_k = \Delta(v) + \Delta'(v)(\varepsilon_k - v),$$
$$e_n = n\tau(S_n), \quad \tau(x) = \Delta(x) - \Delta(v) - \Delta'(v)(x-v).$$

The following two lemmas from [1] will be used in the proofs of the main results of this paper.

Lemma A (see [1]). *The following relations hold:*

1) $P(\tau_a < \infty) = 1$ *for all* $a \geq a_0$,
2) $\tau_a \xrightarrow{a.s.} \infty$ *as* $a\to\infty$,
3) $\frac{\tau_a}{a} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{\mu}$ *as* $a\to\infty$.

Lemma B (see [1]). *Under the above stated conditions, the random variable* R_a *has a limit distribution with density function given by*

$$h(r) = \frac{1}{\mu}P(S_k \geq r,\, k\geq 1), \quad r>0.$$

The main results of this paper are the following theorems.

Theorem 2.1. *Let* $\{\varepsilon_n,\ n=1,2,\ldots\}$ *be a sequence of independent and identically distributed random variables satisfying the condition (2.1), and let the function* Δ *be strictly convex and continuous differentiable in a vicinity of the point* $v = E\varepsilon_1$. *If there is*

$$n = n_a = \frac{a}{\mu} + Z_a\sqrt{\frac{a}{\mu}}, \quad \textit{where} \quad Z_a \to z\in R \quad \textit{as} \quad a\to\infty,$$

then the following asymptotic relation holds:

$$q_a(n,r) \sim \frac{\mu}{|\delta|\sigma\sqrt{n}}\varphi(\frac{\mu}{\sigma\delta}z)h(r) \quad \textit{as} \quad a\to\infty,$$

where $\delta = \Delta'(v) \neq 0$ *and* $q_a(n,r) = \frac{d}{dr}P(\tau_a = n, R_a \leq r)$.

Theorem 2.2. *Let* $E[\Delta(\varepsilon_1)^+] < \infty$, *then under the conditions of Theorem 2.1 the following asymptotic relation holds:*

$$P(\tau_a = n) \sim \frac{\mu}{|\delta|\sigma\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma\delta}z\right) \quad \textit{as} \quad a\to\infty.$$

Corollary 2.1. *Let $\{\gamma_n,\ n=1,2,\ldots\}$ be a sequence of independent identically distributed and positive random variables. Then the conditions of Theorem 2.2 are satisfied for the sequence $\varepsilon_n = \ln \gamma_n$ and $p_n = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_n$, $t_a = \inf\{n:\ p_n > e^a\}$, and therefore, the following asymptotic relation holds:*

$$P(t_a = n) \sim \frac{\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}x\right) \quad \text{as} \quad a \to \infty,$$

where $\mu_1 = E\ln(\gamma_n)$ and $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(\ln\gamma_n)$.

Proof of Theorem 2.1. For the case $\delta = \Delta'(v) > 0$, the theorem is proved in [1].

So, we prove the theorem in the case $\delta = \Delta'(v) < 0$. Defining $M_n = M_n(a,r) = \{y:\ a < n\Delta(y) \le a+r\}$, and observing that the function Δ in a vicinity of the point $x = v$ has a decreasing inverse Δ^{-1}, we can write

$$\begin{aligned}
P(\tau_a = n, R_a \le r) &= P(\tau_a = n, 0 < T_{\tau_a} - a \le r) = P(\tau_a = n, a < n\Delta(S_{\tau_n}) \le a + r) \\
&= P(\tau_a = n, S_{\tau_a} \in M_n) = P(\tau_a \ge n, S_{\tau_a} \in M_n) \\
&= \int_{M_n} P(\tau_a \ge n, S_{\tau_n} \in M_n | S_n = y) p_{S_n}(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{M_n} P(\tau_a \ge n | S_{\tau_n} = y) n p_{S_n}(ny)\mathrm{d}y = \int_{\Delta^{-1}(\frac{a+r}{n})}^{\Delta^{-1}(\frac{a}{n})} l_a(n,y) n p_{S_n}(ny)\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

where $l_a(n,y) = P(\tau_a \ge n | S_n = y)$. Next, we have

$$\begin{aligned}
q_a(n,r) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}P(\tau_a = n, R_a \le r) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{\Delta^{-1}(\frac{a+r}{n})}^{\Delta^{-1}(\frac{a}{n})} l_a(n,y) n p_{S_n}(ny)\mathrm{d}y = \sum_{y:n\Delta(y)=a+r} \frac{1}{|\Delta'(v)|} l_a(n,y) p_{S_n}(ny).
\end{aligned}$$

If $n\Delta(y) = a + r$ is the root of equation, given that Δ is a strictly convex function and $\Delta'(v) < 0$, then there is a unique root y_0 with the condition $y_0 \to v$ as $a \to \infty$, such that

(2.2) $$q_a(n, y_0) = -\frac{1}{\Delta'(v)} l_a(n, y_0) p_{S_n}(ny_0).$$

According to Taylor formula for function Δ in a vicinity of point $x = v$, we have

$$n\Delta(y_0) = n\Delta(v) + n\Delta'(v)(y_0 - v) + (y_0 - v)O(n),$$

$$a + r = \mu\left(\frac{a}{\mu} + Z_a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\right) + (y_0 - v)(n\Delta'(v) + no(1)),$$

implying that $r = \mu Z_a\sqrt{\frac{a}{\mu}} + (y_0 - v)n(\Delta'(v) + o(1))$. Thus, we have

(2.3) $$y_0 = v - \frac{\mu x}{\Delta'(v)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{as} \quad a \to \infty.$$

According to the Theorem 2.7 and Corollary 5.1 from [1], we have

$$l_a(n, y_0) \to \mu h(r) \quad \text{as} \quad a \to \infty. \tag{2.4}$$

Therefore, from (2.2) – (2.4) we obtain

$$q_a(n, y_0) \sim -\frac{1}{\Delta'(v)} \cdot \mu h(r) \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right) \varphi\left[\frac{ny_0 - nv}{\sigma\sqrt{n}}\right]$$

$$q_a(n, y_0) \sim -\frac{1}{\Delta'(v)} \cdot \mu h(r) \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right) \varphi\left[-\frac{\frac{\mu a}{\Delta'(v)}\frac{a}{\sqrt{n}}}{\sigma\sqrt{n}}\right]$$

$$\sim -\frac{1}{\Delta'(v)} \cdot \mu h(r) \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right) \varphi\left(-\frac{\Delta(v)}{\sigma\Delta'(v)} z\right) \sim -\frac{\Delta(v)}{\sigma\Delta'(v)\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\Delta(v)}{\sigma\Delta'(v)} z\right) h(r).$$

Thus, we have proved that for $\delta = \Delta'(v) \neq 0$ the following asymptotic relation holds:

$$q_a(n, y) \sim \frac{\Delta(v)}{\sigma|\Delta'(v)|\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\Delta(v)}{\sigma\Delta'(v)} z\right) h(r).$$

Theorem 2.1 is proved.

