ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2018

Известия НАН Армении. Математика, том 53, н. 2, 2018, стр. 3 – 14.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ КОВАРИОГРАММЫ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Н. Г. АГАРОНЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *narine78@ysu.am; victoohanyan@ysu.am*

Аннотация. В статье получена формула для вычисления вероятности, что случайный отрезок $L(\omega, \mathrm{u})$ в $\mathbf{R}^n$ с фиксированным направлением u и длиной l полностью лежит в ограниченном выпуклом теле $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ в терминах ковариограмы тела $\mathbf{D}$. Также получена связь между этой вероятностью $P(L(\omega, \mathrm{u}) \subset \mathbf{D})$ и зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды для любой размерности n. Используя эту формулу получаем явный вид вероятности $P(L(\omega, \mathrm{u}) \subset \mathbf{D})$, в случаях когда $\mathbf{D}$ n-мерный шар $(n \geq 2)$ и когда $\mathbf{D}$ есть правильный треугольник на плоскости.

MSC2010 numbers: 60D05; 52A22; 53C65

Ключевые слова: Выпуклое тело; ковариограмма; кинематическая мера; зависящая от ориентации функция распределения длины хорды; n-мерный шар; треугольник[1].

1. Введение

Пусть $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ - n-мерное евклидово пространство, $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ - ограниченная выпуклая область с внутренними точками, а $V_n(\cdot)$ - n-мерная мера Лебега в $\mathbf{R}^n$.

Определение 1.1. *(см.* [3]*). Функция*

$$C(\mathbf{D}, h) = V_n(\mathbf{D} \cap (\mathbf{D} + h)), \quad h \in \mathbf{R}^n, \tag{1.1}$$

называется ковариограммой тела $\mathbf{D}$. *Здесь* $\mathbf{D} + h = \{x + h,\ x \in \mathbf{D}\}$.

Ж. Матерон сформулировал гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела $\mathbf{D}$ определяет ее в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [3]). Г. Бианчи и Г. Аверков доказали, что каждая плоская выпуклая область определяется в классе всех плоских выпуклых областей по ковариограмме, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [4]).

[1]Настоящее исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Центра Математических Исследований Ереванского Государственного Университета

Очень мало известно о задаче о ковариограмме, когда размерность пространства больше двух. В случае n-мерного пространства с $n \geq 4$ гипотеза Матерона получила отрицательный ответ. Известно, что центрально-симметричные выпуклые тела любой размерности определяются по их ковариограмме с точностью до параллельных переносов. Для n=3 проблема пока не решена, хотя в случае ограниченного выпуклого многогранника при n=3 гипотеза Матерона получила положительный ответ.

Известно, что задача о ковариограмме эквивалентна задаче восстановления выпуклого тела по зависящей от ориентации распределения случайной хорды (см. [3] - [5]).

Задача нахождения меры отрезков постоянной длины, полностью содержащихся в области D, не имеет простого решения, и зависит от формы D. Известен явный вид кинематической меры для нескольких плоских областей: круга, прямоугольника, если длина отрезка меньше меньшей стороны прямоугольника (см. [1], [2]) и для правильного треугольника, прямоугольника (для произвольной длины отрезка) и правильного пятиугольника (см. [11]).

Пусть S^{n-1} - $(n-1)$-мерная единичная сфера с центром в начале координат в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим случайную прямую из $\Omega_1(\mathbf{u})$:

$$\Omega_1(\mathbf{u}) = \{\text{прямые параллельные направлению } \mathbf{u} \text{ и пересекающие } \mathbf{D}\}.$$

Пусть $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$ - ортогональная проекция D на гиперплоскость $\mathbf{u}^\perp$ ($\mathbf{u}^\perp$ - гиперплоскость проходящая через начало координат с нормальным вектором $\mathbf{u}$).

Случайная прямая, параллельная направлению u и пересекающая D имеет точку пересечения (обозначим ее через x) с $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$. Можно отождествлять точки $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$ с прямыми, которые пересекают D и параллельны направлению u. Последнее означает, что можно отождествлять $\Omega_1(\mathbf{u})$ и $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$. Предположив, что точка пересечения x равномерно распределена в выпуклом теле $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$ мы можем определить следующую функцию распределения:

Определение 1.2. *Функция*

$$F(\mathbf{u}, t) = \frac{V_{n-1}\{x \in \Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D} : V_1(g(\mathbf{u}, x) \cap \mathbf{D}) < t)\}}{b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})} \tag{1.2}$$

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды D *в направлении* $\mathbf{u} \in S^{n-1}$ *в точке* $t \in \mathbf{R}^1$, *где* $g(\mathbf{u}, x)$ *- прямая параллельная* u *и пересекающая* $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$ *в точке* x, *а* $b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) = V_{n-1}(\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D})$.

Вектор $h \in \mathbf{R}^n$ можно задавать как $h = (\mathbf{u}, t)$, где $\mathbf{u}$ - направление h, а t его длина.

Лемма 1.1. *(см. [3]). Пусть $\mathbf{u} \in S^{n-1}$, а $t > 0$ такое, что $\mathbf{D} \cap (\mathbf{D} + t\mathbf{u})$ содержит внутренние точки. Тогда $C(\mathbf{D}, \mathbf{u}, t)$ дифференцируема по t и*

$$-\frac{\partial C(\mathbf{D}, \mathbf{u}, t)}{\partial t} = (1 - F(\mathbf{u}, t))\, b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) \tag{1.3}$$

В точке $t = 0$ существует правосторонняя производная и формула также выполнена.

Пусть $L(\mathbf{u}, \omega)$ - случайный отрезок длины $l > 0$, параллельный фиксированному направлению $\mathbf{u}$ и пересекающий $\mathbf{D}$. Рассмотрим случайную величину $|L|(\mathbf{u}, \omega) = V_1(L(\mathbf{u}, \omega) \cap \mathbf{D})$, где $L(\mathbf{u}, \omega) \in \Omega_2(\mathbf{u})$, причем

$\Omega_2(\mathbf{u}) = \{$отрезки длины l, параллельные направлению $\mathbf{u}$ и пересекающие $\mathbf{D}\}$.

Случайный отрезок $L(\mathbf{u}, \omega)$, лежащий на прямой $g(\mathbf{u}, x)$, можно задавать координатами $(g(\mathbf{u}, x), y)$, где y одномерная координата центра отрезка $L(\mathbf{u}, \omega)$ на прямой $g(\mathbf{u}, x)$. Началом координат на прямой $g(\mathbf{u}, x)$ берется одна из точек пересечений $g(\mathbf{u}, x)$ с $\partial\mathbf{D}$. Используя вышеупомянутые обозначения можно отождествлять $\Omega_2(\mathbf{u})$ с множеством:

$$\Omega_2(\mathbf{u}) = \left\{(x, y) : x \in \Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}, \quad y \in \left[-\frac{l}{2}, \chi(\mathbf{u}, x) + \frac{l}{2}\right]\right\},$$

где $\chi(\mathbf{u}, x) = V_1(g(\mathbf{u}, x) \cap \mathbf{D})$. Заметим, что $\Omega_2(\mathbf{u})$ не зависит от того, какая из двух точек пересечений $g(\mathbf{u}, x) \cap \mathbf{D}$ берется в качестве начала координат. Какое из двух направлений выбрано в качестве положительного следует из вида интервала изменения y. Далее, обозначим

$$B_{\mathbf{D}}^{\mathbf{u}, t} = \{(x, y) \in \Omega_2(\mathbf{u}) : \ |L|(\mathbf{u}, x, y) < t\}, \quad t \in \mathbf{R}^1,$$

Очевидно, что $\Omega_2(\mathbf{u})$ и $B_{\mathbf{D}}^{\mathbf{u}, t}$ измеримые подмножества в $\mathbf{R}^n$.

