ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2018

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 3 – 10.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

Г. Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *ggg@ysu.am*

Аннотация. Найдены формулы представления коэффициентов рядов Хаара, сходящихся к нулю всюду, кроме быть может некоторого конечного множества.

MSC2010 numbers: 42C10; 42C20.

Ключевые слова: Система Хаара; ряд Хаара; единственность.

1. Введение

В математической литературе встречаются разные определения системы Хаара. Они между собой отличаются определением функций Хаара в точках разрыва. Здесь мы приведем определение системы Хаара, совпадающее с определением, данным самим А. Хааром в [1].

Для $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, ...$, $m = 1, 2, ..., 2^k$, положим

$$\Delta_n = \left[\frac{m-1}{2^k}, \frac{m}{2^k}\right], \quad \Delta_n^+ = \left(\frac{m-1}{2^k}, \frac{2m-1}{2^{k+1}}\right), \quad \text{и} \quad \Delta_n^- = \left(\frac{2m-1}{2^{k+1}}, \frac{m}{2^k}\right).$$

Система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяется следующим образом: $\chi_1(x) = 1$, когда $x \in [0, 1]$, а для $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, ...$, $m = 1, 2, ..., 2^k$, полагается

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \text{когда } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{\frac{k}{2}}, & \text{когда } x \in \Delta_n^-, \\ 0, & \text{когда } x \notin \Delta_n. \end{cases}$$

В остальных точках n-ая функция Хаара $\chi_n(x)$ равна арифметическому среднему односторонних пределов в этой точке. Если $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, ...$, $m = 1, 2, ..., 2^k$, то k назовем рангом числа n и отрезка Δ_n.

В работах [2]-[4] доказана теорема единственности типа Кантора для системы Хаара, т.е. если ряд по системе Хаара всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю. А в работе [5] установлено, что одноточечное множество $\{\frac{1}{2}\}$ не является множеством единственности для системы Хаара, т.е.

[1] Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T 1A006

существует нетривиальный ряд по системе Хаара, который всюду, за исключением точки $\frac{1}{2}$, сходится к нулю. В работе [6] показано, что любое одноточечное множество не является множеством единственности для системы Хаара. В [6] также установлена следующая теорема.

Теорема 1.1. (Ф. Г. Арурюнян, А. А. Талалян) *Пусть ряд Хаара*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x) \tag{1.1}$$

всюду, кроме, быть может некоторого счетного множества, сходится к всюду конечной интегрируемой функции f и выполняется

$$a_k \chi_k(x) = o_x(k), \quad \text{для всех} \ \ x \in [0,1].$$

Тогда ряд (1.1) является рядом Фурье-Хаара функции f.

Введем обозначения. Ряд (1.1) формально обозначим через $\mathcal{S}$, а его частичные суммы обозначим через $\mathcal{S}_n$. Для $\Delta \in \{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ через $(\mathcal{S}, \Delta)$ обозначим

$$(\mathcal{S}, \Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\Delta} \chi_k(t) dt. \tag{1.2}$$

Заметим, что на самом деле выражение в правой части (1.2) является конечной суммой и

$$(\mathcal{S}, \Delta_n) = (\mathcal{S}_m, \Delta_n) = (\mathcal{S}_{n-1}, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \int_{\Delta_n} \chi_k(t) dt, \quad \text{когда} \ \ m \geq n-1. \tag{1.3}$$

Если $(\mathcal{S}, \Delta)$ рассмотреть как функцию от Δ, при фиксированном ряде (1.1), то получим некоторую квазимеру соответствующую ряду (1.1). Рассмотрение таких квазимер имеет многочисленные применения в теории рядов Хаара. Об этом можно узнать из работы [7], [8] и из других работ цитированных в [7], [8].

Здесь и далее $\Delta_n^{\circ} = (\alpha, \beta)$, если $\Delta_n = [\alpha, \beta]$. Отметим, что если конечное число интервалов Δ_n° не пересекаются и $\Delta = \bigcup \Delta_i$, то

$$(\mathcal{S}, \Delta) = \sum_i (\mathcal{S}, \Delta_i). \tag{1.4}$$

2. Основные результаты

В настоящей работе мы выясним, каким может быть ряд по системе Хаара, который всюду, за исключением некоторого конечного множества, сходится к нулю. С этой целью сначала докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть для некоторого Δ_n выполняется*

$$(\mathcal{S}, \Delta_n) \neq 0 \tag{2.1}$$

и ряд (1.1) на Δ_n по мере сходится к нулю. Тогда существует $x_0 \in \Delta_n$ такая, что

$$\sup_K \left| \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_k(x_0) \right| = \infty. \tag{2.2}$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть $\Delta_n = [\alpha, \beta]$ и для него выполняется (2.1). Тогда одно из следующих утверждений верно: существует $\Delta_{n'} \subset (\alpha, \beta)$ такое, что $(\mathcal{S}, \Delta_{n'}) \neq 0$,*

$$\max(\sup_n |\mathcal{S}_n(\alpha)|, \sup_n |\mathcal{S}_n(\beta)|) = \infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Допустим для всех n', с условием $\Delta_{n'} \subset (\alpha, \beta)$, выполняется $(\mathcal{S}, \Delta_{n'}) = 0$. Пусть k_0 больше ранга n на два. Тогда для $j = \alpha 2^{k_0}$ будем иметь $\Delta_n = \bigcup_{i=1}^{4} \Delta_{j+i}$ и поэтому (см. (1.4))

$$(\mathcal{S}, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{4} (\mathcal{S}, \Delta_{j+i}).$$

В силу нашего допущения, хотя бы одно из $(\mathcal{S}, \Delta_{j+1})$, $(\mathcal{S}, \Delta_{j+4})$ не равно нулю. Допустим $(\mathcal{S}, \Delta_{j+1}) \neq 0$ (случай $(\mathcal{S}, \Delta_{j+4}) \neq 0$ рассматривается аналогично). Тогда будем иметь

$$0 \neq d := (\mathcal{S}, \Delta_{j+1}) = \sum_{i=1}^{2^{k-k_0}} (\mathcal{S}, \Delta_{\alpha 2^k + i}) = (\mathcal{S}, \Delta_{\alpha 2^k + 1}) = (\mathcal{S}_{2^k}, \Delta_{\alpha 2^k + 1}). \tag{2.4}$$

Через w_k обозначим то постоянное значение частичной суммы $\mathcal{S}_{2^k}$, которое она принимает внутри $\Delta_{\alpha 2^k + 1}$. Из (2.4) следует, что $d = 2^{-k} w_k$, или $w_k = 2^k d$. Через u_k обозначим значение функции $a_{\alpha 2^{k-1}+1} \chi_{\alpha 2^{k-1}+1}$ на $\Delta^+_{\alpha 2^{k-1}+1}$. Отметим, что $\Delta^+_{\alpha 2^{k-1}+1}$ совпадает с $\Delta^\circ_{\alpha 2^k + 1}$. Поэтому $u_k = w_k - w_{k-1} = d \cdot 2^{k-1}$. Из определения системы Хаара следует, что $a_{\alpha 2^{k-1}+1} \chi_{\alpha 2^{k-1}+1}(\alpha) = \frac{u_k}{2} = d \cdot 2^{k-2}$. Следовательно, $\sup_n |a_n \chi_n(\alpha)| = \infty$ и доказано выполнение (2.3). Лемма 2.1 доказана.

3. Доказательство Теоремы 2.1 и ее применения

Пусть выполнено (2.1) и $\Delta_n = [\alpha_0, \beta_0]$. С учетом леммы 2.1 можем утверждать, что либо

$$\max(\sup_n |\mathcal{S}_n(\alpha_0)|, \sup_n |\mathcal{S}_n(\beta_0)|) = \infty, \tag{3.1}$$

либо

$$\text{существует } \Delta_{n_1'} = [\alpha_1', \beta_1'] \subset (\alpha_0, \beta_0), \text{ такой что } (\mathcal{S}, \Delta_{n_1'}) \neq 0. \tag{3.2}$$

Если выполняется (3.1), то теорема доказана. Если же выполнено (3.2), то найдется $\Delta_{n_1} \subset \Delta_{n_1'}$, ранга k, такое что

$$\max\{|\mathcal{S}_{2^k}(\Delta_{n_1}^+)|, |\mathcal{S}_{2^k}(\Delta_{n_1}^-)|\} > 1. \tag{3.3}$$

Действительно, если бы не выполнялось бы (3.3), то это означало, что суммы $\mathcal{S}_n(x)$ ограничены на $\Delta_{n_1'}$ и поскольку $\mathcal{S}(x)$ на Δ_n по мере сходится к нулю, то имели бы

$$(\mathcal{S}, \Delta_{n_1'}) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta_{n_1'}} \mathcal{S}_n(x)dx = 0.$$

Последнее противоречит (3.2). Через $\Delta_{n_1} = [\alpha_1, \beta_1]$ обозначим замыкание отрезка $\Delta_{n_1}^+$ или $\Delta_{n_1}^-$, на котором реализируется максимум в левой части (3.3).

Итак, либо теорема доказана, либо найдется отрезок $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha_0, \beta_0)$ такое, что $|(\mathcal{S}, \Delta_{n_1})| = |\mathcal{S}_{n_1}(z)| > 1$, где $z \in (\alpha_1, \beta_1)$. Продолжая процесс, либо на каком то шаге завершим доказательство, либо получим последовательности n_k, $\Delta_{n_k} = [\alpha_k, \beta_k]$ такие, что

$$\Delta_{n_k} \subset (\alpha_{n_{k-1}}, \beta_{n_{k-1}}), \quad k = 1, 2, ..., \tag{3.4}$$

и $|\mathcal{S}_{n_k}(z)| > k$ для $z \in (\alpha_k, \beta_k)$. Из (3.4) следует, что существует единственная точка x_0, принадлежащая всем интервалам (α_k, β_k). Поэтому $|\mathcal{S}_{n_k}(x_0)| > k$, для всех натуральных k. Теорема 2.1 доказана. Из доказанной теоремы немедленно следует

Следствие 3.1. (Теорема типа Кантора) *Если ряд (1.1) сходится по мере к нулю и в любой точке x выполняется*

$$\sup_n |\mathcal{S}_n(x)| < \infty, \tag{3.5}$$

то все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Известно, что если ряд (1.1) есть ряд Фурье-Хаара ограниченной функции f, то $\sup_n |S_n(x)| \le \|f\|_\infty$. Поэтому из следствия 3.1 вытекает

Следствие 3.2. *Если ряд (1.1) сходится по мере к ограниченной функции f и в любой точке x выполняется (3.5), то ряд (1.1) является рядом Фурье-Хаара этой функции.*

Отметим, что следствие 3.2 не содержится в теореме 1.1, поскольку ряд Фурье-Хаара ограниченной функции не объязан сходится всюду, кроме некоторого счетного множества.

Применяя теорему 2.1, докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть ряд (1.1) всюду, кроме точки $x_0 \in [0,1]$ сходится к нулю. Тогда*

$$a_n = C_1\chi_n(x_0 - 0) + C_2\chi_n(x_0 + 0), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

если x_0 двоично-рациональня точка из $(0,1)$, и $a_n = C\chi_n(x_0)$, в остальных случаях, где C, C_1, C_2 некоторые постоянные.

Доказательство теоремы 3.1. Для фиксированного ряда (1.1) и отрезка Δ_n обозначим

$$\Delta_n(S) = \frac{1}{|\Delta_n|}(S, \Delta_n) = \frac{1}{|\Delta_n|}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\Delta_n} \chi_k(t)dt. \tag{3.6}$$

Заметим, что $\Delta_n(S)$ совпадает со значением $S_{n-1}(x)$ во внутренных точках отрезка Δ_n. Очевидно также, что если $\Delta_n = \Delta_{n_1} \bigcup \Delta_{n_1+1}$, то

$$\Delta_n(S) = \frac{1}{2}\Delta_{n_1}(S) + \frac{1}{2}\Delta_{n_1+1}(S). \tag{3.7}$$

Сначала рассмотрим случай, когда x_0-двоично-иррациональная или $x_0 \in \{0,1\}$. Тогда для каждого k существует единственное $n_k = 2^k + i_k$, $1 \le i_k \le 2^k$, со свойством $\Delta_{n_k} \ni x_0$. Пусть

$$A_k := \Delta_{n_k}(S). \tag{3.8}$$

В силу теоремы 3.2 и обозначения (3.6), если $n = 2^k + i$, $i = 1, ..., 2^k$, и $n \ne n_k$, то $\Delta_n(S) = 0$. Поэтому из (3.7) и (3.8) имеем

$$A_k = 2A_{k-1} = \ldots = 2^k A_0 \ \text{ и } \ A_0 = a_0.. \tag{3.9}$$

Следовательно, для $n = 2^k + i$, $i = 1, ..., 2^k$, имеем

$$(3.10) \qquad \frac{1}{|\Delta_n|} \int_{\Delta_n} \sum_{m=1}^{2^{k+1}} a_m \chi_m(t) dt = \Delta_n(\mathbb{S}) = \begin{cases} 0, & \text{когда } n \neq n_k \\ 2^{k+1} a_0, & \text{когда } n = n_k. \end{cases}$$

Отметим, что сумма $\sum_{m=1}^{2^{k+1}} a_m \chi_m(x)$ принимает постоянные значения на интервалах $(\frac{i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^{k+1}})$, $i = 1, ..., 2^{k+1}$, а значения в точках $\frac{i}{2^{k+1}}$ равны среднему арифметическому односторонних пределов в этих точках. Система $\{\chi_m(x)\}_{m=1}^{2^{k+1}}$ образует базис в таком конечномерном пространстве (см. [9]). Учитывая, что (см. [9])

$$(3.11) \qquad \sum_{m=1}^{2^{k+1}} \chi_m(x_0) \chi_m(x) = \begin{cases} 2^{k+1}, & \text{когда } x \in (\frac{i_k - 1}{2^{k+1}}, \frac{i_k}{2^{k+1}}) \\ 0, & \text{когда } x \notin [\frac{i_k - 1}{2^{k+1}}, \frac{i_k}{2^{k+1}}]. \end{cases}$$

из (3.10) получим , что для любого k имеет место

$$\sum_{m=1}^{2^{k+1}} a_m \chi_m(x) = a_0 \sum_{m=1}^{2^{k+1}} \chi_m(x_0) \chi_m(x).$$

В рассматриваемом случае теорема доказана.

В случае когда $x_0 \in (0, 1)$ и двоично-рациональная, начиная с некоторого k_0 существует единственное n_k, $n_k = 2^k + i_k$, $0 \leq i_k \leq 2^k - 2$, такое что $\Delta_{n_k} \ni x_0$ и $\Delta_{n_k+1} \ni x_0$. Обозначим $A_k = \Delta_{n_k}(\mathbb{S})$ и $B_k = \Delta_{n_k+1}(\mathbb{S})$. Тогда, аналогично (3.9), получим $A_k = 2^{k-k_0} A_{k_0}$ и $B_k = 2^{k-k_0} B_{k_0}$.

Поэтому, для $n = 2^k + i$, $i = 1, ..., 2^k$, имеем

$$(3.12) \qquad \Delta_n(\mathbb{S}) = \begin{cases} 0, & \text{когда } n \neq n_k \text{ и } n \neq n_k + 1, \\ 2^{k-k_0} A_{k_0}, & \text{когда } n = n_k, \\ 2^{k-k_0} B_{k_0}, & \text{когда } n = n_k + 1. \end{cases}$$

Пусть x_k и y_k некоторые внутренние точки отрезков Δ_{n_k} и Δ_{n_k+1}, соответственно. Тогда из (3.12) и (3.11) получаем

$$\sum_{m=1}^{2^{k+1}} a_m \chi_m(x) = 2^{k-k_0} A_{k_0} \mathfrak{I}_{\Delta_{n_k}}(x) + 2^{k-k_0} B_{k_0} \mathfrak{I}_{\Delta_{n_k+1}}(x) =$$

$$2^{-k_0} A_{k_0} \sum_{m=1}^{2^{k+1}} \chi_m(x_m) \chi_m(x) + 2^{-k_0} B_{k_0} \sum_{m=1}^{2^{k+1}} \chi_m(y_m) \chi_m(x) =$$

$$2^{-k_0} A_{k_0} \sum_{m=1}^{2^{k+1}} \chi_m(x_0 - 0) \chi_m(x) + 2^{-k_0} B_{k_0} \sum_{m=1}^{2^{k+1}} \chi_m(x_0 + 0) \chi_m(x) =$$

$$\sum_{m=1}^{2^{k+1}} (2^{-k_0} A_{k_0} \chi_m(x_0 - 0) + 2^{-k_0} B_{k_0} \chi_m(x_0 + 0)) \chi_m(x).$$

Теорема 3.1 доказана.

Аналогично теореме 3.1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть ряд (1.1) по мере сходится к нулю и всюду, кроме, быть может, точек x_i, $i = 1, 2, .., k$, выполняется (3.5). Тогда*

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} (A_i \chi_n(x_i - 0) + B_i \chi_n(x_i + 0)), \tag{3.13}$$

где A_i, B_i некоторые постоянные. И наоборот любой ряд (1.1) с коэффициентами (3.13), всюду, кроме, быть может, точек x_i, $i = 1, 2, .., k$ сходится к нулю.

Предложение 3.1. *Если частичные суммы ряда (1.1), с коэффициентами (3.13), в некоторой точке x_{i_0}, $i_0 \in \{1, 2, ...k\}$, ограничены, то $A_{i_0} = B_{i_0} = 0$ и поэтому ряд (1.1) в точке x_{i_0} сходится к нулю.*

Действительно, если коэффиценты ряда (1.1) имеют вид (3.13), то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} (A_i \chi_n(x_i - 0) + B_i \chi_n(x_0 + 0)) \chi_n(x) =: \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}^{(i)}(x).$$

Поскольку каждый ряд $\mathcal{S}^{(i)}(x)$ сходится к нулю, когда $x \neq x_i$, то ограниченность частичных сумм ряда (1.1) в точке x_{i_0} влечет $\sup_n |\chi_n(x_0)(A_{i_0} \chi_n(x_{i_0} - 0) + B_{i_0} \chi_n(x_i + 0))| < \infty$. А это возможно только, если $A_{i_0} = B_{i_0} = 0$.

В заключении отметим, что легко проверить справедливость следующего утверждения.

Предложение 3.2. *Пусть x_0 двоично-рациональная точка из $(0, 1)$. Тогда ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\chi_n(x_0 + 0) - \chi_n(x_0 - 0)) \chi_n(x)$$

нетривиальный, всюду, кроме точки x_0 сходится к нулю и выполняется

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{2^k} (\chi_n(x_0 + 0) - \chi_n(x_0 - 0)) \chi_n(x_0) = 0.$$

Abstract. In this paper we obtain representation formulas for coefficients of Haar series that converge to zero everywhere except possibly some finite set.

Список литературы

[1] A. Haar, "Zur Theorie der orthogonalen Functionensysteme", Math. Annalen, **60**, 331 – 371 (1910).
[2] Ф. Г. Арутюнян, "О рядах по системе Хаара", ДАН Арм. ССР, **38:3**, 129 – 134 (1964).
[3] М. Б. Петровская, "О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности", Изв. АН СССР, сер. матем., **28:4**, 773 – 798 (1964).
[4] В. А. Скворцов, "Теорема типа Кантора для системы Хаара", Вестник МГУ, сер. матем., **5**, 3 – 6 (1964).
[5] G. Faber, "Über die Orthogonalfunctionen des Herrn Haar", Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung, **19**, 104 – 112 (1910).
[6] Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, "О единственности рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН СССР, сер. матем., **28:6**, 1391 – 1408 (1964).
[7] М. Г. Плотников, "Квазимеры, Хаусдорфовы p-меры и ряды Уолша и Хаара", Изв. РАН, сер. матем., **74:4**, 157 – 188 (2010).
[8] М. Г. Плотников, Ю. А. Плотникова, "Разложение двоичных мер и объединение замкнутых U-множеств для рядов по системе Хаара", Матем. сб., **207:3**, 137 – 152 (2016).
[9] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, АФЦ (1999).

Поступила 20 июня 2017

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 11 – 20.

GOODNESS-OF-FIT TESTS FOR CONTINUOUS-TIME STATIONARY PROCESSES

M. S. GINOVYAN

Institute of Mathematics, Yerevan, Armenia
Boston University, Boston, USA
E-mail: *ginovyan@math.bu.edu*

Abstract. The paper considers the following problem of hypotheses testing: based on a finite realization $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ of a zero mean real-valued mean square continuous stationary Gaussian process $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, construct goodness-of-fit tests for testing a hypothesis H_0 that the hypothetical spectral density of the process $X(t)$ has the specified form. We show that in case where the hypothetical spectral density of $X(t)$ does not depend on unknown parameters (the hypothesis H_0 is simple), then the suggested test statistic has a chi-square distribution. In the case where the hypothesis H_0 is composite, that is, the hypothetical spectral density of $X(t)$ depends on an unknown p–dimensional vector parameter, we choose an appropriate estimator for unknown parameter and describe the limiting distribution of the test statistic, which is similar to that of obtained by Chernov and Lehman in the case of independent observations. The testing procedure works both for short- and long-memory models.[1]

MSC2010 numbers: 62F03, 60G10, 62G05, 62G20.

Keywords: Goodness-of-fit test; chi-square distribution; continuous-time stationary process; periodogram; spectral density.

1. Introduction

Suppose we observe a finite realization $\mathbf{X}_T := \{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ of a zero mean real-valued mean square continuous stationary Gaussian process $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, possessing a spectral density function.

In this paper, we consider the following problem of hypotheses testing: based on a sample $\mathbf{X}_T$ construct goodness-of-fit tests for testing a hypothesis H_0 that the spectral density function of the process $X(t)$ has the specified form. We will distinguish the following two cases:

a) The hypothesis H_0 is simple, that is, the hypothetical spectral density $f(\lambda)$ of $X(t)$ does not depend on unknown parameters.
b) The hypothesis H_0 is composite, that is, the hypothetical spectral density $f(\lambda)$ of $X(t)$ depends on an unknown p–dimensional vector parameter $\theta =$

[1]This research was partially supported by National Science Foundation Grant #DMS-1309009 at Boston University.

$(\theta_1, \dots, \theta_p)' \in S$, that is, $f(\lambda) = f(\lambda, \theta)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\theta \in S$, where S is an open set of Euclidean space $\mathbb{R}^p$.

We first consider the relatively easy case a) of simple hypothesis H_0. Denote by $I_T(\lambda)$ the continuous periodogram (the empirical spectral density) of the process $X(t)$:

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T X(t) e^{-it\lambda} \, dt \right|^2 . \tag{1.1}$$

To test the hypothesis H_0, it is natural to introduce a measure of divergence (disparity) of the hypothetical and empirical spectral densities, and construct a goodness-of-fit test based on the distribution of the chosen measure. There are different type of such measures of divergence.

In this paper, as a measure of divergence of the hypothetical spectral density $f(\lambda)$ and empirical spectral density $I_T(\lambda)$, we consider the m–dimensional random vector

$$\Phi_T = (\Phi_{1T}, \dots, \Phi_{mT}) \tag{1.2}$$

with elements

$$\Phi_{jT} := \Phi_{jT}(\mathrm{X}_T) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{I_T(\lambda)}{f(\lambda)} - 1 \right] \varphi_j(\lambda) d\lambda, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{1.3}$$

where $\{\varphi_j(\lambda), \, j = 1, 2, \dots, m\}$ is some orthonormal system on $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(\lambda) \varphi_j(\lambda) \, d\lambda = \delta_{kj}. \tag{1.4}$$

We show that under wide conditions on $f(\lambda)$ and $\varphi_j(\lambda)$, the random vector Φ_T has asymptotically $N(0, I_m)$–normal distribution as $T \to \infty$, where I_m is $m \times m$ identity matrix, and the components Φ_{kT} and Φ_{jT} are asymptotically uncorrelated for $k \neq j$. Therefore in the case of simple hypothesis H_0, we can use the statistics

$$S_T = S_T(\mathrm{X}_T) := \Phi_T'(\mathrm{X}_T) \Phi_T(\mathrm{X}_T) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_{jT}^2(\mathrm{X}_T), \tag{1.5}$$

which for $T \to \infty$ will have a χ^2 distribution with m degrees of freedom.

Thus, fixing an asymptotic level of significance α we can consider the class of goodness-of-fit tests for testing the simple hypothesis H_0 about the form of the spectral density f with asymptotic level of significance α determined by critical regions of the form $\{\mathrm{x}_T : S_T(\mathrm{x}_T) > d_\alpha\}$, where $S_T(\mathrm{x}_T)$ is given by (1.5), and d_α is the α-quantile of χ^2–distribution with m degrees of freedom, that is, d_α is determined from the condition

$$P(\chi^2 > d_\alpha) = \int_{d_\alpha}^{\infty} k_m(x) \, dx = \alpha, \tag{1.6}$$

where $k_m(x)$ is the density of χ^2–distribution with m degrees of freedom.

In the case b) of composite hypothesis H_0, that is, when the hypothetical spectral density function $f(\lambda,\theta)$ of the underlying process $X(t)$ depends on an unknown p–dimensional parameter $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_p)'$, the problem of construction of goodness-of-fit tests becomes more complex, because first the unknown parameter has to be estimated. It is important to remark that in this case the limiting distribution of the test statistic will change in accordance with properties of an estimator of θ, and generally will not be a χ^2–distribution.

For testing a composite hypothesis H_0, we again can use statistics of type (1.5), but with a statistical estimator $\widehat{\theta}_T$ instead of unknown θ. The corresponding statistics can be written as follows:

$$S_T(\widehat{\theta}_T) = S_T(\mathrm{X}_T,\widehat{\theta}_T) := \Phi'_T(\mathrm{X}_T,\widehat{\theta}_T)\Phi_T(\mathrm{X}_T,\widehat{\theta}_T) = \sum_{j=1}^{m}\Phi^2_{jT}(\widehat{\theta}_T), \tag{1.7}$$

where now

$$\Phi_T(\mathrm{X}_T,\widehat{\theta}_T) := \left(\Phi_{1T}(\mathrm{X}_T,\widehat{\theta}_T),\dots,\Phi_{mT}(\mathrm{X}_T,\widehat{\theta}_T)\right) \tag{1.8}$$

with elements

$$\Phi_{jT}(\mathrm{X}_T,\widehat{\theta}_T) := \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{I_T(\lambda)}{f(\lambda,\widehat{\theta}_T)} - 1\right]\varphi_j(\lambda)d\lambda, \quad j = 1,2,\dots,m. \tag{1.9}$$

So, we must choose an appropriate statistical estimator $\widehat{\theta}_T$ for unknown θ, and determine the limiting distribution of statistic (1.7). Then, having the limiting distribution of statistic (1.7), for given level of significance α we can consider the class of goodness-of-fit tests for testing the composite hypothesis H_0 about the form of the spectral density f with asymptotic level of significance α determined by critical regions of the form

$$\{\mathrm{x}_T : \; S_T(\mathrm{x}_T,\widehat{\theta}_T) > d_\alpha\}, \tag{1.10}$$

where d_α is the α-quantile of the limiting distribution of the statistic (1.7), that is, d_α is determined from the condition

$$\int_{d_\alpha}^{\infty}\widehat{k}_m(x)\,dx = \alpha, \tag{1.11}$$

where $\widehat{k}_m(x)$ is the density of the limiting distribution of $S_T(\widehat{\theta}_T)$ defined by (1.7).

The limiting distribution of statistic (1.5) for discrete-time Gaussian stationary processes was considered by Hannan [9]. For independent observations the limiting distributions of statistics of type (1.7) with various statistical estimators $\widehat{\theta}_T$ have been considered by many authors (see, e.g., Chernov and Lehman [2], Chibisov [3], Cramer [4], Kendall and Stuart [10], Dzhaparidze and Nikulin [14], and references therein). For observations generated by discrete-time short-memory Gaussian stationary processes the limiting distribution of statistics (1.7) for different statistical estimators $\widehat{\theta}_T$ of unknown parameter θ has been studied by Dzhaparidze [5] and Osidze [11], [12]. (Recall that a stationary processes $X(t)$ is of short-memory if the spectral density $f(\lambda)$ of $X(t)$ is bounded away from zero and infinity, that is, there are constants C_1 and C_2 such that $0 < C_1 \le f(\lambda) \le C_2 < \infty$.) In the case where the spectral density $f(\lambda)$ has zeros and/or poles, the limiting distribution of statistics (1.7) for discrete-time processes has been described in Ginovyan [8].

The present paper extends some results of the above cited references to the continuous-time case and for a broader class of spectral densities possibly possessing zeros and poles.

The rest of the paper is organized as follows: In Section 2 we state the main results of the paper Theorems 2.1 and 2.2. In Section 3 we present some auxiliary results. Section 4 contains proofs of Theorems 2.1 and 2.2.

2. The main results

We first introduce some notation, definitions and assumptions.

Given numbers $p \ge 1$, $0 < \alpha < 1$, $r \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers, we set $\beta = \alpha + r$ and denote by $H_p(\beta)$ the L^p-Hölder class, that is, the class of those functions $\psi(\lambda) \in L^p(\mathbb{R})$, which have r-th derivatives in $L^p(\mathbb{R})$ and with some positive constant C satisfy

$$||\psi^{(r)}(\cdot + h) - \psi^{(r)}(\cdot)||_p \le C|h|^\alpha.$$

Definition 2.1. *We say that a pair of integrable functions $(f(\lambda), g(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, satisfies condition $(\mathcal{H})$, and write $(f, g) \in (\mathcal{H})$, if $f(\lambda) \in H_p(\beta_1)$ for $\beta_1 > 0$, $p > 1$ and $g(\lambda) \in H_q(\beta_2)$ for $\beta_2 > 0$, $q > 1$ with $1/p + 1/q = 1$, and one of the conditions a) – d) is fulfilled:*

a) $\beta_1 > 1/p$, $\beta_2 > 1/q$,

b) $\beta_1 \le 1/p$, $\beta_2 \le 1/q$ and $\beta_1 + \beta_2 > 1/2$,

c) $\beta_1 > 1/p$, $1/q - 1/2 < \beta_2 \le 1/q$,

d) $\beta_2 > 1/q$, $1/p - 1/2 < \beta_1 \le 1/p$.

The next theorem contains sufficient conditions for statistic S_T, given by (1.5), to have a limiting (as $T \to \infty$) χ^2–distribution with m degrees of freedom, extending the result stated in Hannan [9] (p. 94).

Theorem 2.1. *Let the spectral density $f(\lambda)$ and the orthonormal functions $\{\varphi_j(\lambda), j = 1, 2, \ldots, m\}$ be such that $(f, g_j) \in (\mathcal{H})$ for all $j = 1, 2, \ldots, m$, where $g_j = \varphi_j / f$.*

Then the limiting (as $T \to \infty$) distribution of statistics $S_T = S_T(\mathbf{X}_T)$ given by (1.5) is a χ^2-distribution with m degrees of freedom.