Proof of Theorem 2.2. We have

$$P(\tau_a = n) \sim \frac{\mu}{|\delta|\sigma\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\mu}{\delta\sigma} z\right) \quad \text{as} \quad a \to +\infty.$$

For each $c > 0$, we can write

$$\sqrt{n}P(\tau_a = n) = \sqrt{n}\int_0^\infty q_a(n, r)\mathrm{dr} = \sqrt{n}\int_0^c q_a(n, r)\mathrm{dr})$$
$$+ \sqrt{n}\int_c^\infty q_a(n, r)\mathrm{dr} = q_{a,1}(n, c) + q_{a,2}(n, c).$$

From Theorem 2.1, we have

$$q_{a,1}(n, c) = \sqrt{n}\int_0^c q_a(n, r)\mathrm{dr} = \sqrt{n}\int_0^c \frac{\mu}{|\delta|\sigma\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\mu}{\delta\sigma} z\right) h(r)\mathrm{dr}$$
$$= \frac{\mu}{|\delta|\sigma}\varphi\left(\frac{\mu}{\delta\sigma} z\right)\int_0^c h(r)\mathrm{dr} = \frac{\mu}{|\delta|\sigma}\varphi\left(\frac{\mu}{\delta\sigma} z\right) H(c),$$

where $H(c) \to 1$ as $c \to \infty$. If $c \to \infty$ and $a \to \infty$, then we have $q_{a,1}(n, c) = \frac{\mu}{|\delta|\sigma}\varphi\left(\frac{\mu}{\delta\sigma} z\right)$. Thus, to complete the proof, it is enough to show that $q_{a,2}(n, c) \to 0$ as $c \to \infty$.

Since Δ is a convex function, we can write

$$T_n = n\Delta\left(\frac{S_n}{n}\right) = n\Delta\left(\frac{S_{n-1}}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right) = n\Delta\left(\frac{n-1}{n}\overline{S}_{n-1} + \frac{1}{n}\varepsilon_n\right)$$
$$< n\left[\frac{n-1}{n}\Delta(\overline{S}_{n-1}) + \frac{1}{n}\Delta(\varepsilon_n)\right] = T_{n-1} + \Delta(\varepsilon_n).$$

and

$$q_{a,2}(n,c) = \sqrt{n}\int_c^\infty q_a(n,r)\mathrm{d}r = \sqrt{n}\int_c^\infty \frac{d}{dr}P(\tau_a = n,\ R_a \le r)\mathrm{d}r$$
$$= \sqrt{n}\int_c^\infty \frac{d}{dr}[P(\tau_a = n) - P(\tau_a = n,\ R_a > r)]\mathrm{d}r = \sqrt{n}P(\tau_a = n,\ R_a > c)$$
$$= \sqrt{n}P(\tau_a = n,\ T_n - a > c) = \sqrt{n}P(\tau_a = n,\ T_n > a + c)$$
$$\le \sqrt{n}P(T_{n-1} \le a, a + c < T_n < T_{n-1} + \Delta(\varepsilon_n)) = \sqrt{n}P(a + c - \Delta(\varepsilon_n) < T_{n-1} \le a)$$
$$= \sqrt{n}\int_c^\infty P\left[a + c - \Delta(\varepsilon_n) < T_{n-1} \le a \mid \Delta(\varepsilon_n) = s\right]\mathrm{d}Q(s)$$
$$= \sqrt{n}\int_c^\infty P(a + c - s < T_{n-1} \le a)\mathrm{d}Q(s),$$

where $Q(s) = P(\Delta(\varepsilon_n) < s)$.

Based on the definition of ε_n and WLLN: $\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0$, we obtain

$$\lim_{n\to+\infty} P\left[\frac{T_n - n\mu}{\delta\sigma\sqrt{n}} \le x\right] = \lim_{n\to+\infty} P\left[\frac{\varepsilon_n + z_n - n\mu}{\delta\sigma\sqrt{n}} \le x\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty} P\left[\frac{z_n - n\mu}{\delta\sigma\sqrt{n}} \le x\right] = \lim_{n\to+\infty} P\left[\frac{S_n - n\nu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right] = \phi(x), \tag{2.5}$$

where ϕ is the standard normal distribution function. According to (2.5), we have

$$P(a + c - s < T_n \le a) - P(a + c - s < S_n \le a) \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{2.6}$$

According to the local limit theorem and (2.1), there is $K > 0$ such that

$$P(a + c - s < S_n \le a) \le K(s - c). \tag{2.7}$$

From (2.6) and (2.7), we conclude that there is a constant $M > 0$ such that

$$q_{a,2}(n,c) \le \sqrt{n}M\int_c^\infty (s - c)\mathrm{d}Q(s) \le \sqrt{n}M\int_c^\infty s\mathrm{d}Q(s).$$

Since by assumption $E[\Delta(\varepsilon_1)^+] < \infty$, the last term of the above relation tends to 0 as $c \to \infty$, and the result follows. Theorem 2.2 is proved.

Proof of Corollary 2.1. Given that the sequence $\{\varepsilon_n = \ln\gamma_n\}$ satisfies the condition of Theorem 2.2, with $S_n = \ln p_n = \ln\gamma_1 + \cdots + \ln\gamma_n$ and $\Delta(x) = x$, we have

$$t_a = \inf\{n : S_n > a\} = \inf\{n : \ln\gamma_1 + \cdots + \ln\gamma_n > a\}$$
$$= \inf\{n : \ln\gamma_1\cdots\gamma_n > a\} = \inf\{n : \gamma_1\cdots\gamma_n > e^a\} = \inf\{n : p_n > e^a\},$$

and the result easily follows from Theorem 2.2.

Corollary 2.1 is proved.

Example. Let $\{\varepsilon_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ be a sequence of independent identically distributed random variables having exponential distribution with parameter $\lambda = 1$. In this case, the sum $S_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ has a Gamma distribution with parameters $(n, 1)$. Then for $\Delta(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, we have

$$\tau_a = \inf\{n : \frac{n^2}{S_n} > a\}, \qquad \mu = \Delta(v) = 1, \qquad v = E\varepsilon_n = 1,$$
$$\sigma^2 = \operatorname{Var} \varepsilon_1 = 1. \qquad \delta = \Delta'(v) = -1.$$

So, by Theorem 2.2, we obtain

$$P(\tau_a = n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi(z) \quad \text{as} \quad a \to \infty.$$

Список литературы

[1] M. Woodroofe, Nonlinear Renewal Theory Sequential Analysis, SIAM, Philadelphia, (1982).
[2] S. Lally, "Limit theorems for first passage times in linear and nonlinear renewal theory", Adv. Appl. Probab., 16, no. 4, 766 – 803 (1984).
[3] M. Woodroofe, R. Keener, "Asymptotic expansions in boundary crossing problems", Ann. Probab., 15, 102 – 114 (1987).
[4] A. Gut, Stopped Random Walks, Limit Theorems and Applications, Springer, New York (1988).
[5] D. Siegmund, Sequential Analysis, Tests and Confidence Intervals, Springer, New York (1985).