Определение 1.3. *Функция*

$$F_{|L|}(\mathbf{u}, t) = \frac{V_n(B_{\mathbf{D}}^{\mathbf{u}, t})}{V_n(\Omega_2(\mathbf{u}))} = \frac{1}{V_n(\Omega_2(\mathbf{u}))}\int_{B_{\mathbf{D}}^{\mathbf{u}, t}} dx\, dy \tag{1.4}$$

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины случайного отрезка $|L|$ в направлении $\mathbf{u} \in S^{n-1}$.

Пусть G_n - пространство всех прямых в $\mathbf{R}^n$. Прямую $g \in G_n$ можно задавать ее направлением $\mathbf{u} \in S^{n-1}$ и точкой пересечения x с гиперплоскостью $\mathbf{u}^\perp$.

Пусть $\mu(\cdot)$ локально-конечная мера в пространстве G_n, инвариантная относительно группы всех евклидовых движений плоскости. Известно, что элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид (см. [1] и [2])

$$\mu(dg) = dg = d\mathbf{u}\, dx,$$

где плотность $d\mathbf{u}$ - элемент объема на единичной сфере S^{n-1}, а dx - элемент объема на $\mathbf{u}^{\perp}$ в точке x.

Обозначим через $O_{n-1} = \sigma_{n-1}(S^{n-1})$ площадь поверхности единичной сферы в $\mathbf{R}^n$. Для каждого ограниченного выпуклого тела $\mathbf{D}$, обозначим множество прямых, пересекающих $\mathbf{D}$ через

$$[\mathbf{D}] = \{g \in G_n,\ g \cap \mathbf{D} \neq \emptyset\}$$

Имеем (см. [1] или [5])

$$\mu([\mathbf{D}]) = \frac{O_{n-2} V_{n-1}(\partial \mathbf{D})}{2(n-1)}.$$

Случайная прямая в $[\mathbf{D}]$ есть прямая с распределением пропорциональным сужению меры μ на $[\mathbf{D}]$. Следовательно, для каждого $t \in \mathbf{R}^1$ имеем

$$F(t) = \frac{\mu(\{g \in [\mathbf{D}],\ V_1(g \cap \mathbf{D}) < t\})}{\mu([\mathbf{D}])}$$

$F(t)$ называется функцией распределения длины хорды тела $\mathbf{D}$.

Пусть $L(\omega)$ - случайный отрезок длины l в $\mathbf{R}^n$, а $K(\cdot)$ - кинематическая мера отрезка L (см. [1]). Если $g \in G_n$ прямая, содержащая $L(\omega)$, а y одномерная координата центра отрезка $L(\omega)$ на g, тогда элемент кинематической меры с точностью до постоянного множителя имеет вид $dK = dg\, dy\, dK_{[1]}$, где dy одномерная лебегова мера на g, а $dK_{[1]}$ элемент движений в $\mathbf{R}^n$, оставляющих прямую g неподвижной (см. [2]). В случае ориентированного отрезка, вышеупомянутый постоянный множитель равен 1, а для неориентированного отрезка множитель $\frac{1}{2}$ (в этой статье рассматриваются только неориентированные отрезки).

Длина случайного отрезка $|L|(\omega) = V_1(L(\omega) \cap \mathbf{D})$, при условии, что $L(\omega)$ пересекает $\mathbf{D}$, имеет следующую функцию распределения

$$F_{|L|}(t) = \frac{K(L : L \cap \mathbf{D} \neq \emptyset, V_1(L \cap \mathbf{D}) < t)}{K(L : L \cap \mathbf{D} \neq \emptyset)}, \qquad t \in \mathbf{R}^1.$$

$F_{|L|}(t)$ - функция распределения длины случайного отрезка $|L|(\omega)$.

2. Основные формулы

Напомним утверждения, полученные в предыдущих статьях и используемые в настоящей работе.

Теорема 2.1. *(см. [12]) Связь между функцией распределения случайной величины $|L|(\mathbf{u},\omega)$ и зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды в $\mathbf{R}^n$*

$$
(2.1)\quad F_{|L|}(\mathbf{u},t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \le 0, \\ \dfrac{b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})\left[2t + F(\mathbf{u},t)(l-t) - \int_0^t F(\mathbf{u},z)\,dz\right]}{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})} & \text{для} \quad 0 \le t \le l, \\ 1 & \text{для} \quad t > l. \end{cases}
$$

В [8]-[10] получены явные выражения зависящей от ориентации функции распределения длины хорды для треугольника, эллипса, правильного многоугольника и параллелограмма. Следовательно, подставляя в (2.1) $n = 2$ и $F(\mathbf{u},t)$ получаем явные выражения для $F_{|L|}(\mathbf{u},t)$ для вышеупомянутых плоских выпуклых областей.

Теорема 2.2. *(см. [12]) Связь между функцией распределения случайной величины $|L|(\mathbf{u},\omega)$ и ковариограммой на интервале $[0,l]$ задается следующей формулой*

$$
(2.2)\qquad F_{|L|}(\mathbf{u},t) = 1 + \frac{1}{V_n(\mathbf{D}) + l\, b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})}\left[\frac{\partial C(\mathbf{D},\mathbf{u},t)}{\partial t}(l-t) - C(\mathbf{D},\mathbf{u},t)\right]
$$

Значения $F_{|L|}(\mathbf{u},t)$ равны 0, для $t \le 0$ и равны 1, для $t > l$.

Теорема 2.3. *(см. [12]) Связь между функцией распределения длины случайного отрезка, пересекающего $\mathbf{D}$ и функцией распределения длины хорды $\mathbf{D}$ в $\mathbf{R}^n$ (см. [12], формула (2.5)):*

$$
(2.3)\quad F_{|L|}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \le 0, \\ \dfrac{O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})\left(2t + F(t)(l-t) - \int_0^t F(z)dz\right)}{(n-1)O_{n-1}V_n(\mathbf{D}) + lO_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})} & \text{для} \quad 0 \le t \le l, \\ 1 & \text{для} \quad t > l. \end{cases}
$$

Если предположить, что $F_{|L|}(t)$ имеет плотность, подставляя в (2.3) $n = 2$, получаем результат из [11].

Используя результаты (2.1)-(2.3) мы приходим к основным результатам настоящей работы.

Обозначим через $\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D})$ вероятность, что отрезок $L(\mathbf{u},\omega)$ (фиксированной длины l и направления $\mathbf{u}$) полностью лежит в теле $\mathbf{D}$.

Предложение 2.1. *Вероятность* $\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D})$ *в терминах функции распределения* $F(\mathbf{u},z)$ *имеет следующий вид:*

$$\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{V_n(\mathbf{D}) - l b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) + b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \int_0^l F(\mathbf{u},z)\,dz}{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})}, \tag{2.4}$$

а в терминах ковариограммы тела $\mathbf{D}$ *имеет вид:*

$$\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{C(\mathbf{D},\mathbf{u},l)}{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Если подставить $t = l$ в выражения (2.1) и (2.2), то $F_{|L|}(\mathbf{u},l)$ есть вероятность, что длина части отрезка, лежащего в $\mathbf{D}$ меньше l. Следовательно,

$$1 - F_{|L|}(\mathbf{u},l) = \mathbf{P}(|L|(\mathbf{u},\omega) \geq l).$$

А так как длина отрезка $L(\mathbf{u},\omega)$ равна l, то $\mathbf{P}(|L|(\mathbf{u},\omega) \geq l)$ совпадает с $1 - F_{|L|}(\mathbf{u},l)$ используя (2.1) получаем (2.4).