Now we consider the case of composite hypothesis H_0, and assume that the hypothetical spectral density $f = f(\lambda, \theta)$ is known with the exception of a vector parameter $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$. In order to construct the corresponding test, we first have to choose an appropriate statistical estimator $\widehat{\theta}_T$ for the unknown parameter θ, constructed on the basis of a sample $\mathbf{X}_T = \{X(t),\, 0 \le t \le T\}$.

Let us introduce the following set of assumptions:

A1) The true value θ_0 of the parameter θ belongs to a bounded closed set Θ contained in an open set S in the p-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^p$.

A2) If θ_1 and θ_2 are two distinct points of Θ, then $f(\lambda, \theta_1) \neq f(\lambda, \theta_2)$ almost everywhere in $\mathbb{R}$ with respect to the Lebesgue measure.

A3) For $\theta \in \Theta$, $(f, g_j) \in (\mathcal{H})$ for all $j = 1, 2, \dots, m$, where $f = f(\lambda, \theta)$ and $g_j = \varphi_j(\lambda)/f(\lambda, \theta)$.

A4) For $\theta \in \Theta$, $(f, h_{kj}) \in (\mathcal{H})$ for all $k = 1, 2, \dots, p$ and $j = 1, 2, \dots, m$, where $f = f(\lambda, \theta)$ and $h_{kj} = \dfrac{\varphi_j(\lambda)}{f(\lambda, \theta)} \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda, \theta)$.

A5) The $(p \times p)$-matrix $\Gamma(\theta_0) = ||\gamma_{kj}(\theta_0)||_{k,j=\overline{1,p}}$ with elements

$$\gamma_{kj}(\theta_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda, \theta)\right]_{\theta=\theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(\lambda, \theta)\right]_{\theta=\theta_0} d\lambda \tag{2.1}$$

is nonsingular.

A6) There exists a $\sqrt{T}$–consistent estimator $\widehat{\theta}_T$ for the parameter θ such that the following asymptotic relation holds:

$$\sqrt{T}\,(\widehat{\theta}_T - \theta_0) - \Gamma^{-1}(\theta_0)\Delta_T(\theta_0) = o_P(1), \tag{2.2}$$

where $\Gamma^{-1}(\theta_0)$ is the inverse of the matrix $\Gamma(\theta_0)$ defined in A5), $\Delta_T(\theta) = (\Delta_{1T}(\theta), \dots, \Delta_{pT}(\theta))$ is a p-dimensional random vector with components

$$\Delta_{kT}(\theta) = \frac{T^{1/2}}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{I_T(\lambda)}{f(\lambda, \theta)} - 1\right] \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda, \theta)\, d\lambda, \quad k = \overline{1,p}, \tag{2.3}$$

and the term $o_P(1)$ tends to zero in probability as $T \to \infty$. (Recall that an estimator $\widehat{\theta}_T$ for θ is said to be $\sqrt{T}$–consistent if $\sqrt{T}(\widehat{\theta}_T - \theta)$ is bounded in probability).

Let $B(\theta) = ||b_{jk}(\theta)||_{j=\overline{1,m},\, k=\overline{1,p}}$, be a $(m \times p)$-matrix with elements

$$b_{jk}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda, \theta)\, d\lambda, \tag{2.4}$$

where $\varphi_j(\lambda)$ $(j = \overline{1,m})$ are the functions from (1.3).

Theorem 2.2. *Under the assumptions A1)–A6) the limiting distribution (as $T \to \infty$) of the statistics $S_T(X_T, \hat\theta_T)$ given by (1.7), coincides with the distribution of the random variable*

$$\sum_{j=1}^{m-p} \xi_j^2 + \sum_{j=1}^{p} \nu_j \xi_{m-p+j}^2, \tag{2.5}$$

where ξ_j, $j = \overline{1,m}$, are iid $N(0,1)$ random variables, while the numbers ν_k $(0 \le \nu_k < 1)$, $k = \overline{1,p}$, are the roots relative to ν of equation

$$\det\left[(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0)\right] = 0. \tag{2.6}$$

Remark 2.1. For independent observations the result of Theorem 2.2 was first obtained by Chernov and Lehman [2] (see, also, Chibisov [3]). For observations generated by discrete-time short-memory Gaussian stationary processes the result was stated by Osidze [11], [12] (see, also, Dzhaparidze [5]). In the case where the spectral density has zeros and/or poles, the result for discrete-time processes was proved by Ginovyan [8]. Note also that for continuous-time processes with rational spectral densities Theorem 2.2 under more restrictive assumptions was stated by Osidze [11], [12].

3. Lemmas

Given a number $T > 0$ and an integrable real symmetric function $h(\lambda)$ defined on $\mathbb{R}$, the *T-truncated Toeplitz operator* generated by $h(\lambda)$, denoted by $W_T(h)$, is defined by the following equation (see, e.g., [6]):

$$[W_T(h)u](t) = \int_0^T \hat{h}(t-s)u(s)ds, \quad u(s) \in L^2[0,T], \tag{3.1}$$

where $\hat{h}(\cdot)$ is the Fourier transform of $h(\cdot)$:

$$\hat{h}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} h(\lambda) d\lambda.$$

For the proof of the next two lemmas we refer to [6], [7].

Lemma 3.1. *Let $h_i(\lambda)$, $i = 1,2,\dots,m$, be integrable real symmetric functions defined on $\mathbb{R}$ such that $h_i \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{p_i}(\mathbb{R})$, $p_i > 1$, $i = 1,2,\dots,m$, with $1/p_1 + \dots + 1/p_m \le 1$. Then the following limiting relation holds:*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{tr}\left[\prod_{i=1}^m W_T(h_i)\right] = (2\pi)^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^m h_i(\lambda)\right] d\lambda, \tag{3.2}$$

where $\operatorname{tr}[A]$ stands for the trace of an operator A.

Lemma 3.2. *Let $f(\lambda)$ be the spectral density of the process $X(t)$ and $g(\lambda)$ be an integrable real symmetric function defined on $\mathbb{R}$ such that $(f,g) \in (\mathcal{H})$. Let $I_T(\lambda)$ be the periodogram of $X(t)$ given by (1.1). Then the random variable*

$$\eta_T = T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} [I_T(\lambda) - f(\lambda)]\, g(\lambda)\, d\lambda \tag{3.3}$$

has asymptotically (as $T \to \infty$) normal distribution with 0 mean and variance σ^2 :

$$\sigma^2 = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\, g^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{3.4}$$

Below we will use the following well-known result, which is known as the Cramér-Wold device (or theorem) (see [1], Theorem 29.4).

Lemma 3.3 (Cramér-Wold device). *For random vectors $\mathbf{X}_n = (X_{n1}, \ldots, X_{nk})$ and $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ a necessary and sufficient condition for $\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X}$ is that $\sum_{j=1}^{k} t_j X_{nj} \xrightarrow{d} \sum_{j=1}^{k} t_j X_j$ for each $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, where $\xrightarrow{d}$ stands for convergence in distribution.*

Consider the $(m+p)$–dimensional random vector column $\Psi_T(\theta) = (\Phi_T(\theta), \Delta(\theta))$, where $\Phi_T(\theta)$ is defined by (1.2), (1.3), while $\Delta(\theta)$ is as in assumption A6).

Using Cramér-Wold device, as an immediate consequence of Lemma 3.2 we can state the following result.

Lemma 3.4. *Under the assumptions of Theorem 2.2, the random vector $\Psi_T(\theta) = (\Phi_T(\theta), \Delta(\theta))$ has asymptotically $N(0, G(\theta_0))$ - normal distribution as $T \to \infty$ with*

$$G(\theta_0) = \begin{pmatrix} I_m & B(\theta_0) \\ B'(\theta_0) & \Gamma(\theta_0) \end{pmatrix},$$

where I_m is $m \times m$ identity matrix, and $B(\theta)$ is the $(m \times p)$–matrix with elements given by (2.4).

Lemma 3.5. *Let $\widehat{\theta}_T$ be a $\sqrt{T}$–consistent estimator for unknown parameter θ. Then under the assumptions of Theorem 2.2, for $T \to \infty$ the following asymptotic relation holds:*

$$\Phi_T(\widehat{\theta}_T) = \Phi_T(\theta_0) - \sqrt{T} B(\theta_0)\, (\widehat{\theta}_T - \theta_0) + o_P(1), \tag{3.5}$$

where B is defined by (2.4), and term $o_P(1)$ tends to zero in probability as $T \to \infty$.

Proof. Using the mean value theorem we can write

$$\Phi_{jT}(\widehat{\theta}_T) - \Phi_{jT}(\theta_0) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I_T(t) \left[\frac{1}{f(t, \widehat{\theta}_T)} - \frac{1}{f(t, \theta_0)} \right] \varphi_j(t)\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=1}^{p} (\widehat{\theta}_{kT} - \theta_{k0}) \int_{-\infty}^{\infty} I_T(t) \left[\frac{1}{f(t,\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(t,\theta) \right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)\, dt, \tag{3.6}$$

where $\theta_* \in (\theta_0, \widehat{\theta}_T)$. Since $\widehat{\theta}_T$ is a $\sqrt{T}$–consistent estimator for θ to complete the proof of (3.5), it is enough to show that as $T \to \infty$ we have

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I_T(t) \left[\frac{1}{f(t,\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(t,\theta) \right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)\, dt = b_{jk}(\theta_0) + o_P(1), \tag{3.7}$$

where b_{jk} are as in (2.4).

Denote $g_* = g_*(t) = \left[\frac{1}{f(t,\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(t,\theta) \right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)$ and $f_0 = f(t, \theta_0)$. Using Lemma 3.1 with $m = 2$, $h_1 = f_0$ and $h_2 = g_*$, for the expectation of the random variable on the left-hand side of (3.7), we obtain as $T \to \infty$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I_T(t) \left[\frac{1}{f(t,\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(t,\theta) \right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t) \right] = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{4\pi T} \operatorname{tr}[\mathbf{W}_T(f_0)\mathbf{W}_T(g_*)]$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda, \theta)\, d\lambda = b_{jk}(\theta_0). \tag{3.8}$$

Next, using Lemma 3.1 with $m = 4$, $h_1 = h_2 = f_0$ and $h_3 = h_4 = g_*$, for the variance of the random variable on the left-hand side of (3.7), we obtain as $T \to \infty$

$$\mathbb{D}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I_T(t) \left[\frac{1}{f(t,\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(t,\theta) \right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)\, dt \right] \tag{3.9}$$

$$= \frac{1}{16\pi^3 T^2} \operatorname{tr}\left[(\mathbf{W}_T(f_0)\mathbf{W}_T(g_*))^2 \right] \longrightarrow 0. \tag{3.10}$$

Now (3.7) follows from (3.8), (3.9) and Chebyshev inequality. Lemma 3.5 is proved. The result that follows is well-known (see [2], [3]).

Lemma 3.6. *Assume that a random vector $\eta_T = (\eta_{1T}, \dots, \eta_{nT})$ has limiting $N(0, A)$ normal distribution (as $T \to \infty$). Then the limiting distribution of the random variable $\eta_T' \eta_T = \sum_{j=1}^{n} \eta_{jT}^2$ coincides with the distribution of $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j^2$, where ξ_j, $j = \overline{1, n}$, are iid $N(0,1)$ random variables, while the numbers λ_j $(j = \overline{1, n})$ are the eigenvalues of matrix A. In particular, if A is an idempotent matrix, that is, $A^2 = A$, then $\eta_T' \eta_T$ has limiting χ^2–distribution with $k = \operatorname{tr}[A]$ degrees of freedom, where $\operatorname{tr}[A]$ stands for the trace of matrix A.*

4. Proofs

Proof of Theorem 2.1. The result immediately follows from Lemma 3.2 and the definition of χ^2-distribution. Indeed, applying Lemma 3.2 with $g_j = f/\varphi_j$, where φ_j, $j = 1, 2, \dots m$, satisfy (1.4), and using Cramér-Wold device (Lemma 3.3), we conclude that the random vector Φ_T, given by (1.2) and (1.3), has asymptotically $N(0, I_m)$-normal distribution as $T \to \infty$, where I_m is $m \times m$ identity matrix, and the components Φ_{kT} and Φ_{jT} are asymptotically uncorrelated for $k \neq j$. Therefore, the result follows from (1.5) and the definition of χ^2-distribution. □

Proof of Theorem 2.2. By (2.2) and Lemma 3.5, for $T \to \infty$ we have the asymptotic relation

$$\begin{aligned}\Phi_T(\widehat{\theta}_T) &= \Phi_T(\theta_0) - B(\theta_0)\sqrt{T}(\widehat{\theta}_T - \theta_0) + o_P(1) \\ &= \Phi_T(\theta_0) - B(\theta_0)\Gamma^{-1}(\theta_0)\Delta_T(\theta_0) + o_P(1). \qquad (4.1)\end{aligned}$$

The last relation can be written in the form

$$\Phi_T(\widehat{\theta}_T) = U_T(\theta_0) + [V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)] + o_P(1), \qquad (4.2)$$

where

$$U_T(\theta_0) = A(\theta_0)\Phi_T(\theta_0); \quad A(\theta_0) = I_m - B(\theta_0)(B'(\theta_0)B(\theta_0))^{-1}B'(\theta_0), \qquad (4.3)$$

$$V_T(\theta_0) = B(\theta_0)\big(B'(\theta_0)B(\theta_0)\big)^{-1}B'(\theta_0)\Phi_T(\theta_0), \qquad (4.4)$$

$$W_T(\theta_0) = B(\theta_0)\Gamma^{-1}(\theta_0)\Delta_T(\theta_0). \qquad (4.5)$$

It is easy to see that

$$A(\theta_0)B(\theta_0) = 0. \qquad (4.6)$$

Hence $U_T'(\theta_0)V_T(\theta_0) = U_T'(\theta_0)W_T(\theta_0) = 0$. Therefore, by (4.2)

$$\begin{aligned}\Phi_T'(\widehat{\theta}_T)\Phi_T(\widehat{\theta}_T) &= U_T'(\theta_0)U_T(\theta_0)+ \\ &+[V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)]'[V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)] + o_P(1). \qquad (4.7)\end{aligned}$$

It follows from Lemma 3.4 and (4.6) that

$$\mathbb{E}[\mathrm{U_T}(\theta_0)(\mathrm{V_T}(\theta_0) - \mathrm{W_T}(\theta_0))'] \longrightarrow 0 \quad \text{as } T \to \infty.$$

Hence the terms on the right-hand side of (4.7) are asymptotically independent random variables. Next, it is easy to check that the matrix $A(\theta_0)$ in (4.3) is idempotent $A^2(\theta_0) = A(\theta_0)$ and $\mathrm{tr}[A(\theta_0)] = m - p$. Applying Lemmas 3.4 and 3.6 we conclude that the random variable $U_T'(\theta_0)U_T(\theta_0)$ has limiting χ^2–distribution with $m - p$ degrees of freedom.

To describe the limiting distribution of the second term on the right-hand side of (4.7), we first observe that by Lemma 3.4

(4.8)

$$\mathbb{E}[(\mathrm{V_T}(\theta_0){-}\mathrm{W_T}(\theta_0))(\mathrm{V_T}(\theta_0){-}\mathrm{W_T}(\theta_0))'] \longrightarrow \mathrm{B}(\theta_0)\big[(\mathrm{B}'(\theta_0)\mathrm{B}(\theta_0))^{-1}{-}\Gamma^{-1}(\theta_0)\big]\mathrm{B}'(\theta_0)$$

as $T \to \infty$. Therefore, by Lemma 3.6 the limiting distribution of the random variable

$$\big[V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)\big]\big[V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)\big]'$$

coincides with the distribution of the sum $\sum_{j=1}^{p} \nu_j \xi_{m-p+j}^2$, where ξ_j, $j = \overline{1,m}$, are iid $N(0,1)$ random variables, while the numbers ν_k $(k = \overline{1,p})$ are the non-zero eigenvalues of the matrix on the right-hand side of (4.8). By Lemma 4.3 from [3] the numbers ν_k $(k = \overline{1,p})$ coincide with the nonzero eigenvalues of the matrix $B'(\theta_0)B(\theta_0)\left[(B'(\theta_0)B(\theta_0))^{-1} - \Gamma^{-1}(\theta_0)\right]$, that is, ν_k are the roots relative to ν of equation

$$\det\left[B'(\theta_0)B(\theta_0)\left[(B'(\theta_0)B(\theta_0))^{-1} - \Gamma^{-1}(\theta_0)\right] - \nu I_p\right] = 0. \tag{4.9}$$

Since the matrix $\Gamma(\theta_0)$ is non-singular (4.9) is equivalent to (2.6).

To show that $0 \le \nu_k < 1$ for $k = \overline{1,p}$, first observe that by Lemma 3.4

$$\mathbb{E}\left[(\Delta_T(\theta_0) - B'(\theta_0)\Phi_T(\theta_0)\right]\left[\Delta_T(\theta_0) - B'(\theta_0)\Phi_T(\theta_0)\right]' \longrightarrow \Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0) \tag{4.10}$$

as $T \to \infty$. Hence the matrix $\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0)$ is nonnegative definite. Therefore $(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0) > 0$ for $\nu < 0$. On the other hand, since $\Gamma(\theta_0) > 0$ and $B'(\theta_0)B(\theta_0) > 0$ we have $(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0) < 0$ for $\nu \ge 1$. Thus, $0 \le \nu_k < 1$. □

Список литературы

[1] P. Billingsley, Probability and Measure (3 ed.), John Wiley & Sons, New York (1995).
[2] H. Chernov, E. L. Lehman, "The use of maximum likelihood estimates in χ^2-tests for goodness of fit", Ann. Math. Statist., **25**, no. 3, 579 – 586 (1954).
[3] D. M. Chibisov, "Some tests of chi-square type for continuous distributions", Theory Probab. Appl., **16**, no. 1, 1 – 20 (1971).
[4] H. Cramer, Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, Princeton (1946).
[5] K. Dzhaparidze, Parameter Estimation and Hypotesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series, Springer-Verlag, New York (1986).
[6] M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process", Probab. Th. Rel. Fields, **100**, 395 – 406 (1994).
[7] M. S. Ginovian, "Asymptotic properties of spectrum estimate of stationary Gaussian processes", Journal of Contemporary Math. Anal., **30**, no. 1, 1 – 16 (1995).
[8] M. S. Ginovyan, "Chi-square type goodness-of-fit tests for stationary Gaussian process", Journal of Contemporary Math. Anal., **38**, no. 2, 1 – 13 (2003).
[9] E. J. Hannan, Time Series Analysis, John Wiley, New York (1960).
[10] M. G. Kendall and A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, **2**, (Inference and Relationship), Charles Grillin & Comp., London (1967).
[11] A. G. Osidze, "On a goodness of fit test in the case of dependence of spectral density of Gaussian processes on unknown parameters", Reports of AN Georgian SSR, **74**, no. 2, 273 – 276 (1974).
[12] A. G. Osidze, "On a statistic for testing the composite hypotesis regarding the form of a spectral density of a stationary Gaussian random process", Reports of AN Georgian SSR, **77**, no. 2, 313 – 315 (1975).
[13] K. O. Dzaparidze, "On the Estimation of the Spectral Parameters of a Gaussian Stationary Process with Rational Spectral Density", Theory Probab. Appl., **15**, no. 3, 531 – 538 (1970).
[14] K. O. Dzaparidze and M. S. Nikulin, "On a Modification of the Standard Statistics of Pearson", Theory Probab. Appl., **19**, no. 4, 851 – 853 (1975).

Поступила 10 мая 2017

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 21 – 27.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{L}$-ВИНЕРА-ХОПФА

А. Г. КАМАЛЯН, М. И. КАРАХАНЯН, А. О. ОГАНЕСЯН

Ереванский государственный университет[1]
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *armen.kamalyan@ysu.am; m_karakhanyan@ysu.am; artur.hovhannisyan@ysu.am*

Аннотация. Заменой в определении оператора свертки преобразования Фурье, спектральным преобразованием самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля на оси $\mathcal{L}$, введены понятия оператора $\mathcal{L}$-свертки и оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа. Рассматривается случай безотражательного потенциала с одним собственным значением. Выявлена связь с интегральным оператором Винера-Хопфа. В случае кусочно-непрерывного символа исследованы свойства фредгольмовости и обратимости оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа.

MSC2010 numbers: 47G10, 47B35.

Ключевые слова: оператор $\mathcal{L}$-свертки; безотражательный потенциал; оператор $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа.

1. Операторы $\mathcal{L}$-свертки и $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа

Пусть $\mathcal{L}$ – максимальный симметрический оператор порожденный дифференциальным выражением $(\ell y)(x) = -y'' + q(x)y(x)$ с вещественным потенциалом q удовлетворяющим условию $(1 + |x|)|q(x)| \in L_1(\mathbb{R})$, а $u^-(x,\lambda)$, $u^+(x,\lambda)$ $(x,\lambda \in \mathbb{R})$ решения уравнения $\ell y = \lambda^2 y$, являющиеся собственными функциями левой и правой задач рассеяния и представляющие собой полный ортонормированный набор собственных функций непрерывного спектра (см. [1], [2]).

Условимся далее через $m(a)$ $(a \in L_\infty(\mathbb{R}))$ и τ обозначать операторы действующие в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ по формулам $m(a)y = ay$, $(\tau y)(x) = y(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, а через I будем обозначать тождественный оператор, каждый раз указывая пространство, где он действует.

---

[1]Исследование выполнено при поддержке ГКН МОН РА в рамках совместного научного проекта YSU-SFU-16/1 финансируемого в результате международного конкурса РА-ЕГУ-ЮФУ РФ-2016

Определим операторы $U_\mp$, $U : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, по формулам

$$(U_\mp y)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^\mp(x,\lambda) y(x)\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$U = m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)\tau U_+,$$

где $\chi_\pm$ характеристическая функция множества $\mathbb{R}_\pm$ ($\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, $\mathbb{R}_- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$), а интегралы понимаются в смысле сходимости по норме $L_2(\mathbb{R})$. Операторы $U_\mp$, U ограничены и кроме того оператор U является частичной изометрией и удовлетворяет равенствам

$$U^*U = I - P, \qquad UU^* = I, \tag{1.1}$$

где P – проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на собственное подпространство H соответствующее дискретному спектру оператора $\mathcal{L}$ (см. [1], [3], [4]).

Обозначим через $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, множество всех функций $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ обладающих следующим свойством: если $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$, то $U^*m(a)Uy \in L_p(\mathbb{R})$ и $\|U^*m(a)Uy\| \leqslant c_p \|y\|_p$, где постоянная c_p не зависит от y. Для $a \in \mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, оператор $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ определенный по формуле $W^0_{\mathcal{L}}(a) = U^*m(a)U$ ограничен в $L_2(\mathbb{R})$ и может быть непрерывным образом продолжен с $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$ до ограниченного оператора действующего в $L_2(\mathbb{R})$, который также будем обозначать через $W^0_{\mathcal{L}}(a)$. Этот оператор мы будем называть оператором $\mathcal{L}$-свертки, с $\mathcal{L}$ символом a.

Определим операторы $\pi_\pm : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R}_\pm)$, $\pi^0_\pm : L_p(\mathbb{R}_\pm) \to L_p(\mathbb{R})$, $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ по формулам $(\pi_\pm y)(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}_\pm$, $(\pi^0_\pm y)(x) = y(x)$ при $x \in \mathbb{R}_\pm$ и $(\pi^0_\pm y)(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}_\mp$. Оператор $W_{\mathcal{L}}(a) = \pi_+ W^0_{\mathcal{L}}(a)\pi^0_+ : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$ будем называть интегральным оператором $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа. Заметим, что в случае $q = 0$, оператор U совпадает с преобразованием F:

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} y(s)\, ds, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \ \ y \in L_2(\mathbb{R}).$$

По этой причине, в случае $q = 0$, операторы $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и $W_{\mathcal{L}}(a)$ совпадают соответственно с оператором свертки $W(a)$ и с оператором Винера-Хопфа (см. [5]). Условимся также в случае $q = 0$ множество $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$ обозначать через $\mathcal{M}_p$. Как известно (см. [5]) $\mathcal{M}_p$ является банаховой алгеброй с нормой $\|a\|_{\mathcal{M}_p} = \|W^0(a)\|_{\mathcal{L}(L_p)}$.

2. Безотражательные потенциалы

В данной работе мы исследуем свойства фредгольмовости и обратимости оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, в случае оператора $\mathcal{L}$ соответствующему безотражательному потенциалу с дискретным спектром состоящим из одного собственного значения $(i\mu)^2$ и с правым нормировочным коэффициентом c_+. Коэффициент прохождения $t(\lambda)$ в указаном случае определяется равенством $t(\lambda) = (\lambda + i\mu)(\lambda - i\mu)^{-1}$ (см. [2], теорема 3.5.1).

Как известно (см. [1],[2]) операторы преобразования действующие по формулам

$$(\mathcal{K}_+y)(x) = y(x) + \int\limits_x^\infty K_+(x,t)y(t)\,dt, \quad (\mathcal{K}_-y)(x) = y(x) + \int\limits_{-\infty}^x K_-(x,t)y(t)\,dt,$$

ограничены соответственно в пространствах $L_p(\gamma,\infty)$, $L_p(-\infty,\gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, при всех $\gamma \in \mathbb{R}$. Ядра $K_\pm$ определяются из уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко и в нашем случае (см., например, [6]) справедливы равенства

$$K_\pm(x,t) = -\varphi(x)\psi_\pm(t),$$

где $\varphi(x) = \sqrt{\mu/2}\,\mathrm{ch}^{-1}\mu(x-\xi)$, $\psi_\pm(t) = \sqrt{2\mu}\,e^{\mp\mu(t-\xi)}$, а $\xi = \mu^{-1}\ln\left[c_+(2\mu)^{-1/2}\right]$.

Заметим также, что (см. [6]) потенциал определяется равенством

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}(K^+(x,e)) = -\frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2\mu(x-\xi)},$$

а $\varphi(x)$ является нормированной собственной функцией соответствующей собственному значению $(i\mu)^2$. Кроме того, имеем

$$u^-(x,\lambda) = t(\lambda)\left(1 - \frac{1}{\mu - i\pi}\psi_+(x)\varphi(x)\right)e^{i\lambda x}, \quad u^+(x,\lambda) = t(\lambda)u^-(x,-\lambda). \tag{2.1}$$

Рассмотрим операторы $V_\pm, \Gamma_\pm : L_p(\mathbb{R}_\pm) \to L_p(\mathbb{R}_\pm)$, $\Gamma : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, определенные по формулам:

$$(V_+y)(x) = \int\limits_0^x y(t)\,dt, \qquad (V_-y)(x) = \int\limits_x^0 y(t)\,dt,$$

$$\Gamma_\pm = I - m(\psi_\pm)V_\pm m(\varphi), \qquad \Gamma = \pi_+^0\Gamma_+\pi_+ + \pi_-^0\Gamma_-\pi_-.$$

Заметим, что $\Gamma_\pm = \mathcal{K}_\pm^*$.

Лемма 2.1. *Операторы $\Gamma_\pm$, Γ обратимы. Обратные операторы определяются равенствами*

$$\Gamma_\pm^{-1} = I + m(\varphi)V_\pm m(\psi_\pm), \qquad \Gamma^{-1} = \pi_+^0\Gamma_+^{-1}\pi_+ + \pi_-^0\Gamma_-\pi_- . \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть операторы $\Gamma_{\pm}^{-1}$ определены формулами (2.2). Пользуясь равенствами $(2\mu)^{-1}\varphi\psi_{\pm}^{2} = \psi_{\pm} - \varphi$ и $(2\mu)^{-1}(\psi_{\pm}^{2})' = \mp\psi_{\pm}^{2}$ с помощью интегрирования по частям несложно убедиться, что

$$m(\varphi)V_{\pm}m(\psi_{\pm}^{2})V_{\pm}m(\varphi) = -m(\psi_{\pm})V_{\pm}m(\varphi)V_{\pm}m(\psi_{\pm}).$$

Последнее означает, что $\Gamma_{\pm}^{-1}\Gamma_{\pm} = I$.

Обозначим через $\hat{\varphi}$ первообразную функции φ^2. Меняя местами интегралы в выражении $V_{\pm}m(\varphi^2)V_{\pm}m(\psi_{\pm})y$, где y, определенная на $\mathbb{R}_{\pm}$, непрерывная финитная функция, несложно убедиться, что $V_{\pm}m(\varphi^2)V_{\pm}m(\psi_{\pm}) = \pm m(\hat{\varphi})V_{\pm}m(\psi_{\pm}) \mp V_{\pm}m(\psi_{\pm}\hat{\varphi})$. Следовательно, $\Gamma_{\pm}\Gamma_{\pm}^{-1} = I + m\left(\varphi \mp \psi_{\pm}\hat{\varphi}\right) V_{\pm}m(\psi_{\pm}) - m(\psi_{\pm})m\left(\varphi \mp \psi_{\pm}\hat{\varphi}\right)$. Легко видеть, что $\left(\varphi\psi_{\pm}^{-1} - \hat{\varphi}\right)' = 0$, т.е. $\varphi \mp \hat{\varphi}\psi_{\pm} = d_{\pm}\psi_{\pm}$, где $d_{\pm}$ – числа и потому $\Gamma_{\pm}\Gamma_{\pm}^{-1} = I$. Вторая формула (2.2) очевидным образом следует из определения Γ. □

Обозначим через S оператор сингулярного интегрирования, определенный равенством

$$(Sy)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(s)}{s-x}\, ds, \qquad x \in \mathbb{R},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Как известно (см. [7]), оператор S ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Пусть $P_{\pm} = (I \pm S)/2$. Из результатов [4] следует справедливость равенств

$$U_{-} = (m(t)P_{+} + P_{-})F\Gamma, \quad U_{+} = \tau(P_{+} + m(\bar{t})P_{-})F\Gamma, \tag{2.3}$$

$$U = \left(m(t\chi_{+} + \chi_{-})P_{+} + m(\chi_{+} + \bar{t}\chi_{-})P_{-}\right) F\Gamma. \tag{2.4}$$

В частности операторы $U_{\pm}$, U связаны соотношениями $U = m(\chi_{+} + \bar{t}\chi_{-})U_{-}$, $U = \tau(\chi_{+} + \bar{t}\chi_{-})U_{+}$ и потому

$$W_{\mathcal{L}}^{0}(a) = U_{-}^{*}m(a)U_{-} = U_{+}^{*}m(a)U_{+}\,, \tag{2.5}$$

а с учетом (1.1) и очевидного равенства $\tau^{*} = \tau$, получаем

$$U_{-}^{*}U_{-} = U_{+}^{*}U_{+} = I - P, \qquad U_{-}U_{-}^{*} = U_{+}U_{+}^{*} = I. \tag{2.6}$$

Пользуясь формулами (2.1), (2.3)-(2.6), несложно убедиться, что в случае, когда $a = 1 + F_k$, где $k \in L_1(\mathbb{R})$, имеем

$$\left(W_{\mathcal{L}}^{0}(a)y\right)(x) = y(x) - \varphi(x)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)y(s)\, ds + \int_{-\infty}^{\infty} K(x,s)y(s)\, ds, \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$K(x,s) = k(x-s) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-s-s') e^{\mu s' \cdot \operatorname{sgn}(x-s-s')} k(s')\, ds' \varphi(x)\varphi(s).$$

Аналогично,

$$(W_{\mathcal{L}}(a)y)(x) = y(x) - \varphi(x)\int\limits_0^{\infty} \varphi(s)y(s)\,ds + \int\limits_0^{\infty} K(x,s)y(s)\,ds.$$

3. Основные результаты

В следующей теореме получена связь между операторами $W_{\mathcal{L}}(a)$ и $W(a)$.