Поступила 6 апреля 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 4, 2018, стр. 72 – 86

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

Х. А. ХАЧАТРЯН, Ц. Э. ТЕРДЖЯН, М. О. АВЕТИСЯН

Институт математики НАН Армении
Армянский национальный аграрный университет
E-mails: *Khach82@rambler.ru, Terjyan73@mail.ru, avetisyan.metaqsya@mail.ru*

Аннотация. Исследована система нелинейных интегральных уравнений с оператором типа свертки, имеющая применение в p-адической теории струны для скалярного поля тахионов. Доказано существование однопараметрического семейства монотонных непрерывных и ограниченных решений для данной системы. Вычислены пределы построенных решений в $\pm\infty$.

MSC2010 number: 45GXX, 45G05.

Ключевые слова: монотонность; итерации; ограниченное решение; ядро; p–адическая теория; предел решения.

1. Введение

Работа посвящена изучению и решению следующей системы интегральных уравнений с кубической нелинейностью:

$$(1.1)\quad a_i f_i^3(x) + (1-a_i) f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) f_j(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

относительно искомой непрерывной и ограниченной вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$, где T — знак транспонирования.

В системе (1.1) $a_i \in (0,1]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — числовые параметры, а $K_{ij}(x)$ — определенные на $\mathbb{R}$ четные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$(1.2)\qquad K_{ij}(-x) = K_{ij}(x), \quad x > 0, \quad K_{ij}(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(1.3)\qquad \begin{gathered} K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R}), \quad a_{ij} \equiv \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(t) dt, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}, \\ r(A) = 1, \quad K_{ij}(x) \ \downarrow \ \text{по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered}$$

где $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A, а $C_M(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}$.

†Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РА в рамках научного проекта SCS 16YR-1A002

Система (1.1) имеет непосредственное применение в p—адической теории открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов (см. [1]–[6]).

В частном случае, когда $n = 1$ соответствующее скалярное уравнение с ядром

$$K_a(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-x^2/4a}, \quad x \in \mathbb{R}$$

и с граничными условиями $f(\pm\infty) = \pm 1$ описывает движение (роллинг) тахионов по времени для открыто-замкнутых струн (см. [1], [2]).

В настоящей работе при условиях (1.2) и (1.3) докажем существование однопараметрического семейства монотонных непрерывных и ограниченных решений системы (1.1). Вычислим предел построенных решений в $\pm\infty$.

2. Обозначения и вспомогательные факты

Учитывая условия (1.2), (1.3), на основании теоремы Перрона (см. [7]) можно утверждать, что существует вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)^T$ с положительными координатами: $\eta_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Обозначим через

$$\eta_i^* = \frac{\eta_i}{\min\limits_{1\le i\le n} \eta_i} \ge 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Рассмотрим следующие функции:

$$\chi_i(p) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int\limits_0^\infty K_{ij}(t) e^{-pt} dt - \frac{2 - a_i}{4} \cdot \eta_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.3}$$

определенные на множестве $[0, +\infty)$. Из (1.2)-(2.2) сразу следует, что

$$\chi_i(0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^* - \frac{2 - a_i}{4} \cdot \eta_i^* = \frac{a_i \cdot \eta_i^*}{4} > 0,$$

$$\chi_i(+\infty) = -\frac{2 - a_i}{4} \eta_i^*,$$

$$\chi_i(p) \downarrow \text{ по } p \text{ на } [0, +\infty), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, согласно теоремы Больцано-Коши (см. [8]) для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует единственное число $p_i > 0$ такое, что

$$\chi_i(p_i) = 0. \tag{2.4}$$

Обозначим через

$$p_* = min\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} > 0. \tag{2.5}$$

Следующая лемма нам понадобится в дальнейших рассуждениях.

Лемма 2.1. *При условиях* (1.2) *и* (1.3) *для ядер* $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ *имеют место следующие неравенства:*

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{-\infty}^{x}K_{ij}(t)e^{p_*t}\,dt+e^{2p_*x}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{x}^{\infty}K_{ij}(t)e^{-p_*t}\,dt\geq\left(1-\frac{a_i}{2}\right)\eta_i^*, \tag{2.6}$$

$$x\in\mathbb{R}^+,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$H_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{-\infty}^{x}K_{ij}(t)\,e^{p_*t}\,dt+e^{2p_*x}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{x}^{\infty}K_{ij}(t)\,e^{-p_*t}\,dt-\left(1-\frac{a_i}{2}\right)\eta_i^*,$$

$i=1,2,\ldots,n$, $x\in\mathbb{R}^+$. Согласно (1.2)–(2.4) будем иметь

$$H_i(0)=\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(t)e^{p_*t}\,dt+\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{0}^{\infty}K_{ij}(t)e^{-p_*t}\,dt-\left(1-\frac{a_i}{2}\right)\eta_i^*=$$

$$=2\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{0}^{\infty}K_{ij}(t)e^{-p_*t}\,dt-\left(1-\frac{a_i}{2}\right)\eta_i^*\geq$$

$$\geq 2\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{0}^{\infty}K_{ij}(t)e^{-p_it}\,dt-\left(1-\frac{a_i}{2}\right)\eta_i^*=0,\, i=1,2,\ldots,n,$$

$$H_i'(x)=\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*K_{ij}(x)e^{p_*x}+2p_*e^{2p_*x}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{x}^{\infty}K_{ij}(t)e^{-p_*t}\,dt-e^{2p_*x}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*K_{ij}(x)e^{-p_*x}=$$

$$=2p_*e^{2p_*x}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{x}^{\infty}K_{ij}(t)e^{-p_*t}\,dt>0,\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

Следовательно, $H_i(x)\geq H_i(0)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^+$, $i=1,2,\ldots,n$. □

Учитывая неравенство (2.6), легко можно убедиться в справедливости следующего неравенства:

(2.7)

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{0}^{\infty}(K_{ij}(x-t)\;-\;K_{ij}(x+t))(1-e^{-p_*t})dt\geq\eta_i^*\left(1-\frac{a_i}{2}\right)(1-e^{-p_*x}),$$

$$i=1,2,\ldots,n,\; x\in\mathbb{R}^+.$$

Действительно, рассмотрим функции

$$Q_i(x)\equiv\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{0}^{\infty}(K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t))(1-e^{-p_*t})dt-\eta_i^*\left(1-\frac{a_i}{2}\right)(1-e^{-p_*x}),$$

$i=1,2,\ldots,n$, $x\in\mathbb{R}^+$. Из условия (1.2) сразу следует, что $Q_i(0)=0$, $i=1,2,\ldots,n$.