Аналогично, но с использованием (2.2) получаем (2.5). □

Обозначим через $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D})$ вероятность того, что случайный отрезок длины l в $\mathbf{R}^n$ имеющий общую точку с телом $\mathbf{D}$ полностью лежит в теле $\mathbf{D}$ (в этом случае направление отрезка $L(\omega)$ произвольно). Отметим, что вероятность $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D})$ можно получить из вероятности $\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D})$ проинтегрировав по всем направлениям $\mathbf{u} \in S^{n-1}$.

Предложение 2.2.

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})\left(\int_0^l F(z)dz - l\right) + (n-1)O_{n-1}V_n(\mathbf{D})}{(n-1)O_{n-1}V_n(\mathbf{D}) + lO_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})} \tag{2.6}$$

Доказательство. Если подставить $t = l$ в формулу (2.3), то функция распределения $F_{|L|}(l)$ есть вероятность, что длина части отрезка, лежащего в $\mathbf{D}$ меньше l. Следовательно,

$$1 - F_{|L|}(l) = \mathbf{P}(|L|(\omega) \geq l).$$

А так как длина отрезка $L(\omega)$ равна l, то $\mathbf{P}(|L|(\omega) \geq l)$ совпадает с $\mathrm{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D})$. Преобразовав $1 - F_{|L|}(l)$ используя (2.3) получаем (2.6). Предложение 2.2 доказано. □

В параграфах 3 и 4 мы используем полученные формулы для некоторых частных случаев.

3. Случай n-мерного шара

Так как шар $\mathbf{B_n(R)}$ является изотропным телом, то $C(\mathbf{B_n(R)}, u, l) = C(\mathbf{B_n(R)}, l)$ не зависит от направления $u \in S^{n-1}$. Следовательно, получаем

$$\mathbf{P}(L(\mathbf{u}, \omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = \mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = \frac{C(\mathbf{B_n(R)}, l)}{V_n(\mathbf{B_n(R)}) + l \cdot b_{\mathbf{B_n(R)}}(u)}. \tag{3.1}$$

Известно, что объем n-мерного шара радиуса R равен

$$V_n(\mathbf{B_n(R)}) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot R^n, \tag{3.2}$$

а $b_{\mathbf{B_n(R)}}(u)$ - проекция n-мерного шара радиуса R на гиперплоскость $\mathbf{u}^\perp$ равна

$$b_{\mathbf{B_n(R)}}(u) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot R^{n-1}, \tag{3.3}$$

где

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

– гамма функция. Известно, что $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Нетрудно убедиться, что ковариограмма n-мерного шара радиуса R равна удвоенному объему n-мерного шарового сегмента высоты $R - l/2$. Используя формулу для n-мерного шарового сегмента (см. [14]), получаем

$$C(\mathbf{B_n(R)}, l) = 2 \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot R^n \cdot \int_0^\phi \sin^n \theta\, d\theta, \tag{3.4}$$

где $\phi = \arccos \frac{l}{2R}$.

Следовательно, подставляя $C(\mathbf{B_n(R)}, l)$ из (3.4) и используя (3.2 и (3.3), получаем, что вероятность того, что отрезок длины $l \leq 2R$ полностью лежит в n-мерном шаре радиуса R равна

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = \frac{2R}{\left(R \frac{\sqrt{\pi}\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} + l\right)} \int_0^\phi \sin^n \theta\, d\theta. \tag{3.5}$$

Очевидно, для любой размерности n имеем $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = 1$ для $l = 0$ и $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = 0$ для $l \geq 2R$.

Рассмотрим частные случаи $n = 2, 3, 4, 5$.

3.1. Случай $n = 2$. Подставляя $n = 2$ в (3.5), для круга $\mathbf{B_2(R)}$ радиуса R, получаем

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_2(R)}) = \frac{4R}{\pi R + 2l} \int_0^{\arccos \frac{l}{2R}} \sin^2 \theta \, d\theta =$$

$$= \frac{R}{\pi R + 2l} \left(2 \arccos \frac{l}{2R} - \sin 2(\arccos \frac{l}{2R}) \right).$$

Следовательно, для $l \leq 2R$ окончательно получаем

$$\text{(3.6)} \quad \mathbf{P}(L(\mathbf{u}, \omega) \subset \mathbf{B_2(R)}) = \mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_2(R)}) = \frac{2R \arccos \frac{l}{2R} - \frac{l}{2R}\sqrt{4R^2 - l^2}}{\pi R + 2l}.$$

При $l = R$ получаем $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_2(R)}) = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6(\pi + 2)} \approx 0.239$.

Числитель выражения (3.6) помноженный на R (так как мы сократили числитель и знаменатель дроби на R) совпадает с кинематической мерой отрезков полностью лежащих в круге $\mathbf{B_2(R)}$ радиуса R (см. [1] и [2]).

Так как круг является изотропной областью, то можно получить результат (3.6) используя формулы (2.1) или (2.3). Если подставить в (2.1) $n = 2$, то получаем

$$\text{(3.7)} \qquad P(L(\omega) \subset B_2(R)) = 1 - \frac{|\partial D|}{\pi \|D\| + l|\partial D|} \left[2l - l \cdot F_D(l) + \int_0^l u \, f(u) \, du \right],$$

так как

$$\int_0^l F_D(u) = l \cdot F_D(l) - \int_0^l f_D(u) \, du.$$

Так как известны плотность и функция распределения длины хорды для круга радиуса R (см. [6], [7])

$$f_{\mathbf{B_2(R)}}(u) = \begin{cases} 0, & u \notin [0, 2R) \\ \frac{u}{2R\sqrt{4R^2 - u^2}}, & u \in [0, 2R) \end{cases}$$

$$F_{\mathbf{B_2(R)}}(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{4R^2}}, & u \in [0. 2R) \\ 1, & u \leq 2R \end{cases}$$

то надо подставить эти функции в (3.7) и вычислить стандартный интеграл. Следовательно, получаем

$$P(L(\omega) \subset B_2(R)) = \frac{\pi R - \frac{l}{R}\sqrt{4R^2 - l^2} - \frac{1}{R}\int_0^l \frac{u^2}{\sqrt{4R^2 - u^2}} \, du}{\pi R + 2l}$$

Так как

$$\int_0^l \frac{u^2}{\sqrt{4R^2 - l^2}} \, du = -\frac{l}{2}\sqrt{4R^2 - u^2} + 2R^2 \arcsin \frac{l}{2R},$$

то окончательно получаем

$$P(L(\omega) \subset B_2(R)) = \frac{1}{\pi R + 2l}\left[\pi R - \frac{l}{2R}\sqrt{4R^2 - l^2} - 2R\arcsin\frac{l}{2R}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi R + 2l}\left[2R\arccos\frac{l}{2R} - \frac{l}{2R}\sqrt{4R^2 - l^2}\right],$$

что совпадает с (3.6).

3.2. **Случай** $n = 3$. Подставляя $n = 3$ в (3.5), для шара $\mathbf{B_3(R)}$ радиуса R, получаем

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_3(R)}) = \frac{6R}{4R + 3l}\int_0^{\arccos\frac{l}{2R}} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{6R}{4R + 3l}\left(\frac{l^3}{24R^3} - \frac{l}{2R} + \frac{2}{3}\right)$$

(так как $\Gamma(2) = 1$ и $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$).

Следовательно, для $l \leq 2R$ окончательно получаем

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_3(R)}) = \frac{l^3 - 12lR^2 + 16R^3}{16R^3 + 12lR^2} \tag{3.8}$$

При $l = R$ получаем $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_3(R)}) = \frac{5}{28} \approx 0.1786$.