Теорема 3.1. *Для $a \in \mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, $1 \leqslant p < \infty$, справедливо равенство*

$$W_{\mathcal{L}}(a) = \mathcal{K}_+ W(a)\Gamma_+. \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $y \in L_p(\mathbb{R}_+) \cap L_2(\mathbb{R}_+)$. Пользуясь тождествами $P_\pm F = Fm(\chi_\pm)$ (см. [5]) из формул (2.3)-(2.5) получим

$$\begin{aligned}
&W_{\mathcal{L}}(a)y = \pi_+ U_-^* m(a)\pi_+^0 y = \pi_+\Gamma^*(m(\chi_+)W^0(a)m(\chi_+) + m(\chi_-)W^0(at)m(\chi_+) + \\
&m(\chi_+)W^0(\bar{t}a)m(\chi_-) + m(\chi_-)W^0(a)m(\chi_-))\Gamma\pi_+^0 y \\
&= \mathcal{K}_+\pi_+(m(\chi_+) + m(\chi_-))\begin{pmatrix} W^0(a) & W^0(\bar{t}a) \\ W^0(ta) & W^0(a)\end{pmatrix}\pi_+^0\Gamma_+ y \\
&= \mathcal{K}_+\pi_+ W^0(a)\pi_+^-\Gamma_+ y = \mathcal{K}_+ W(a)\Gamma_+ y.
\end{aligned}$$

Таким образом, оператор $W(a)$ одновременно с $W_{\mathcal{L}}(a)$ допускает непрерывное продолжение в $L_p(\mathbb{R})$. □

Следствие 3.1. *Множество $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, $1 \leqslant p < \infty$, совпадает с $\mathcal{M}_p$.*

Как известно (см. [5]) любая, имеющая конечное число разрывов кусочно-постоянная функция на $\mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{M}_p$, $1 < p < \infty$. Замыкание алгебры кусочно-постоянных функций в алгебре $\mathcal{M}_p$ обозначим через PC_p. Имеет место следующее включение $PC_p \subset PC_2 = PC$ (см. [5]), где PC класс функций a, имеющих предельные значения $a(x \pm 0)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, в том числе и на бесконечности $a(\infty \pm 0) = \lim\limits_{x\to\mp\infty} a(x)$. В свою очередь $C_p \subset PC_p$, где C_p замыкание алгебры Винера $W(\mathbb{R}) = \{c + F_k; c \in \mathbb{C}, k \in L_1(\mathbb{R})\}$ в $\mathcal{M}_p$. Кроме того PC_p содержит функции ограниченной вариации (см. [5]).

Сопоставим каждой функции $a \in PC_p$ (см. [5]) функцию $a_p : \dot{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ ($\dot{\mathbb{R}} = R \cup \{\infty\}$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) – соответственно одноточечная и двухточечная компактификации $\mathbb{R}$) определенную по формуле:

$$a_p(x,\xi) = \frac{1}{2}(a(x-0) + a(x+0)) + \frac{1}{2}(a(x-0) - a(x+0))\mathrm{cth}\pi\left(\frac{i}{p} + \xi\right).$$

Функция a может иметь не более чем счетное число точек разрывов $a(x_k - 0) \neq a(x_k + 0)$ ($x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$). Функция $a_p(x,\xi)$ непрерывна в следующем смысле (см. [5]): точки $a(x_k - 0)$ и $a(x_k + 0)$ соединяются дугой окружности, из которой отрезок соединяющий точки $a(x_k - 0)$ и $a(x_k + 0)$ виден под углом $2\pi/\max\{p, p'\}$, ($p' = p/p-1$) расположенная справа (слева) от отрезка при $p > 2$ (при $p > 2$), а при $p = 2$ дуга совпадает с отрезком соединяющим эти точки. В случае $a_p(x,\xi) \neq 0$ индекс $\mathrm{ind}a_p$ определяется как приращение аргумента $(2\pi)^{-1}\arg a_p(x,\xi)$, когда x пробегает $\mathbf{R}$ и в точках разрыва $x_k \in \mathbf{R}$ параметр ξ пробегает от $-\infty$ до ∞.

Под обобщенной p-факторизацией функции $a \in L_\infty(\mathbf{R})$ будем понимать представление $a(\lambda) = a_-(\lambda)(\lambda - i)^\varkappa(\lambda + i)^{-\varkappa}a_+(\lambda)$, где $(\lambda - i)^{-2/p}a_- \in P_-(L_p(\mathbb{R}))$, $(\lambda - i)^{-2/p'}a_-^{-1} \in P_-(L_{p'}(\mathbf{R}))$, $(\lambda + i)^{-2/p'}a_+ \in P_+(L_{p'}(\mathbf{R}))$, $(\lambda + i)^{-2/p}a_+^{-1} \in P_+(L_p(\mathbf{R}))$, а $\varkappa$ – целое число называемое p-индексом функции a.

Из теоремы 3.1 и результатов [5] § 4 следуют следующие утверждения.

Теорема 3.2. *Пусть $a \in PC_p$, $1 < p < \infty$. Для того, чтобы оператор $W_\mathcal{L}(a)$ был нормально разрешимым в пространстве $L_p(\mathbf{R}_+)$, необходимо и достаточно чтобы $\inf|a_p(\lambda,\xi)| \neq 0$ ($\lambda \in \dot{\mathbf{R}}$, $\xi \in \bar{\mathbf{R}}$). При выполнении этого условия оператор $W_\mathcal{L}(a)$ обратим, обратим слева, обратим справа в зависимости от того является ли число $\mathrm{ind}\,a_p$ равным нулю, положительным или отрицательным соответственно. Причем $\mathrm{Ind}\,W_\mathcal{L}(a) = -\mathrm{ind}\,a_p$.*

Теорема 3.3. *Пусть $a \in PC_p$, $1 < p < \infty$ и $\inf|a_p(\lambda,\xi)| \neq 0$ ($\lambda \in \dot{\mathbf{R}}$, $\xi \in \bar{\mathbf{R}}$). Тогда a допускает обобщенную p'-факторизацию ($p' = p/(p-1)$), $a = a_- r_\varkappa a_+$, $r_\varkappa(\lambda) = (\lambda - i)^\varkappa(\lambda + i)^{-\varkappa}$, $\varkappa = \mathrm{ind}\,a_p$, и обратный слева (справа) к $W_\mathcal{L}(a)$ на плотном множестве в $L_p(\mathbf{R}_+)$ при $\varkappa \geqslant 0$ (при $\varkappa \leqslant 0$) записывается в виде*

$$(W_\mathcal{L}(a))_\ell^{-1} = \Gamma_+^{-1}W(r_{-\varkappa})W\left(a_+^{-1}\right)W\left(a_-^{-1}\right)\mathcal{K}_+^{-1}$$
$$\left((W_\mathcal{L}(a))_r^{-1} = \Gamma_+^{-1}W\left(a_+^{-1}\right)W\left(a_-^{-1}\right)W(r_{-\varkappa})\mathcal{K}_+^{-1}\right).$$

Если $\varkappa < 0$, то $\ker W_\mathcal{L}(a) = \mathrm{span}\left\{\Gamma_+^{-1}\pi_+F^{-1}g_k; k = 1,\dots,-\varkappa\right\}$, где $g_k(\lambda) = (1 - i\lambda)^{-k}$. Если $\varkappa > 0$, то уравнение $W_\mathcal{L}(a)\varphi = f$ имеет решение в $L_p(\mathbf{R}_+)$ тогда и *только тогда, когда*

$$\int_0^\infty \left(\mathcal{K}_+^{-1} f\right)(t)\overline{h_k(t)}\,dt \qquad k = 1,\ldots,\varkappa, \quad \text{где } h_k = \pi_+ F^{-1}\left(a_-^{-1} g_{+k}\right).$$

Заметим, что $\mathcal{M}_1 = W(\mathbb{R})$ (см. [5]) и по этой причине требование $a \in W(\mathbb{R})$ является естественным, при исследовании оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. На основе работы [8] и формулы (3.1) результаты аналогичного характера могут быть сформулированы и в этом случае.

Abstract. By replacement in the definition of the convolution operator of Fourier transform by a spectral transform of a selfadjoint Sturm-Liouville operator on the axis $\mathcal{L}$, the concepts of $\mathcal{L}$-convolution and $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operators are introduced. The case of the reflectorless potentials with a single eigenvalue is considered. A relationship between the Wiener-Hopf and $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operators is established. In the case of piecewise continuous symbol the Fredholm property and invertibility of the $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator are investigated.

Список литературы

[1] Л. Д. Фаддеев, "Обратная задача квантовой теории рассеяния. II", Итоги науки и техники, Сер. Современ. пробл. мат., 3, 93 – 180 1974.

[2] В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова думка (1977).

[3] И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси", Изв. АН СССР, Матем., 18, no. 5, 394 – 402 (1983).

[4] А. Г. Камалян, И. Г. Хачатрян, А. В. Персесян, "Разрешимость интегральных уравнений с операторами типа $\mathcal{L}$-свертки", Изв. НАН Армении, сер. Математика, 29, no. 6, 31 – 81 (1994).

[5] Р. В. Дудучава, Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики, Тбилиси, Мецниереба, (1973).

[6] Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений, Мир, Москва (1985).

[7] I. Gohberg, N. Krupnik, One-Dimensional Linear Singular Integral Equations. I, Operator Theory: Advances and Applic., 53, Birkhäuser Verlag, Basel (1992).

[8] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 13, no. 5(83), 3 – 120 (1958).

Поступила 8 ноября 2017

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 28 – 40.

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ФОРМУЛЫ ПЛАНА

В. И. КУЗОВАТОВ, А. М. КЫТМАНОВ

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
Институт математики и фундаментальной информатики[1]
E-mails: *kuzovatov@yandex.ru*; *akytmanov@sfu-kras.ru*

Аннотация. В работе получен аналог формулы Плана, которая имеет существенное значение при нахождении функционального соотношения для классической дзета-функции Римана. Приведены примеры рациональных функций, удовлетворяющих некоторому условию симметричности и разложению в ряд Маклорена с единичными и нулевыми коэффициентами.

MSC2010 numbers: 14G10, 30B10.

Ключевые слова: формула Плана; целая функция; интегральное представление.

1. Введение

Целью данной работы является получение аналога формулы Плана (см. [1], главу 7, пример 7), которая имеет существенное значение при нахождении функционального соотношения (см. [2], главу 2, п. 9) для классической дзета-функции Римана.

Классическая формула Плана выражает сумму значений в целых точках голоморфной и ограниченной (для всех значений z, для которых $x_1 \leq \operatorname{Re} z \leq x_2$, x_1, x_2 – целые числа) функции $\varphi(z)$ через некоторые интегралы. А именно,

$$\frac{1}{2}\varphi(x_1) + \varphi(x_1+1) + \varphi(x_1+2) + \ldots + \varphi(x_2-1) + \frac{1}{2}\varphi(x_2) =$$
$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(z)\, dz + \frac{1}{i}\int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(x_2+iy) - \varphi(x_2-iy) + \varphi(x_1-iy) - \varphi(x_1+iy)}{e^{2\pi y}-1}\, dy.$$

Применяя формулу Плана к ряду

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$$

[1]Авторы поддержаны грантом Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор #14.Y26.31.0006), Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 15-01-00277, 16-31-00173) и грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ # НШ-9149.2016.1.

здесь $\Gamma(z)$ это Γ-функция Эйлера и вещественная часть z положительна, получено (см. [1], главу 12, п. 12.32) интегральное представление Бине для $\lg\Gamma(z)$:

$$\frac{d}{dz}\lg\Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \lg z - 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(z^2+t^2)(e^{2\pi t}-1)}.$$

Используя представление Бине для $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, получено следующее интегральное представление для вещественных x:

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} - \ln x = \frac{1}{2x} - 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+x^2)(e^{2\pi t}-1)} =$$

$$= -2\int_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2}\left(\frac{1}{e^{2\pi t}-1} - \frac{1}{2\pi t}\right) dt.$$

Подставляя найденное соотношение в интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и меняя порядок интегрирования, можно получить функциональное соотношение (см. [2], главу 2, п. 9) для классической дзета-функции Римана.

Напомним (см. [2], главу 2, п. 9), что интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в полосе $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ имеет вид:

$$\zeta(s) = -\frac{\sin\pi s}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x\right\} x^{-s}\,dx.$$

Если говорить об обобщениях дзета-функции, то И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан и Л. А. Дикий изучали (см., например, работы [3] – [5] дзета-функцию, ассоциированную с собственными значениями оператора Штурма-Лиувилля в 50-х годах прошлого века. Ее значение оказалось связанным со следом данного оператора. Их подход был развит [6] далее В. Б. Лидским и В. А. Садовничим (60 годы), которые рассмотрели класс целых функций одного переменного, определили для них дзета-функцию корней и исследовали ее область аналитического продолжения. В работе [7] С. А. Смагин и М. А. Шубин строят дзета-функцию эллиптических операторов и операторов более общего вида, доказывают возможность мероморфного продолжения дзета-функции и дают некоторую информацию о полюсах.

Многомерные результаты получены А.М. Кытмановым и С.Г. Мысливец в работе [8]. Данными авторами было введено понятие дзета-функции, ассоциированной с системой мероморфных функций $f = (f_1, \dots, f_n)$ в $\mathbb{C}^n$. С использованием теории вычетов этими авторами было дано интегральное представление для дзета-функции, однако в работе были наложены жесткие условия на систему функций $f_1, \dots, f_n$. В работе [9] В. И. Кузоватовым и А. А. Кытмановым с использованием теории вычетов получены два интегральных представления для дзета-функции, построенной по нулям целой функции конечного порядка роста на комплексной плоскости. С помощью этих представлений описана область, в которую эта дзета-функция продолжается.

2. Предварительные результаты

Сформулируем результаты из работы [9]. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ в $\mathbb{C}$. Рассмотрим уравнение

$$f(z) = 0. \tag{2.1}$$

Обозначим через $N_f = f^{-1}(0)$ множество всех корней уравнения (2.1) (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Число корней не более чем счетно.

Дзета-функция $\zeta_f(s)$ корней уравнения (2.1) определяется следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{a \in N_f} (-a)^{-s},$$

где $s \in \mathbb{C}$. Знак минус в определении дзета-функции взят для удобства записи интегральных формул.

Приведем интегральное представление для дзета-функции $\zeta_f(s)$ нулей z_n функции f, которые имеют вид

$$z_n = -q_n + is_n, \quad q_n > 0.$$

Обозначим

$$F(f, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n x} \tag{2.2}$$

и предположим, что $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ и выполнены следующие условия:

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{q_n}{n} > 0, \tag{2.3}$$

(2.4) $$\text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_n}\right)^{\sigma-1} \quad \text{сходится.}$$

Теорема 2.1 ([9]). *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.4) *и* $\mathrm{Re}\, s > 1$. *Тогда*

$$\zeta_f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} F(f,x)\, dx,$$

где $F(f,x)$ *определяется формулой* (2.2).

В данной статье будем предполагать, что нули z_n имеют вид

$$z_n = -q_n, \quad q_n > 0,$$

где q_n образуют некоторую последовательность натуральных чисел.

Рассмотрим функцию

$$F(z) = F(f, 2\pi i z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n 2\pi i z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i z}.$$

При помощи замены $e^{-2\pi i z} = w$ последний ряд приводится к виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w^{q_n}$ или

(2.5) $$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n w^n,$$

где коэффициенты f_n определяются следующим образом:

$$f_n = \begin{cases} 1, & n = q_k \\ 0, & n \neq q_k, \end{cases} \quad \text{поэтому} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n|} = 1.$$

Заметим, что в ряде (2.5) бесконечное число коэффициентов f_n отлично от нуля.

При $|w| \to 1 - 0$ функция $G(w)$ становится неограниченной, но является голоморфной в единичном круге. Таким образом, $G(w)$ не продолжается в точку 1. Теорема Фабри о лакунах (см. [10], §2.3) показывает, что можно подобрать коэффициенты ряда так, что у полученной функции $G(w)$ вся окружность будет являться естественной границей.

3. Основной результат

В дальнейшем ограничимся рассмотрением классов рациональных функций $G(w)$, для которых справедливо представление (2.5). Относительно этого сформулируем (см. [10], §6.1) следующий результат.

Теорема 3.1 (Сеге, [10]). *Степенной ряд*

(3.1) $$G(w) = \sum_{0}^{\infty} f_n w^n,$$

коэффициенты которого f_n могут принимать лишь конечное число различных значений, или представляет собой рациональную функцию, или непродолжаем за пределы единичного круга. В случае рациональности суммы ряда (3.1)

$$G(w) = \frac{P(w)}{1 - w^N},$$

где $P(w)$ — многочлен, а N — некоторое целое неотрицательное число.

Это означает, что особыми точками (в данном случае полюсами первого порядка) для функции $G(w)$ могут быть только точки

$$w_k = e^{i\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad N \in \mathbb{N}.$$

В переменных z для функции $F(z)$ особыми точками будут точки

$$e^{-2\pi iz} = w_k, \quad -2\pi iz = i\left(\frac{2\pi}{N}k + 2\pi l\right), \quad z = -\left(\frac{k}{N} + l\right), \quad l = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

или что то же самое

$$z_{k,l} = l - \frac{k}{N}, \quad l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Пусть для q_n выполнено соотношение (2.3). Предположим дополнительно, что выполнено следующее условие:

$$1 + F(f, 2\pi iz) = -F(f, -2\pi iz) \tag{3.2}$$

и вытекающее из него

$$-\left(1 + F(f, -2\pi y)\right) = F(f, 2\pi y). \tag{3.3}$$

Обсуждение условий (3.2) и (3.3) будет приведено ниже.

Теорема 3.2. *Пусть x_1 и x_2 — целые числа, а $\varphi(z)$ — функция, голоморфная и ограниченная на множестве $\{x_1 \le \operatorname{Re} z \le x_2\}$. Тогда*

(3.4)

$$\frac{P(w_0)}{N}\left(\frac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\varphi(x_1+2)+\ldots+\varphi(x_2-1)+\frac{1}{2}\varphi(x_2)\right)+$$

$$+\frac{P(w_1)}{N}\left(\varphi(x_1+1-\frac{1}{N})+\varphi(x_1+2-\frac{1}{N})+\ldots+\varphi(x_2-1-\frac{1}{N})+\varphi(x_2-\frac{1}{N})\right)+$$

$$+\frac{P(w_2)}{N}\left(\varphi(x_1+1-\frac{2}{N})+\varphi(x_1+2-\frac{2}{N})+\ldots+\varphi(x_2-1-\frac{2}{N})+\varphi(x_2-\frac{2}{N})\right)+$$

$$+\ldots+$$

$$+\frac{P(w_{N-1})}{N}\left(\varphi(x_1+1-\frac{N-1}{N})+\varphi(x_1+2-\frac{N-1}{N})+\ldots+\varphi(x_2-1-\frac{N-1}{N})+\right.$$

$$\left.+\varphi(x_2-\frac{N-1}{N})\right)=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{i}\int_0^\infty\left[\varphi(x_2+iy)-\varphi(x_2-iy)+\varphi(x_1-iy)-\varphi(x_1+iy)\right]F(f,2\pi y)\,dy.$$

Здесь $F(f,2\pi y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-q_n 2\pi y}$.

Доказательство. Заметим, что функция $F(f,2\pi y)$ имеет простой полюс в точке $y=0$. Других особых точек нет у функции $F(f,2\pi y)$ при $y>0$. У функции $F(f,-2\pi y)$ в силу тождества (3.3) при $y>0$ тоже нет особенностей. Выражение $\varphi(x_2+iy)-\varphi(x_2-iy)+\varphi(x_1-iy)-\varphi(x_1+iy)$ в формуле (3.4) обращается в 0 в точке $y=0$, поэтому подынтегральное выражение в формуле (3.4) не имеет особенностей. В дальнейшем мы проводим рассуждения, как будто бы функция $F(f,-2\pi y)$ особенностей не имеет, но это не приводит к противоречию, поскольку интегралы можно рассматривать по дополнению к отрезку $[0,\varepsilon]$, а в результирующей формуле перейти к пределу при $\varepsilon\to+0$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma_R}\varphi(z)\,F(z)\,dz \tag{3.5}$$

по границе прямоугольника γ_R, имеющим вершины в точках $x_2\pm iR$, $x_1\pm iR$, $R>0$.

Заметим, что ввиду наличия особых точек x_1 и x_2 (для подынтегрального выражения $\varphi(z)\,F(z)$) на контуре интегрирования γ_R, интеграл (3.5) следует рассматривать в смысле главного значения по Коши, то есть

$$\text{v. p.} \int\limits_{\gamma_R} \varphi(z)\, F(z)\, dz.$$

Вместо контура γ_R будем рассматривать контур $\widetilde{\gamma}_R$, который получается из контура γ_R удалением отрезков $[x_2 - i\delta; x_2 + i\delta]$ и $[x_1 + i\delta; x_1 - i\delta]$ и заменой их дугой окружности радиуса δ с центром в точке $(x_2, 0)$ и $(x_1, 0)$ соответственно.

Согласно теореме Коши

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_R} \varphi(z)\, F(z)\, dz = \sum_{k,l} \int\limits_{\gamma_{k,l}} \varphi(z)\, F(z)\, dz,$$

где $\gamma_{k,l}$ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $z_{k,l}$, ориентированная против часовой стрелки. В свою очередь (по определению вычета)

$$\int\limits_{\gamma_{k,l}} \varphi(z)\, F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_{k,l}} \left(\varphi(z)\, F(z)\right).$$

Поскольку $z_{k,l}$ являются полюсами первого порядка, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_{k,l}} \left(\varphi(z)\, F(z)\right) = \operatorname*{res}_{z=z_{k,l}} \left(\varphi(z)\, \frac{P\left(e^{-2\pi i z}\right)}{1 - e^{-2\pi i z N}}\right) = \frac{\varphi(z_{k,l})\, P\left(e^{-2\pi i z_{k,l}}\right)}{2\pi i N e^{-2\pi i z_{k,l} N}} =$$

$$= \frac{\varphi(z_{k,l})\, P(w_k)}{2\pi i N w_k^N} = \frac{\varphi(z_{k,l})\, P(w_k)}{2\pi i N}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\gamma_{k,l}} \varphi(z)\, F(z)\, dz = \frac{\varphi(z_{k,l})\, P(w_k)}{N}, \qquad \int\limits_{\widetilde{\gamma}_R} \varphi(z)\, F(z)\, dz = \sum_{k,l} \varphi(z_{k,l})\, \frac{P(w_k)}{N},$$

где суммирование берется по всем точкам $z_{k,l}$, лежащих в отрезке $[x_1; x_2]$.

Перейдя к пределу при $\delta \to +0$, получим левую часть формулы (3.4). При этом вычет в граничных точках x_1 и x_2 согласно теории вычетов берется с коэффициентом 1/2 по формулам Привалова – Племеля.

С другой стороны, выбирая направление обхода против часовой стрелки, исходный контурный интеграл (3.5) можно представить в виде суммы четырех интегралов по сторонам прямоугольника. А именно,

$$\int\limits_{\gamma_R} \varphi(z)\, F(z)\, dz = \int\limits_{x_2 - iR}^{x_2 + iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz + \int\limits_{x_2 + iR}^{x_1 + iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz + \int\limits_{x_1 + iR}^{x_1 - iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz +$$

$$+ \int\limits_{x_1 - iR}^{x_2 - iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz := I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

перейдя в дальнейшем к пределу при $R \to +\infty$.

Найдем значение интеграла I_1. Будем иметь

$$I_1 = \int\limits_{x_2-iR}^{x_2+iR} \varphi(z) F(z)\, dz = \int\limits_{x_2-iR}^{x_2} \varphi(z) F(z)\, dz + \int\limits_{x_2}^{x_2+iR} \varphi(z) F(z)\, dz.$$

$$\int\limits_{x_2-iR}^{x_2} \varphi(z) F(z)\, dz = i \int\limits_{-R}^{0} \varphi(x_2+iy) F(x_2+iy)\, dy =$$

$$= -i \int\limits_{R}^{0} \varphi(x_2-i\tau) F(x_2-i\tau)\, d\tau = i \int\limits_{0}^{R} \varphi(x_2-i\tau) F(x_2-i\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} (-\varphi(x_2-iy)) F(x_2-iy)\, dy = \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} (-\varphi(x_2-iy)) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i(x_2-iy)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} (-\varphi(x_2-iy)) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi y}\, dy = \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} (-\varphi(x_2-iy)) F(f, 2\pi y)\, dy.$$

Далее имеем

$$\int\limits_{x_2}^{x_2+iR} \varphi(z) F(z)\, dz = i \int\limits_{0}^{R} \varphi(x_2+iy) F(x_2+iy)\, dy =$$

$$= \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} \varphi(x_2+iy) \left(-F(f,-2\pi y)\right) dy = \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} \varphi(x_2+iy) \left(1-1-F(f,-2\pi y)\right) dy =$$

$$= \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} \varphi(x_2+iy)\, dy - \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} (1+F(f,-2\pi y)) \varphi(x_2+iy)\, dy.$$

Равенство $F(x_2+iy) = F(f,-2\pi y)$ выполняется, поскольку $e^{2\pi i z} = e^{2\pi i(x_j+iy)} = e^{-2\pi y}$, $j = 1, 2$. Таким образом, при выполнении (3.3) значение интеграла I_1 равно

$$I_1 = \int\limits_{x_2-iR}^{x_2+iR} \varphi(z) F(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} \varphi(x_2+iy)\, dy + \frac{1}{i} \int\limits_{0}^{R} (\varphi(x_2+iy) - \varphi(x_2-iy)) F(f, 2\pi y)\, dy.$$

Аналогично, получим значение для интеграла I_3:

$$I_3 = \int\limits_{x_1+iR}^{x_1-iR} \varphi(z) F(z)\,dz = -\int\limits_{x_1-iR}^{x_1+iR} \varphi(z) F(z)\,dz =$$

$$= -\frac{1}{i}\int\limits_0^R \varphi(x_1+iy)\,dy + \frac{1}{i}\int\limits_0^R \big(\varphi(x_1-iy) - \varphi(x_1+iy)\big) F(f, 2\pi y)\,dy.$$

Покажем, что интеграл $I_4 \to 0$ при $R \to +\infty$. Имеем

$$I_4 = \int\limits_{x_1-iR}^{x_2-iR} \varphi(z) F(z)\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x-iR) F(x-iR)\,dx =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x-iR) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i(x-iR)}\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x-iR) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i x} e^{-q_n 2\pi R}\,dx.$$

$$|I_4| = \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x-iR) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i x} e^{-q_n 2\pi R}\,dx \right| \le \int\limits_{x_1}^{x_2} |\varphi(x-iR)| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi R} dx \le$$

$$\le (x_2 - x_1)\,\widetilde{C} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi R} \to 0, \quad \text{когда} \ \ R \to +\infty,$$

поскольку $e^{-q_n 2\pi R} \to 0$ при $R \to +\infty$. Константа $\widetilde{C} > 0$ выбирается из условия ограниченности функции φ на данном множестве интегрирования.

Для обоснования перемены порядка суммирования и перехода к пределу (при $R \to +\infty$) необходимо доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi R}$ по R на множестве $[1; +\infty)$. Имеем

$$\left| \frac{1}{e^{q_n 2\pi R}} \right| \le \frac{1}{e^{q_n 2\pi}} \le \frac{1}{e^{q_n}}, \ \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^{q_n}}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{q_n}{n}}} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} e^{\frac{q_n}{n}}} = \frac{1}{e^{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{n}}} < 1$$

ввиду условия (2.3). Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{q_n}}$ сходится по признаку Коши и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi R}$ сходится абсолютно и равномерно по признаку Вейерштрасса по R на множестве $[1; +\infty)$. Поскольку $\varphi(z)$ — голоморфная функция на рассматриваемом прямоугольнике, то из теоремы Коши получаем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(z)\,dz = -\int\limits_{x_2}^{x_2+iR} \varphi(z)\,dz - \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi(z)\,dz - \int\limits_{x_1+iR}^{x_1} \varphi(z)\,dz.$$

Рассмотрим интегралы

$$\frac{1}{i}\int\limits_0^R \varphi(x_2+iy)\,dy - \frac{1}{i}\int\limits_0^R \varphi(x_1+iy)\,dy + \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi(z)\,F(z)\,dz =$$

$$= -i\int\limits_0^R \varphi(x_2+iy)\,dy - i\int\limits_R^0 \varphi(x_1+iy)\,dy + \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi(z)\,F(z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(z)\,dz + \int\limits_{x_2+iR}^{x_1-iR} \varphi(z)\,[1+F(z)]\,dz.$$

Завершающим этапом в доказательстве теоремы является обоснование того факта, что интеграл

$$I = \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi(z)\,[1+F(z)]\,dz$$

стремится к нулю при $R \to +\infty$. Используя условие (3.2), проведем следующие преобразования.

$$I = \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi(z)\,[1+F(f,2\pi iz)]\,dz = -\int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi(z)\,F(f,-2\pi iz)\,dz =$$

$$= -\int\limits_{x_2}^{x_1} \varphi(x+iR)\sum_{n=1}^{\infty} e^{q_n 2\pi i(x+iR)}dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x+iR)\sum_{n=1}^{\infty} e^{q_n 2\pi ix}e^{-q_n 2\pi R}dx.$$

Аналогично для случая интеграла I_4 нетрудно показать, что интеграл $I \to 0$ при $R \to +\infty$.

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ в выражении для контурного интеграла (3.5), получим утверждение теоремы. □

В случае, если $q_n = n$, то $G(w) = \dfrac{w}{1-w}$, $P(1) = 1$,

$$F(f,2\pi y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n2\pi y} = e^{-2\pi y} + e^{-4\pi y} + e^{-6\pi y} + \ldots = \frac{e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}} = \frac{1}{e^{2\pi y}-1}$$

и мы получаем классическую формулу Плана, приведенную в начале данной статьи. При этом нетрудно видеть, что условия (3.2) и (3.3), безусловно, выполняются для функции $F(f,2\pi y)$.