Учитывая (1.2)–(2.2), функции $\{Q_i(x)\}_{i=1}^n$ представимы в следующем виде:

$$Q_i(x) = \sum_{j=1}^n \eta_j^* \left(a_{ij} - 2\int_x^\infty K_{ij}(t)\,dt \right) - \sum_{j=1}^n \eta_j^* e^{-p_* x} \int_{-\infty}^x K_{ij}(t) e^{p_* t}\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \eta_j^* e^{p_* x} \int_x^\infty K_{ij}(t) e^{-p_* t}\,dt - \eta_i^* \left(1 - \frac{a_i}{2}\right)\left(1 - e^{-p_* x}\right) =$$

$$= \eta_i^* - 2\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_x^\infty K_{ij}(t)dt - \sum_{j=1}^n \eta_j^* e^{-p_* x} \int_{-\infty}^x K_{ij}(t) e^{p_* t}\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \eta_j^* e^{p_* x} \int_x^\infty K_{ij}(t) e^{-p_* t}\,dt - \eta_i^* \left(1 - \frac{a_i}{2}\right)\left(1 - e^{-p_* x}\right).$$

Так как $K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то с учетом леммы 2.1 получаем

$$Q_i'(x) = 2\sum_{j=1}^n \eta_j^* K_{ij}(x) + \sum_{j=1}^n \eta_j^* p_* e^{-p_* x} \int_{-\infty}^x K_{ij}(t) e^{p_* t}\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \eta_j^* p_* e^{p_* x} \int_x^\infty K_{ij}(t) e^{-p_* t}\,dt - 2\sum_{j=1}^n \eta_j^* K_{ij}(x) - \eta_i^* \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) p_* e^{-p_* x} =$$

$$= p_* e^{-p_* x} \left(\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{-\infty}^x K_{ij}(t) e^{p_* t}\,dt + e^{2p_* x} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_x^\infty K_{ij}(t) e^{-p_* t}\,dt - \eta_i^* \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) \right) \geq 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, $Q_i(x) \geq Q_i(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$. И, тем самым, неравенство (2.7) доказано.

Лемма 2.2. *Если вектор-функция* $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$, $x \in \mathbb{R}^+$ *является непрерывным и ограниченным решением следующей системы нелинейных интегральных уравнений на полуоси:*

$$a_i \varphi_i^2(x) + (1 - a_i)\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \left(K_{ij}(x - t) - K_{ij}(x + t)\right) \varphi_j(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.8}$$

то нечетное продолжение этого решения на $(-\infty, 0)$

$$f_i(x) \equiv \begin{cases} \varphi_i(x), & \text{если } x \geq 0, \\ -\varphi_i(-x), & \text{если } x < 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.9}$$

является непрерывным и ограниченным решением системы (1.1).

Доказательство. проводится прямой проверкой. □

3. О разрешимости системы (2.8)

В этом параграфе займемся построением ограниченного непрерывного решения системы (2.8) с помощью специально выбранных последовательных приближений.

Для системы (2.8) рассматривая следующие итерации:

(3.1)

$$a_i\left(\varphi_i^{(m+1)}(x)\right)^3+(1-a_i)\varphi_i^{(m+1)}(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty (K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t))\,\varphi_j^{(m)}(t)\,dt,$$

$$\varphi_i^{(0)}(x)=\eta_i^*,\ m=0,1,2,\ldots,\ x\in\mathbb{R}^+,\ i=1,2,\ldots,n,$$

докажем, что

$$\varphi_i^{(m)}(x)\downarrow \text{ по } m,\ i=1,2,\ldots,n,\ x\in\mathbb{R}^+. \tag{3.2}$$

Сначала заметим, что условия (1.2) и (1.3) обеспечивают выполнение следующих неравенств:

$$K_{ij}(x-t)\geq K_{ij}(x+t),\ i,j=1,2,\ldots,n,\ x,t\in\mathbb{R}^+. \tag{3.3}$$

Учитывая (2.1), (2.2) и (3.3), из (3.1) будем иметь

$$a_i(\varphi_i^{(1)}(x))^3+(1-a_i)\varphi_i^{(1)}(x)\leq\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty K_{ij}(x-t)\varphi_j^{(0)}(t)\,dt\leq\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(t)dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta_j^*=\eta_i^*\leq a_i(\eta_i^*)^3+(1-a_i)\eta_i^*,\quad x\in\mathbb{R}^+,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Так как функции $F_i(t)=a_it^3+(1-a_i)t,\quad i=1,2,\ldots,n,\quad t\in\mathbb{R}$ являются непрерывными и монотонно возрастающими на $\mathbb{R}$, из полученного неравенства непосредственно следует, что

$$\varphi_i^{(1)}(x)\leq\eta_i^*=\varphi_i^{(0)}(x),\ i=1,2,\ldots,n,\ x\in\mathbb{R}^+.$$

Предполагая, что $\varphi_i^{(m)}(x)\leq\varphi_i^{(m-1)}(x),\ i=1,2,\ldots,n$ при некотором натуральном m и учитывая монотонность функций $F_i(t),\ i=1,2,\ldots,n,\ t\in\mathbb{R}$, из (3.1) получим

$$\varphi_i^{(m+1)}(x)\leq\varphi_i^{(m)}(x),\ i=1,2,\ldots,n,\ x\in\mathbb{R}^+.$$

Следовательно, монотонность последовательности вектор-функций $\varphi^{(m)}(x)=(\varphi_1^{(m)}(x),\varphi_2^{(m)}(x),\ldots,\varphi_n^{(m)}(x))^T$ по m доказана.

Теперь индукцией докажем, что

$$\varphi_i^{(m)}(x)\geq\varepsilon\eta_i^*(1-e^{-\nu_* x}),\ m=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n,\ x\in\mathbb{R}^+. \tag{3.4}$$

где

$$\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}}min\left\{\frac{1}{\eta_1^*},\frac{1}{\eta_2^*},\ldots,\frac{1}{\eta_n^*}\right\}. \tag{3.5}$$

В случае $m = 0$ неравенства (3.4) выполняются автоматически. Пусть (3.4) имеет место при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда, используя (2.7), (3.3) и определение числа ε, из (3.1) будем иметь

$$a_i\left(\varphi_i^{(m+1)}(x)\right)^3+(1-a_i)\varphi_i^{(m+1)}(x) \geq \varepsilon\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_0^{\infty}(K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t))(1-e^{-p_*t})dt \geq$$

$$\geq \varepsilon\eta_i^*\left(1-\frac{a_i}{2}\right)(1-e^{-p_*x}) \geq a_i\varepsilon^3(\eta_i^*)^3(1-e^{-p_*x})^3+(1-a_i)\varepsilon\eta_i^*(1-e^{-p_*x}).$$