3.3. **Случай** $n = 4$. Подставляя $n = 4$ в (3.5), для шара $\mathbf{B_4(R)}$ радиуса R, получаем

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_4(R)}) = \frac{16R}{3\pi R + 8l}\int_0^{\arccos\frac{l}{2R}} \sin^4\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{16R}{3\pi R + 8l}\left(\frac{3}{8}\arccos\frac{l}{2R} - \frac{1}{4}\sin(2\arccos\frac{l}{2R}) + \frac{1}{32}\sin(4\arccos\frac{l}{2R})\right) =$$

$$= \frac{16R}{3\pi R + 8l}\left(\frac{3}{8}\arccos\frac{l}{2R} - \frac{l}{8R^2}\sqrt{4R^2 - l^2} + \frac{l^3}{64R^4}\sqrt{4R^2 - l^2} - \frac{l}{32R^2}\sqrt{4R^2 - l^2}\right).$$

Следовательно, для $l \leq 2R$ окончательно получаем

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathrm{B}_4(\mathbf{R})) = \frac{2R}{3\pi R + 8l}\left[3\arccos\frac{l}{2R} + \frac{l\sqrt{4R^2 - l^2}}{8R^2}\left(\frac{l^2}{R^2} - 10\right)\right] \tag{3.9}$$

При $l = R$ получаем $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_4(R)}) = \frac{8\pi - 9\sqrt{3}}{12\pi + 32} \approx 0.136935$.

3.4. **Случай** $n = 5$. Подставляя $n = 5$ в (3.5), для шара $\mathbf{B_5(R)}$ радиуса R, получаем

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_5(R)}) = \frac{30R}{16R + 15l}\int_0^{\arccos\frac{l}{2R}} \sin^5\theta\, d\theta$$

(так как $\Gamma(3) = 2$ и $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$).

Следовательно, для $l \leq 2R$ окончательно получаем

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_5(R)}) = \frac{30R}{16R + 15l}\left(-\frac{l^5}{160R^5} + \frac{l^3}{12R^3} - \frac{l}{2R} + \frac{8}{15}\right). \tag{3.10}$$

При $l = R$ получаем $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B}_5(\mathbf{R})) = \frac{53}{496} \approx 0.1068$.

Замечание 1. Вероятности $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B}_n(\mathbf{R}))$, при $n = 2, 3, 4, 5$ убывают с возрастанием n от 0.239 (n=2) до 0.1068 (n=5).

4. Случай правильного треугольника

Для произвольного тела $\mathbf{D}$ n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ имеем:

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{1}{O_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \frac{C(\mathbf{D}, \mathbf{u}, l)}{V_n(D) + l \cdot b_D(\mathbf{u})}\, d\mathbf{u}, \tag{4.1}$$

причем кинематическая мера отрезков полностью лежащих в $\mathbf{D}$ вычисляется по следующей формуле:

$$K(L(\omega) \subset \mathbf{D}) = \int_{S^{n-1}} C(\mathbf{D}, \mathbf{u}, l)\, d\mathbf{u}$$

Для любой плоской ограниченной выпуклой области имеем:

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{1}{\pi S(D) + l|\partial D|} \int_0^{\pi} C(D, u, l)\, du. \tag{4.2}$$

Ковариограмма правильного треугольника Δ_a со стороной a имеет вид (см. [8]):

$$C(\Delta_a, u, l) =$$

$$= \begin{cases} \frac{(a \sin\beta - l \sin(u+\beta))^2 \sin\alpha}{2\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [0, \alpha],\ t \in [0, \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta - l\sin u \sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\alpha, \pi-\beta],\ t \in [0, \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha - l\sin(u-\alpha))^2 \sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi-\beta, \pi],\ t \in [0, \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \\ \frac{(a\sin\beta + l\sin(u+\beta))^2 \sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi, \pi+\alpha],\ t \in [0, -\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta + l\sin u\sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi+\alpha, 2\pi-\beta],\ t \in [0, -\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha + l\sin(u-\alpha))^2 \sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u \in [2\pi-\beta, 2\pi],\ t \in [0, -\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}]. \end{cases} \tag{4.3}$$

Рассмотрим случай, когда $0 \le l \le a\sqrt{3}/2$. Подставляя в (4.3) $\alpha = \beta = \pi/6$, получаем, что для вычисления вероятности $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \Delta_a)$ нам надо вычислить следующий интеграл:

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) =$$

$$\frac{1}{\pi\|D\| + l|\partial D|} \int_0^{\pi} C(\Delta_a, u, l)\, du = \frac{1}{\pi\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3al} \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left(\frac{3}{4}a - \frac{\sqrt{3}}{2} l \sin u\right)^2 du =$$

$$= \frac{\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4} - 3al + \frac{\pi l^2\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{4}l^2}{\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4} + 3al}.$$

Таким образом, для $0 \le l \le a\sqrt{3}/2$ окончательно получаем:

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) = \frac{3\pi a^2 - 12\sqrt{3}al + (2\pi + 3\sqrt{3})l^2}{3a(\pi a + 4\sqrt{3}l)}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим случай $a\sqrt{3}/2 \le l \le a$. В этом случае получаем:

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) = \frac{1}{\pi\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3al} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\varphi} (a\sqrt{3} - 2l\sin(u + \pi/3))^2\, du,$$

где $\varphi = \arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2l} - \frac{\pi}{3}$.

Вычисление интеграла дает

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) = \frac{\left(l^2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\right)\arcsin\frac{\sqrt{3}a}{2l} - \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} - 3al + \frac{9a}{4}\sqrt{4l^2 - 3a^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}l^2\pi + \frac{3}{4}l^2}{\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4} + 3al}$$

Таким образом, для $a\sqrt{3}/2 \le l \le a$ окончательно получаем:

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) =$$

(4.5)
$$\frac{\left(12l^2\sqrt{3} + 18\sqrt{3}a^2\right)\arcsin\frac{\sqrt{3}a}{2l} - 6\sqrt{3}\pi a^2 - 36al + 27a\sqrt{4l^2 - 3a^2} - 4\sqrt{3}\pi l^2 + 9l^2}{3(\pi a\sqrt{3} + 12l)}$$

Отметим, что при $l = a\sqrt{3}/2$ получаем

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) = \frac{6\pi - 24 + 3\sqrt{3}}{4(\pi + 6)} \approx 0.0458.$$

Можно получить результат (4.4)- (4.5) используя формулу (2.3), если подставить в (2.3) $n = 2$ и функцию распределения длины хорды для правильного треугольника (см. [7]).

Abstract. In the paper, a formula to calculate the probability that a random segment $L(\omega, \mathbf{u})$ in $\mathbf{R}^n$ with a fixed direction $\mathbf{u}$ and length l lies entirely in the bounded convex body $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ ($n \ge 2$) is obtained in terms of covariogram of the body $\mathbf{D}$. For any dimension $n \ge 2$, a relationship between the probability $P(L(\omega, \mathbf{u}) \subset \mathbf{D})$ and the orientation-dependent chord length distribution is also obtained. Using this formula, we obtain the explicit form of the probability $P(L(\omega, \mathbf{u}) \subset \mathbf{D})$ in the cases where $\mathbf{D}$ is an n-dimensional ball ($n \ge 2$), or a triangle on the plane.

Список литературы

[1] L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability Addision-Wesley, MA (2004).
[2] R. De-Lin, Topics in Integral Geometry, Utopia press, Singapore (1994).
[3] Ж. Матерон, Случайные Множества и Интегральная Геометрия, Мир, Москва (1978).
[4] G. Bianchi and G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body" Journal of the European Mathematical Society, 11, 1187 – 1202 (2009).
[5] R. Schneider and W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Springer (2008).
[6] V. K. Ohanyan and N. G. Aharonyan, "Tomography of bounded convex domains", SUTRA: International Journal of Mathematical Sciences, 2, no. 1, 1 – 12 (2009).