Доказанное обобщение формулы Плана в дальнейшем может быть использовано при получении аналога интегрального представления Бине. Тем самым будет осуществлен переход к получению функционального соотношения для дзета-функции корней некоторого класса целых функций.

4. Преобразование условия симметричности

Вернемся к обсуждению условия (3.2). Относительно этого сформулируем утверждение.

Лемма 4.1. *Условие* (3.2) *эквивалентно следующему условию на функцию* $G(w)$:

$$1+G(w)=-G\left(\frac{1}{w}\right). \tag{4.1}$$

Доказательство. Рассмотрим условие (3.2). Отметим, что функция $G(w)$ получается из функции $F(f,2\pi iz)$ заменой $e^{-2\pi iz}=w$. При этом функция $F(f,-2\pi iz)$ переходит в функцию $G\left(w^{-1}\right)$. □

Лемма 4.2. *Если*

$$G(w)=\frac{P(w)}{1-w^N}=\frac{a_0+a_1w+a_2w^2+\ldots+a_Nw^N}{1-w^N},$$

то выполнение условия (4.1) *эквивалентно следующим условиям на коэффициенты полинома* $P(w)$: $1+a_0=a_N$, $a_1=a_{N-1}$, $a_2=a_{N-2},\ldots$, $a_p=a_{N-p}$, *где* $p\in[1;N/2]$ *в случае четного* N *и* $p\in\left[1;\frac{N-1}{2}\right]$ *в случае нечетного* N.

Доказательство. Рассмотрим условие (4.1). Подставляя выражение для функции $G(w)$, получим:

$$1+\frac{P(w)}{1-w^N}=-\frac{P\left(\frac{1}{w}\right)}{1-\dfrac{1}{w^N}},\qquad \frac{1-w^N+P(w)}{1-w^N}=\frac{P\left(\frac{1}{w}\right)}{1-w^N}w^N,$$

$$1-w^N+P(w)=P\left(\frac{1}{w}\right)w^N.$$

Подставляя в последнее соотношение выражение для $P(w)$, будем иметь

$$(1+a_0)+a_1w+a_2w^2+\ldots+(a_N-1)\,w^N=\left(a_0+\frac{a_1}{w}+\frac{a_2}{w^2}+\ldots+\frac{a_N}{w^N}\right)w^N,$$

$$(1+a_0)+a_1w+a_2w^2+\ldots+(a_N-1)\,w^N=a_0w^N+a_1w^{N-1}+a_2w^{N-2}+\ldots+$$
$$+a_{N-2}w^2+a_{N-1}w+a_N.$$

Приводя подобные члены при одинаковых степенях, получим утверждение леммы. □

Условие (3.2) можно понимать как некоторое условие симметричности (условие нечетности) по переменной z для функции $\psi(z) = \dfrac{1}{2} + F(f, 2\pi i z)$.

5. Примеры

Пример 5.1. Приведем пример рациональной функции $G(w)$, удовлетворяющей разложению (2.5). Пусть

$$G(w) = \frac{w}{(1-w)(w^2+1)}.$$

Раскладывая функцию $G(w)$ в сумму простейших дробей, можно получить, что

$$G(w) = w\left(\frac{1/2}{1-w} + \frac{1/2w + 1/2}{w^2+1}\right).$$

Далее разложим каждую из дробей в сумму геометрической прогрессии. Представляя одну из сумм в виде суммы слагаемых четных и нечетных степеней и приводя подобные, получим

$$\begin{aligned} G(w) &= w\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w^{2n+1}}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w^{2n}}{2}\right) = \\ &= w\left(\sum_{k=0}^{\infty}(1+(-1)^k)\frac{w^{2k}}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(1+(-1)^k)\frac{w^{2k+1}}{2}\right) = \\ &= w\left(1 + w + w^4 + w^5 + w^8 + w^9 + w^{12} + w^{13} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} w^{q_n}, \end{aligned}$$

где $q_n = \{1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, \ldots\}$. Заметим, что в данном примере $G(w)$ можно записать в виде

$$G(w) = \frac{w}{(1-w)(w^2+1)} = \frac{w(1+w)}{1-w^4} = \frac{w+w^2}{1-w^4}.$$

Пример 5.2. Приведем пример рациональной функции $G(w)$, удовлетворяющей условию (4.1) и представлению (2.5). Рассмотрим

$$\begin{aligned} G(w) &= \frac{w}{1-w} - \frac{w^2}{1-w^2} + \frac{w^4}{1-w^4} = \\ &= w + w^3 + w^4 + w^5 + w^7 + w^8 + w^9 + w^{11} + w^{12} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} w^{q_n}. \end{aligned}$$

Вычислим левую часть соотношения (4.1). Получим

$$1 + G(w) = \frac{1}{1-w} - \frac{1}{1-w^2} + \frac{1}{1-w^4}.$$

Вычислим правую часть соотношения (4.1). Получим

$$-G\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{1-w} - \frac{1}{1-w^2} + \frac{1}{1-w^4}.$$

Здесь $q_n = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, \ldots\}$.

Abstract. In this paper we obtain an analog of the Plan's formula, which plays an essential role in obtaining a functional relation for classical Riemann zeta-function. We provide examples of rational functions that satisfy a certain symmetry condition and admit a Maclaurin series expansion with coefficients equal to zero or one.

Список литературы

[1] E. T. Whittaker, G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, Cambridge (1927).

[2] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford University Press, Oxford (1951).

[3] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, "Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка", Доклады Ак. наук СССР, 88, no. 4, 593 – 596 (1953).

[4] Л. А. Дикий, "Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке", Изв. АН СССР. Сер. матем., 10, no. 4, 187 – 200 (1955).

[5] Л. А. Дикий, "Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля", УМН, 13, no. 3(81), 111 – 143 (1958).

[6] V. B. Lidskii, V. A. Sadovnichii, "Regularized sums of zeros of a class of entire functions", Functional Analysis and Its Applications, 1, no. 2, 133 – 139 (1967).

[7] S. A. Smagin, M. A. Shubin, "On the Zeta-function of a transversally elliptic operator", Russian Mathematical Surveys, 39, no. 2, 201 – 202 (1984).

[8] A. M. Kytmanov, S. G. Myslivets, "On the Zeta-function of systems of nonlinear equations", Siberian Math. J., 48, no. 5, 863 – 870 (2007).

[9] V. I. Kuzovatov, A. A. Kytmanov, "On the Zeta-function of zeros of some class of entire functions", J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., 7, no. 4, 489 – 499 (2014).

[10] L. Bieberbach, Analytische Fortsetzung, Springer-Verlag, Berlin (1955).

Поступила 17 марта 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 41 - 50.

СРАВНЕНИЕ СИЛ МНОГОЧЛЕНОВ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - Армянский (Славянский) Университет [1]
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *haikghazaryan@mail.ru*, *vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. Для однородных многочленов двух переменных находятся необходимые и достаточные условия сравнения силы с весом этих многочленов. Условия формулируются в терминах порядков и кратностей нулей сравнимых многочленов.

MSC2010 numbers: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: Многогранник Ньютона; сравнение силы (мощности) многочленов.

1. Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbf{N}$ множество всех натуральных чисел, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup 0$, $\mathbf{N}_0^n = \mathbf{N}_0 \times ... \times \mathbf{N}_0-$ множество $n-$ мерных мультииндексов, $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n-$ $n-$мерные евклидовы пространства вещественных точек (векторов) $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ и $x = (x_1, ..., x_n)$, соответственно комплексных точек (векторов) $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, $\mathbb{R}^{n,0} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \cdot ... \cdot \xi_n \neq 0\}$ и $\mathbb{R}^{n,+} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0 \ (j = 1, ..., n)\}$.

Для $\nu \in \mathbb{R}^{n,+}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ положим $|\nu| = \nu_1 + ... + \nu_n$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\xi^\nu| = |\xi_1|^{\nu_1} ... |\xi_n|^{\nu_n}$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}, ..., D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, ..., n)$.

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n,+}$ конечный набор. **Многогранником Ньютона набора** $\mathcal{A}$ называют наименьший выпуклый многогранник $\Re(\mathcal{A}) \subset \mathbf{R}^{n,+}$, содержащий множество $\mathcal{A} \cup 0$. Многогранник $\Re \subset \mathbf{R}^{n,+}$ называется **полным**, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершину на каждой оси координат. Полный многогранник $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется **вполне правильным** (в.п.), если все координаты внешних (относительно $\Re$) единичных нормалей

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 15T - 1A 197 и в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОБНРФ.

$(n-1)$–мерных некоординатных граней $\Re$ (множество которых обозначим через $\Lambda(\Re)$) положительны.

Очевидно, что между множеством $\Lambda(\Re)$ и множеством всех $(n-1)$–мерных некоординатных граней $\Re$ существует однозначное соответствие, при этом каждой такой грани Γ, или, что то же самое, каждому вектору $\lambda(\Gamma)$ однозначно соответствует число

$$d(\lambda) = \max_{\nu\in\Re}(\lambda, \nu).$$

Пусть $\Re$ в.п. многогранник, обозначим через $\Re^0$ множество его вершин и положим

$$h_{\Re}(\xi) = \sum_{\nu\in\Re^0} |\xi^{\nu}|, \ \ \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Для дифференциального оператора $R(D) = R(D_1, ..., D_n)$ через $R(\xi) = (\xi_1, ..., \xi_n)$ обозначим его символ (характеристический многочлен), а через $\tilde{R}(\xi, t)$ обозначим функцию (Л. Хермандера):

$$\tilde{R}(\xi, t) = \sqrt{\sum_{\alpha\in\mathbf{N}_0^n} |D^{\alpha}R(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}}; \ \ \tilde{R}(\xi) = \tilde{R}(\xi, 1).$$

Определение 1.1. *(см. [1], определение 10.3.4 и [12]). Многочлен $P(\xi)$ сильнее (мощнее) многочлена $Q(\xi)$, будем обозначать $Q \prec P$, (соответственно $Q < P$) если с некоторой постоянной $C > 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ будем иметь $\tilde{Q}(\xi) \leq C\tilde{P}(\xi)$ (соответственно $|Q(\xi)| \leq C[1 + |P(\xi)|]$).*

Определение 1.2. *Пусть $\Re \subset \mathbf{R}^{n,+}$ в.п. многогранник. Многочлен P $\Re$–сильнее многочлена Q и будем обозначать $Q \prec^{\Re} P$, если с некоторой постоянной $C > 0$ и для любого $\xi \in \mathbf{R}^n$ будем иметь $\tilde{Q}(\xi, h_{\Re}(\xi)) \leq \tilde{P}(\xi, h_{\Re}(\xi))$.*

Представим многочлен P порядка $m > 0$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi), \tag{1.1}$$

где P_j однородный многочлен порядка j, $j = 0, 1, ..., m$.

Определение 1.3. *(см. [1], определение 12.3.3 и теорему 12.4.1). Многочлен P вида (1.1) гиперболичен (по Гордингу) относительно вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$, если $P_m(\eta) \neq 0$ и для некоторого $\tau_0 > 0$ $\ P(\xi + i\tau\eta) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ и $|\tau| > \tau_0$.*

Определение 1.4. *(см. [3]). Пусть $s > 1$ и $\eta \in \mathbf{R}^n$. Многочлен P вида (1.1) s–гиперболичен относительно вектора η, если $P_m(\eta) \neq 0$ и для некоторого $c > 0$ $P(\xi + i\tau\eta) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ и $|\tau| > c(1 + |\xi|)^{1/s}$.*

Определение 1.5. *(см.[4], [5], или [6]) Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ в.п. многогранник. Многочлен P вида (1.1) $h_{\Re}$−гиперболичен относительно вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$ (P гиперболичен относительно вектора η с весом $h_{\Re}$), если $P_m(\eta) \neq 0$ и для некоторого $c > 0$ $P(\xi + i\tau\eta) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $|\tau| > c\ h_{\Re}(\xi)$.*

Для числа $s > 0$, вектора $\lambda \in \mathbb{R}^n$, области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и в.п. многогранника $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ введем следующие (изотропный, анизотропный и мультиизотропный) классы Жевре:

$\Gamma^s(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega)$, для любого компакта $K \subset \Omega$ (далее в обозначениях: $K \subset\subset \Omega$) существует число $c = c(K, f) > 0$ такое, что $\sup\limits_{x\in K} |D^\alpha f(x)| \leq c^{|\alpha|+1}\ |\alpha|^s$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$,

$\Gamma^\lambda(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega)$, для любого $K \subset\subset \Omega$ существует число $c = c(K, f) > 0$ такое, что $\sup\limits_{x\in K} |D^\alpha f(x)| \leq c^{|\alpha|+1}\ |\alpha|^{(\lambda,\alpha)}\quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$,

$\Gamma^{\Re}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega)$, для любого $K \subset\subset \Omega$ существует число $c = c(K, f) > 0$ такое, что $\sup\limits_{x\in K} |D^\alpha f(x)| \leq c^{j+1}\ j^j\quad \forall \alpha \in j\,\Re\ \ (j = 1, 2, ...)\}$, где $j\,\Re$ многогранник Ньютона набора точек $\{j\,\alpha : \alpha \in \Re\}$. Очевидно, для любого $j \in \mathbb{N}$ многогранники $\Re$ и $j\,\Re$ подобны с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия j. Известно (см. [7]), что

1) если $\Re = \{\nu \in \mathbb{R}^{n,+}, (\lambda, \nu) \leq 1\}$, то $\Gamma^{\Re}(\Omega) = \Gamma^\lambda(\Omega)$, при этом, если $\lambda = (s, ..., s)$, то $\Gamma^{\Re}(\Omega) = \Gamma^s(\Omega)$,

2) если $\Re_1$ и $\Re_2$ в.п. многогранники, такие, что $\Re_1 \subset \Re_2$, то $\Gamma^{\Re_2}(\Omega) \subset \Gamma^{\Re_1}(\Omega)$,

3) $\Gamma^{\Re_1}(\Omega) \times \Gamma^{\Re_2}(\Omega) = \Gamma^{\Re_1}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\Re_2 \supset \Re_1^*$.

Пусть $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^n$ и $H := \{x \in \mathbb{R}^n, (x, \eta) > 0\}$. В монографии [1] (теоремы 12.3.1, 12.5.1 и лемма 12.3.2) доказано, что задача Коши в $C^\infty(H)$ для оператора $P(D)$ имеет, притом единственное решение тогда и только тогда, когда $P(D)$ гиперболичен по Гордингу относительно вектора η.

В [8] доказано, что если m – однородный многочлен P_m гиперболичен относительно вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$, а Q многочлен порядка меньше m, то многочлен $P_m + Q$ гиперболичен относительно вектора η тогда и только тогда, когда $Q \prec P_m$. При этом (см. [1], теоремы 12.4.6), если $Q = \sum\limits_{j=0}^{k} Q_j$, то $Q \prec P_m$ тогда и только тогда, когда $Q_j \prec P_m\quad j = 0, 1, ..., k$.

В [9] доказано, что если задача Коши для оператора $P(D)$ имеет в $\Gamma^s(H)$ единственное решение, то многочлен P s−гиперболичен относительно вектора η. В работе [4] Д. Калво в одном частном случае (когда $\eta = (0, ..., 0, 1)$) и в

[9] в более общем случае доказано, что если оператор $P(D)$ $h_{\Re}$–гиперболичен относительно вектора η, то решение задачи Коши при надлежащих начальных условиях принадлежит мультианизотропному классу Жевре $\Gamma^{\Re}$.

В [6] доказано, что если задача Коши для оператора $P(D)$ имеет в $\Gamma^{\Re}(\Omega)$ единственное решение, то многочлен P $h_{\Re}$–гиперболичен относительно вектора η. Там же доказано, что если m–однородный многочлен P_m $h_{\Re}$–гиперболичен относительно вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$, а Q многочлен порядка меньше m $h_{\Re}$–слабее P_m, то многочлен $P_m + Q$ $h_{\Re}$–гиперболичен относительно вектора η. При этом, если $Q = \sum_{j=0}^{k} Q_j$, то $Q \prec^{\Re} P_m$ тогда и только тогда, когда $Q_j \prec^{\Re} P_m$ $j = 0, 1, ..., k$.

Поэтому возникает естественный вопрос описания (для данного m–однородного многочлен P_m, и вполне правильного многогранника $\Re$) множества однородных многочленов $\{Q\}$ $\Re$–слабых P_m. Этому вопросу посвящена эта статья. При этом мы будем рассматривать лишь многочлены двух переменных. Отметим, что аналогичный вопрос для одного класса вполне правильных многогранников специального вида рассмотрен в работе [15]. В работах [10] - [11] в терминах порядков и кратности нулей многочленов Q и P найдены алгебраические условия при которых $Q < P$ или $Q \prec P$.

2. Предварительные результаты

Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ в.п. многоугольник, при этом $\Re^0 = \{e^j\}_{j=0}^{M}$, где точки $\{e^j\}$ пронумерованы в следующем порядке

(2.1) $$e_1^1 > e_2^1 > ... > e_M^1 = 0; \quad 0 = e_2^1 < e_2^2 < ... < e_2^M.$$

Из (1.1) следует, что

(2.2) $$\rho_1 := \max_{\nu \in \Re}\{\nu_1\} = \max_{1 \le j \le M} e_1^j = e_1^1, \quad \rho_2 := \max_{\nu \in \Re}\{\nu_2\} = \max_{1 \le j \le M} e_2^j = e_2^M.$$

Обозначим через λ^j единичную внешнюю нормаль стороны $[e^j, e^{j+1}]$ многогранника $\Re$ и $d_j := \max_{\nu \in \Re}(\lambda^j, \nu)$ $(j = 1, ..., M-1)$. Тогда уравнение прямой, проходящей через сторону $[e^j, e^{j+1}]$ будет $(\lambda^j, \nu) = d_j$ $(j = 1, ..., M-1)$. Как выше положим $\Lambda(\Re) = \{\lambda^1, ..., \lambda^{M-1}\}$.

Всюду ниже будем считать, что $\rho(\Re) := \max_{\nu \in \Re}\{|\nu|\} = \max_{1 \le j \le M}\{|e^j|\} < 1$. Отсюда и из определения чисел ρ_1 и ρ_2 следует, что

(2.3) $$d_1/\lambda_1^1 = \rho_1 < 1, \quad d_{M-1}/\lambda_2^{M-1} = \rho_2 < 1.$$

Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ в.п. многоугольник и $\delta \in (-\infty, 1]$, положим

$$f(\delta) = f_{\Re}(\delta) := \max_{\nu \in \Re}\{\nu_1 + \delta\nu_2\} = \max_{1 \le j \le M}\{e_1^j + \delta e_2^j\}, \tag{2.4}$$

$$g(\delta) = g_{\Re}(\delta) := \max_{\nu \in \Re}\{\delta\nu_1 + \nu_2\} = \max_{1 \le j \le M}\{\delta e_1^j + e_2^j\}. \tag{2.5}$$

Из определения введенных функций и того, что $\rho(\Re) < 1$ и $e_2^1 = e_1^M = 0$ непосредственно следует утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ в.п. многоугольник, для которого $\rho(\Re) < 1$. Тогда числа*

$$\delta_1 := \max_{1 \le j \le M} \frac{e_1^j}{(1 - e_2^j)} < 1 \text{ и } \delta_2 := \max_{1 \le j \le M} \frac{e_2^j}{(1 - e_1^j)} < 1 \tag{2.6}$$

являются единственными решениями уравнений $f(\delta) = \delta$ и $g(\delta) = \delta$ соответственно.

Замечание 2.1. *В условиях леммы 2.1 функции $\delta - f(\delta)$ и $\delta - g(\delta)$ строго монотонно возрастающие в $(-\infty, 1]$ функции. При этом*

1) $\delta_1 \in [\rho_1, 1)$, $\delta_2 \in [\rho_2, 1)$,

2) функция $\delta - f(\delta)(\delta - g(\delta))$ строго монотонно возрастает и $f(\delta) \ge \rho_1$ при $\delta \in (-\infty, 1]$ ($g(\delta) \ge \rho_2$ при $\delta \in (-\infty, 1]$)

3) $f(\delta) > \delta$ при $\delta \in (-\infty, \delta_1)$, $f(\delta_1) = \delta_1$ и $f(\delta) < \delta$ при $\delta \in (\delta_1, 1]$ ($g(\delta) > \delta$ при $\delta \in (-\infty, \delta_2)$, $g(\delta_2) = \delta_2$ и $g(\delta) < \delta$ при $\delta \in (\delta_2, 1]$).

Лемма 2.2. *В условиях леммы 2.1 $f(\delta) = \rho_1$ при $\delta \le \lambda_2^1/\lambda_1^1$ и $g(\delta) = \rho_2$ при $\delta \le \lambda_1^{M-1}/\lambda_2^{M-1}$.*

Доказательство. В силу монотонности f и соотношений (2.3) при $\delta \le \lambda_2^1/\lambda_1^1$ имеем

$$f(\delta) \le f(\lambda_2^1/\lambda_1^1) = \max_{1 \le j \le M}(e^j, \lambda^1)/\lambda_1^1 = d_1/\lambda_1^1 = \rho_1.$$

С другой стороны, так как $e_2^1 = 0$, то $f(\delta) \ge e_1^1 + \delta e_2^1 = e_1^1 = \rho_1$ для всех $\delta \in (-\infty, 1]$ Это доказывает первую часть леммы. Аналогично доказывается вторая часть. □

Ниже, в доказательстве основной теоремы 2.1 мы будем пользоваться следующими утверждениями.

Лемма 2.3. *(см.[11] или [12]). Пусть R однородный многочлен двух переменных. τ, η [illegible] $|\tau| = |\eta| = 1$, $\tau \in \Sigma(R)$, $(\tau, \eta) = 0$, $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$, $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$ последовательности вещественных чисел таких, что $\varphi_s \to \infty$, $\psi_s/\varphi_s \to 0$ при $s \to \infty$*

и $\xi^s = \varphi_s\tau + \psi_s\eta (s = 1, 2, ...)$. *Если кратность корня* τ *многочлена* $R : l_R(\tau) \geq l$, *то существует число* $c_0 > 0$ *такое, что*

$$|R(\xi^s)| \leq c_0 |\varphi_s|^{m-l} |\psi_s|^l, \ s = 1, 2, ...$$

При этом, если $l_R(\tau) = l$, *то существует число* $c > 0$ *такое, что для всех достаточно больших* s

$$c^{-1} |\varphi_s|^{m-l} |\psi_s|^l \leq |R(\xi^s)| \leq c |\varphi_s|^{m-l} |\psi_s|^l.$$

Лемма 2.4. *Пусть* $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ *в.п. многоугольник, для которого* $\rho(\Re) < 1$, $\tau, \eta \in \mathbb{R}^{2,0}$, $|\tau| = |\eta| = 1$, $(\tau, \eta) = 0$, $\{\varphi_s\}_{s=1}^\infty$, $\{\psi_s\}_{s=1}^\infty$ *последовательности вещественных чисел такие, что* $\varphi_s \to \infty$, $\psi_s/\varphi_s \to 0$ *при* $s \to \infty$ *и* $\xi^s = \varphi_s\tau + \psi_s\eta$ $(s = 1, 2, ...)$. *Тогда существует число* $c > 0$ *такое, что для всех достаточно больших* s $c^{-1} |\varphi_s|^{\rho(\Re)} \leq h_\Re(\xi^s) \leq c |\varphi_s|^{\rho(\Re)}$.

Доказательство. Так как в условиях леммы, очевидно, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и для достаточно больших s справедливы неравенства $c_1^{-1}|\varphi_s| \leq |\xi_j^s| \leq c_1 |\varphi_s|$ $(j = 1, 2)$ и, следовательно неравенство

$$c_2^{-1}|\varphi_s| \leq |\xi^s| \leq c_2 |\varphi_s|$$

с некоторой постоянной $c_2 > 0$, то требуемое неравенство непосредственно следует из определения числа $\rho(\Re)$ и функции $h_\Re$. □

Пусть для данного $\delta \in (-\infty, 1]$ максимум в правой части (2.4) достигается для индексов $j_k = j_k(\delta)$ $(k = 1, ..., M_1 = M_1(\delta))$: $f(\delta) = e_1^{j_k} + \delta e_2^{j_k}$ $k = 1, ..., M_1$. Обозначим

$$a_1(\delta) = \max_{1 \leq k \leq M_1} e_2^{j_k}, \ a_2(\delta) = \min_{1 \leq k \leq M_1} e_2^{j_k}. \tag{2.7}$$

Лемма 2.5. *Пусть* $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ *в.п. многоугольник, для которого* $\rho(\Re) < 1$, $\tau = (1, 0)$, $\eta = (0, 1)$, $\theta \in (-\infty, 1]$, $\{\varphi_s\}_{s=1}^\infty$, $\{t_s\}_{s=1}^\infty$ *последовательности вещественных чисел таких, что* $\varphi_s \to \infty$, $\varphi_s^\theta t_s/\varphi_s \to 0$ *при* $s \to \infty$, *и* $\xi^s = \varphi_s\tau + \varphi_s^\theta t_s\eta = (\varphi_s, \varphi_s^\theta t_s)$ $(s = 1, 2, ...)$. *Пусть также для любого* $\varepsilon > 0$ $\varphi_s^\varepsilon t_s \to \infty$, $\varphi_s^{-\varepsilon} t_s \to 0$ *при* $s \to \infty$. *Тогда существует число* $c > 0$ *такое, что для всех достаточно больших* s *имеем*

$$c^{-1} |\varphi_s|^{f(\theta)} |t_s|^{a(\theta)} \leq h_\Re(\xi^s) \leq c |\varphi_s|^{f(\theta)} |t_s|^{a(\theta)}, \tag{2.8}$$

где (см. обозначения (2.7)) $a(\theta) = a_1(\theta)$, *для тех* s *для которых* $|t_s| \geq 1$ *и* $a(\theta) = a_2(\theta)$, *для тех* s *для которых* $|t_s| \leq 1$.

Доказательство. Пусть $\delta \in (-\infty, 1]$, обозначим $\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{D}(\delta, f) := \{j : 1 \le j \le M,\ e_1^j + \theta e_2^j = f(\theta)\}$. Из определения чисел $a_1(\delta)$, $a_2(\delta)$ (см. (2.7)) и последовательности $\{\xi^s := (\varphi_s, \varphi_s^\theta t_s)\}$ имеем $a_1(\delta) = \max\limits_{j\in\mathcal{D}(\delta)}\{e_2^j\}$, $a_2(\delta) = \min\limits_{j\in\mathcal{D}(\delta)}\{e_2^j\}$ и

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi) := \sum_{\nu\in\mathfrak{R}^0} |(\xi^s)^\nu| = 1 + \sum_{j=1}^{M} |(\xi^s)^{e^j}| = 1 + \sum_{j=1}^{M} \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j} t_s^{e_2^j}$$

$$= 1 + \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)} t_s^{e_2^j} + \sum_{j\notin\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j} t_s^{e_2^j}. \tag{2.9}$$

Так как $f(\theta) \ge \rho_1 > 0$ (см. доказательство леммы 2.2) и $e_1^j + \theta e_2^j < f(\theta)$ при $j \in \mathcal{D}(\delta)$, то из условия леммы на последовательность $\{\varphi_s; t_s\}$ при $s \to \infty$ имеем

$$\sum_{j\notin\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j} t_s^{e_2^j} = o\Big(\sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)} t_s^{e_2^j}\Big).$$

В силу этого из (2.9) имеем с некоторыми положительными постоянными c_1, c_2

$$1 + \varphi_s^{f(\theta)} \left[t_s^{a_1(\theta)} + t_s^{a_2(\theta)}\right] \le 1 + \varphi_s^{f(\theta)} \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} t_s^{e_2^j} \le 1 + \sum_{j=1}^{M} \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j} t_s^{e_2^j} = h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)$$

$$= 1 + \left[\sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} + \sum_{j\notin\mathcal{D}(\delta)}\right] \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j} t_s^{e_2^j} \le \left[1 + \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)} t_s^{e_2^j}\right]$$

$$+ c_1 \left[1 + \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)} t_s^{e_2^j}\right] = (1+c_1)\Big[1 + \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)} t_s^{e_2^j}\Big]$$

$$\le c_2 \left[1 + \varphi_s^{f(\theta)} \left(t_s^{a_1(\theta)} + t_s^{a_2(\theta)}\right)\right].$$

Так как для достаточно больших s $\varphi_s^{f(\theta)} (t_s^{a_1(\theta)} + t_s^{a_2(\theta)}) > 1$, то это доказывает соотношение (2.8). $\square$

Замечание 2.2. *В силу леммы 2.2 $f(\theta) = \rho_1 = e_1^1$ при $\theta \le \lambda_2^1/\lambda_1^1$ и, так как $1 \in \mathcal{D}(\delta)$ $(e_2^1 = 0)$, то $a_2(\theta) = 0$ при $\theta \le \lambda_2^1/\lambda_1^1$.*

3. Основной результат

Для m-однородного многочлена R_m положим $\Sigma(R_m) = \{\xi \in \mathbb{R}^2, |\xi| = 1, R_m(\xi) = 0\}$, а через $l(\eta) = l_{R_m}(\eta)$ обозначим кратность нуля $\eta \in \Sigma(R_m)$.

Теорема 3.1. *Пусть $P = P_m$ и $Q = Q_k$ однородные многочлены двух переменных, порядков соответственно m и k, $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^{2,+}$ в.п. многоугольник, построенный на наборе $\{e^j\}_{j=0}^M$ для которого $\rho(\mathfrak{R}) < 1$. Тогда $Q \prec^{\mathfrak{R}} P$ в том и только в том случае, когда*

1) $k \leq m$
2) $l_P(\tau) - l_Q(\tau) \leq (m-k)/(1-\rho(\Re)) \;\; \forall \tau \in \Sigma(P_m) \cap \mathbb{R}^{2,0}$
3) $l_P(\tau) - l_Q(\tau) \leq (m-k)/(1-\rho_1)$, *если* $\tau = \pm(1,0) \in \Sigma(P)$
4) $l_P(\tau) - l_Q(\tau) \leq (m-k)/(1-\rho_2)$, *если* $\tau = \pm(0,1) \in \Sigma(P)$.

Доказательство необходимости проводится аналогично доказательству необходимости теоремы 3.1 работы [15] с применением лемм 2.3 - 2.5 настоящей работы.