Следовательно,

$$\varphi_i^{(m+1)}(x) \geq \varepsilon\eta_i^*(1-e^{-p_*x}),\ i=1,2,\dots,n,\ x\in\mathbb{R}^+.$$

Записывая итерации (3.1) в следующем виде:

$$a_i\left(\varphi_i^{(m+1)}(x)\right)^3+(1-a_i)\varphi_i^{(m+1)}(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{x}K_{ij}(t)\varphi_j^{(m)}(x-t)\,dt-\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty}K_{ij}(x+t)\varphi_j^{(m)}(t)\,dt,$$

$$\varphi_i^{(0)}(x)=\eta_i^*,\ \ m=0,1,2,\dots,\ \ x\in\mathbb{R}^+,\ \ i=1,2,\dots,n$$

при этом имея ввиду условие (1.3) и монотонность функций $F_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$, индукцией по m легко можно убедиться, что

$$\text{(3.6)}\qquad \varphi_i^{(m)}(x)\uparrow \text{ по } x \text{ на, } \ \mathbb{R}^+,\ m=0,1,2,\dots,\ i=1,2,\dots,n.$$

Из непрерывности функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и $\{F_i(t)\}_{i=1}^{n}$ следует, что

$$\text{(3.7)}\qquad \varphi_i^{(m)}\in C(\mathbb{R}^+),\ \ m=0,1,2,\dots,\ i=1,2,\dots,n.$$

Таким образом, в силу вышеизложенного можем утверждать, что последовательность вектор-функций $\{\varphi^{(m)}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел при $m\to\infty$:

$$\lim_{m\to\infty}\varphi^{(m)}(x)=\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x))^T,$$

причем предельная вектор-функция согласно теоремы Б. Леви (см. [9]) удовлетворяет системе (2.8). Из (3.2) и (3.4) следует, что

$$\text{(3.8)}\qquad \varepsilon\eta_i^*(1-e^{-p_*x})\leq\varphi_i(x)\leq\eta_i^*,\ \ i=1,2,\dots,n,\ \ x\in\mathbb{R}^+,$$

а из (3.6) заключаем, что

$$\text{(3.9)}\qquad \varphi_i(x)\uparrow \text{ по } x, \text{ на, } \ \mathbb{R}^+,\ i=1,2,\dots,n.$$

В силу непрерывности функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и $\{F_i(t)\}_{i=1}^{n}$, а также неравенства (3.8) следует, что

$$\text{(3.10)}\qquad \varphi_i\in C(\mathbb{R}^+),\ i=1,2,\dots,n.$$

Следовательно, на основании (3.7), (3.10) и теоремы Дини (см. [8]) можно утверждать, что сходимость последовательности $\{\varphi^{(m)}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ к $\varphi(x)$ является равномерной в каждом компакте из $\mathbb{R}^+$.

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ — определенные на $\mathbb{R}$ четные функции, удовлетворяющие условиям (1.2) и (1.3). Тогда для всех $a_i \in (0,1]$ $(i = 1,2,\dots,n)$ система (2.8) имеет неотрицательное (нетривиальное) непрерывное монотонно неубывающее и ограниченное решение $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T$, причем справедливы двусторонние оценки (3.8).*

4. Предел решения системы (2.8)

Из (3.8) (3.10) следует, что существует

(4.1) $$\lim_{x\to+\infty} \varphi_i(x) = \lambda_i < +\infty, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Используя непрерывность функций $\{F_i(t)\}_{i=1}^{n}$ и известное предельное соотношение для операции свертки (см. [10]):

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dt = \lambda_j \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(t)dt = a_{ij}\lambda_j,$$

из (2.8) будем иметь:

(4.2) $$a_i\lambda_i^3 + (1-a_i)\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Теперь перейдем к численному решению системы нелинейных алгебраических уравнений (4.2). С этой целью рассмотрим следующие последовательные приближения:

(4.3) $$a_i\left(\lambda_i^{(m+1)}\right)^3 + (1-a_i)\lambda_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j^{(m)},$$
$$\lambda_i^{(0)} = \eta_i^*, \; m = 0,1,2,\dots, \; i = 1,2,\dots,n.$$

Индукцией нетрудно убедиться в справедливости следующих фактов:

(4.4) $$\lambda_i^{(m)} \downarrow \text{ по } m, \; i = 1,2,\dots,n,$$

(4.5) $$\lambda_i^{(m)} \geq d\eta_i^*, \; m = 0,1,2,\dots, \; i = 1,2,\dots,n,$$

где

$$d = \min\left\{\frac{1}{\eta_1^*}, \frac{1}{\eta_2^*}, \dots, \frac{1}{\eta_n^*}\right\}.$$

Следовательно, последовательность $\{\lambda^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ имеет предел при $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \lambda^{(m)} = \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T, \quad (\lambda^{(m)} = (\lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \dots, \lambda_n^{(m)})^T),$$

причем предельный вектор удовлетворяет системе (4.2) и двусторонним неравенствам:

$$d\eta_i^* \le \lambda_i \le \eta_i^*, \; i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.6}$$

Ниже докажем единственность решения системы (4.2) в следующем классе векторов:

$$\Lambda = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T : \; d\eta_i^* \le \lambda_i \le \eta_i^*, \; i = 1, 2, \dots, n\right\} \tag{4.7}$$

при дополнительном ограничении на матрицу A:

$$\frac{\min\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}}{\max\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}} > \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{4.8}$$

Откуда из (2.1) и (2.2) следует, что

$$\frac{\min\limits_{1\le i\le n} \eta_i^*}{\max\limits_{1\le i\le n} \eta_i^*} = \frac{\min\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^*}{\max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^*} \ge \frac{\min\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}}{\max\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}} > \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{4.9}$$

Предположим, что система (4.2) в классе Λ имеет два решения λ, μ. Тогда, учитывая (2.1) и (2.2), из (4.2) будем иметь

$$a_i(\lambda_i - \mu_i)(\lambda_i^2 + \lambda_i\mu_i + \mu_i^2) + (1 - a_i)(\lambda_i - \mu_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda_j - \mu_j).$$

Из последнего равенства сразу следует, что

$$(a_i\lambda_i^2 + a_i\lambda_i\mu_i + a_i\mu_i^2 + 1 - a_i)|\lambda_i - \mu_i| \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\lambda_j - \mu_j| \le \eta_i^* \cdot \max_{1\le j\le n}\left(\frac{|\lambda_j - \mu_j|}{\eta_j^*}\right).$$

Учитывая тот факт, что $\lambda, \mu \in \Lambda$ и формулы (2.1), (2.2), будем иметь

$$|\lambda_i - \mu_i|(3a_i d^2(\eta_i^*)^2 + 1 - a_i) \le \max_{1\le j\le n}\left(\frac{|\lambda_j - \mu_j|}{\eta_j^*}\right) \cdot \eta_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.10}$$