[7] Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян, "Функция распределения длины хорды для многоугольников", 40, но. 4, 43 – 56 (2005).

[8] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Восстановление треугольников по ковариограмме", Известия НАН Армении, серия Математика, 47, но. 3, 25 – 42 (2013).

[9] Г. С. Арутюнян и В. К. Оганян, "Зависящие от направления распределения сечений выпуклых тел", Известия НАН Армении, серия Математика, 49, но. 3, 3 – 21 (2014).

[10] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Ковариограмма параллелограмма", Известия НАН Армении, серия Математика, 49, но. 4, 17 – 34 (2014).

[11] Н. Г. Агаронян, Г. С. Арутюнян и В. К. Оганян, "Случайная копия отрезка внутри выпуклой области", Известия НАН Армении, серия Математика, 45, но. 5, 5 – 16 (2010).

[12] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Зависящее от ориентации распределение длины случайного отрезка и ковариограмма", Известия НАН Армении, серия Математика, 50, но. 2, 3 – 12 (2015).

[13] Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян, "Кинематическая мера отрезков, содержащихся в области" Известия НАН Армении, серия Математика, 46, но. 5, 3 – 14 (2011).

[14] S. Li, "Coincise formulas for the area and volume of a hyperspherical cap", Asian J. of Mathematics and Statistics, 4, no. 1, 66 – 70 (2011).

Поступила 3 апреля 2017

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 2, 2018, стр. 15 – 30.

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВИЛЕНКИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. НАВАСАРДЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *GGG@ysu.am*, *knavasard@ysu.am*

Аннотация. В работе доказываются теоремы единственности и формулы восстановления коэффициентов рядов по системе Виленкина. При этом от ряда требуется сходимость по мере и выполнения одного необходимого условия на функцию распределения мажоранты частичных сумм.

MSC2010 numbers: 42C10; 42C20.

Ключевые слова: система Виленкина, метод суммирования, единственность.

1. Введение

Напомним определение системы Виленкина. Пусть $\{p_k\}$ некоторая последовательность натуральных чисел, с условием $p_k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Положим $m_0 = 1$, $m_k = m_{k-1}p_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда любое неотрицательное целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \quad \text{где} \quad n \in \{0, 1, \cdots, p_k - 1\}.$$

Любое число $x \in [0, 1)$ тоже единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \quad \text{где} \quad x_k \in \{0, 1, \ldots, p_k - 1\},\ k \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

и для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ имеет место $x_k \neq p_k - 1$. Обобщенные функции Радемахера $R_k(x)$ определяются по формуле

$$R_k(x) := \exp\left(2\pi i \frac{x_k}{p_k}\right). \tag{1.2}$$

Система Виленкина $\Psi := \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется по правилу

$$\Psi_n(x) := \prod_{k=1}^{\infty} R_k^{n_k}(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x_k}{p_k}\right). \tag{1.3}$$

---

[1]Настоящее исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41

Эта система введена в 1947 году Н.Я. Виленкиным [1]. Когда $p_k = 2$, $k \in \mathbb{N}$, система Виленкина совпадает с системой Уолша. Если $p_k = n \in \mathbb{N}$, для всех $k \in \mathbb{N}$, то эта система называется системой Крестенсона-Леви. Если последовательность p_k ограничена, то говорят, что система Ψ порождена ограниченной последовательностью. Свойства таких систем во многом совпадают со свойствами системы Уолша. Однако, в некоторых случаях, это не так (см. например [2]).

В настоящей работе доказываются теоремы единственности для рядов по системе Виленкина. При доказательстве применяется метод суммирования для рядов по обобщенной системе Хаара или Виленкина, введенный в работе [3].

Обозначим

$$\mathfrak{I}_k := \left\{ \left[\frac{j}{m_k}, \frac{j+1}{m_k} \right) : \quad j = 0, 1, \dots, m_k - 1 \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Для интервала $J \in \mathfrak{I}_k$ обозначим через $\tilde{J}$ тот интервал из $\mathfrak{I}_{k-1}$, который содержит J и определим интервалы $(J)_l$, $(l \in \mathbb{Z})$, следующим образом:

(1) $(J)_0 = J$, $\quad (J)_l \in \mathfrak{I}_k$, $\quad (J)_l \subset \tilde{J}$,

(2) правый конец интервала $(J)_l$ совпадает с левым концом интервала $(J)_{l+1}$, причем концы отрезка $\tilde{J}$ отождествляются, т.е. если правый конец интервала $(J)_l$ есть $\dfrac{j}{m_{k-1}}$, то левый конец интервала $(J)_{l+1}$ будет $\dfrac{j-1}{m_{k-1}}$.

Для каждого интервала $J \in \mathfrak{I}_k$ и натурального числа $q \le \frac{p_k}{2}$ положим

$$(J)^q := \bigcup_{l=-q}^{q} (J)_l, \qquad (J)^0 = (J)_0 = J,$$

$$\varphi_J^{(q)}(t) := \begin{cases} \frac{m_k}{q}\left(1 - \frac{|l|}{q}\right), & \text{если} \quad t \in (J)_l, \quad |l| < q, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin (J)^{q-1}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ясно, что (здесь и далее $\mathbf{I}_J$–характеристическая функция множества J)

$$\varphi_J^{(1)}(t) = m_k \mathbf{I}_J(t), \quad \int_0^1 \varphi_J^{(q)}(t)dt = \int_{(J)^{q-1}} \varphi_J^{(q)}(t)dt = 1 \quad \text{для всех } q \le \frac{p_k}{2}.$$

Для каждого натурального числа k и для каждого $x \in [0,1)$ обозначим через $I_{k,x}$ тот интервал из $\mathfrak{I}_k$, который содержит точку x. Иногда, если $J = I_{k,x}$, то для функции определенной в (1.4) будем использовать обозначение $\varphi_{k,x}^{(q)}(t)$, т.е. $\varphi_{k,x}^{(q)}(t) := \varphi_{I_{k,x}}^{(q)}(t)$. Учитывая определение системы $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, очевидно, что при любом $\varphi_{k,x}^{(q)}$, имеем

$$(\Psi_n, \varphi_{k,x}^{(q)}) := \int_0^1 \Psi_n(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt = 0, \quad \text{когда} \quad n \ge m_k.$$

Поэтому для любого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(x) \tag{1.5}$$

и любого $x \in [0,1)$, при любых натуральных k и q $(2q \le p_k)$, определены суммы

$$\sigma_{k,q}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \Psi_n(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt. \tag{1.6}$$

Пусть

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \Psi_n(x)$$

частичная сумма ряда (1.5). Ясно, что

$$\sigma_{k,1}(x) = S_{m_k-1}(x) \quad \text{и} \quad \sigma_{k,q}(x) = \int_0^1 S_{m_r-1}(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt \quad \text{для всех} \quad r \ge k. \tag{1.7}$$

Положим

$$S^*(x) := \sup_m |S_m(x)|, \qquad \sigma^*(x) := \sup_{k,q} |\sigma_{k,q}(x)|.$$

В работе через $C, C_1, C_2, \ldots$ обозначаются постоянные, а через $\mathrm{mes}(A)$ – Лебегова мера множества A.