Достаточность. Предположим обратное, что при выполнении условий 1) - 4) теоремы, существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\tilde{Q}(\xi^s, h_{\Re}(\xi^s))/\tilde{P}(\xi^s, h_{\Re}(\xi^s)) \to \infty. \tag{3.1}$$

Положим $\tau^s = \xi^s/|\xi^s|$. Так как $|\tau^s| = 1$ для всех $s = 1,2,...$, то, за счет выбора подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\tau^s = \xi^s/|\xi^s|$ сходится к некоторой точке $\tau, |\tau| = 1$. Пусть $\eta \in \mathbb{R}^2$, $|\eta| = 1$ и $(\eta, \tau) = 0$. Так как пара (τ, η) является базисом в $\mathbb{R}^2$, то точки ξ^s можно представить в виде $\xi^s = \varphi_s \tau + \psi_s \eta$, где $\varphi_s = (\xi^s, \tau)$, $\psi_s = (\xi^s, \eta)$ $s = 1,2,...$. Из условий $\tau_s \to \tau$ и $|\xi^s| \to \infty$ следует, что $\varphi_s > 0$ для достаточно больших s (не умаляя общности, будем считать, что для всех s). При этом, очевидно, что с некоторой постоянной $c_{10} > 0$ имеем

$$c_{10}^{-1} \varphi_s \leq |\xi^s| \leq c_{10} \varphi_s, \;\; s = 1,2,...$$

За счет выбора вектора η и подпоследовательности последовательности $\{\xi^s\}$ можно считать, что $\psi_s \geq 0$ для всех $s = 1,2,...$, при этом $\psi_s/\varphi_s \to 0$ при $s \to \infty$.

Проводя аналогичные рассуждения как при доказательстве достаточности теоремы 3.1 работы [15] с применением лемм 2.1 - 2.4 и соотношения (3.1) настоящей работы получим, что либо $\tau = \pm(1,0)$ либо $\tau = \pm(0,1)$. При этом последовательность $\{\xi^s\}$ представляется в виде $\xi^s = \varphi_s \tau + \varphi_s^{\vartheta} t_s \eta$ $(s = 1,2,...)$, где $\vartheta = \delta_1$ при $\tau = \pm(1,0)$, $\vartheta = \delta_2$ при $\tau = \pm(0,1)$, и для любого $\varepsilon > 0$ $t_s\varphi_s^{\varepsilon} \to +\infty$, $t_s\varphi_s^{-\varepsilon} \to 0$, при $s \to \infty$.

Так как оба случая рассматриваются аналогично, то рассмотрим только случай $\tau = \pm(1,0)$. Вследствии того, что $f(\delta_1) = \delta_1$ (см. лемму 2.1), то в силу лемм 2.3 и 2.5 при достаточно больших s имеем с некоторыми положительными постоянными $c_1, ..., c_4$, получаем

$$\sum_{\alpha} |D^\alpha P(\xi^s)| \; h_{\Re}^{|\alpha|}(\xi^s) \geq |P(\xi^s)| + \sum_{|\alpha| = l_P(\tau)} |D^\alpha P(\xi^s)| \; h_{\Re}^{|\alpha|}(\xi^s)$$

$$\geq c_1 \left[\varphi_s^{m-l_P} (\varphi_s^{\delta_1} t_s)^{l_P} + \varphi_s^{m-l_P(1-f(\delta_1))} t_s^{a(\delta_1)\, l_P} (1+o(1))\right]$$

$$\geq c_2\, \varphi_s^{m-l_P(1-\delta_1)} (t_s^{l_P} + t_s^{a(\delta_1)\, l_P}). \tag{3.2}$$

$$\sum_\alpha |D^\alpha Q(\xi^s)|\, h_{\Re}^{|\alpha|}(\xi^s) \leq \left[\sum_{|\alpha|\leq l_Q} + \sum_{|\alpha|>l_Q}\right] |D^\alpha Q(\xi^s)| h_{\Re}^{|\alpha|}(\xi^s)$$

$$\leq c_3 \Big[\sum_{|\alpha|\leq l_Q} \varphi_s^{k-|\alpha|-(l_Q-\alpha_2)} (\varphi_s^{\delta_1} t_s)^{l_Q-\alpha_2} (\varphi_s^{f(\delta_1)} t_s^{a(\delta_1)})^{|\alpha|}$$

$$+ \sum_{l_Q<|\alpha|\leq k} \varphi_s^{k-|\alpha|} (\varphi_s^{f(\delta_1)} t_s^{a(\delta_1)})^{|\alpha|} \Big]$$

$$\leq c_4 \left[\sum_{|\alpha|\leq l_Q} \varphi_s^{k-|\alpha|(1-f(\delta_1))-(l_Q-\alpha_2)\,(1-f(\delta_1))-(l_Q-\alpha_2)(f(\delta_1)-\delta_1)}\, t_s^{l_Q-\alpha_2+a(\delta_1)\,|\alpha|} \right.$$

$$\left. + \sum_{l_Q<|\alpha|\leq k} \varphi_s^{k-|\alpha|(1-f(\delta_1))}\, t_s^{a(\delta_1)|\alpha|} + \sum_{l_Q<|\alpha|\leq k} \varphi_s^{k-|\alpha|(1-f(\delta_1))} t_s^{a(\delta_1)|\alpha|} \right]$$

$$= \varphi_s^{k-l_Q(1-\delta_1)} (t_s^{l_Q} + t_s^{a(\delta_1) l_Q})(1+o(1)). \tag{3.3}$$

Так как $\delta_1 \in [\rho_1, 1)$ (см. замечание 2.1), то в случае когда $m > k$ или $m - l_P(1 - \rho_1) > k - l_Q(1-\rho_1)$ имеем $m - l_P(1-\delta_1) > k - l_Q(1-\delta_1)$. В силу этого оценки (3.2) и (3.3) противоречат соотношению (2.2). Если же $m = k$ и $m - l_P(1-\rho_1) = k - l_Q(1-\rho_1)$, то вследствии того, что $\rho_1 < 1$ (см. (2.3)) получим, что $l_P = l_Q$ и опять оценки (2.3) и (2.4) противоречат соотношению (2.2). Полученные противоречия доказывают часть теоремы, относящейся к достаточности. □

Из доказанной теоремы и леммы 3.3 работы [6] непосредственно следует

Следствие 2.1. Пусть P_m и $\Re$ те же, что в теореме 2.1, $Q = Q_1 + ... + Q_M$, где Q_k k–однородный многочлен ($k = 1, ..., M$.) Тогда $Q \prec^{\Re} P_m$ в том и только в том случае, когда

1) $M \leq m$ и для всех $k = 0, 1, ..., M$
2) $l_{P_m}(\tau) - l_{Q_k}(\tau) \leq (m-k)/(1-\rho(\Re))$ $\forall \tau \in \Sigma(P_m) \cap \mathbb{R}^{2,0}$
3) $l_{P_m}(\tau) - l_{Q_k}(\tau) \leq (m-k)/(1-\rho_1)$, если $\tau = \pm(1,0) \in \Sigma(P_m)$
4) $l_{P_m}(\tau) - l_{Q_k}(\tau) \leq (m-k)/(1-\rho_2)$, если $\tau = \pm(0,1) \in \Sigma(P_m)$.

Abstract. In this paper, for homogeneous polynomials of two variables we find necessary and sufficient conditions for comparison of the weighted strengths of these polynomials. The conditions are stated in terms of orders and multiplicities of the zeros of the considered polynomials.

Список литературы

[1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, **2**, Springer (1983).

[2] L. Gårding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math., **85**, 1 – 62, (1951).

[3] E. Larson, "Generalized hyperbolicity", Ark. Math., **7**, 11 – 32, (1967).

[4] D. Calvo, Multianisotropic Gevrey Classes and Cauchy Problem, Ph.D Theses, Universita degli studi di Pisa (2000).

[5] L. Rodino, Linear Partial Differential operators in Gevrey spaces, Word Scientific, Singapore (1993).

[6] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О гиперболических многочленах с весом", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **49**, но. 5, 23 – 40 (2014).

[7] Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О решениях типа Жевре гипоэллиптических уравнений", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **33**, но. 1, 1 – 13 (1998).

[8] L. Svensson, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part", Ark.Math. **8**, 145 – 162 (1968).

[9] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О задаче Коши в мультианизотропных классах Жевре для уравнений гиперболических с весом", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **50**, но. 3, 36 – 46 (2014).

[10] Г. Г. Казарян, "О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам", Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, **9**, но. 6, 473 – 485 (1974).

[11] O. R. Gabrielyan, H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, On inequaliities for polynomials in two variables, Mathematical Inequalities and Applications, **12**, no. 2, April (2009).

[12] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Behaviour at infinity of polynomials of two variables", Topics in Analysis and its Applications, NATO sciense series, "Kluwer", Dortricht, Boston, London, 163 - 190 (2004).

[13] V. P. Mikhailov, "On the behaviour at infinity of a class of polynomials", Proc. Steklov Inst. Math., **91**, 59 – 81 (1967).

[14] S. Gindikin and L. R. Volevich, The Method of Newton's Polyhedron in Theory of Partial Differential Equations, Kluwer, Academic Publishers, London (1992).

[15] В. Н.Маргарян, "Сравнение двумерных многочленов", Изв. НАН Армении, **51**, но. 1, 38 – 53 (2016).

Поступила 19 сентября 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 51 – 58

ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ

Г. В. МИКАЕЛЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *gagik.mikaelyan@ysu.am*

Аннотация. Вводятся обобщенные характеристики для мероморфных в полуплоскости функций, обобщаются формула Левина и первая основная теорема для характеристик Цудзи.

MSC2010 number: 30D30.

Ключевые слова: мероморфная функция; преобразование Фурье; характеристика; первая основная теорема.

1. Введение

При изучении мероморфных в комплексной плоскости функций часто применяются характеристики Неванлинны и их разные обобщения. Однако эти характеристики не учитывают аргументы a-точек функций. Поэтому в теории распределении значений мероморфных функций применяют другие характеристики, учитывающие угловые распределения a-точек (см. [1]). В [2] для мероморфных в полуплоскости функций к таким характеристикам авторы относят характеристики Цудзи, порождаемые формулой Левина.

Мы обобщаем формулу Левина, как и в [3] перефразируя результаты для нижней полуплоскости, после чего формула Левина и характеристики Цудзи приобретают наиболее естественный вид. Затем рассматриваем формулу Левина как значение преобразования Фурье в точке $x = 0$ и вводим обобщенные характеристики для мероморфных в нижней полуплоскости функций и обобщаем первую основную теорему Цудзи.

Пусть f отличная от постоянной мероморфная функция в области

$$D = \left\{\left|z - i\frac{R}{2}\right| \le \frac{R}{2}\right\} \cup \{|z| \le R_0\},\ 0 < R_0 < R.$$

Справедлива формула Левина (см. [2], [4]).

$$\sum_m \left(\frac{\sin\varphi_m}{r_m} - \frac{1}{R}\right) - \sum_m \left(\frac{\sin\psi_m}{\rho_m} - \frac{1}{R}\right) = \tag{1.1}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arcsin(R_0 R^{-1})}^{\pi-\arcsin(R_0 R^{-1})} \log\left|f\left(R\sin\left(\theta e^{i\theta}\right)\right)\right| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta} + Q(R, R_0, f),$$

где $r_m e^{i\varphi_m}$- нули, $\rho_n e^{i\psi_n}$ -полюсы функции f лежащие в области $\left\{\left|z - i\frac{R}{2}\right| < \frac{R}{2}\right\} \cup \{|z| > R_0\}$, $Q(R, R_0, f) = O(1)$ при $R \to \infty$.

Введем теперь характеристики Цудзи для отличной от постоянной мероморфной в области $\{Im(z) > 0\} \cup \{|z| \leq R_0\}$ функции f. Полагая, что $R > R_0$ через $n(R, f)$ обозначим число полюсов функции f, лежащих в множестве $\left\{\left|z - i\frac{R}{2}\right| \leq \frac{R}{2}\right\} \cup \{|z| > R_0\}$, и положим

$$N(R, f) = \int\limits_{R_0}^{R} \frac{n(t, f)}{t^2} dt, \quad L(R, f) = m(R, f) + N(R, f),$$

$$m(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arcsin(R_0 R^{-1})}^{\pi-\arcsin(R_0 R^{-1})} \log^+\left|f\left(R\sin\theta e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta}.$$

С этими характеристиками Цудзи [5] (см.также [2], гл. 1, теорема 5.3) установил следующий аналог первой основной теоремы Неванлинны.

Теорема 1.1. *Пусть f отличная от постоянной мероморфная в области $\{Im(z) > 0\} \cup \{|z| \leq R_0\}$ функция. Тогда для любого комплексного числа a справедливо соотношение*

$$L(R, f) = L\left(R, \frac{1}{f-a}\right) + O(1), \text{ при } R \to \infty.$$

2. Обобщение формулы Левина

Преобразуем формулу (1.1) заменой переменной $w = \frac{1}{z}$. При этом отображении верхняя полуплоскость переходит в нижнюю полуплоскость, окружность $\left|z - i\frac{R}{2}\right| = \frac{R}{2}$ в горизонтальную прямую линию $Imw = -\frac{1}{R}$, круг $\left|z - i\frac{R}{2}\right| \leq \frac{R}{2}$ в полуплоскость $Imw \leq -\frac{1}{R}$, круг $|z| \leq R_0$ в область $|w| \geq \frac{1}{R_0}$. Таким образом область D отображается в область $\Omega = \left\{Imw \leq -\frac{1}{R}\right\} \cup \left\{|w| \geq \frac{1}{R_0}\right\}$(см. рис. 1).

Функция $f(w)$ мероморфна в области Ω, которая получается удалением из комплексной плоскости сегмента содержащего точки $w = 0$.

Из формулы (1.1) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arcsin(R_0 R^{-1})}^{\pi-\arcsin(R_0 R^{-1})} \log\left|\left(R\sin\theta e^{i\theta}\right)^\lambda\right| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta} = O(1), \text{ при } R \to \infty,$$

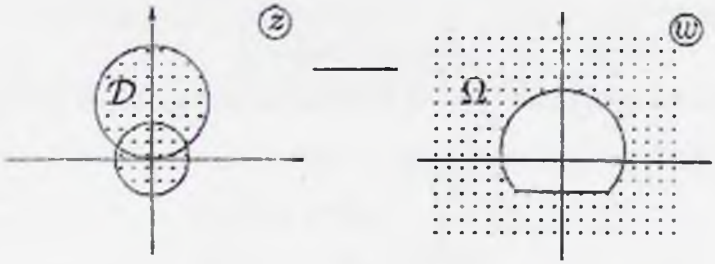

Рис. 1

где λ действительное число. Следовательно, если точка $z = 0$ является нулем порядка λ или полюсом порядка $(-\lambda)$, то рассмотрев функцию $f(z)\, z^{-\lambda}$, мы можем считать $f(0) = 1$. Таким образом после отображения $w = \frac{1}{z}$ имеем, что функция f аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. В этом случае в окрестности бесконечно удаленной точки справедливо разложение

$$f(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{w^k}.$$

Отсюда следует, что

(2.1) $$\log f(w) = \frac{\varphi(w)}{w}, \text{ где } \varphi(w) = O(1), \text{ при } w \to \infty$$

Пусть $\mu_m = \frac{1}{r_m} e^{-i\varphi_m}$, $\nu_n = \frac{1}{\rho_n} e^{-i\psi_n}$ - образы соответственно нулей $r_m e^{i\varphi_m}$ и полюсов $\rho_n e^{i\psi_n}$ функции $f(z)$. Они лежат в области $\left\{Imw < -\frac{1}{R}, \ |w| < \frac{1}{R_0}\right\}$ (см.рис.2).

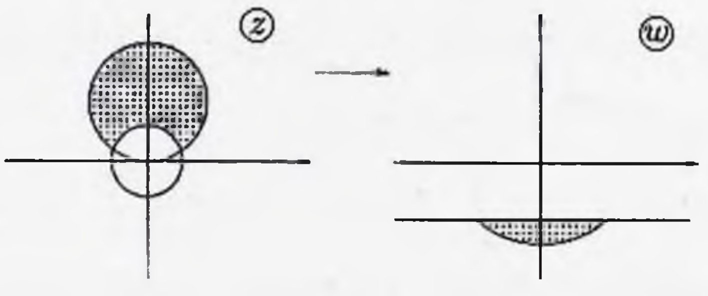

Рис. 2

Так как $f(\infty) = 1$, то можно считать, что нули и полюсы функции $f(w)$ лежат в полуплоскости $\left\{Imw < -\frac{1}{R}\right\}$.

Поскольку

$$\frac{1}{\sin\theta e^{i\theta}} = \frac{1}{R}\cot\theta - i\frac{1}{R}$$

то обозначения $u = \frac{1}{R}\cot\theta,\ v = -\frac{1}{R}$ приводят интеграл в формуле (1.1) в интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\sqrt{v_0^2-v^2}} \log|f(u+iv)|\,du,$$

где $v_0 = -\frac{1}{R_0}$.

Лемма 2.1. *При любых* $v_0 \in (-\infty, 0)\,, \lambda \in (-\infty, +\infty)\,, v \in (v_0, 0)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda u}\log|f(u+iv)|\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\sqrt{v_0^2-v^2}} \log|f(u+iv)|\,du + K(v, v_0, \lambda, f)\,,$$

где а) $\lim\limits_{v\to 0} K(v, v_0, 0, f) = 0$ *и б)* $K(v, v_0, \lambda, f) = O(1)$ *при* $v \to 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\lambda = 0$. При $a > 0$ имеем

$$\int\limits_{a}^{\infty} \log|f(u+iv)|\,du + \int\limits_{-\infty}^{-a} \log|f(u+iv)|\,du = \int\limits_{a}^{\infty} \log|f(u+iv)\,f(-u+iv)|\,du$$

Пусть $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, тогда в силу (2.1)

$$\begin{aligned} &\log|f(u+iv)\,f(-u+iv)| = \log|f(u+iv)| + \log|f(-u+iv)| = \\ &= Re\frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{u+iv} + Re\frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{-u+iv} = -\frac{2v\varphi_2}{u^2+v^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Следовательно при $v \to 0$

$$\left|\int\limits_{a}^{\infty} \log|f(u+iv)\,f(-u+iv)|\,du\right| \le O(1)\int\limits_{a}^{\infty} \frac{|v|}{u^2+v^2}du = O(1)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{|v|}\right).$$

Полагая $a = \sqrt{v_0^2 - v^2}$ при $v \to 0$ будем иметь

$$\int\limits_{\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\infty} \log|f(u+iv)|\,du + \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{v_0^2-v^2}} \log|f(u+iv)|\,du = O(1)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{v_0^2-v^2}}{|v|}\right) \to 0.$$

Теперь докажем лемму в случае $\lambda \neq 0$. Обозначим $\lim\limits_{w\to\infty}\varphi(w) = \varphi_0$. Тогда при $w \to \infty$ имеем $\varphi(w) - \varphi_0 = \frac{O(1)}{w}$. При $a > 0$ справедливо равенство

$$\int\limits_{a}^{\infty} e^{-i\lambda u}\log|f(u+iv)|\,du + \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{-i\lambda u}\log|f(u+iv)|\,du =$$

$$= \int_a^\infty \cos\lambda u \log|f(u+iv)\,f(-u+iv)|\,du + i\int_a^\infty \sin\lambda u \log\left|\frac{f(u+iv)}{f(-u+iv)}\right| du$$

В силу (2.2) как и в случае $\lambda = 0$ справедлива оценка

$$\left|\int_a^\infty \cos\lambda u \log|f(u+iv)\,f(-u+iv)|\,du\right| \le O(1)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{|v|}\right).$$

Из равенства

$$\log\left|\frac{f(u+iv)}{f(-u+iv)}\right| = \frac{2u\varphi_1}{u^2+v^2} = \frac{2uRe\varphi_0}{u^2+v^2} + \frac{2u(\varphi_1 - Re\varphi_0)}{u^2+v^2}$$

следует, что при $v \to 0$

$$(2.3)\qquad \int_a^\infty \sin\lambda u \log\left|\frac{f(u+iv)}{f(-u+iv)}\right| du = 2Re\varphi_0 \int_a^\infty \frac{u\sin\lambda u}{u^2+v^2}du + O(1)\int_a^\infty \frac{u}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}du$$

Так как

$$\int_a^\infty \frac{u\sin\lambda u}{u^2+v^2}du = \frac{1}{\lambda}\frac{a}{a^2+v^2}\cos\lambda a + \frac{1}{\lambda}\int_a^\infty \cos\lambda u \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}du$$

и

$$\int_a^\infty \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}du = -\frac{a}{a^2+v^2}$$

то

$$(2.4)\qquad \left|\int_a^\infty \frac{u\sin\lambda u}{u^2+v^2}du\right| \le \frac{2}{|\lambda|}\frac{a}{a^2+v^2}.$$

Поскольку

$$\int_a^\infty \frac{u}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}du = \frac{1}{\sqrt{a^2+v^2}}.$$

то полагая $a = \sqrt{v_0^2 - v^2}$, из (2.3) и (2.4) получаем доказательство леммы в случае $\lambda \ne 0$. Лемма 2.1 доказана.

Таким образом в силу пункта а) леммы мы пришли к следующей формулировке теоремы Левина.

Теорема 2.1. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в области Ω, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. Тогда при $v \to 0$ справедлива формула*

$$(2.5)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \log|f(u+iv)|\,du = \sum_{v_k<v}(v - v_k) - \sum_{q_k<v}(v - q_k) + O(1),\ v<0$$

где v_k и q_k мнимые части соответственно нулей и полюсов функции f (интеграл следует понимать в смысле главного значения).

В работе [6] (см. также [7]) доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в нижней полуплоскости $G = \{w : Im w < 0\}$, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. Пусть*

$$\frac{e^{xv_0}}{i\sqrt{2\pi x}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \frac{f'(u+iv_0)}{f(u+iv_0)} du = h(x), \quad v_0 < \min_k v_k, \quad v_0 < \min_k q_k, \quad x \neq 0.$$

Тогда $h(x)$ не зависит от v_0, равен нулю при $x > 0$ и при любом $v < 0$ справедлива формула

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log|f(u+iv)|\, du = \frac{1}{2}\left(e^{-xv} h(x) + e^{xv}\overline{h(-x)}\right) -$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{v_k < v} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}(x(v_k - v)) + \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{q_k < v} e^{-ixp_k} \operatorname{sh}(x(q_k - v)), \tag{2.6}$$

где $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} = \{u_k + iv_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность нулей а $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = \{p_k + iq_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность полюсов функции f.

Из (2.6) в силу леммы 2.1 предельным переходом при $x \to 0$ получается формула (2.5). Таким образом формула (2.5) справедлива, если функция f мероморфна в нижней полуплоскости.

3. Обобщение характеристики

Формулу (2.6) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log|f(u+iv)|\, du = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-xv} h(x) + e^{xv}\overline{h(-x)}\right) -$$

$$-\frac{1}{2x} \sum_{v_k < v} \left(e^{-xv} e^{-ixw_k} - e^{xv} e^{-ix\overline{w_k}}\right) + \frac{1}{2x} \sum_{q_k < v} \left(e^{-xv} e^{-ixr_k} - e^{xv} e^{-ix\overline{r_k}}\right),$$

Пусть $\{c_m\}$ произвольная последовательность комплексных чисел, а $\{\lambda_m\}$ произвольная последовательность действительных чисел. Рассмотрим экспоненциальную функцию $E(w) = \sum\limits_{m=-n}^{n} c_m e^{-i\lambda_m w}$, $w \in \mathbb{C}$ и при $v < 0$ введем следующие обозначения

$$n_E(v,f)=\frac{1}{2}\sum_{q_k<v}\left(E(r_k-iv)+E(\overline{r_k}+iv)\right),\quad N_E(v,f)=\int_{-\infty}^{v}n_E(t,f)\,dt,$$

$$H_E^1(v,f)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-n}^{n}c_m e^{-\lambda_m v}h(\lambda_m),\quad H_E^2(v,f)\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-n}^{n}c_m e^{\lambda_m v}\overline{h(-\lambda_m)},$$

$$H_E(v,f)=H_E^1(v,f)+H_E^2(v,f).$$

В случае $E\equiv 1$ имеем $n_E(v,f)=\sum\limits_{q_k<v}1$ и $N_E(v,f)=\sum\limits_{q_k<v}(v-q_k)$.

В условиях теоремы 2.2 имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(u)\log^+|f(u+iv)|\,du=H_E^1(v,f)+H_E^2(v,f)+N_E\left(v,\frac{1}{f}\right)-N_E(v,f).$$

Введем следующие функции

$$m_E(v,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E(u)\log^+|f(u+iv)|\,du,\quad L_E(v,f)=m_E(v,f)+N_E(v,f).$$

Таким образом имеем

$$L_E(v,f)=L_E\left(v,\frac{1}{f}\right)+H_E(v,f), \tag{3.1}$$

где

$$\lim_{v\to 0}H_E(v,f)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-n}^{n}c_m\left(h(\lambda_m)+\overline{h(-\lambda_m)}\right)$$

Обозначим

$$n_E(v,v_0,f)=\frac{1}{2}\sum_{v_0<q_k<v}\left(E(r_k-iv)+E(\overline{r_k}+iv)\right),\quad N_E(v,v_0,f)=\int_{v_0}^{v}n_E(t,v_0,f)\,dt,$$

$$m_E(v,v_0,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\sqrt{v_0^2-v^2}}E(u)\log^+|f(u+iv)|\,du,\quad L_E(v,v_0,f)$$
$$=m_E(v,v_0,f)+N_E(v,v_0,f).$$

В силу пункта б) леммы 2.1 формулу (3.1) можно записать в виде

$$L_E(v,v_0,f)=L_E\left(v,v_0,\frac{1}{f}\right)+O(1),\ \text{при } v\to 0. \tag{3.2}$$

Мы пришли к следующему обобщению и усилению первой основной теоремы Цудзи.

Теорема 3.1. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в нижней полуплоскости $G = \{w : Im w < 0\}$, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда для любого комплексного числа a справедливо соотношение*

$$L_E(v, v_0, f) = L_E\left(v, v_0, \frac{1}{f-a}\right) + O(1), \text{ при } v \to 0.$$

Доказательство. При $v \to 0$ справедлива оценка

$$|m_E(v, v_0, f) - m_E(v, v_0, f-a)| \leq \left(\log^+ a + \log 2\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\sqrt{v_0^2-v^2}} |E(u)|\, du = O(1)$$

Доказательство получается применением формулы (3.2) к функции $f - a$.

Abstract. In this paper we introduce generalized characteristics for meromorphic in the half-plane functions, and generalize the Levin's formula and the first fundamental theorem for Tsuji's characteristics.

Список литературы

[1] L. A. Rubel, "A generalized characteristic for meromorphic functions", Journal of math. Analysis and applicat., 18, 565 – 584 (1967).
[2] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, "Распределение значений мероморфных функций", М., Наука (1970).
[3] A. M. Jerbashian, "Functions of alpha-Bounded Type in the Half-Plane", Springer, New York (2005).
[4] В. Я. Левин, "О функциях, голоморфных в полуплоскости", Труди Одеського державного университета, 3, 5 – 14 (1941).
[5] M. Tsuji, "On Borels directions of meromorphic functions of finite order", Tohoku Math. J., 2, 97 – 112 (1950).
[6] Г. В. Микаелян, "Преобразование Фурье, ассоциированное с функциями, мероморфными в полуплоскости", Изв АН Арм ССР, Сер. Математика, 5, 361 – 376 (1984).
[7] Г. В. Микаелян, "О росте функций, мероморфных в полуплоскости", Известия вузов, 4, 79 – 82 (1988).

Поступила 3 декабря 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 59 – 71.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА, МИНИМУМА И ДИАПАЗОНА ВЫБОРКИ

Т.В. ПИЛИПОСЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *tigran.piliposyan@gmail.com*

Аннотация. Диапазон выборки, это разность между максимальным и минимальным значениями выборки. Диапазон, это размер наименьшего интервала, который содержит все данные и обеспечивает индикацию статистической дисперсии. Обычно на фьючерсном рынке ежедневно даются максимальные, минимальные цены и цены открытия и закрытия фьючерсов. В этой статье мы рассмотрим максимальные и минимальные цены и выясним, какое распределение будет их лучше описывать.

MSC2010 number: 62E17; 62F03.

Ключевые слова: максимум выборки; минимум выборки; диапазон выборки; распределение диапазона.

1. Распределение диапазона выборки

Диапазон выборки, это разность между максимальным и минимальным значениями выборки. Диапазон, это размер наименьшего интервала, который содержит все данные и обеспечивает индикацию статистической дисперсии (см. [1] и [2]). Обычно на фьючерсном рынке ежедневно даются максимальные, минимальные цены и цены открытия и закрытия фьючерсов. В этой статье мы рассмотрим максимальные и минимальные цены и выясним, какое распределение будет их лучше описывать.

Пусть $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ выборка из n независимых и одинаково распределенных случайных величин с общей функцией плотности f и функцией распределения F. Пусть $U = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $V = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $R = U - V$.

Распределение максимума выборки связано с распределением X_i по следующей формуле

$$P(U \leqslant x) = P[(X_1 \leqslant x) \cap \dots \cap (X_n \leqslant x)] = P(X_1 \leqslant x) \cdots P(X_n \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x)^n,$$

здесь мы использовали как независимость, так и одинаковую распределенность. Таким образом, функция распределения $G_U(x)$ случайной величины U является

n-й степенью функции распределения X_i:

$$G_U(x) = F(x)^n. \tag{1.1}$$

Тогда функция плотности вероятности максимума $g_U(x)$ будет иметь вид:

$$g_U(x) = nF(x)^{n-1}f(x).$$

Распределение минимума выборки

$$P(V > x) = P[(X_1 > x) \cap \ldots \cap (X_n > x)] = P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x)$$

$$1 - P(V \leqslant x) = (1 - P(X_1 \leqslant x))^n.$$

Таким образом, функция распределения $G_V(x)$ случайной величины V равна:

$$G_V(x) = 1 - (1 - F(x))^n, \tag{1.2}$$

поэтому плотность вероятности минимума $g_V(x)$ имеет вид:

$$g_V(x) = n(1 - F(x))^{n-1}f(x).$$

Легко убедиться, что

$$P[(U < u) \cap (V > v)] = P[(v < X_1 < u) \cap \ldots \cap (v < X_n < u)]$$

$$= P(v < X_1 < u) \cdots P(v < X_n < u) = \left(\int_v^u f(t)\,dt\right)^n = (F(u) - F(v))^n,$$

Поэтому совместное распределение U и V, когда $u \geqslant v$, имеет следующий вид:

$$F_{U,V}(u,v) = P(U \leqslant u \cap V \leqslant v) = P(U \leqslant u) - P(U \leqslant u \cap V > v)$$

$$= F_U(u) - (F(u) - F(v))^n,$$

а если $u < v$, то имеем

$$F_{U,V}(u,v) = P(U \leqslant u \cap V \leqslant v) = P(U \leqslant u) = (F_U(u))^n.$$

Отсюда следует, что совместная плотность имеет вид:

$$g(u,v) = \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u\,\partial v} = \begin{cases} n(n-1)(F(u) - F(v))^{n-2}f(u)f(v), & \text{если } u \geqslant v, \\ 0, & \text{если } u < v. \end{cases}$$

Следовательно, функция распределения диапазона при $x > 0$, равна

$$F_R(x) = \iint\limits_{\substack{v \leqslant u \\ u - v \leqslant x}} g(u,v)\,du\,dv = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,dv \int_v^{v+x} f(u)[F(u) - F(v)]^{n-2}du$$

$$= n\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,dv \int_v^{v+x} d[[F(u) - F(v)]^{n-1}] = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)[F(v+x) - F(v)]^{n-1}dv.$$

Итак:

$$F_n(x) = \begin{cases} n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)[F(x+y) - F(y)]^{n-1} dy, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

а плотность равна

$$f_n(x) = \begin{cases} n(n-1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)[F(x+y) - F(y)]^{n-2} f(x+y)\, dy, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

В случае, когда выборка имеет экспоненциальное распределение с параметром $r > 0$, функция распределения диапазона выборки имеет вид (см. [3]):

$$H(z) = \begin{cases} (1 - e^{-rz})^{n-1}, & z > 0 \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

Рассмотрим максимальные и минимальные цены газовых фьючерсов на десятилетний период (Приложение 1) и подберем некоторые семейства распределений на языке программирования R (Приложение 2). Затем посмотрим, какая из них лучше аппроксимирует данную случайную величину.