Согласно (4.7) из (4.10) получаем

$$\frac{|\lambda_i - \mu_i|}{\eta_i^*}\eta_i^*\left(3a_i\left(\frac{\min\limits_{1\le i\le n} \eta_i^*}{\max\limits_{1\le i\le n} \eta_i^*}\right)^2 + 1 - a_i\right) \le \max_{1\le j\le n}\left(\frac{|\lambda_j - \mu_j|}{\eta_j^*}\right) \cdot \eta_i^*$$

или

(4.11)

$$\frac{|\lambda_i - \mu_i|}{\eta_i^*}\left(3a_i\left(\frac{\min\limits_{1\le i\le n} \eta_i^*}{\max\limits_{1\le i\le n} \eta_i^*}\right)^2 + 1 - a_i\right) \le \max_{1\le j\le n}\left(\frac{|\lambda_j - \mu_j|}{\eta_j^*}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Положим

$$\delta = \min_{1\le i\le n} a_i > 0. \tag{4.12}$$

Тогда в силу (4.9) из (4.11) будем иметь

$$\left[\delta\left(3\left(\frac{\min\limits_{1\le i\le n}\eta_i^*}{\max\limits_{1\le i\le n}\eta_i^*}\right)^2-1\right)+1\right]\cdot\frac{|\lambda_i-\mu_i|}{\eta_i^*}\le\max_{1\le j\le n}\left(\frac{|\lambda_j-\mu_j|}{\eta_j^*}\right).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\delta\left(3\left(\frac{\min\limits_{1\le i\le n}\eta_i^*}{\max\limits_{1\le i\le n}\eta_i^*}\right)^2-1\right)\max_{1\le j\le n}\left(\frac{|\lambda_j-\mu_j|}{\eta_j^*}\right)\le 0. \tag{4.13}$$

Так как $\left(\frac{\min\limits_{1\le i\le n}\eta_i^*}{\max\limits_{1\le i\le n}\eta_i^*}\right)^2 > \frac{1}{3}$, то из (4.12) и (4.13) получаем, что $\lambda_i=\mu_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Итак, доказана следующая

Лемма 4.1. *Пусть все элементы матрицы A положительны: $a_{ij}>0$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, $r(A) = 1$ и имеет место неравенство* (4.8). *Тогда система* (4.2) *при любых $a_i\in(0,1]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ имеет в классе Λ единственное решение, являющееся пределом последовательных приближений* (4.3).

5. Основной результат

С учетом леммы 2.2 и теоремы 3.1 можем утверждать, что система (1.1) обладает нетривиальным монотонно неубывающим непрерывным и ограниченным решением $f(x) = (f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x))^T$, причем

$$f_i(0)=0,\quad -\eta_i^*\le f_i(x)\le\eta_i^*,\quad x\in\mathbb{R},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство вектор-функций вида:

$$f_c(x) = f(x+c),\quad c\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Проверим, что для любого $c\in\mathbb{R}$ вектор-функция

$$f_c(x) = (f_1(x+c), f_2(x+c),\ldots,f_n(x+c))^T,$$

удовлетворяет системе (1.1). Действительно, имеем

$$\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}}K_{ij}(x-t)f_{cj}(t)dt=\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}}K_{ij}(x-t)f_j(t+c)dt=\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}}K_{ij}(x+c-\tau)f_j(\tau)d\tau=$$

$$=a_if_i^3(x+c)+(1-a_i)f_i(x+c)=a_if_{ci}^3(x)+(1-a_i)f_{ci}(x),$$

где

$$f_{ci}(x) = f_i(x+c), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Итак, на основе вышеизложенных фактов можем сформулировать основной результат настоящей работы:

Теорема 5.1. *Пусть выполняются все условия теоремы 3.1. Тогда, если для матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ выполняются условия леммы 4.1, то для всех $a_i \in (0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ система* (1.1) *обладает однопараметрическим семейством непрерывных монотонно неубывающих и ограниченных решений $\{f_c(x)\}_{c\in\mathbb{R}}$.*

$$f_c(x) = (f_{c1}(x), f_{c2}(x), \ldots, f_{cn}(x))^T, \text{ причем } \lim_{x\to+\infty} f_{ci}(x) = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где числа $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ определяются из системы алгебраических уравнений (4.2) *единственным образом.*

6. О построении для системы (1.1) однопараметрического семейства ограниченных решений на всей оси, на концах которой отличаются от своего предела суммируемой функцией

В этом параграфе при дополнительном условии на ядерные функции $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ построим для нелинейной системы (1.1) однопараметрическое семейство ограниченных решений $\{f_c(x)\}_{c\in\mathbb{R}}$ со свойствами

$$\lambda \pm f_c \in L_1^{\times n}(\mathbb{R}^\mp), \quad c \in \mathbb{R},$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T$ — решение нелинейной системы алгебраических уравнений (4.2), $f_c(x) = (f_{c1}(x), f_{c2}(x), \ldots, f_{cn}(x))^T$ — искомое решение системы (1.1), а

$$L_1^{\times n}(\mathbb{R}^\mp) \equiv \underbrace{L_1(\mathbb{R}^\mp)\times L_1(\mathbb{R}^\mp)\times\ldots\times L_1(\mathbb{R}^\mp)}_{n}.$$

С этой целью опять рассмотрим вспомогательную систему (2.8) и для нее следующие последовательные приближения:

(6.1)

$$a_i\left(\varphi_i^{(m+1)}(x)\right)^3 + (1-a_i)\varphi_i^{(m+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t))\,\varphi_j^{(m)}(t)\,dt,$$

$\varphi_i^{(0)}(x) \equiv \lambda_i$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Используя (4.2), (3.3), (1.2) и (1.3), легко можно убедиться в достоверности следующих утверждений:

A) $\varphi_i^{(m)}(x) \downarrow$ по m, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x \in \mathbb{R}^+$,

B) $\varphi_i^{(m)} \in C(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $m = 0, 1, 2, \ldots$,

C) $\varphi_i^{(m)}(x) \uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Справедливы также следующие оценки снизу:

$$D)\ \ \varphi_i^{(m)}(x) \geq \varepsilon\eta_i^*(1-e^{-p_*x}),\ m=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n,\ x\in\mathbb{R}^+.$$

Неравенства $D)$ доказываются аналогично как в теореме 3.1. Следует лишь отметить, что $D)$ сразу следует из принадлежности вектора λ множеству Λ и из определения числа ε (см. формулу (3.5)).