Теперь мы в состоянии сформулировать наш первый результат

Теорема 1.1. *Существует постоянная $C > 0$, не зависящая от последовательностей $\{a_n\}$ и $\{p_k\}$, такая, что*

$$\sigma^*(x) \le CS^*(x), \qquad x \in [0,1). \tag{1.8}$$

Более того, если ряд (1.5) в точке x сходится и $S(x)$-сумма ряда в этой точке, то

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{k,q}(x) = S(x).$$

Это означает, что метод суммирования ряда (1.5) по формулам (1.6) регулярен. Отметим, что этот метод отличен от ранее рассмотренных методов суммирования рядов по системе Виленкина (см. [4]).

В работах [5] – [7] доказаны теоремы единственности для простых рядов по обобщенной системе Хаара и системе Виленкина, порожденной ограниченной последовательностью p_k, $k \in \mathbb{N}$, и кратных рядов по классической системе Хаара, мажоранты частичных сумм которых удовлетворяют некоторому условию.

В работе [5] доказан следующий результат.

Теорема 1.2. *(В.В.Костин) Пусть система $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ порождена ограниченной последовательностью p_k, $k \in \mathbb{N}$. Тогда, если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$*

ряда (1.5) почти всюду сходятся к некоторой функции $f(x)$ и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется следующее условие:

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \operatorname{mes}\left\{x \in [0,1): \sup_k |S_{m_k-1}(x)| > \lambda_p\right\} = 0, \tag{1.9}$$

тогда для всех n имеют место соотношения:

$$a_n = \lim_{p\to\infty} \int_0^1 [f(t)]_{\lambda_p} \overline{\Psi_n(t)} dt, \tag{1.10}$$

где

$$[g(x)]_\lambda = \begin{cases} g(x), & \text{если } |g(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{если } |g(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В той же работе [5] приведен пример системы $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ порожденной неограниченной последовательностью p_k, $k \in \mathbb{N}$, для которой теорема 1.2 не верна.

Оказывается, что если в теореме 1.2 в условии (1.9) мажоранту частичных сумм $S_{m_k-1}(x)$ заменить мажорантой всей последовательности частичных сумм $S^*(x)$, то формулы (1.10) верны для любой системы Виленкина. Точнее верно следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда (1.5) по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется условие*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p mes\{x \in [0,1): S^*(x) > \lambda_p\} = 0,$$

тогда для всех n имеют место формулы (1.10).

Эта теорема следует из более общей теоремы 1.4 и теоремы 1.1

Теорема 1.4. *Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{p\to+\infty} \lambda_p mes\{x \in [0,1): \sigma^*(x) > \lambda_p\} = 0. \tag{1.11}$$

то для всех n имеют место формулы (1.10).

Напомним, что функция f называется A-интегрируемой на множестве $X \subset [0;1]^d$, если выполняется

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in X : |f(\mathbf{x})| > \lambda\} = 0$$

и существует

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_X [f(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x} =: (A) \int_X f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Из теоремы 1.4 следует утверждение.

Теорема 1.5. *Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда (1.5) по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и выполняется*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot mes\{x \in [0,1] : \sigma^*(x) > \lambda\} = 0,$$

то функция f является A-интегрируемой функцией, а ряд (1.5) является рядом Фурье этой функции в смысле A-интегрирования.

В работе [3] доказано, что если ряд (1.5) является рядом Фурье интегрируемой функции f, то суммы $S_{m_k-1}(t)$ по мере сходятся к f и выполняется

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \mathrm{mes}\{t \in [0,1) : \sigma^*(t) > \lambda\} = 0. \tag{1.12}$$

Поэтому верно следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Для того, чтобы ряд (1.5) являлся бы рядом Фурье интегрируемой функции f, необходимо и достаточно, чтобы суммы $S_{m_k-1}(t)$ по мере сходились к f и выполнялось (1.12).*

В работе [8] аналогичные теоремы без доказательств сформулированы также для обобщенной системы Хаара.

2. Вспомогательные леммы

Пусть семейства $\mathfrak{X} = \{x_k\}_{k=1}^n$ и $\mathcal{S} = \{q_k\}_{k=1}^n \subset \{1, 2, \dots, n\}$ удовлетворяют условиям:

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b, \tag{2.1}$$

$$x_{k+q_k} - x_{k-q_k} \le b - a, \text{ где } x_{k\pm n} = x_k \pm (b-a), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{2.2}$$

Для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ обозначим

$$h_k^*(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_k, \\ 0, & \text{если } x \notin (x_{k-q_k}, x_{k+q_k}), \\ \text{линейная на отрезках } [x_{k-q_k}, x_k] \text{ и } [x_k, x_{k+q_k}]. \end{cases}$$

$$h_k(x) := h_k^*(x) + h_k^*(x + (b-a)) + h_k^*(x - (b-a)).$$

$$H_{\mathfrak{X},\mathcal{S},k}(x) \equiv H_k(x) := h_k(x)\mathrm{I}_{[a,b]}(x). \tag{2.3}$$

Следующая лемма по формулировке и доказательству похожа на лемму 3 из [9].

Лемма 2.1. *Пусть семейства $\mathfrak{X} = \{x_k\}_{k=1}^n$ и $\mathcal{S} = \{q_k\}_{k=1}^n \subset \{1, 2, \dots, n\}$ удовлетворяют условиям (2.1) и (2.2). Тогда существуют неотрицательные числа α_k, $(k = 1, 2, \dots, n)$, такие, что*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k H_k(x) = \mathrm{I}_{[a,b]}(x).$$

Доказательство Сначала докажем, что для любого $P \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ существуют неотрицательные числа $\{\beta_k\}_{k \in P}$ такие, что

$$\sum_{k \in P} \beta_k h_k(x_j) = 1 \quad \text{для всех } j \in P, \tag{2.4}$$

$$\sum_{k \in P} \beta_k h_k(x) \leq 1 \quad \text{для всех } x. \tag{2.5}$$

В случае, когда $\mathrm{card}(P) = 1$ и $P = \{k_0\}$, достаточно взять $\beta_{k_0} = 1$. Допустим утверждение верно при $\mathrm{card}(P) < s$ и докажем, что оно верно и при $\mathrm{card}(P) = s$. Пусть $P = \{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$ и $k_1 < k_2 < \cdots < k_s$. Для каждого набора чисел $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \ldots, s$, положим

$$R_{\{\varepsilon_j\}} = \left\{ (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s) \in [0,1]^s : \ \varepsilon_j \left(\sum_{m=1}^{s} \gamma_m h_{k_m}(x_{k_j}) - 1 \right) \geq 0, \ 1 \leq j \leq s \right\}.$$

Убедимся, что $R_{\{\varepsilon_j\}} \neq \emptyset$ при любом наборе чисел $\varepsilon_j = \pm 1$. В случае когда все $\varepsilon_j = -1$, очевидно, что $(0, 0, \ldots, 0) \in R_{\{\varepsilon_j\}}$. Когда все $\varepsilon_j = 1$, то $(1, 1, \ldots, 1) \in R_{\{\varepsilon_j\}}$ так как $h_k(x) \geq 0$ для всех x и $h_k(x_k) = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть теперь для набора $\varepsilon_j = \pm 1$

$$I^+ := \{j : \ \varepsilon_j = 1\}, \qquad I^- := \{j : \ \varepsilon_j = -1\}$$

и $1 \leq \mathrm{card}(I^+) < s$. В силу нашего предположения, существуют неотрицательные числа β'_m, $m \in I^+$, такие, что

$$\sum_{m \in I^+} \beta'_m h_{k_m}(x_{k_j}) = 1 \quad \text{для всех } \ j \in I^+, \tag{2.6}$$

$$\sum_{m \in I^+} \beta'_m h_{k_m}(x) \leq 1 \quad \text{для всех } \ x. \tag{2.7}$$

Обозначим $\beta_{k_m} = \beta'_m$, если $m \in I^+$ и $\beta_{k_m} = 0$, если $m \in I^-$. Из (2.6) и (2.7) следует, что $\beta_k \in [0, 1]$ и для всех j, $j = 1, 2, \ldots, s$,

$$\varepsilon_j \left(\sum_{m=1}^{s} \beta_{k_m} h_{k_m}(x_{k_j}) - 1 \right) = \varepsilon_j \left(\sum_{m \in I^+} \beta_{k_m} h_{k_m}(x_{k_j}) - 1 \right) \geq 0.$$

Поэтому $(\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \ldots, \beta_{k_s}) \in R_{\{\varepsilon_j\}}$. Итак, для любого набора $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \ldots, s$, множество $R_{\{\varepsilon_j\}}$ не пусто.