2. Численные результаты

Для максимальных цен на фьючерсы график Каллена и Фрея имеет вид (см. рис. 2).

На Рисунке 1 показана эмпирическая плотность и функция распределения максимальных цен, а на Рисунке 2 график Каллена и Фрея показывает, что наблюдение попадает в бета распределение из нормальных, равномерных, экспоненциальных, логистических, бета, логнормальных и гамма распределений. Диаграмма говорит, что асимметрия и эксцесс согласуются с бета-распределением, так как наше наблюдение попадает в бета-распределение. Для более практического результата мы делаем то же самое с бутстапными значениями, эти значения заполняются плотно, это означает, что наш результат хорош. Давайте посмотрим, что показывают графики зависимости Q-Q и P-P.

Здесь мы использовали бета, гамма, Вейбул, логнормальное, лог-логистическое и экспоненциальное распределения. На Рисунке 3 показано, что экспоненциальное распределение отличается от других, и оно не соответствует нашим данным. Здесь у нас больше распределений, чем в графе Каллена Фрея.

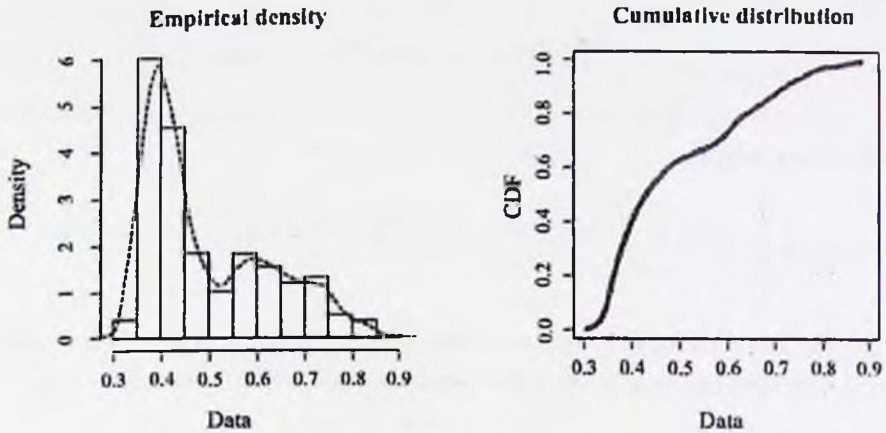

Рис. 1

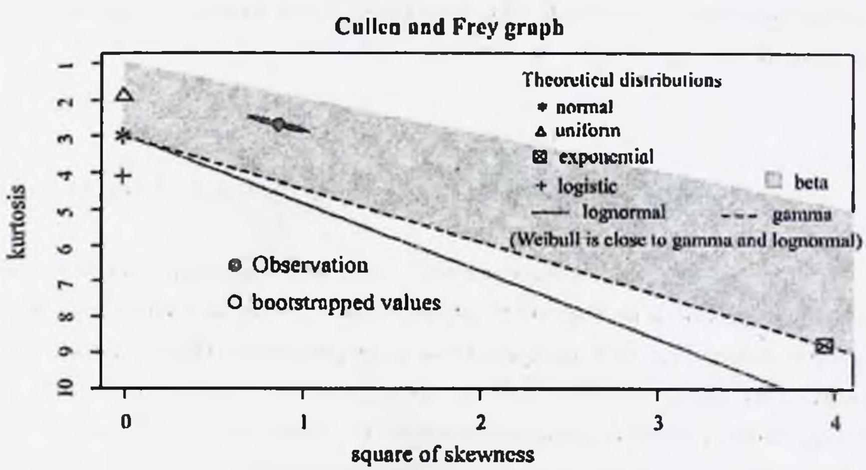

Рис. 2

В статистике есть много способов выяснить, какое распределение подходит для наших данных лучше, например, тест Колмогорова-Смирнова. Возьмем некоторые из них и используем их.

Таблица 1.

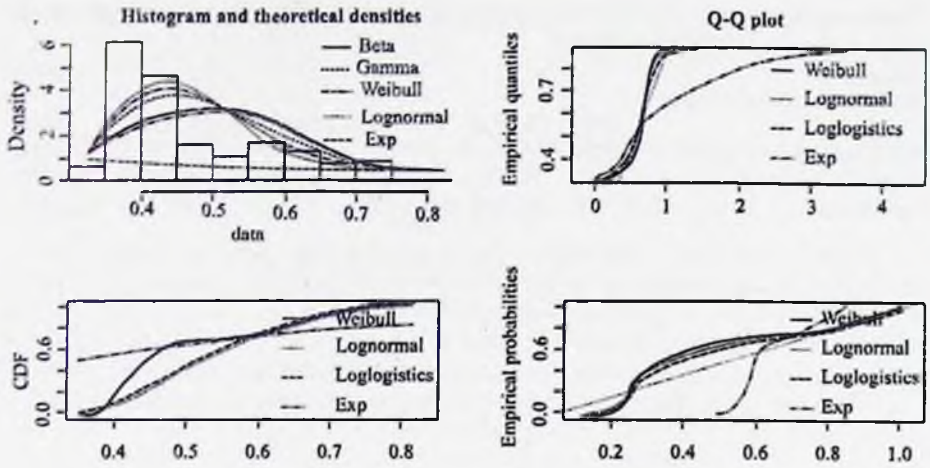

Рис. 3

Goodness-of-fit statistics

	Beta	Gamma	Weibull	Lognomal	Loglogistics	Exp
Koliogorov-Smirrov st.	0.1798	0.1558	0.1693	0.1487	0.1190	0.4951
Cramer-von Mises st.	23.1175	19.0298	21.5541	17.2426	14.0474	144.0261
Anderson-Darling st.	127.5552	106.2417	121.5746	96.8110	91.0866	683.5985

В Таблице 1 мы взяли:

(1) Расстояние Колмогорова-Смирнова: $\sup\limits_{x\in R}|F_n(x) - F(x)|$.

(2) Расстояние Крамера-фон Мизеса: $\int (F_n(x) - F(x))^2 dF(x)$.

(3) Расстояние Андерсона-Дарлинга: $\int \frac{(F_n(x)-F(x))^2}{F(x)(1-F(x))}\, dF(x)$,

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения. Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ будет выборкой из n независимых и одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Тогда эмпирическая функция распределения определяется как (см. [4]):

$$F_n(x) = \frac{\text{количество элементов в выборке} \leqslant x}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i \leqslant x\}},$$

где 1_A – индикатор события A.

Поскольку вышеупомянутые критерии основаны на различиях теоретических и эмпирических распределений, в Таблице 1 минимальные значения показывают нам, какое распределение лучше подходит. Результатом является лог-логистическое распределение всеми тремя способами. Это лучше, чем бета распределение, которое показал нам граф Каллен и Фрей. Второй является логнормальное, что очень близко к лог-логистическому распределению.

Картина та же для минимальных цен. В Таблице 2 показаны результаты для минимальных значений по статистике Колмогорова-Смирнова, Крамера-фон

Мизеса и Андерсона-Дарлинга, и снова лог-логистическое распределение лучше всех подходит к нашим данным.

Таблица 2.
Goodness-of-fit statistics

	Beta	Gamma	Weibull	Lognomal	Loglogistics	Exp
Kolmogorov-Smirnov st.	0.1765	0.1644	0.1673	0.1582	0.1287	0.4927
Cramer-von Mises st.	23.0733	19.1864	21.7812	17.4005	14.1937	144.3591
Anderson-Darling st.	127.7583	107.1684	123.0546	97.5811	91.7193	684.8924

Итак допустим, что максимальные и минимальные цены фьючерсов имеют лог-логистическое распределение. Лог-логистическое распределение представляет собой непрерывное распределение вероятностей для неотрицательной случайной величины. Он используется в анализе выживаемости как параметрическая модель для событий, чья скорость сначала увеличивается а затем уменьшается.

Функция распределения лог-логистического распределения имеет вид:

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}}, & x>0,\end{cases}\tag{2.1}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$.

Параметр $\alpha>0$ является масштабным параметром и также является медианой распределения. Параметр $\beta>0$ является параметром формы. Распределение является унимодальным, когда $\beta>1$ и его дисперсия уменьшается с ростом β (см. [5]).

Плотность лог-логистического распределения имеет вид:

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}}{(1+(x/\alpha)^{\beta})^2}, & x>0.\end{cases}$$

В нашем случае мы имеем функции распределения для максимума выборки и минимума выборки: уравнения (1.1) и (1.2). Поскольку они не совпадают, и оба они имеют одинаковое лог-логистическое распределение, логично, что они имеют разные параметры масштаба и формы. Найдем параметры α и β. Мы можем рассчитать параметры распределения с помощью языка программирования R методом максимального правдоподобия, это метод оценки параметров статистической модели, данных наблюдений, путем нахождения значений параметров, которые максимизируют вероятность проведения наблюдений с учетом параметров. Результат для максимума выборки показан в Таблице 3, а для минимума – в Таблице 4.

Таблица 3.
Fitting of the distribution ' llogis ' by maximum likelihood
Parameters:

	estimate	Std. Error
shape	6.7978763	0.109397359
scale	0.4673385	0.002423145

Таблица 4.
Fitting of the distribution ' llogis ' by maximum likelihood

Parameters:

	estimate	Std. Error
shape	6.8233459	0.109891183
scale	0.4558791	0.002354103

Мы видим, что параметры формы и масштаба близки друг к другу, но не равны.

3. Две теоремы

Мы взяли такой образец, который не содержит резкого увеличения или снижения цен на рынке фьючерсов, и мы проделали эти шаги для некоторых других выборок, таких как наши, и видели, что результаты очень близки друг к другу.

Теорема 3.1. *Если $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ представляет собой выборку из n независимых и одинаково распределенных случайных величин и $U = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $V = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, тогда наилучшим предположением о распределении U и V является лог-логистическое распределение с параметрами:* $\alpha_U = 0.47$, $\alpha_V = 0.46$, $\beta_U = 6.8$, $\beta_V = 6.82$.

Теперь рассмотрим диапазон выборки. Результат показан в Таблице 5. Здесь логнормальное распределение лучше подходит для всех трех статистических данных, но теперь лог-логистическое распределение находится на втором месте и очень близко к логнормальному распределению.

Таблица 5.

Goodness-of-fit statistics

	Beta	Gamma	Weibull	Lognormal	Loglogistics	Exp
Kolmogorov-Smirnov st.	0.04883	0.04807	0.06677	0.01569	0.02946	0.2342
Cramer-von Mises st.	2.05374	1.96358	4.19960	0.12950	0.55041	40.5841
Anderson-Darling st.	12.19328	11.69045	27.87877	0.93553	3.87484	224.0618

Логнормальное распределение – это непрерывное распределение вероятностей случайной величины, логарифм которой имеет нормальное распределение. Логнормальное распределение имеет также два параметра, которые являются соответственно средним и стандартным отклонением натурального логарифма случайной величины.

Плотность распределения логнормального распределения имеет вид (см. [6]):

$$f(x) = \begin{cases} 0. & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \end{cases}$$

В Таблице 6 показаны параметры логнормального распределения: $\mu = -4.5$, $\sigma = 0.59$.

Таблица 6.

Fitting of the distribution ' llogis ' by maximum likelihood

Parameters:

	estimate	Std. Error
shape	-4.5883944	0.011707233
scale	0.5936156	0.008278158

Следовательно, приходим к следующему утверждению

Теорема 3.2. *Если $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ выборка из n независимых и одинаково распределенных случайных величин, $U = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $V = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $R = U - V$ – диапазон выборки, тогда наилучшим предположением о распределении R является логнормальное распределение с параметрами $\mu = -4.5$, $\sigma = 0.59$.*

Сейчас рассмотрим что будет с выборкой, имея распределение максимума выборки и параметры распределения. Используя уравнения (1.1) и (1.2), получим такой вид функции распределения выборки:

$$F(x) = \sqrt[n]{G_U(x; \alpha, \beta)} = \sqrt[n]{\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}}} \ ,$$

где $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

В этом случае, рассмотрим наиболее близкое распределение к лог-логистическому распределению: распределение Дагума. Распределение Дагума представляет собой непрерывное распределение вероятностей, определенное для положительных вещественных чисел. Он назван в честь Камило Дагума, он имеет три параметра, и если один из них равен 1, то это точно такое же распределение, что и лог-логистическое. Функция распределения Дагума имеет вид:

$$F(x; \alpha, \beta, p) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \left(1 + \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}\right)^{-p}, & x > 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p > 0$.

Следовательно, n-й корень функции распределения является одним и тем же распределением, но с другим параметром:

$$\sqrt[n]{F(x; \alpha, \beta, p)} = \left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}\right)^{-p} = F(x; \alpha, \beta, p/n).$$

Итак, максимум выборки имеет функцию распределения Дагума $\alpha = 0.47$, $\beta = 6.8$, $p = 1$ параметрами, соответственно, выборка будет иметь ту же функцию распределения Дагума, но уже $\alpha = 0.47$, $\beta = 6.8$, $p = 1/n$ параметрами:

$$F(x) = \sqrt[n]{G_U(x; \alpha, \beta, p)} = G_U(x; \alpha, \beta, p/n) =$$

$$\left(1 + \left(\frac{x}{0.47}\right)^{-6.8}\right)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{0.47}\right)^{-6.8}\right)^{\frac{1}{n}}}. \tag{3.1}$$

А в случае минимума, используя уравнения (1.2) и (1.2), получим что

$$F(x) = 1 - \sqrt[n]{1 - G_V(x; \alpha, \beta)} = 1 - \sqrt[n]{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}}} \ .$$

Имея что $\alpha = 0.46$, $\beta = 6.82$, получим:

$$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{0.46}\right)^{-6.82}}\right)^{\frac{1}{n}} \ . \tag{3.2}$$

Чтобы понять, насколько хороша наша оценка, нам нужно сравнить результаты (3.1) и (3.2), поэтому давайте нарисуем их графики и посмотрим, какова их разница.

Рисунок 4 показывает, что их разница небольшая, то есть наши оценки довольно хорошие.

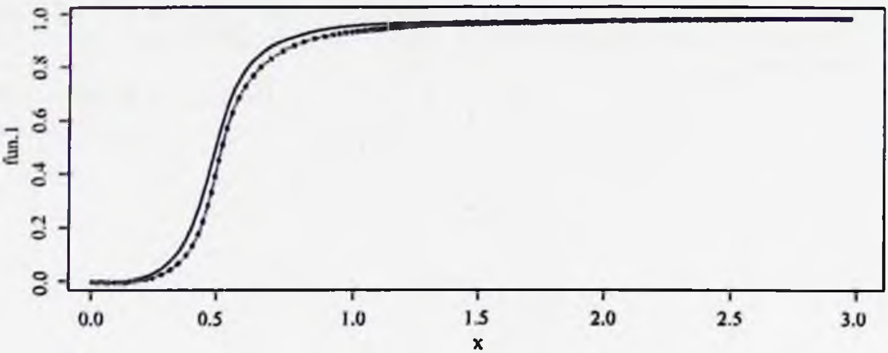

Рис. 4

4. Вывод

Проблема заключалась в том, чтобы выяснить, какое распределение будет лучше соответствовать максимальным и минимальным ценам и диапазону цен. Мы взяли максимальные и минимальные цены на газовых фьючерсах и диапазон этих максимальных и минимальных цен на десятилетнем горизонте, и приспособили их к некоторому семейству распределений, в результате мы увидели, что лог-логистическое распределение лучше приспособлено к максимальным и минимальным ценам, а логнормальное распределение лучше приспособлено к диапазону нашей выборки. Таким образом, при создании моделей газовых фьючерсных рынков важно знать, что наилучший результат можно получить, исходя из предположения, что распределение максимумов и минимумов их цен является лог-логистическим, а распределение диапазона этих цен является логнормальным. В случае максимума выборки, если предположим, что распределение максимумов является лог-логистическим, то какое распределение имеет сама выборка? В этом случае, мы пришли к выводу что она имеет распределение Дагума.

Abstract. The range of a sample is the difference between the maximum and minimum values. The range is the size of the smallest interval which contains all the data and provides an indication of statistical dispersion. In futures market commonly it is given daily high, low, open and close prices data. In this paper we take high and low prices and find distribution will fit them better.

Список литературы

[1] G. Woodbury, An Introduction to Statistics, Cengage Learning (2001).
[2] C. Viljoen, "Elementary Statistics", 2, Pearson Education South Africa, 7 27 (2000).
[3] S. Paik, "On the distribution of the range of a sample", Santa Monica College, 1 – 4 (2015).
[4] A. W. van der Vaart, Asymptotic Statistics, Cambridge University Press, (1998).
[5] M. M. Shoukri, I. U. M. Mian, D. S. Tracy, "Sampling properties of estimators of the Log-Logistic distribution with application to Canadian precipitation data", The Canadian Journal of Statistics, 223 – 236 (1988).
[6] L. Norman, J. S. Kotz, W. Balakrishnan, Continuous Univariate Distributions, 1, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics (2nd ed.), New York (1994).

Поступила 20 ноября 2017

Приложение 1.

Dates	HIGH	LOW	OPEN	CLOSE	OPEN INT	VOLUME
05/06/2017	375.5	372	373.75	373	641997	196484
02/06/2017	374.75	369.5	370.5	372.75	665083	131232
01/06/2017	373.75	367.5	371.5	370.5	675785	177074
31/05/2017	376.5	369	370.25	372	684554	263402
30/05/2017	373.75	366.25	373.5	367	699581	208777
29/05/2017	0	0	0	0		
26/05/2017	374.75	368.75	369.25	374.25	696337	130479
25/05/2017	373	368.75	371	369.25	716797	110606
24/05/2017	371.5	368.75	370	371.25	716807	108549
23/05/2017	375.75	369	374.75	369.5	719678	178136
22/05/2017	377.5	371.75	372.75	375	718167	170819
19/05/2017	373	366	366	372.5	722361	201665
18/05/2017	371.5	364.25	371.5	366	738461	194694
17/05/2017	372.25	366.25	367	371.5	725209	140847
16/05/2017	368.75	365.25	367.25	367.75	735987	115028
15/05/2017	371.75	367.25	370.5	367.75	731454	116961
12/05/2017	371.5	368	369.25	371	733856	92519
11/05/2017	373.75	368.75	373	369.25	732645	132707
10/05/2017	374	366	366.5	373.75	730382	251580
09/05/2017	369.5	365.75	366	366.5	734400	139423
08/05/2017	371.25	365	369.25	366	736221	156532
05/05/2017	373.75	366.75	367.5	370.75	723242	185809
04/05/2017	376	366	374.25	366.5	737554	223621
03/05/2017	375.75	370	372	374.75	726524	160950
02/05/2017	378.25	370.25	376.75	372.25	732658	213540
01/05/2017	379	369.5	371.5	377.5	731288	315785
28/04/2017	369	363.5	367.75	366.5	746911	197958
27/04/2017	371.25	366	366.5	369.25	741373	239075
26/04/2017	374.5	366	371.75	366.75	742047	292659
25/04/2017	374.75	362.5	365.5	371.75	732994	343896
24/04/2017	367	362.5	364	365.5	723336	206756

И т.д.

Приложение 2.

```
library("readxl")
library("fitdistrplus")
library("actuar")

FD <- read_excel("C:/Users/Tigran.Piliposyan/Desktop/Futures_Data.xlsx")
FD_high<-FD$HIGH/1000
FD_high<-FD_high[FD_high!=0]
FD_low<-FD$LOW/1000
FD_low<-FD_low[FD_low!=0]
FD_range<-FD$range/1000
FD_range<-FD_range[FD_range!=0]
high_emp<-plotdist(FD_high, histo = TRUE, demp = TRUE)
low_emp<-plotdist(FD_low, histo = TRUE, demp = TRUE)
range_emp<-plotdist(FD_range, histo = TRUE, demp = TRUE)

CulFrey1<-descdist(FD_high, boot = 1000)
CulFrey2<-descdist(FD_low, boot = 1000)
CulFrey3<-descdist(FD_range, boot = 1000)

fb1 <- fitdist(FD_high, "beta")
fb2 <- fitdist(FD_low, "beta")
fb3 <- fitdist(FD_range, "beta")
fg1 <- fitdist(FD_high, "gamma")
fg2 <- fitdist(FD_low, "gamma")
fg3 <- fitdist(FD_range, "gamma")
fw1 <- fitdist(FD_high, "weibull")
fw2 <- fitdist(FD_low, "weibull")
fw3 <- fitdist(FD_range, "weibull")
fln1 <- fitdist(FD_high, "lnorm")
fln2 <- fitdist(FD_low, "lnorm")
fln3 <- fitdist(FD_range, "lnorm")
fllg1 <- fitdist(FD_high, "llogis")
fllg2 <- fitdist(FD_low, "llogis")
fllg3 <- fitdist(FD_range, "llogis")
fe1<-fitdist(FD_high, "exp")
fe2<-fitdist(FD_low, "exp")
fe3<-fitdist(FD_range, "exp")

par(mfrow = c(2, 2))
plot.legend <- c("Beta "Gamma "Weibull "Lognormal "Loglogistics "Exp")

denscomp(list(fb1, fg1, fw1,fln1,fllg1,fe1), legendtext = plot.legend)
qqcomp(list(fb1, fg1, fw1,fln1,fllg1,fe1), legendtext = plot.legend)
cdfcomp(list(fb1, fg1, fw1,fln1,fllg1,fe1), legendtext = plot.legend)
ppcomp(list(fb1, fg1, fw1,fln1,fllg1,fe1), legendtext = plot.legend)

denscomp(list(fb2, fg2, fw2,fln2,fllg2,fe2), legendtext = plot.legend)
qqcomp(list(fb2, fg2, fw2,fln2,fllg2,fe2), legendtext = plot.legend)
cdfcomp(list(fb2, fg2, fw2,fln2,fllg2,fe2), legendtext = plot.legend)
ppcomp(list(fb2, fg2, fw2,fln2,fllg2,fe2), legendtext = plot.legend)

denscomp(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3), legendtext = plot.legend)
qqcomp(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3), legendtext = plot.legend)
```

```
cdfcomp(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3), legendtext = plot.legend)
ppcomp(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3), legendtext = plot.legend)

gofstat(list(fb1,fg1,fw1,fln1,fllg1,fe1),fitnames = c("Beta "Gamma "Weibull "Lognormal "Loglogistics "Exp"))
bfllg1 <- bootdist(fllg1, niter = 1001)
plot(bfllg1)
bfb1 <- bootdist(fb1, niter = 1001)
plot(bfb1)

gofstat(list(fb2,fg2,fw2,fln2,fllg2,fe2),fitnames = c("Beta "Gamma "Weibull "Lognormal "Loglogistics "Exp"))
bfllg2 <- bootdist(fllg2, niter = 1001)
plot(bfllg2)
bfb2 <- bootdist(fb2, niter = 1001)
plot(bfb2)

gofstat(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3),fitnames = c("Beta "Gamma "Weibull "Lognormal "Loglogistics "Exp"))
bfllg3 <- bootdist(fllg3, niter = 1001)
plot(bfllg3)
bfb3 <- bootdist(fb3, niter = 1001)
plot(bfb3)
```

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 72 – 83.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

А. ПОГОСЯН, Т. БАКАРЯН

Институт Математики НАН Армении[1]
E-mails: *arnak@instmath.sci.am*, *tigran@instmath.sci.am*

Аннотация. Рассматривается интерполяция по модифицированной тригонометрической системе и изучается свойства при разных формах сходимости. Доказывается более хорошая сходимость таких интерполяций, для нечетных функций, по сравнению с классической интерполяцией.

MSC2010 number: 65D05; 42A15.

Ключевые слова: модифицированная тригонометрическая система, интерполяция, улучшение сходимости.

1. Введение

Рассматривается интерполяция по модифицорованной тригонометрической системе

$$\mathcal{H} = \{\cos \pi n x : n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\sin \pi (n - \tfrac{1}{2}) x : n \in \mathbb{N}\}, \tag{1.1}$$

который был предложен Крейном [2] без рассмотрения его свойств. Множество $\mathcal{H}$ является ортогональным базисом в $L_2[-1,1]$, так как состоит из собственных функции оператора Штурма-Лиувилля $\mathcal{L} = -d^2/dx^2$ с граничными условиями $u'(1) = u'(-1) = 0$. Ортогональность и плотность в $L_2[-1,1]$ следует из классической спектральной теории ([1]).

Разложения по модифицированной тригонометрической системе исследованы в ряде работ [3] – [12]. Обозначим через $\mathcal{M}_N(f,x)$ отрезок ряда по модифицированной системе Фурье

$$\mathcal{M}_N(f,x) = \frac{1}{2} f_0^c + \sum_{n=1}^{N} [f_n^c \cos \pi n x + f_n^s \sin \pi (n - \tfrac{1}{2}) x], \tag{1.2}$$

где

$$f_n^c = \int_{-1}^{1} f(x) \cos \pi n x dx, \ \ f_n^s = \int_{-1}^{1} f(x) \sin \pi (n - \tfrac{1}{2}) x dx. \tag{1.3}$$

---

[1]Исследования второго автора профинансированы грантом SCS 16A-1a40.

Легко проверить, что модифицированную тригонометрическую систему можно записать в комплексной форме $\mathcal{H} = \{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$, где

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi_n(x) = \frac{1}{2}\left((-1)^n e^{\frac{i\pi n x}{2}} + e^{-\frac{i\pi n x}{2}}\right),\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Тогда, отрезок ряда по модифицированной системе Фурье можно написать более компактно

$$\mathcal{M}_N(f,x) = \sum_{n=0}^{2N} f_n^m \varphi_n(x), \tag{1.5}$$

где

$$f_n^m = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx. \tag{1.6}$$

Из (1.2) и (1.3) следует, что для четных функций, разложения по модифицированной системе совпадают с разложениями по классической системе

$$\mathcal{H}_{class} = \{\cos \pi n x : n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\sin \pi n x : n \in \mathbb{N}\},\ x \in [-1,1]. \tag{1.7}$$

Далее, модифицированная система можно получить из другого классического базиса $\mathcal{H}^*$ on $[0,1]$

$$\mathcal{H}^* = \{\cos \pi n x : n \in \mathbb{Z}_+\},\ x \in [0,1] \tag{1.8}$$

посредством замены переменной.

Разложения по модифицированной системе имеют лучшую сходимость для нечетных функций по сравнению с классической интерполяцией, так как коэффициенты f_n^s стремятся к нулю быстрее $(O(n^{-2}), n \to \infty)$, чем классические коэффициенты соответствующие функциям $\sin \pi n x$.

Теорема 1.1. [6, 7] *Пусть $f \in C^{2q+2}(-1,1)$, $f^{(2q+2)} \in BV[-1,1]$, $q \geq 0$ и для f выполнены условия для первых q нечетных производных $f^{(2r+1)}(\pm 1) = 0$, $r = 0,\dots,q-1$. Тогда, если $|x| < 1$,*

$$f(x) - \mathcal{M}_N(f,x) = O(N^{-2q-2}),\ N \to \infty,$$

или,

$$f(\pm 1) - \mathcal{M}_N(f,\pm 1) = O(N^{-2q-1}),\ N \to \infty.$$

Теорема 1.2. [6, 11] *Пусть $f \in C^{2q+1}(-1,1)$, $f^{(2q+1)} \in BV[-1,1]$, $q \geq 0$ и для f выполнены условия для первых q нечетных производных $f^{(2r+1)}(\pm 1) = 0$, $r = 0,\dots,q-1$. Тогда,*

$$||f(x) - \mathcal{M}_N(f,x)||_{L_2} = O(N^{-2q-\frac{3}{2}}),\ N \to \infty.$$

Мы видим, что условия для производных

$$f^{(2r+1)}(\pm 1) = 0,\ r = 0, \ldots, q-1 \tag{1.9}$$

являются ключевыми для сходимости разложений по модифицированной системе. Если для функции не выполнены условия для производных, то применение хорошо известного метода полиномиальной коррекции (см. [13 – 16]) поправит условия производных на концах отрезка $x = \pm 1$. Точнее, пусть $f \in C^{2q-1}[-1, 1]$, и обозначим,

$$B_{2k+1}(f) = \left(f^{(2k+1)}(1) + f^{(2k+1)}(-1)\right)(-1)^k, \quad k = 0, \ldots, q-1, \tag{1.10}$$

$$A_{2k+1}(f) = \left(f^{(2k+1)}(1) - f^{(2k+1)}(-1)\right)(-1)^k, \quad k = 0, \ldots, q-1. \tag{1.11}$$

Пусть четные полиномы $P_k(x)$ и нечетные $Q_k(x)$, $k = 0, \ldots, q-1$ удовлетворяют следующим условиям (см. [16])

$$A_{2k+1}(P_j(x)) = \delta_{k,j}, \ B_{2k+1}(Q_j(x)) = \delta_{k,j}, \quad 0 \le k, j \le q-1. \tag{1.12}$$

Несколько первых полиномов имеют следующий вид

$$P_0(x) = \frac{1}{4}x^2, \quad P_1(x) = \frac{1}{48}x^2(x^2-2), \quad Q_0(x) = \frac{1}{2}x, \quad Q_1(x) = \frac{1}{12}x(x^2-3).$$

Пусть F определен следующим образом

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{q-1} A_{2k+1}(f)P_k(x) - \sum_{k=0}^{q-1} B_{2k+1}(f)Q_k(x). \tag{1.13}$$

Тогда, для функции F выполнены условия для первых q нечетных производных. Рассмотрим аппроксимацию

$$\mathcal{M}_{N,q}(f, x) = \mathcal{M}_N(F, x) + \sum_{k=0}^{q-1} A_{2k+1}(f)P_k(x) + \sum_{k=0}^{q-1} B_{2k+1}(f)Q_k(x). \tag{1.14}$$

Тогда, Теоремы 1.1 и 1.2 справедливы для интерполяции $\mathcal{M}_{N,q}(f, x)$ без условия для первых q нечетных производных. Если точные значения производных неизвестны, то их аппроксимация возможна решением системы линейных уравнений (см. [16]). В этой работе, рассматривается интерполяция по модифицированной тригонометрической системе и изучается сходимость в разных формах. Получены точные константы для асимптотических ошибок в L_2-норме, при точечной сходимости при $|x| < 1$ и на концах отрезка $x = \pm 1$. Сравнение с классической интерполяцией показывает лучшую сходимость модифицированных интерполяций для нечетных функций во всех случаях.