Индукцией по m докажем, что

$$\lambda_i - \varphi_i^{(m)} \in L_1(\mathbb{R}^+),\ m=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n. \tag{6.2}$$

Действительно, в случае $m=0$ включения (6.2) очевидным образом верны. Предположим, что $\lambda_i - \varphi_i^{(m)} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i=1,2,\ldots,n$ при некотором $m\in\mathbb{N}$. Тогда, учитывая формулу (4.2) и итерации (6.1), можно записать в следующем виде:

$$(\lambda_i - \varphi_i^{(m+1)}(x))(a_i\lambda_i^2 + a_i\lambda_i\varphi_i^{(m+1)}(x) + a_i(\varphi_i^{(m+1)}(x))^2) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j -$$

$$-\sum_{j=1}^n\int_0^\infty K_{ij}(x-t)\varphi_j^{(m)}(t)dt + (a_i-1)(\lambda_i - \varphi_i^{(m+1)}(x)) + \sum_{j=1}^n\int_0^\infty K_{ij}(x+t)\varphi_j^{(m)}(t)dt,$$

$$\varphi_i^{(0)}(x)=\lambda_i,\quad m=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n,\ \ x\in\mathbb{R}^+$$

или на основании (1.3) будем иметь

(6.3)

$$(\lambda_i - \varphi_i^{(m+1)}(x))(a_i\lambda_i^2 + a_i\lambda_i\varphi_i^{(m+1)}(x) + a_i(\varphi_i^{(m+1)}(x))^2 + 1 - a_i) =$$
$$= \sum_{j=1}^n\int_0^\infty K_{ij}(x-t)(\lambda_j - \varphi_j^{(m)}(t))dt + \sum_{j=1}^n \lambda_j\int_x^\infty K_{ij}(t)dt + \sum_{j=1}^n\int_0^\infty K_{ij}(x+t)\varphi_j^{(m)}(t)dt,$$
$$\varphi_i^{(0)}(x)\equiv\lambda_i,\ \ m=0,1,2,\ldots,i=1,2,\ldots,n,\ \ x\in\mathbb{R}^+.$$

В силу (6.1) и утверждений $A)$ и $D)$ из (6.3) следует, что

$$(\lambda_i - \varphi_i^{(m+1)}(x))(a_i\lambda_i^2 + a_i\lambda_i\varphi_i^{(m+1)}(x) + a_i(\varphi_i^{(m+1)}(x))^2 + 1 - a_i) \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^n\int_0^\infty K_{ij}(x-t)(\lambda_j - \varphi_j^{(m)}(t))dt + 2\sum_{j=1}^n\lambda_j\int_x^\infty K_{ij}(t)dt, \tag{6.4}$$
$$i=1,2,\ldots,n,\ \ x\in\mathbb{R}^+.$$

Дополнительно предположим, что

$$m(K_{ij}) \equiv \int_0^\infty xK_{ij}(x)dx < +\infty,\ \ i,j=1,2,\ldots,n. \tag{6.5}$$

Тогда, используя теорему Фубини (см. [9]), нетрудно проверить, что

$$\int_x^\infty K_{ij}(t)dt \in L_1(\mathbb{R}^+),\ \ i,j=1,2,\ldots,n. \tag{6.6}$$

Учитывая включение (6.6), индукционное предположение, условие (1.3) и неравенства D), из (6.4) получаем, что $\lambda_i - \varphi_i^{(m+1)} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Из (6.4) в силу D) и A) следует также, что

(6.7)

$$(\lambda_i - \varphi_i^{(m+1)}(x))(a_i\lambda_i^2 + 1 - a_i + a_i\lambda_i\varepsilon\eta_i^*(1 - e^{-p_*x}) + a_i\varepsilon^2(\eta_i^*)^2(1 - e^{-p_*x})^2) \le$$
$$\le \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(x-t)(\lambda_j - \varphi_j^{(m+1)}(t))dt + 2\sum_{j=1}^n \lambda_j \int_x^\infty K_{ij}(t)dt.$$

Интегрируя обе части (6.7) по x в пределах от 0 до $+\infty$ и имея ввиду (1.2), (1.3), (4.2), будем иметь

$$\int_0^\infty (\lambda_i - \varphi_i^{(m+1)}(x))(a_i\lambda_i^2 + 1 - a_i + a_i\lambda_i\varepsilon\eta_i^*(1 - e^{-p_*x}) +$$

$$+ a_i\varepsilon^2(\eta_i^*)^2(1 - e^{-p_*x})^2)dx \le \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \int_0^\infty K_{ij}(x-t)(\lambda_j - \varphi_j^{(m+1)}(t))dtdx +$$

$$+2\sum_{j=1}^n \lambda_j m(K_{ij}) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty (\lambda_j - \varphi_j^{(m+1)}(t)) \int_{-\infty}^t K_{ij}(y)dydt + 2\sum_{j=1}^n \lambda_j m(K_{ij}) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^n \int_0^1 (\lambda_j - \varphi_j^{(m+1)}(t)) \int_{-\infty}^t K_{ij}(y)dydt + \sum_{j=1}^n a_{ij}\left[\int_1^\infty (\lambda_j - \varphi_j^{(m+1)}(t))dt\right] +$$

$$+2\sum_{j=1}^n \lambda_j m(K_{ij}) \le \max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\int_0^1(\lambda_j - \varphi_j^{(m+1)}(t))dt}{\lambda_j}\right\}\sum_{j=1}^n \lambda_j \int_{-\infty}^1 K_{ij}(y)dy +$$

$$+ \max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\int_1^\infty(\lambda_j - \varphi_j^{(m+1)}(t))dt}{\lambda_j}\right\}\sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j + 2\sum_{j=1}^n \lambda_j m(K_{ij}) \le$$

$$\le \max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\int_0^1(\lambda_j - \varphi_j^{(m+1)}(t))dt}{\lambda_j}\right\}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j - \min_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n \lambda_j \int_1^\infty K_{ij}(y)dy\right) +$$

$$+ \max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\int_1^\infty(\lambda_j - \varphi_j^{(m+1)}(t))dt}{\lambda_j}\right\}\sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j + 2\sum_{j=1}^n \lambda_j m(K_{ij}).$$

Из полученного неравенства, в частности, следует, что

$$(a_i\lambda_i^3 + (1-a_i)\lambda_i)\cdot\frac{\int_0^1(\lambda_i - \varphi_i^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_i} + \Big[a_i\lambda_i^3 + (1-a_i)\lambda_i +$$

$$+a_i\lambda_i^2\varepsilon\eta_i^*(1-e^{-p_*})+a_i\lambda_i\varepsilon^2(\eta_i^*)^2(1-e^{-p_*})^2\Big]\cdot\frac{\int\limits_1^\infty(\lambda_i-\varphi_i^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_i}\le$$

$$\le\max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\int\limits_0^1(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(t))dt}{\lambda_j}\right\}\cdot\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j-\min_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n\lambda_j\int\limits_1^\infty K_{ij}(y)dy\right)+$$

$$+\max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\int\limits_1^\infty(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(t))dt}{\lambda_j}\right\}\cdot\sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j+2\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^n\lambda_j m(K_{ij})\right).$$