Допустим не существуют такие неотрицательные числа β_k, $k \in P$, чтобы выполнялось условие (2.4). Тогда множество

$$A = \left\{ \left(\sum_{m=1}^{s} \gamma_m h_{k_m}(x_{k_1}) - 1, \ldots, \sum_{m=1}^{s} \gamma_m h_{k_m}(x_{k_s}) - 1 \right) : \ (\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \in [0,1]^s \right\}$$

не содержит точку $(0,0,\ldots,0)$. Ясно, что A-выпуклое и компактное множество в $\mathbb{R}^s$. В силу второй теоремы об отделимости выпуклых множеств (см. [10], стр.210), существует линейный функционал $\mathcal{L}$, определенный на $\mathbb{R}^s$, который принимает отрицательные значения на A. Пусть $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_s) = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i a_i$ и

$$\varepsilon_i' = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad \alpha_i \geq 0, \\ -1 & \text{если} \quad \alpha_i < 0. \end{cases}$$

Тогда из непустоты множества $B_{\{\varepsilon_i'\}}$ следует, что функционал $\mathcal{L}$ на множестве A может принимать неотрицательные значения, что противоречит определению функционала $\mathcal{L}$. Полученное противоречие доказывает, что существуют неотрицательные числа β_k, удовлетворяющие условию (2.4).

Из определения функций $h_k(x)$ следует, что $h_k(x) = h_k(x \pm (b-a))$, для любых $x \in [a,b]$ и $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому из (2.2) получим, что

$$\sum_{k \in P} \beta_k h_k(x_{j \pm n}) = 1 \qquad \text{для всех} \quad j \in P. \tag{2.8}$$

Заметим, что на интервалах $[x_{k_r - n}, x_{k_1}]$, $[x_{k_1}, x_{k_2}], \cdots, [x_{k_{r-1}}, x_{k_r}]$ и $[x_{k_r}, x_{k_1+n}]$ функция $\sum\limits_{k \in P} \beta_k h_k(x)$ выпуклая, следовательно, с учетом (2.8) получим, что

$$\sum_{k \in P} \beta_k h_k(x) \leq 1 \qquad \text{для всех} \quad x \in [x_{k_r - n}, x_{k_1 + n}].$$

В частности выполняется неравенство (2.5).

Таким образом неравенства (2.4) и (2.5) доказаны для любого $P \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, в частности для $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ существуют неотрицательные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ такие, что (см. также (2.8))

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k h_k(x_j) = 1 \qquad \text{для всех} \quad j = 0, 1, \ldots n, n+1.$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k h_k(x)$ линейная на каждом интервале $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n$, поэтому из последних равенств получим

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k h_k(x) = 1 \qquad \text{для всех} \quad x \in [x_0, x_{n+1}].$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $\Delta \in \mathfrak{I}_{k-1}$ *и* $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{p_k} \Delta_i$, *где* $\Delta_i \in \mathfrak{I}_k$ *и пронумерованы слева направо, а* $\mathcal{P} = \{\Delta_{r_1}, \Delta_{r_2}, \ldots, \Delta_{r_s}\}$*-некоторое подмножество множества*

$\{\Delta_i\}_{i=1}^{p_k}$. *Если натуральные числа* $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ *удовлетворяют условиям:*

$$q_i \le \frac{p_k}{2}, \quad \text{и} \quad \left(\Delta_{r_i}\right)_{+q_i} \in \mathcal{P}, \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

то существуют неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ *такие, что*

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \varphi_{\Delta_{r_i}}^{(q_i)}(t) = \mathrm{I}_\Delta(t).$$

Доказательство. Пусть x_i-серединная точка отрезка Δ_i, $i = 1, 2, \dots, p_k$. Нетрудно заметить, что если обозначить $\mathcal{X} = \{x_{r_i}\}_{i=1}^{s}$ и $\mathcal{S} = \{q_i\}_{i=1}^{s}$, то для функций $H_i(t) = H_{\mathcal{X},\mathcal{S},i}(t)$ (см. (2.3)) и интервала Δ можно применить лемму 2.1. Следовательно, существуют неотрицательные числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i H_i(t) = \mathrm{I}_\Delta(t).$$

Ясно, что (см. (1.4) и (2.3)) для всех $j = 1, 2, \dots, p_k$ и $i = 1, 2, \dots, s$

$$\varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(x_j) = \frac{m_k}{q_i} H_i(x_j).$$

Из последних равенств следует, что

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{q_i}{m_k} \beta_i \varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(x_j) = 1 \quad \text{для всех} \quad j = 1, 2, \dots, p_k.$$

В сылу того, что функция $\varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(t)$, $(i = 1, 2, \dots, s)$ постоянная на каждом интервале Δ_j, $j = 1, 2, \dots, p_k$, получим, что

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{q_i}{m_k} \beta_i \varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{q_i}{m_k} \beta_i \varphi_{\Delta_{r_i}}^{(q_i)}(t) = \mathrm{I}_\Delta(t).$$

Лемма 2.2 доказана. □

Лемма 2.3. *Пусть* $I = [\frac{r}{m_s}, \frac{r+1}{m_s}) \in \mathcal{I}_s$, $E \subset I$, $E^c := I \setminus E$ *и*

$$\text{(2.9)} \qquad \mathrm{mes}(E) < \varepsilon \cdot |I|,$$

где $\varepsilon \in (0, \frac{1}{20 p_{s+1}})$. *Тогда для любого* $\nu > s$ *существует разложение*

$$\text{(2.10)} \qquad \mathrm{I}_I(t) = \sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta \in \mathcal{I}_k} \alpha_\Delta \varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t) + \sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta \in \mathcal{I}_k} \beta_\Delta \varphi_\Delta^{(0)}(t) + \sum_{\Delta \in \mathcal{I}_\nu} \gamma_\Delta \varphi_\Delta^{(1)}(t),$$

где $\varphi_\Delta^{(0)} = |\Delta|^{-1} \mathrm{I}_\Delta$, *обладающая следующими свойствами*

$$\text{(2.11)} \qquad \alpha_\Delta \ge 0, \quad \beta_\Delta \ge 0, \quad \gamma_\Delta \ge 0, \mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)} \cap E) > \frac{1}{6} \mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}),$$

$$\text{(2.12)} \qquad \mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(0)} \cap E) > \frac{1}{20} \mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(0)}),$$

и если $\alpha_\Delta \neq 0$ *или* $\beta_\Delta \neq 0$ *или* $\gamma_\Delta \neq 0$, *то*

$$\mathrm{mes}(\Delta \cap E^c) \geq \frac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta). \tag{2.13}$$

Доказательство. Лемму докажем методом математической индукции. Когда $\nu = s+1$ из (2.9) и $\varepsilon < \frac{1}{10p_{s+1}}$ получим

$$\mathrm{mes}(\Delta \cap E^c) \geq \frac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta), \text{ если } \Delta \in \mathfrak{I}_{s+1} \text{ и } \Delta \subset I.$$

Поэтому, если для $\Delta \in \mathfrak{I}_{s+1}$ положить $\gamma_\Delta = \frac{1}{m_{s+1}}$, когда $\Delta \subset I$, и $\gamma_\Delta = 0$, когда $\Delta \not\subset I$, то получим (2.10) когда $\nu = s+1$. Отметим, что в этом случае $\alpha_\Delta = \beta_\Delta = 0$.