2. Модифицированная интерполяция

Собственные функции (1.4) имеют важные свойства дискретной ортогональности. Пусть $x_k = \frac{2k}{2N+1}$, $|k| \le N$ равномерная сетка на отрезке $[-1, 1]$. Легко проверить, что

$$\frac{2}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} \varphi_n(x_k)\overline{\varphi_n}(x_s) = \delta_{k,s}, \ |k|, |s| \le N, \tag{2.1}$$

и

$$\frac{2}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(x_k)\overline{\varphi_m}(x_k) = \delta_{n,m}, \ 0 \le m, n \le 2N. \tag{2.2}$$

Поэтому, сумма

$$\mathcal{I}_N(f, x) = \sum_{n=0}^{2N} \tilde{f}_n^{m} \varphi_n(x), \tag{2.3}$$

где

$$\tilde{f}_n^{m} = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k)\overline{\varphi_n}(x_k) \tag{2.4}$$

точная для базисных функций из $\mathcal{H}$ и интерполирует $f \in C[-1, 1]$ на сетке x_k, $|k| \le N$.

Назовем $\mathcal{I}_N(f, x)$ интерполяцией по модифицированной системе, или просто как модифицированная интерполяция. Если функция f вещественнозначная, то модифицированную интерполяцию можно переписать в следующей форме

$$\mathcal{I}_N(f, x) = \frac{1}{2}\tilde{f}_0^c + \sum_{n=1}^{N} \tilde{f}_n^c \cos \pi n x + \sum_{n=1}^{N} \tilde{f}_n^s \sin \pi (n - \tfrac{1}{2}) x, \tag{2.5}$$

где

$$\tilde{f}_0^c = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k), \quad \tilde{f}_n^c = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k) \cos \pi n x_k, \tag{2.6}$$

и

$$\tilde{f}_n^s = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k) \sin \pi (n - \tfrac{1}{2}) x_k. \tag{2.7}$$

Эта форма более удобна, когда функция f является четной или нечетной на отрезке $[-1, 1]$. Вспомним, что модифицированная интерполяция для четных функций совпадает с классической интерполяцией. Поэтому свойства модифицированной интерполяции достаточно изучить для нечетных функций на $[-1, 1]$.

Далее, метод полиномиальной коррекции можно применить также для модифицированной интерполяции. Тогда,

$$\mathfrak{I}_{N,q}(f,x) = \sum_{n=0}^{N} \check{F}_n^c \cos \pi n x + \sum_{n=1}^{N} \check{F}_n^s \sin \pi (n - \tfrac{1}{2}) x$$
$$+ \sum_{k=0}^{q-1} A_{2k+1}(f) P_k(x) + \sum_{k=0}^{q-1} B_{2k+1}(f) Q_k(x),$$

где

$$\check{F}_n^c = \check{f}_n^c - \sum_{k=0}^{q-1} A_{2k+1}(f) \check{P}_n^c(k), \quad \check{F}_n^s = \check{f}_n^s - \sum_{k=0}^{q-1} B_{2k+1}(f) \check{Q}_n^s(k).$$

Здесь, $\check{P}_n^c(k)$ и $\check{Q}_n^s(k)$ - модифицированные дискретные коэффициенты полиномов $P_k(x)$ и $Q_k(x)$, соответственно. Пусть

$$R_{N,q}(f,x) = f(x) - \mathfrak{I}_{N,q}(f,x). \tag{2.8}$$

Основная задача этой работы - изучение свойств $R_{N,q}(f,x)$ в разных формах сходимости. Раздел 3 рассматривает сходимость в L_2-норме и Раздел 4 изучает точечную сходимость на $[-1,1]$. В каждом случае, результаты для модифицированной интерполяции сравниваются с соответствующими результатами для классической интерполяции

$$\mathfrak{I}_N^{classic}(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} \check{f}_n e^{i\pi n x}, \tag{2.9}$$

где $\check{f}_n = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k) e^{-i\pi n x_k}$.

3. Сходимость в L_2-норме

Здесь, рассматривается сходимость модифицированной интерполяции в L_2-норме. Следующая лемма выявляет связь между модифицированными дискретными и непрерывными коэффициентами.

Лемма 3.1. *Пусть $f \in C^2[-1,1]$ и $f'' \in BV[-1,1]$. Тогда, имеет место следующая формула*

$$\check{f}_n^m = f_n^m + \sum_{j=1}^{\infty} f_{n+(2N+1)2j}^m + (-1)^n \sum_{j=1}^{\infty} f_{-n+(2N+1)2j}^m, \; n = 1, \ldots 2N. \tag{3.1}$$

Доказательство. Согласно точечной сходимости разложений по модифицированной системе (Теорема 1.1 при $q = 0$), имеем

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^m \varphi_j(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{4N+1} f_{j+2r(2N+1)}^m \varphi_{j-2r(2N+1)}(x). \tag{3.2}$$

Согласно $\varphi_{j+2r(2N+1)}(x_k) = \varphi_j(x_k)$, получим

$$\check{f}_n^m = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{4N+1} f_{j+2r(2N+1)}^m \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \varphi_j(x_k)\overline{\varphi_n}(x_k). \tag{3.3}$$

Легко проверить, что для $j = 2N+1, \ldots, 4N+1$

$$\frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \varphi_j(x_k)\overline{\varphi_n}(x_k) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (-1)^n \delta_{4N+2-n,j}, & 1 \le n \le 2N \end{cases} \tag{3.4}$$

Эта оценка, вместе с (2.2) и (3.3), завершает доказательство. □

Мы можем переписать Лемму 3.1 для коэффициентов $\check{f}_n^s$ в упрощенной форме.

Замечание 3.1. *Пусть $f \in C^2[-1,1]$ и $f'' \in BV[-1,1]$. Тогда, имеет место следующее тождество*

$$\check{f}_n^s = f_n^s + \sum_{j \neq 0} f_{n+(2N+1)j}^s, \; n = 1, \ldots, N. \tag{3.5}$$

Следующая теорема описывает сходимость в L_2-норме.

Теорема 3.1. *Пусть f нечетная функция на отрезке $[-1,1]$. Пусть $f \in C^{2q-1}[-1,1]$ и $f^{(2q+1)} \in BV[-1,1]$, $q \ge 0$. Тогда, имеет место следующая оценка*

$$\lim_{N\to\infty} N^{2q+\frac{3}{2}} ||R_{N,q}||_{L_2} = |B_{2q+1}(f)| \frac{\sqrt{a(q)}}{\pi^{2q+2}}, \tag{3.6}$$

где

$$a(q) = \frac{1}{4q+3} + \int_0^1 \left(\sum_{s\neq 0} \frac{(-1)^s}{(2s+x)^{2q+2}} \right)^2 dx. \tag{3.7}$$

Доказательство. Перепишем $R_{N,q}(f,x)$ для нечетных f

$$R_{N,q}(f,x) = \sum_{n=1}^{N} (F_n^s - \check{F}_n^s) \sin \pi(n - \tfrac{1}{2})x + \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^s \sin \pi(n - \tfrac{1}{2})x. \tag{3.8}$$

Согласно ортогональности функций системы $\mathcal{H}$, имеем

$$||R_{N,q}||_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(F_n^s - \check{F}_n^s\right)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} (F_n^s)^2. \tag{3.9}$$

Так как для функции F выполнены условия для первых q нечетных производных (1.9), получим следующую асимптотическую оценку для модифицированных коэффициентов Фурье посредством интегририрования по частям соотсетствующих интегралов

$$F_n^* = B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2q+2}} + o(n^{-2q-2}). \tag{3.10}$$

Тогда, применение Замечания 3.1 приводит к следующей оценке для $n = 1, \dots, N$

$$\tilde{F}_n^* - F_n^* = B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi N)^{2q+2}}\sum_{j\neq 0}\frac{(-1)^j}{(2j+\frac{n}{N})^{2q+2}} + o(N^{-2q-2}). \tag{3.11}$$

Оценки (3.10) и (3.11), вместе с (3.9), завершают доказательство. □

Когда $q = 0$, Теорема 3.1 показывает скорость сходимости порядка $O(N^{-\frac{3}{2}})$ в L_2-норме. Классическая интерполяция имеет порядок сходимости $O(N^{-\frac{1}{2}})$ в L_2-норме для нечетных функций на $[-1, 1]$ (см. [17]). Тогда, улучшение имеет порядок $O(N)$.

4. Точечная сходимость

В этом разделе рассматривается точечная сходимость модифицированных интерполяций на $|x| < 1$ и на концах отрезка $x = \pm 1$. Сначала докажем несколько вспомогательных лемм. Мы часто будем пользоваться свойствами следующих чисел

$$\omega_{p,m} = \sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}(-1)^s s^m, \tag{4.1}$$

которые связаны с числами Стирлинга второго рода ([18]). В [15] показано, что

$$\omega_{p,m} = 0,\ 0 \leq m < p,\ \omega_{p,p} = (-1)^p p!,\ \omega_{p,p+1} = (-1)^p\frac{p(p+1)!}{2}. \tag{4.2}$$

Пусть $c = \{c_n\}$ последовательность комплексных чисел. Через $\Delta_n^p(c)$ обозначим следующие конечные разности

$$\Delta_n^p(c) = \sum_{s=0}^{2p}\binom{2p}{s}c_{n+p-s}, \quad p \geq 0. \tag{4.3}$$

Пусть

$$Q_n(m) = \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2m+2}}, \quad Q(m) = \{Q_n(m)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{4.4}$$

Из (1.13) и асимптотического разложения (3.10) следует, что числа $Q_n(m)$ являются модифицированными коэффициентами Фурье полиномов $Q_m(x)$. Далее, обозначим $\tilde{Q}(m) = \{\tilde{Q}_n^*(m)\}_{n=1}^N$, где $\tilde{Q}_n^*(m)$ дискретные модифицированные коэффициенты функции $Q_m(x)$.

Лемма 4.1. *Для любого $p \geq 0$ и $m \geq 0$ имеет место следующая оценка*

$$\Delta_n^p(Q(m)) = \frac{(-1)^{n+p+1}(2m+2p+1)!}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2m+2}(n-\frac{1}{2})^{2p}(2m+1)!} + O(n^{-2m-2p-3}),\ n \to \infty. \tag{4.5}$$

Доказательство. Согласно определению $\Delta_n^p(Q(m))$, имеем

$$\Delta_n^p(Q(m)) = \sum_{s=0}^{2p} \binom{2p}{s} Q_{n+p-s}(m) = \frac{(-1)^{n+p+1}}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2m+2}} \sum_{s=0}^{2p} \frac{\binom{2p}{s}(-1)^k}{\left(1+\frac{p-k}{n-\frac{1}{2}}\right)^{2m-2}}$$
$$= \frac{(-1)^{n+p+1}}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2m+2}} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+2m+1}{2m+1} \frac{(-1)^s}{(n-\frac{1}{2})^s} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (-1)^j p^{s-j} \omega_{2p,j}, \tag{4.6}$$

где $\omega_{2p,j}$ определены формулой (4.1). Это завершает доказательство согласно (4.2). □

Лемма 4.2. *Для любого $p \geq 0$ и $m \geq 0$ имеет место следующая оценка*

$$\Delta_n^p(\tilde{Q}(m) - Q(m)) = \frac{(-1)^{n+p+1}(2m+2p+1)!}{(\pi N)^{2m+2} N^{2p}(2m+1)!} \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j}{(2j+\frac{n}{N})^{2m+2p+2}}$$
$$+ O(N^{-2m-2p-3}),\ n = 1, \ldots, N,\ N \to \infty. \tag{4.7}$$

Доказательство. Согласно Замечанию 3.1, имеем

$$\Delta_n^p(\tilde{Q}(m) - Q(m)) = \sum_{j \neq 0} \Delta^p_{n+(2N+1)j}(Q(m))$$
$$= \frac{(-1)^{n+p+1}}{(\pi N)^{2m+2}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j}{(2j+\frac{n}{N})^{2m+2}} \frac{1}{\left(1+\frac{j+p-k-\frac{1}{2}}{N(2j+\frac{n}{N})}\right)^{2m+2}}$$
$$= \frac{(-1)^{n+p}}{(\pi N)^{2m+2}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{N^t} \binom{2m+1+t}{2m+1} \times \sum_{s=0}^{t} \binom{t}{s} (-1)^s \omega_{2p,s} \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j (p+j-\frac{1}{2})^{t-s}}{(2j+\frac{n}{N})^{2m+2}},$$

где $\omega_{2p,s}$ определены согласно (4.1). Это завершает доказательство теоремы согласно (4.2). □

Лемма 4.3. *Для любого $m \geq 0$ имеет место следующая оценка*

$$\Delta_N^p(\tilde{Q}(m)) = \frac{(-1)^{N+p}(2m+2p+2)!}{(\pi N)^{2m+2} N^{2p+1}(2m+1)!} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j (j-\frac{1}{2})}{(2j+1)^{2m+2p+3}}$$
$$+ O(N^{-2m-2p-4}), \quad N \to \infty. \tag{4.8}$$

Доказательство. Согласно замечанию 3.1, имеем

$$\Delta_N^p(\dot{Q}(m)) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta_{N+(2N+1)j}^p(Q(m)) =$$

$$\frac{(-1)^{N+p+1}}{(\pi N)^{2m+2}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{N^t} \binom{2m+1+t}{2m+1} \sum_{s=0}^{t} \binom{t}{s} (-1)^s \omega_{2p,s} \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j (p+j-\frac{1}{2})^{t-s}}{(2j+1)^{2m+2}},$$

где $\omega_{2p,s}$ определены по (4.1). Это завершает доказательство согласно (4.2) и

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^{2m+2}} = 0, \quad m = 0, 1, \dots. \tag{4.9}$$

Следующая теорема демонстрирует точечную сходимость модифицированной интерполяции внутри интервала $[-1, 1]$.

Теорема 4.1. *Пусть f нечетная функция на отрезке $[-1, 1]$. Пусть $f \in C^{2q+3}[-1, 1]$ и $f^{(2q+3)} \in BV[-1, 1]$, $q \geq 0$. Тогда, имеет место следующая оценка на $|x| < 1$*

$$R_{N,q}(f, x) = B_{2q+1}(f) \frac{(-1)^N}{N^{2q+3}} \frac{\pi |E_{2q+2}|}{2^{2q-5}(2q+1)!} \frac{\sin \pi(N+\frac{1}{2})x}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} + o(N^{-2q-3}), \ N \to \infty,$$

где E_k - числа Эйлера.

Доказательство. Пусть $f_{-n}^s = -f_{n+1}^s$, $\check{f}^s{}_{-n} = -\check{f}_{n+1}^s$, и перепишем ошибку интерполяции в более удобной форме

$$R_{N,q}(f, x) = \frac{1}{2i} \sum_{n=-N+1}^{N} F_n^s - \check{F}_n^s) e^{i\pi(n-\frac{1}{2})x} + \frac{1}{2i} \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^s e^{i\pi(n-\frac{1}{2})x}$$
$$+ \frac{1}{2i} \sum_{n=-\infty}^{-N} F_n^s e^{i\pi(n-\frac{1}{2})x}.$$

Далее, применяя преобразование Абеля, получим

(4.10)
$$R_{N,q}(f, x) = \frac{1}{2(1+\cos \pi x)} \left(\check{F}_{N+1}^s \sin \pi(N-\tfrac{1}{2})x - \check{F}_N^s \sin \pi(N+\tfrac{1}{2})x \right)$$
$$+ \frac{1}{4(1+\cos \pi x)^2} \left(\Delta_{N+1}^1(\check{F}^s) \sin \pi(N-\tfrac{1}{2}) - \Delta_N^1(\check{F}^s) \sin \pi(N+\tfrac{1}{2}) \right)$$
$$+ \frac{e^{-i\frac{\pi x}{2}}}{8(1+\cos \pi x)^2} \left(\sum_{n=1}^{N} \Delta_n^2(F^s - \check{F}^s) e^{i\pi n x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^2(F^s) e^{i\pi n x} \right)$$
$$+ \frac{e^{i\frac{\pi x}{2}}}{8(1+\cos \pi x)^2} \left(\sum_{n=-N}^{-1} \Delta_n^2(F^s - \check{F}^s) e^{i\pi n x} + \sum_{n=-\infty}^{-N-1} \Delta_n^2(F^s) e^{i\pi n x} \right).$$

Согласно следующей асимптотической оценке

$$F_n^s = \sum_{m=q}^{q+1} B_{2m+1}(f)Q_n(m) + o(n^{-2q-4}),\ n \to \infty, \tag{4.11}$$

получим

$$\Delta_n^p(F^s) = \sum_{m=q}^{q+1} B_{2m+1}(f)\Delta_n^p(Q(m)) + o(n^{-2q-4}),\ n \to \infty.$$

Теперь, согласно лемме 4.1, имеем $\Delta_n^2(F^s) = o(n^{-2q-4})$, и бесконечные суммы в правой части (4.10) имеют порядок $O(N^{-2q-3})$. Применяя снова (4.11), напишем

$$\Delta_n^2(\tilde{F}^s - F^s) = \sum_{m=q}^{q+1} B_{2m+1}(f)\Delta_n^2(\tilde{Q}(m) - Q(m)) + o(N^{-2q-4}), \tag{4.12}$$

и согласно лемме 4.2, получим

$$\Delta_n^2(F^s - \tilde{F}^s) = o(N^{-2q-4}), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N. \tag{4.13}$$

Поэтому, конечные суммы в правой части (4.10) имеют порядок $o(N^{-2q-3})$.

Из леммы 4.3 следует, что

$$\Delta_N^1(\tilde{F}^s) = O(N^{-2q-3}),\ \Delta_{N+1}^1(\tilde{F}^s) = O(N^{-2q-3}). \tag{4.14}$$

Все это приводит к следующей оценке

(4.15)

$$R_{N,q}(f,x) = \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi x}{2}}\left(\tilde{F}_{N+1}^s \sin\pi(N-\tfrac{1}{2})x - \tilde{F}_N^s \sin\pi(N+\tfrac{1}{2})x\right) + O(N^{-2q-3}).$$

Согласно Лемме 4.3, получаем

$$\tilde{F}_N^s = B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^N(2q+2)}{(\pi N)^{2q+2}N}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j(j-\frac{1}{2})}{(2j+1)^{2m+3}} + O(N^{-2q-3}). \tag{4.16}$$

С другой стороны

$$\tilde{F}_{N+1}^s = \frac{2}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} f(x_k)\sin\pi k = 0. \tag{4.17}$$

Тогда,

$$R_{N,q}(f,x) = B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^{N+1}(q+1)}{2\pi^{2q+2}N^{2q+3}}\frac{\sin\pi(N+\frac{1}{2})x}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}$$
$$\times \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^j(j-\frac{1}{2})}{(2j+1)^{2q+3}} + O(N^{-2q-3}),$$

что завершает доказательство. □

Когда $q = 0$, Теорема 4.1 показывает скорость сходимости порядка $O(N^{-3})$ при $N \to \infty$ для нечетной функции. Классическая интерполяция (см. [17]) имеет порядок сходимости $O(N^{-1})$ для сетки $x_k = 2k/(2N+1)$ и сходимость порядка $O(N^{-2})$ для оптимальной сетки $x_k = (2k \pm 1)/(2N+1)$. Поэтому, имеем улучшение сходимости порядка $O(N)$ при $N \to \infty$.

Следующая теорема изучает сходимость модифицированной интерполяции на концах отрезка $x = \pm 1$.

Теорема 4.2. *Пусть f нечетная функция на отрезке $[-1,1]$. Пусть $f \in C^{2q+2}[-1,1]$ и $f^{(2q+2)} \in BV[-1,1]$, $q \geq 0$. Тогда, имеет место следующая оценка*

$$R_{N,q}(f, \pm 1) = \pm B_{2q+1}(f) \frac{(-1)^{N+1}}{N^{2q+1}} \frac{|E_{2q}|}{2^{2q+1}\pi(2q+1)!} + o(N^{-2q-1}), \quad N \to \infty,$$

где E_k - k-ое число Эйлера.

Доказательство. Согласно (3.8), получим

$$R_{N,q}(f, \pm 1) = \sum_{n=1}^{N} (F_n^s - \tilde{F}_n^s)(-1)^{n+1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^s (-1)^{n+1}. \tag{4.18}$$

Используя следующую асимптотическую оценку для модифицированных коэффициентов Фурье

$$F_n^s = B_{2q+1}(f) Q_n(q) + o(n^{-2q-2}), \quad n \to \infty, \tag{4.19}$$

и применяя замечание 3.1 для $n = 1, \dots, N$ и $N \to \infty$, получаем

$$\tilde{F}_n^s - F_n^s = \frac{B_{2q+1}(f)(-1)^{n+1}}{(\pi N)^{2q+2}} \sum_{j \neq 0} (-1)^j \frac{1}{(2j + \frac{n}{N})^{2q+2}} + o(N^{-2q-2}). \tag{4.20}$$

Формула (4.18), вместе с (4.19) и (4.20), приводит к следующей оценке

$$R_{N,q}(f, \pm 1) = \pm B_{2q+1}(f) \frac{(-1)^N}{\pi^{2q+2} N^{2q+1}}$$
$$\times \left(\frac{1}{2q+1} - \int_0^1 \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j}{(2j+x)^{2q+2}} dx \right) + o(N^{-2q-1}),$$

что завершает доказательство. □

Когда $q = 0$, Теорема 4.2 показывает сходимость порядка $O(N^{-1})$. В этом случае, так как $f(1) \neq f(-1)$, классическая интерполяция расходится на концах отрезка. Поэтому, модифицированная интерполяция имеет более хорошую сходимость и улучшение имеет порядок $O(N)$.

Abstract. We consider interpolations by the modified trigonometric system and explore convergence in different frameworks. We prove better convergence of such interpolations for odd functions compared to the interpolations with the classical trigonometric system.

Список литературы

[1] E. B. Davies, Spectral Theory and Differential Operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 42 (1995).

[2] M. G. Krein, "On a special class of differential operators", Doklady AN USSR, 2, no. 273, 345 – 349 (1935).

[3] A. Iserles, S. P. Nørsett, "From high oscillation to rapid approximation. I", Modified Fourier expansions, IMA J. Numer. Anal., IMA Journal of Numerical Analysis, 28, no. 4, 862 – 887 (2008).

[4] A. Iserles, S. P. Nørsett, "From high oscillation to rapid approximation. III", Multivariate expansions, IMA J. Numer. Anal., IMA Journal of Numerical Analysis, 29, no. 4, 882 – 916 (2009).

[5] D. Huybrechs, A. Iserles, S. P. Nørsett, "From high oscillation to rapid approximation. IV", accelerating convergence, IMA J. Numer. Anal., IMA Journal of Numerical Analysis, 31, no. 2, 442 – 468 (2011).

[6] B. Adcock, "Univariate modified Fourier methods for second order boundary value problems", BIT, BIT. Numerical Mathematics, 49, no. 2, 249 – 280 (2009).

[7] S. Olver, "On the convergence rate of a modified Fourier series", Mathematics of Computation, 78, no. 267, 1629 – 1645 (2009).

[8] B. Adcock, "Multivariate modified Fourier series and application to boundary value problems", Numerische Mathematik, 115, no. 4, 511 – 552 (2010).

[9] B. Adcock, "Convergence acceleration of modified Fourier series in one or more dimensions", Mathematics of Computation, 80, no. 273, 225 – 261 (2011).

[10] B. Adcock, Modified Fourier expansions: theory, construction and applications, Trinity Hall, University of Cambridge, July (2010).

[11] T. Bakaryan, "On a convergence of modified Fourier-Pade approximations", Armen. J. Math., 8, no. 2, 119 – 143 (2016).

[12] T. Bakaryan, "On a convergence of rational approximations by the modified Fourier basis", Armen. J. Math., 9, no. 2, 68 – 83 (2017).

[13] A. Krylov, On Approximate Calculations. Lectures delivered in 1906, Tipolitography of Birkenfeld, St. Petersburg (1907).

[14] C. Lanczos, Discourse on Fourier Series, Oliver and Boyd, Edinburgh (1966).

[15] A. Poghosyan, "Asymptotic behavior of the Krylov-Lanczos interpolation, Analysis and Applications, 7, no. 2, 199 – 211 (2009).

[16] B. Adcock, Convergence Acceleration of Fourier-like Series in One or More Dimensions, Technical report NA2008/11, DAMTP, University of Cambridge (2008).

[17] A. Poghosyan, "Asymptotic estimates for the Krylov-Lanczos interpolation with shifted nodes, Analysis and Applications, 5, no. 2, 105 – 122 (2014).

[18] J. Riordan, Combinatorial Identities, John Wiley & Sons Inc., New York (1968).

Поступила 10 декабря 2017

Известия НАН Армении. Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 84 - 96.

ON THE PARAMETERS ESTIMATORS FOR A DISCRETE ANALOG OF THE GENERALIZED EXPONENTIAL DISTRIBUTION

D. FARBOD

Quchan University of Technology, Quchan, Iran[1]
E-mails: *d.farbod@qiet.ac.ir*, *d.farbod@gmail.com*

Abstract. The present paper is devoted to the estimation of parameters of the so-called *Discrete Analog of the Generalized Exponential Distribution* (DGED, in short), introduced by Nekoukhou et al. (Commun. Statist. Th. Meth., 2012). We derive conditions under which a solution for the system of likelihood equations exists and coincides with the maximum likelihood (ML) estimators of the DGED. An approach for approximate computation of the ML estimations of the unknown parameters, based on Fisher's accumulation method, is presented. A simulation study is also illustrated. Some statistical properties for two special cases of the DGED are provided. We also propose a linear regression-type model for estimation of the parameters. Finally, we fit the DGED to a real data set and the results we compare with those of two other discrete distributions.

MSC2010 numbers: 62F10, 62F12, 62J05, 62P10.

Keywords: Asymptotic properties; DGED, Fisher's accumulation method; Markov Chain Monte Carlo (MCMC); ML; Parametric function; Regression-type model.

1. Introduction

In this paper we consider the problem of estimation of parameters of the so-called *Discrete Analog of the Generalized Exponential Distribution* (DGED, in short), introduced by Nekoukhou et al. [10]. The DGED, which is a two-parameter discrete probability distribution, has some interesting statistical properties and is more flexible for modeling data compared with some well-known discrete distributions. It is of interest to study statistical inferences for this model. However, it should be noted that, the lack of the closed formulas for probability mass function (pmf) and cumulative distribution function (cdf) is a drawback to the use of DGED.

Nekoukhou et al. [10] considered some distributional properties of DGED, obtained ML estimators for the parameters with the help of Newton-Raphson algorithm, and established some properties for two special cases of DGED. In addition, they applied DGED for modeling rank frequencies of graphemes in the Slavic language (Slovene).

[1]This work was supported by Quchan University of Technology under the Grant # 9463.

The main purpose of this paper is to consider statistical inferences for DGED, including estimation of the unknown parameters by using ML method, investigation of statistical properties for some special cases, as well as, an application of the DGED to fit a real data set in biology and comparison with two other discrete distributions.

Model DGED. The probability mass function of DGED is given by the following formula (see [10]):

$$f_\theta(x) = \frac{p^x(1-p^x)^{\alpha-1}}{c_\theta}, \quad x = 1, 2, ..., \tag{1.1}$$

where

$$c_\theta = \sum_{y=1}^{\infty} p^y(1-p^y)^{\alpha-1} \tag{1.2}$$

is the *normalization* factor, $\theta = (p, \alpha)$ is an unknown parameter, and

$$\theta \in \Theta := \{\theta = (p, \alpha) : \ 0 < p < 1, \alpha > 0\}.$$

Throughout the paper, we will use the following notation. By $X^n = (X_1, ..., X_n)$ we will denote a random sample (independent and identically distributed random variables) from the distribution of a random variable X with the distribution given by (1.1), the corresponding observed sample (a realization) will be denoted by $x^n = (x_1, ..., x_n)$. Also, we will use the following notation:

$$\begin{cases} k(x;\theta) = \frac{1}{p}x - (\alpha-1)\frac{xp^{x-1}}{1-p^x}, \quad h(x;\theta) = \ln(1-p^x), \\ \eta(x;\theta) = \left(\frac{xp^{x-1}}{1-p^x}\right)^2, \quad \delta(x;\theta) = \frac{xp^{x-1}}{1-p^x}, \\ \psi(x;\theta) = \frac{1}{p^2}x + (\alpha-1)\frac{x(x-1)p^{x-2}}{1-p^x}. \end{cases}$$

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we derive conditions under which a solution for the system of likelihood equations exists and coincides with the maximum likelihood (ML) estimators of model (1.1). In Section 3, we describe an approach for approximate computation of the ML estimators of unknown parameters for model (1.1), based on Fisher's accumulation method, supported with a simulation study. Section 4 contains some statistical properties for two important special cases of DGED. In Section 5, for a special case of DGED when p is known, we establish some properties of the estimator for a parametric function and employ a linear regression-type model to obtain an estimator for the parameter α. In Appendix, some applications of DGED are provided.

2. ML ESTIMATORS

In this section, we derive conditions under which a solution for the system of likelihood equations exists and coincides with the maximum likelihood (ML) estimators of the model (1.1).

Theorem 2.1. *The ML estimator of the parameter $\theta = (p, \alpha)$ of the model (1.1) based on a sample X^n is determined from the following system of moment equations:*

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\theta\big[k(\xi;\theta)\big] = \overline{k^n(\theta)} \\ E_\theta\big[h(\xi;\theta)\big] = \overline{h^n(\theta)} \end{array} \right. \tag{2.1}$$

where $\overline{k^n(\theta)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n k(x_i;\theta)$ *and* $\overline{h^n(\theta)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(x_i;\theta)$.

Proof. By (1.1) for the logarithm of likelihood function we have

(2.2)
$$l(X^n;\theta) = \ln L(X^n;\theta) = \ln \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i) = \Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) \ln p + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n \ln\big(1-p^{X_i}\big) - n \ln c_\theta.$$

So, the ML estimator of the parameter θ is a solution of the estimation equation:

$$\frac{\partial l(X^n;\theta)}{\partial \theta_i} = 0, \; i = 1, 2, \;\; \theta_1 = p, \; \theta_2 = \alpha. \tag{2.3}$$

Differentiating (2.2) with respect to parameter p, we obtain

$$\frac{\partial l(X^n;\theta)}{\partial p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n X_i - (\alpha-1)\sum_{i=1}^n \frac{X_i\, p^{X_i - 1}}{(1-p^{X_i})} - n\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial c_\theta}{\partial p}, \tag{2.4}$$

where

$$\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial c_\theta}{\partial p} = E_\theta\big[k(\xi;\theta)\big]. \tag{2.5}$$

From (2.3) - (2.5) we obtain the first equality in (2.1).