Откуда с учетом (4.2) получаем, что

$$\frac{\int\limits_0^1(\lambda_i-\varphi_i^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_i}+\frac{\int\limits_1^\infty(\lambda_i-\varphi_i^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_i}(1+\gamma_i)\le$$

$$\le\max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\int\limits_0^1(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_j}\right\}\cdot\left(1-\frac{\min\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j\int\limits_1^\infty K_{ij}(y)dy}{a_i\lambda_i^3+(1-a_i)\lambda_i}\right)+\tag{6.8}$$

$$+\max_{1\le j\le n}\left\{\frac{\int\limits_1^\infty(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_j}\right\}+\frac{2\max\limits_{1\le i\le n}\left(\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j m(K_{ij})\right)}{a_i\lambda_i^3+(1-a_i)\lambda_i},$$

где

$$\gamma_i\equiv\frac{a_i\lambda_i^2\varepsilon\eta_i^*(1-e^{-p_*})+a_i\lambda_i\varepsilon^2(\eta^*)^2(1-e^{-p_*})^2}{a_i\lambda_i^3+(1-a_i)\lambda_i},\quad i=1,2,\dots,n.\tag{6.9}$$

Очевидно, что

$$\gamma=\min_{1\le i\le n}\gamma_i>0.$$

Обозначим через

$$C_1\equiv\frac{2\max\limits_{1\le i\le n}\left(\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j m(K_{ij})\right)}{\min\limits_{1\le i\le n}(a_i\lambda_i^3+(1-a_i)\lambda_i)},\quad(C_1>0),$$

$$C_2\equiv\frac{\min\limits_{1\le i\le n}\left(\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j\int\limits_1^\infty K_{ij}(y)dy\right)}{\max\limits_{1\le i\le n}(a_i\lambda_i^3+(1-a_i)\lambda_i)},\quad(C_2>0).$$

Тогда из неравенства (6.8) следует, что

$$\frac{\int\limits_0^1(\lambda_i-\varphi_i^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_i}+\frac{\int\limits_1^\infty(\lambda_i-\varphi_i^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_i}(1+\gamma)\le$$

$$\leq \max_{1\leq j\leq n}\left\{\frac{\int\limits_0^1(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_j}\right\}\cdot(1-C_2)+\max_{1\leq j\leq n}\left\{\frac{\int\limits_1^\infty(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_j}\right\}+C_1.$$

Используя следующее легко проверяемое тождество

(6.10)

$$\max_{1\leq i\leq n}\left\{(\alpha_i+\beta_i):\ \alpha_i,\beta_i\geq 0,\ \ i=1,2,\ldots,n\right\}=$$
$$=\max_{1\leq i\leq n}\left\{\alpha_i:\ \alpha_i\geq 0,\ \ i=1,2,\ldots,n\right\}+\max_{1\leq i\leq n}\left\{\beta_i:\ \beta_i\geq 0,\ \ i=1,2,\ldots,n\right\},$$

из последнего неравенства получим

$$C_2\max_{1\leq j\leq n}\left\{\frac{\int\limits_0^1(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_j}\right\}+\gamma\max_{1\leq j\leq n}\left\{\frac{\int\limits_1^\infty(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(x))dx}{\lambda_j}\right\}\leq C_1.$$

Вновь используя (6.10), приходим к неравенству:

$$\min(C_2,\gamma)\cdot\max_{1\leq j\leq n}\left\{\frac{\int\limits_0^\infty(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(t))dt}{\lambda_j}\right\}\leq C_1.$$

Следовательно,

$$\max_{1\leq j\leq n}\left\{\frac{\int\limits_0^\infty(\lambda_j-\varphi_j^{(m+1)}(t))dt}{\lambda_j}\right\}\leq\frac{C_1}{\min\{C_2,\gamma\}}. \tag{6.11}$$

Из (6.11) и $A)$–$D)$ (а также согласно теоремы Б. Леви) следует поточечная сходимость последовательных приближений (6.1), т.е. существует $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi^{(m)}(x)=\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))^T$, причем $\lambda-\varphi\in L_1^{\times n}(\mathbb{R}^+)$, предельная вектор-функция удовлетворяет системе (2.8) и имеет место неравенство:

$$\max_{1\leq j\leq n}\left\{\frac{\int\limits_0^\infty(\lambda_j-\varphi_j(t))dt}{\lambda_j}\right\}\leq\frac{C_1}{\min\{C_2,\gamma\}}.$$

Используя формулу (2.9), заключаем

$$\lambda\pm f\in L_1^{\times n}(\mathbb{R}^\mp). \tag{6.12}$$

Отметим, что и здесь всевозможные сдвиги вектор-функции f удовлетворяют системе (1.1). Из (6.12) следует, что

$$\lambda\pm f_c\in L_1^{\times n}(\mathbb{R}^\mp),\quad\text{где}\quad f_c(x)=f(x+c),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Итак, справедлива

Теорема 6.1. *При условиях теоремы 5.1, если дополнительно $m(K_{ij})<+\infty$, $i,j=1,2,\ldots,n$, то система* (1.1) *обладает однопараметрическим семейством* *непрерывных монотонно неубывающих и ограниченных решений* $\{f_c(x)\}_{c\in\mathbb{R}}$, *причем* $\lambda \pm f_c \in L_1^{\times n}(\mathbb{R}^{\mp})$, *где* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T$ *единственное решение системы* (4.2).

Abstract. A system of nonlinear integral equations with a convolution type operator arising in the p-adic string theory for the scalar tachyons field is studied. The existence of a one-parameter family of monotone-continuous and bounded solutions for this system is proved. The limits of the constructed solutions at $\pm\infty$ are calculated.

Список литературы

[1] Л. В. Жуковская, "Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн", ТМФ, 146, no. 3, 402 – 409 (2006).

[2] В. С. Владимиров, "О нелинейном уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля", УМН, 60:6, no. 366, 73 – 88 (2005).

[3] В. С. Владимиров, "О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн", ТМФ, 149, no. 3, 354 – 367 (2006).

[4] Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, А. А. Сисакян, "О нетривиальной разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона", Тр. ИММ УрО РАН, 23, no. 2, 266 – 273 (2017).

[5] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, "О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны", ТМФ, 138, no. 3, 355 – 368 (2004).

[6] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, "Cosmological daemon", Journal of High Energy Physics, no. 8, 102 (2011). DOI: https://doi.org/10.1007/JHEP08(2011)102

[7] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, 2-е изд., доп., М., Наука, (1966).

[8] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., 2 (2012).

[9] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, 7-е изд., М., ФИЗМАТЛИТ (2004).

[10] Г. Г. Геворкян, Н. Б. Енгибарян, "Новые теоремы для интегрального уравнения восстановления", Известия НАН Армении, математика, 32, no. 1, 5 – 20 (1997).

Поступила 20 сентября 2017

Cover-to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 53, No. 3, 2018

CONTENTS

Индекс 77736

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 53, номер 4, 2018

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 53, No. 4, 2018

Contents