Next, differentiating (2.2) with respect to parameter α, we get

$$\frac{\partial l(X^n;\theta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \ln(1-p^{X_i}) - n\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial c_\theta}{\partial \alpha}, \tag{2.6}$$

where

$$\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial c_\theta}{\partial \alpha} = E_\theta\big[h(\xi;\theta)\big]. \tag{2.7}$$

From (2.3), (2.6) and (2.7) we obtain the second equality in (2.1). Theorem 2.1 is proved.

Now we proceed to prove that the solution $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_n = (\widehat{\theta}_i^n)_{i=1,2}$ of the system (2.2) (if it exists) is the ML estimator of the unknown parameter θ. To this end, we introduce the matrix of the second derivatives:

$$\widehat{Q}_{ij}^n = Q_{ij}^n(\widehat{\theta}), i, j = 1, 2, \quad Q_{ij}^n(\widehat{\theta}) = \frac{\partial^2 l(X^n;\theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\Big|_{\theta=\widehat{\theta}},$$

and show that the matrix $\widehat{Q}^n = (\widehat{Q}^n_{i,j})^2_{i,j=1}$ is negative definite. We first prove two lemmas.

Lemma 2.1. *Suppose that the solution $\widehat{\theta}$ of the system (2.2) (if it exists) satisfies the following conditions:*

$$\text{(2.8)}\qquad \begin{cases} E_\theta\Big[\eta(\xi;\theta)\Big] = \overline{\eta^n(\theta)} \\ E_\theta\Big[\psi(\xi;\theta)\Big] = \overline{\psi^n(\theta)} \\ E_\theta\Big[\delta(\xi;\theta)\Big] = \overline{\delta^n(\theta)} \end{cases}$$

where $\overline{\eta^n(\theta)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \eta(x_i;\theta)$, $\overline{\psi^n(\theta)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi(x_i;\theta)$ *and* $\overline{\delta^n(\theta)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta(x_i;\theta)$. *Then the elements of the matrix $\widehat{Q}_n$ are given by*

$$\text{(2.9)}\qquad \begin{cases} \widehat{Q}^n_{11} = -n\ Var_\theta\Big(k(\xi;\theta)\Big) \\ \widehat{Q}^n_{12} = \widehat{Q}^n_{21} = -n\ Cov_\theta\Big(k(\xi;\theta), h(\xi;\theta)\Big) \\ \widehat{Q}^n_{22} = -n\ Var_\theta\Big(h(\xi;\theta)\Big). \end{cases}$$

Proof. From (2.4) and (2.6) we obtain

$$\begin{aligned} Q^n_{11} &= \frac{\partial^2 l(X^n;\theta)}{\partial p^2} = -n\Big(\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial^2 c_\theta}{\partial p^2} - \Big(\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial c_\theta}{\partial p}\Big)^2\Big) - n\ \overline{\psi^n(\theta)} - n\ (\alpha-1)\ \overline{\eta^n(\theta)}, \\ Q^n_{12} &= Q^n_{21} = \frac{\partial^2 l(X^n;\theta)}{\partial\alpha\partial p} = \frac{\partial^2 l(X^n;\theta)}{\partial p\partial\alpha} = -n\Big(\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial^2 c_\theta}{\partial\alpha\partial p} - \big(\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial c_\theta}{\partial\alpha}\big)\big(\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial c_\theta}{\partial p}\big)\Big) - n\ \overline{\delta^n(\theta)}, \\ Q^n_{22} &= \frac{\partial^2 l(X^n;\theta)}{\partial\alpha^2} = -n\Big(\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial^2 c_\theta}{\partial\alpha^2} - \big(\frac{1}{c_\theta}\frac{\partial c_\theta}{\partial\alpha}\big)^2\Big). \end{aligned}$$

After some algebra and simplification we get

$$\begin{aligned} Q^n_{11} &= -n\ Var_\theta\Big(k(\xi;\theta)\Big) + n(\alpha-1)\Big(E_\theta\Big[\eta(\xi;\theta)\Big] - \overline{\eta^n(\theta)}\Big) + n\Big(E_\theta\Big[\psi(\xi;\theta)\Big] - \overline{\psi^n(\theta)}\Big), \\ Q^n_{12} &= Q^n_{21} = -n\ Cov_\theta\Big(k(\xi;\theta), h(\xi;\theta)\Big) + n\Big(E_\theta\Big[\delta(\xi;\theta)\Big] - \overline{\delta^n(\theta)}\Big), \\ Q^n_{22} &= -n\ Var_\theta\Big(h(\xi;\theta)\Big). \end{aligned}$$

Since by assumption the solution $(\widehat{p},\widehat{\alpha})$ of the system (2.1) satisfies the conditions (2.8), the result follows. Lemma 2.1 is proved.

Lemma 2.2. *Assume that the conditions in* (2.8) *are satisfied. Then, the matrix $\widehat{Q}^n$ with elements given by* (2.9) *is negative definite.*

Proof. It is enough to show that $\widehat{Q}^n_{11} < 0$ and $\det(\widehat{Q}^n) > 0$. In view of the first equality in (2.9), it is obvious that $\widehat{Q}^n_{11} < 0$. To establish that $\det(\widehat{Q}^n) > 0$, we write $\det(\widehat{Q}^n) = \widehat{Q}_{11}\widehat{Q}_{22} - (\widehat{Q}_{12})^2$. Now the inequality $\det(\widehat{Q}^n) > 0$ follows from (2.9) and Cauchy-Schwarz's inequality. Lemma 2.2 is proved.

As an immediate consequence of Lemmas 2.1 and 2.2 we have the following result.

Theorem 2.2. *If the solution of the system* (2.1) *satisfies the condition* (2.8), *then it coincides with the ML estimator of the parameter θ.*

3. Approximate computation of ML estimators

In Section 2, we have shown that the ML estimators of the unknown parameters of the model (1.1) coincide with the solution of the system (2.1). However, it is not easy to obtain a closed form for the solution (2.1). In this section, we propose an approach for approximate computation of the ML estimators by using Fisher's accumulation method. We refer the readers to [7] (p. 88) for details concerning Fisher's accumulation method.

Let $\theta(0) = \big(p(0), \alpha(0)\big)$ be an initial value of the parameter $\theta = (p, \alpha)$. Following [3], for $z = 0, 1, 2, \ldots$ we can use a recurrent formula to obtain $(z+1)^{th}$ approximation as follows:

$$\theta_j(z+1) = \theta_j(z) + \frac{\Upsilon_j(\theta(z))}{n \det I(\theta(z))}, \quad j = 1, 2; \quad \theta_1(0) = p(0), \ \theta_2(0) = \alpha(0), \tag{3.1}$$

where

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} I_{11}(\theta) & I_{12}(\theta) \\ I_{21}(\theta) & I_{22}(\theta) \end{pmatrix}$$

is the Fisher's information matrix for one observation X_1 (put $X_1 = x$ and $n = 1$), and also

$$\Upsilon_1(\theta) = \begin{vmatrix} U_1(\theta) & I_{12}(\theta) \\ U_2(\theta) & I_{22}(\theta) \end{vmatrix}, \qquad \Upsilon_2(\theta) = \begin{vmatrix} I_{11}(\theta) & U_1(\theta) \\ I_{21}(\theta) & U_2(\theta) \end{vmatrix},$$

where $U_1(\theta) = \frac{\partial l(X^n;\theta)}{\partial p}$ and $U_2(\theta) = \frac{\partial l(X^n;\theta)}{\partial \alpha}$ are *contribution* functions, given by

$$U_1(\theta) = -n\Big[E_\theta[k(\xi;\theta)] - \overline{k^n(\theta)}\Big], \quad U_2(\theta) = -n\Big[E_\theta[h(\xi;\theta)] - \overline{h^n(\theta)}\Big].$$

Using formula (3.1), we introduce the following iterative algorithm (cf. [3]).

Algorithm.

1. Generate data based on Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method.
2. Use (3.1) to calculate $\theta_j(z)$ for $j = 1, 2$; $z = 0, 1, 2, \ldots$.
3. If $|\theta_j(z+1) - \theta_j(z)| < \varepsilon$ (where ε is a small positive number), then $\theta_j(z+1) = \widehat{\theta}$ is the desired ML estimator, otherwise go to the step 2.

Simulation. In order to support the above stated theoretical results, we propose a simulation study. We apply the MCMC method to generate random samples from the model (1) (for details about MCMC, see [6]). To simplify the numerical calculations, we consider a truncated version of the random variable X, by restricting the possible values to 100 (cf. [3]).

Let $\theta_0 = (p = 0.6, \alpha = 3)$ be the true value of the parameter θ. We do simulation for 1000 times to illustrate the behavior of the ML estimators. Namely, for simulation study, we consider $M = 1000$ (M is the number of iteration), $N = 50, 100, 200$ (N is the sample size), and $\varepsilon = 0.0005$.

By the above described Algorithm and with the help of the *statistical software R*, the point estimates (means) and the mean square errors (MSE) are calculated and tabulated in Tables 1-3.

Table 1. For $N = 50$

	Mean	MSE
$p = 0.6$	0.9668756	0.1345977
$\alpha = 3$	3.24448654	17.6000100
Iteration	131	—

Table 2. For $N = 100$

	Mean	MSE
$p = 0.6$	0.8080627	0.04329008
$\alpha = 3$	1.1838108	3.29854332
Iteration	54	

Table 3. For $N = 200$

	Mean	MSE
$p = 0.6$	0.7667197	0.02779546
$\alpha = 3$	1.0895628	2.77626936
Iteration	18	—

From Tables 1-3, it is easily seen that with increasing sample size the MSE decreases.

4. Special case I

Nekoukhou et al. [10] showed that in the special cases where $\alpha = 2$ or $\alpha = 3$, the model (1.1) possesses some important statistical properties. Specifically, they proved that under some regularity conditions the ML estimators of the parameters of the model (1.1) are consistent and asymptotically normal.

In this section, we obtain more interesting properties of the estimators for these special cases. For simplicity, we consider the case $\alpha = 3$ (the case $\alpha = 2$ can be treated similarly), and denote $\theta = p := (p, 3)$. To state the main result of this section (Theorem 4.1), we first list the regularity conditions (cf. [2]).

C1. There exists a compact subset $\overline{H}$ of the parametric set Θ, which contains an open neighborhood of the true value p_0 of the parameter p;

C2. The distributions $\mathbb{P}_p$ are identifiable, that is, $f_{p_1}(x) \neq f_{p_2}(x)$ for all $p_1 \neq p_2$ $(p_1, p_2 \in \overline{H})$ and for all $x \in Supp\ \mathbb{P}_p = \{x : f_p(x) > 0\}$;

C3. The function $f_p(x)$ is continuous in $p \in \Theta$, and has continuous first and second order derivatives in $p \in \overline{H}$;

C4. The distributions $\mathbb{P}_p$ have common support, namely the set $Supp\ \mathbb{P}_p$ does not depend on p;

C5. Put $V(x;p) := \frac{\partial^2 \ln f_p(x)}{\partial p^2}$. Then for $p \in \overline{H}$ and $x \in Supp\, \mathbb{P}_p$, there exists a function $G(x)$ (independent of p) such that $\left|V(x;p)\right| \leq G(x)$, and $E_p[G(X_1)] < \infty$;

C6. The Fisher information $I(p) = E_p\left[\frac{\partial \ln f_p(X_1)}{\partial p}\right]^2$ is continuous in p and satisfies the condition $0 < I(p) < \infty$.

Proposition 4.1. *The regularity conditions C1-C6 are satisfied for the model (1.1) with $\alpha = 3$.*

Proof. The conditions C1 – C4 and C6 can easily be verified. So, we have to verify only C5.

Since $\overline{H}$ is a compact set and $V(x;p)$ is continuous in $p \in \overline{H}$, for a fixed x and $p \in \overline{H}$ it can be concluded that $|V(x;p)|$ is bounded by a function $G(x)$, which itself is bounded for any fixed point x. We examine the behavior of $G(x)$ for sufficiently large x. We have

$$V(x;p) = \frac{f_p''(x)}{f_p(x)} - \left(\frac{f_p'(x)}{f_p(x)}\right)^2, \tag{4.1}$$

where

(4.2)

$$f_p'(x) = \frac{\partial f_p(x)}{\partial p} = \frac{xp^{x-1}(1-p^x)^2}{c_p} - \frac{2xp^x p^{x-1}(1-p^x)}{c_p} - \frac{c_p'}{(c_p)^2} p^x(1-p^x)^2, \quad c_p' = \frac{\partial c_p}{\partial p},$$

and

(4.3)

$$f_p''(x) = \frac{\partial^2 f_p(x)}{\partial p^2} = \frac{x(x-1)p^{x-2}(1-p^x)^2}{c_p} - \frac{2x^2p^{2x-2}(1-p^x)}{c_p} - \frac{c_p'}{(c_p)^2} \cdot xp^{x-1}(1-p^x)^2$$
$$-\frac{2x(2x-1)\, p^{2x-2}(1-p^x)}{c_p} + \frac{2x^2p^{2x-1}p^{x-1}}{c_p} + \frac{c_p'}{(c_p)^2} \cdot 2xp^{2x-1}(1-p^x) - \frac{c_p'}{(c_p)^2} \cdot xp^{x-1}(1-p^x)^2$$
$$+\frac{c_p'}{(c_p)^2} \cdot \left(2xp^xp^{x-1}(1-p^x)\right) + \frac{(c_p')^2}{(c_p)^3}\, p^x(1-p^x)^2 - \frac{1}{c_p}\left(\frac{c_p'}{c_p}\right)' p^x(1-p^x)^2.$$

Since $0 < p < 1$ and $x \geq 1$, we have $0 < p^x < 1$ and $\frac{1}{1-p^x} > 1$. Now, substituting (4.2) and (4.3) into (4.1) and using some calculations, a polynomial (based on x) is received for the $V(x;p)$. This polynomial may be considered of degree at most $\frac{x^2}{(1-p^x)^2}$. Therefore, for sufficiently large x, we obtain $G(x) = O\left(\frac{x^2}{(1-p^x)^2}\right)$. Also, it is easy to see that $E_p\left[\frac{X_1^2}{(1-p^{X_1})^2}\right] < \infty$. Thus, the condition C5 is satisfied. Proposition 4.1 is proved.

Theorem 4.1. *Under the regularity conditions C1-C6, the likelihood equation*

$$\frac{\partial l(X^n;p)}{\partial p} = 0$$

has a unique solution $\widehat{p}_n = \widehat{p}_n(X^n)$ in H (H is a subset of Θ whose closure $\overline{H}$ is also contained in Θ). Moreover, $\widehat{p}_n$ is a ML estimator for p and possesses the following properties:

(1). $\widehat{p}_n$ is consistent and asymptotically normal;

(II). $\widehat{p}_n$ is asymptotically efficient, that is, we have

$\widehat{u}_n = \sqrt{n}(\widehat{p}_n - p) \xrightarrow{d} \xi \in N(0, I^{-1}(p))$, ($\xrightarrow{d}$ *means convergence in distribution).*

(III). For the moments of $\widehat{p}_n$ we have

$$E_p\left[\widehat{u}_n^k\right] \longrightarrow E_p\left[\xi^k\right], \quad \text{for any } \ k \geq 1 \tag{4.4}$$

According to (4.4), for $k = 1$ the property of asymptotic unbiasedness is also satisfied, namely we have

$$E_p[\widehat{p}_n] = p + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(IV). If $\phi(p)$ is a differentiable function on $\mathbb{R}$ such that $\phi'(p) \neq 0$, then

$$\sqrt{n}(\phi(\widehat{p}_n) - \phi(p)) \xrightarrow{d} \xi \in N\left(0, \frac{[\phi'(p)]^2}{I(p)}\right), \tag{4.5}$$

where $\phi'(p) = \frac{\partial \phi(p)}{\partial p}$.

Proof. The assertions of the theorem follow from Proposition 4.1 and a general theorem of mathematical statistics (see [2], [5]).

Remark 4.1. For $k = 2$ from (4.4) we obtain

$$E_p(\widehat{p}_n - p)^2 = \frac{1 + o(1)}{nI(p)}.$$

Also, the relation (4.5) can be stated in the following form:

$$E_p\big(\phi(\widehat{p}_n) - \phi(p)\big)^2 = \frac{[\phi'(p)]^2}{nI(p)}(1 + o(1)).$$

In the examples that follow we consider two special parametric functions of p, and use Theorem 4.1 to establish some statistical properties for the corresponding estimators.

Example 4.1. Let $\phi(p) = f_p(x) = \frac{p^x(1-p^x)^2}{c_p}$, where $x \in \mathbb{N}$ is fixed. In view of Theorem 4.1, we have

$$f_{\widehat{p}_n}(x) \xrightarrow{P} f_p(x), \quad (\xrightarrow{P} \textit{ means convergence in probability}).$$

From property (IV) of Theorem 4.1, we have

$$\sqrt{n}\Big(f_{\widehat{p}_n}(x) - f_p(x)\Big) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{[f_p'(x)]^2}{I(p)}\right).$$

Now we evaluate $f_p'(x)$. To this end, observe that

$$\frac{c_p'}{c_p} = E_p\Big[U(p^{X_1}(1 - p^{X_1})^2)\Big], \tag{4.6}$$

where

$$U\left(p^x(1 - p^x)^2\right) = \frac{1}{p^x(1 - p^x)^2} \cdot \frac{\partial(p^x(1 - p^x)^2)}{\partial p}$$

is the so-called *contribution* function of x. Hence, from (4.6) we get

$$f_p'(x) = f_p(x)\Big[U\big[p^{X_1}(1-p^{X_1})^2\big] - E_p\big[U\big(p^{X_1}(1-p^{X_1})^2\big)\big]\Big].$$

Next, in view of property (III), for $k=1$ we have $E_p\big[f_{\widehat{p}_n(x)}\big] = f_p(x) + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$, and for $k=2$, we get

$$E_p\big[f_{\widehat{p}_n}(x) - f_p(x)\big]^2 = \frac{[f_p'(x)]^2}{nI(p)} + o\big(\frac{1}{n}\big). \tag{4.7}$$

Finally, using the following formula

$$E_p\big(f_{\widehat{p}_n}(x) - f_p(x)\big)^2 = Var_p(f_{\widehat{p}_n}(x)) + \Big(E_p[f_{\widehat{p}_n}(x)] - f_p(x)\Big)^2,$$

from (4.7) we obtain

$$Var_p\big[f_{\widehat{p}_n}(x)\big] \sim \frac{[f_p'(x)]^2}{nI(p)}.$$

Example 4.2. Let $\phi_t(p) = \overline{F}_p(t) \equiv 1 - F_p(t) = \sum_{x=t}^{\infty} f_p(x)$ for all $t \in (0,\infty)$. Applying Theorem 4.1, we get

$$\overline{F}_{\widehat{p}_n}(t) \xrightarrow{P} \overline{F}_p(t), \quad \text{for all } t \in (0,\infty).$$

From property (IV) of Theorem 4.1, we have

$$\sqrt{n}(\overline{F}_{\widehat{p}_n}(t) - \overline{F}_p(t)) \xrightarrow{d} N\Big(0, \frac{[\overline{F}_p'(t)]^2}{I(p)}\Big),$$

where

$$\begin{aligned}\overline{F}_p'(t) &= \sum_{x=t}^{\infty} f_p'(x) = E_\alpha\Big[U\big(p^{X_1}(1-p^{X_1})^2\big)\Big]\cdot 1_{(X_1\geq t)} - E_p\Big[U\big(p^{X_1}(1-p^{X_1})^2\big)\Big]\cdot \overline{F}_p(t)\\ &= \Big(1_{(X_1\geq t)} - \overline{F}_p(t)\Big)\cdot E_p\Big[U\big(p^{X_1}(1-p^{X_1})^2\big)\Big],\end{aligned}$$

and 1_A is the indicator function of a set A.

Next, using property (III) of Theorem 4.1, for the cases $k=1$ and $k=2$, we obtain

$$E_p\big[\overline{F}_{\widehat{p}_n}(t)\big] = \overline{F}_p(t) + o\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big),$$

$$E_p\big[\overline{F}_{\widehat{p}_n}(t) - \overline{F}_p(t)\big]^2 = \frac{[\overline{F}_p'(t)]^2}{n\,I(p)} + o\big(\frac{1}{n}\big).$$

Therefore, we have

$$Var_p(\overline{F}_{\widehat{p}_n}(t)) \sim \frac{[\overline{F}_p'(t)]^2}{n\,I(p)}.$$

Remark 4.2. The results obtained in Proposition 4.1, Theorem 4.1 and Examples 4.1 and 4.2 can also be stated for $\alpha = 2$ (generally for any α).

5. Special case II

In this section, for a special case of DGED when p is known, we establish some properties of the estimators of a parametric function of unknown α, and employ a linear regression-type model to obtain an estimator for the parameter α. Specifically, we find ML estimator and uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE) for a parametric function of α. Also, we fit a linear regression-type model and then propose the least square (LS) estimator for the parameter α.

Estimation of a parametric function. Consider DGED model (1.1) with known p and unknown α. Here we are interested in the estimation of the following parametric function:

$$\tau(\alpha) = \frac{c_\alpha'}{c_\alpha}, \tag{5.1}$$

where $c_\alpha' = \frac{\partial c_\alpha}{\partial \alpha}$, and c_α is as in (1.2). As an estimator of function $\tau(\alpha)$, based on a sample $X^n = (X_1, ..., X_n)$ from (1.1), we consider the statistic:

$$M(X^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - p^{X_i}). \tag{5.2}$$

Theorem 5.1. *Under the regularity conditions C3, C4 and C6, the statistic $M(X^n)$ defined by* (5.2) *is UMVUE and also an efficient estimator for the parametric function $\tau(\alpha)$ defined by* (5.1).

Proof. The density $f_\alpha(x)$ we write in exponential form (see (1.1)):

$$f_\alpha(x) = \exp\Big\{(\ln p)x + (\alpha - 1)\ln(1 - p^x) - \ln c_\alpha\Big\}. \tag{5.3}$$

It follows from (5.3) that the statistic $\sum_{i=1}^n \ln(1 - p^{x_i})$ is a complete sufficient statistic for the model (1.1) when p is known. Hence applying the well-known theorems of statistics (see [7] and [2], Ch. II, Sec. 26), we conclude that the statistic $M(X^n)$ defined by (5.2), is the UMVUE and also an efficient estimator for the parametric function $\tau(\alpha)$ defined by (5.1). Theorem 5.1 is proved.

Remark 5.1. It follows from Theorem 5.1 and Theorem 26.2 of [2] that the statistic $M(X^n)$ is ML estimator for parametric function $\tau(\alpha)$. Therefore we can conclude that $M(X^n)$ is consistent and asymptotically normal estimator for $\tau(\alpha)$.

A regression-type model. In this subsection, we explore a linear regression-type method for the model (1.1), and then provide a LS estimator for the unknown parameter α. To this end, we first take logarithm from both sides of (1.1) to obtain

$$\ln f_\alpha(x) = \ln p^x + (\alpha - 1)\ln(1 - p^x) - \ln c_\alpha. \tag{5.4}$$

Obviously, we have (with $x = x_i$)

$$f_\alpha(x_i) = F_\alpha(x_i) - F_\alpha(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.5}$$

Substituting (5.5) into (5.4), we get

$$\ln\left(F_\alpha(x_i) - F_\alpha(x_{i-1})\right) = \ln p^{x_i} + (\alpha - 1)\ln(1 - p^{x_i}) - \ln c_\alpha. \tag{5.6}$$

Observe that the relation (5.6) cannot be used to fit a regression-type model, because its left-hand side depends on the unknown parameter α. To solve the problem, we use the empirical distribution function (edf):

$$F_n(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(X_i \leq x)},$$

and consider the variables (cf. [4]):

$$\zeta_i = \ln\left(F_n(x_i) - F_n(x_{i-1})\right) + \ln\left(\frac{1 - p^{x_i}}{p^{x_i}}\right) = \left(\ln(1 - p^{x_i})\right)\alpha + \beta,$$

where $\beta = -\ln c_\alpha$.

Now, we can suggest the estimation of α by regressing $\zeta_i = \left(\ln(1 - p^{x_i})\right)\alpha + \beta$ on $\ln(1 - p^{x_i})$ as follows:

$$\zeta_i = \left(\ln(1 - p^{x_i})\right)\alpha + \beta + e_i, \tag{5.7}$$

where $e_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, ..., n$ and $x = (x_1, ..., x_n)$ is an observed (non-random) sample. Thus, we can use (5.7), to estimate the parameter α by regressing ζ_i on $\ln(1 - p^{x_i})$.

Note that in [8] was used a different method, based on empirical characteristic function. It is of interest to consider the LS estimator for the model (5.7). As an unbiased LS estimator $\tilde{\alpha}$ of the parameter α we consider the statistic:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(1 - p^{x_i}) - \overline{\ln(1 - p^{x})}\right)\cdot\left(\zeta_i - \overline{\zeta}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(1 - p^{x_i}) - \overline{\ln(1 - p^{x})}\right)^2}. \tag{5.8}$$

As an example, consider the data set 1, 9, 23, 17, 13, 12, 10, 9, 9, 3, 6 (see [7]). Taking $p = 0.7$, and using (5.8), for this data set we obtain the point estimate $\tilde{\alpha} = 4.995138$.

For the considered model, we have the following result.

Theorem 5.2. *The LS estimator $\tilde{\alpha}$ of the unknown parameter α is consistent, asymptotically normal and is the best unbiased linear estimator.*

Proof. The proof is similar to that of Theorem 1 of [4], and so is omitted.

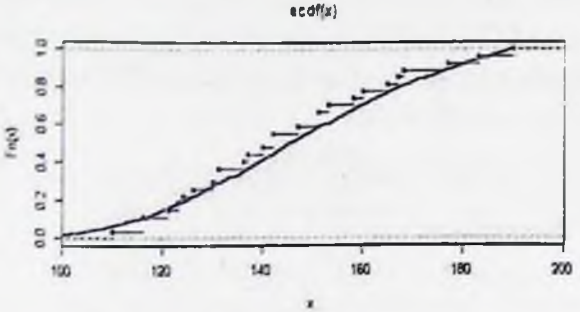

Рис. 1. Fitting of the truncated DGED to the data of Table 4. The dashed line is the ecdf of data and the solid line is the fitted cdf.

6. Appendix

As it was pointed out in Introduction, Nekoukhou et al. [10], fitted the DGED for modeling rank frequencies of graphemes in a Slavic language (Slovene). Here, we fit the DGED with a real data set in biology. In addition, we compare the DGED with two other discrete distributions. To this end, we first consider the following example.

Numerical Example. The data in the following table represent the systolic blood pressures (mm HG) for 27 women at age group 45-74 years old (see [11]).

For this data set, the ML estimates for the parameters p and α, the maximized log-likelihood ($\ln L$), the Akaike information criterion (AIC) and the p-value can be calculated to obtain the following numbers:

$$\widehat{p} = 0.9666823, \quad \widehat{\alpha} = 121.4182461, \quad \ln L = -119.550,$$

$$AIC = 243.100, \quad p - value = 0.9543.$$

Moreover, we can run an informal goodness of fit test (see the plots of the edf and fitted cdf of the systolic blood pressure data in Figure 1).

Now, we compare the DGED with *Discrete Distribution Generated by Levy's Density (DLD)* (see [4], Eq. (2)) and *Power-Law Distribution (PLD)* (see [12], Eq. (1)). Notice that the DLD and PLD are unimodal discrete distributions (supported on the set of natural numbers $\mathbf{N}$), which can be used for modeling phenomena arising, for example, in biology.

Table 4

110	116	121	126	131	136	142	151	165
116	124	131	137	142	151	158	168	183
123	130	140	147	153	160	167	177	190

For data given in Table 4, can be calculated lnL, AIC and the p-values when fitting the data using DLD and PLD (see also [1], Sec. 6). The corresponding results, together with the above obtained results for DGED, are tabulated in the following table.

Table 5

Model	DGED	DLD	PLD
$\ln L$	-119.550	-124.921	-127.391
AIC	243.100	251.842	256.783
p-value	0.9543	0.1964	0.1006

The results presented in Table 5 show that, based on lnL, AIC and the p-values, the DGED provides a better fit than DLD and PLD. Figure 1 shows a good fit for the DGED as well.

Acknowledgment. The author is thankful to the anonymous referee for valuable comments and suggestions, which led to considerable improvement in the original manuscript.

Список литературы

[1] H. Bidram, M. H. Alamatsaz, V. Nekoukhou, "On an extension of the exponentiated Weibull distribution", Communications in Statistics - Simulation and Computation, 44, 1389 – 1404 (2015).

[2] A. A. Borovkov, Mathematical Statistics, Gordon and Science Breach Publishing, translated from original Russian edition, (1998).

[3] D. Farbod, K. Gasparian, "On the maximum likelihood estimators for some generalized Pareto-like frequency distribution", Journal of the Iranian Statistical Society (JIRSS), 12, no. 2, 211 – 233 (2013).

[4] D. Farbod, "Some statistical inferences for two frequency distributions arising in bioinformatics". Applied Mathematics E-Notes, 14, 151 – 160 (2014).

[5] D. Farbod, "Asymptotic properties of maximum likelihood estimators for a generalized Pareto-type distribution", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 50, no. 1, 44 – 51 (2015).

[6] G. H. Givens, J. A. Hoeting, Computational Statistics, Wiley and Sons (2005).

[7] G. I. Ivchenko, Yu. Medvedev, Mathematical Statistics, Mir Press, Moscow (1990).

[8] I. A. Koutrouvelis, "Regression type estimation of the parameters of stable laws", Journal of American Statistical Association (JASA), 75, 918 – 928 (1980).

[9] K. Mohammad, H. Malekafzali, V. Nahapetian, Statistical Methods and Health Indices, (in Persian) (1994).

[10] V. Nekoukhou, M. H. Alamatsaz, and H. Bidram, "A discrete analog of the generalized exponential distribution", Communications in Statistics - Theory and Methods, 41, 2000 – 2013 (2012).

[11] S. Port, L. Demer, R. Jennrich, D. Walter, A. Garfinkel, "Systolic blood pressure and mortality", The Lancet, 355, no. 9199, 175 – 180 (2000).

[12] A. Rzhetsky, Sh. M. Gomez, "Birth of scale-free molecular networks and the number of distinct DNA and protein domains per genome", Bioinformatics, 17, no. 10, 988 – 996 (2001).

Поступила 10 января 2017

Cover–to–cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 53, No. 2, 2018

CONTENTS

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 53, номер 3, 2018

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 53, No. 3, 2018

Contents