Докажем, что если разложение (2.10) возможно для ν, то возможно и для $\nu+1$. Фиксируем некоторое $\Delta \in \mathfrak{I}_\nu$, для которого $\gamma_\Delta \neq 0$. Тогда если

$$\mathrm{mes}(\Delta \cap E) > \frac{1}{20}\mathrm{mes}(\Delta), \tag{2.14}$$

то $\gamma_\Delta\varphi_\Delta^{(1)}$ рассмотрим как $\beta_\Delta\varphi_\Delta^{(0)}$. Причем выполнится (2.12). Если же

$$\mathrm{mes}(\Delta \cap E) \leq \frac{1}{20}\mathrm{mes}(\Delta), \tag{2.15}$$

то положим

$$\mathcal{G}(\Delta) := \{\Delta' \in \mathfrak{I}_{\nu+1} : \ \Delta' \subset \Delta, \ \mathrm{mes}(\Delta' \cap E^c) \geq \frac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta')\}. \tag{2.16}$$

Для каждого $\Delta' \in \mathcal{G}(\Delta)$ положим

$$q_{\Delta'} := \min\{l \in \mathbb{N} : \ (\Delta')_{\pm l} \in \mathcal{G}(\Delta)\}. \tag{2.17}$$

Убедимся, что $q_{\Delta'} \leq \frac{p_{\nu+1}}{2}$. Поскольку $p_{\nu+1} \geq 2$, то нужно рассмотреть только случай когда $q_{\Delta'} > 1$. В таком случае из (2.17) следует, что хотья бы каждый пятый из интервалов $(\Delta')_{\pm l}$, $|l| \leq q_{\Delta'}$, не принадлежит $\mathcal{G}(\Delta)$. Поэтому, из (2.16) имеем

$$\mathrm{mes}((\Delta')^{q_{\Delta'}} \cap E_p) > \frac{1}{10}\mathrm{mes}((\Delta')^{q_{\Delta'}}).$$

Из этого и (2.15) вытекает, что $\mathrm{mes}((\Delta')^{q_{\Delta'}}) \leq \frac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta)$. Следовательно можно применить лемму 2.2. Применяя лемму 2.2 найдем такие неотрицательные $\eta_{\Delta'}$, что

$$\gamma_\Delta\varphi_\Delta^{(1)}(t) = \sum_{\Delta' \in \mathcal{G}(\Delta)} \eta_{\Delta'}\varphi_{\Delta'}^{(q_{\Delta'})}(t).$$

Обозначив $\gamma_{\Delta'} := \eta_{\Delta'}$, $\alpha_{\Delta'} := 0$, если $q_{\Delta'} = 1$ и $\alpha_{\Delta'} := \eta_{\Delta'}$, $\gamma_{\Delta'} := 0$ если $q_{\Delta'} > 1$, получим разложение типа (2.10) для $\nu+1$, с неотрицательными коэффициентами. Выполнение (2.13) следует из (2.16). Из того же (2.16) и (2.17) следует (2.11). Лемма 2.3 доказана. □

В работе [3] для интегрируемой функции f введена функция

$$\mathcal{M}^*(f,x) = \sup_{\substack{J \in \mathcal{J}_k \\ 1\le q\le \frac{p_k}{2}}} \frac{1}{|(J)^q|}\int_{(J)^q} |f(t)\varphi^q_{k,x}(t)|dt$$

и доказано, что

(2.18) $$\operatorname{mes}\{x : \mathcal{M}^*(f,x) > \lambda\} \le \frac{3}{\lambda}\|f\|_1, \ \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\operatorname{mes}\{x : \mathcal{M}^*(f,x) > \lambda\} = 0.$$

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $x \in [0,1)$, $k, q \in \mathbb{N}$ и $2q \le p_k$. Допустим $I_{k,x}$ (интервал из $\mathcal{I}_k$, который содержит точку x) имеет вид

$$I_{k,x} = \left[\frac{r}{m_{k-1}} + \frac{s}{m_k}, \frac{r}{m_{k-1}} + \frac{s+1}{m_k}\right),$$

где $r \in \{0,1,\dots,m_{k-1}-1\}$, $s \in \{0,1,\dots,p_k-1\}$. Сумму $S_{m_k-1}(x)$ сгруппируем следующим образом

(3.1)
$$S_{m_k-1}(x) = \sum_{n=0}^{m_k-1} a_n\Psi_n(x) = \sum_{j=0}^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{m_{k-1}-1} a_{\nu+jm_{k-1}}\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x) =: \sum_{j=0}^{p_k-1}\theta_{k,j}(x).$$

Из определения функций $\Psi_n(x)$ (см. (1.1)–(1.3)) для $\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x)$ имеем

(3.2) $$\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x) = \Psi_\nu(x)R^j_k(x) = \Psi_\nu(x)\exp\left(2\pi i\frac{js}{p_k}\right) \quad \text{когда } \nu < m_{k-1}.$$

Заметим, что функция Ψ_ν, $0 \le \nu < m_{k-1}$ постоянна на

$$\widetilde{I}_{k,x} = \left[\frac{r}{m_{k-1}}, \frac{r+1}{m_{k-1}}\right).$$

Поэтому

(3.3) $$(\Psi_{\nu+jm_{k-1}}, \varphi^{(q)}_{k,x}) = \Psi_\nu(\widetilde{I}_{k,x})(R^j_k, \varphi^{(q)}_{k,x}),$$

где $\Psi_\nu(\widetilde{I}_{k,x})$-значение функции Ψ_ν на $\widetilde{I}_{k,x}$, т.е. $\Psi_\nu(\widetilde{I}_{k,x}) = \Psi_\nu(x)$, $x \in \widetilde{I}_{k,x}$, $\nu < m_{k-1}$.

Из определения функций R_k, $\varphi^{(q)}_{k,x}$ и интервала $I_{k,x}$ имеем

(3.4) $$(R^j_k, \varphi^{(q)}_{k,x}) = \frac{1}{q}\sum_{l=-q+1}^{q-1}\left(1-\frac{|l|}{q}\right)\exp\left(2\pi i\frac{j(s+l)}{p_k}\right) =$$

$$\frac{1}{q}\exp\left(2\pi i\frac{js}{p_k}\right)\sum_{l=-q+1}^{q-1}\left(1-\frac{|l|}{q}\right)\exp\left(2\pi i\frac{jl}{p_k}\right) =$$

$$R^j_k(x)\frac{1}{q}\sum_{l=-q+1}^{q-1}\left(1-\frac{|l|}{q}\right)\exp\left(2\pi i\frac{jl}{p_k}\right).$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{l=-(q-1)}^{q-1} \exp(ilu)\left(1-\frac{|l|}{q}\right) = 2K_{q-1}(u) = \frac{1}{q}\left(\frac{\sin\frac{qu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2,$$

где $K_{q-1}(u)$-ядро Фейера для тригонометрической системы (см. [11]).

Следовательно, из (1.7), (3.1)–(3.4) получим, что

$$(3.5)\quad \sigma_{k,q}(x) = \int_0^1 S_{m_k-1}(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt = \sum_{j=0}^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{m_{k-1}-1} a_{\nu+jm_{k-1}}(\Psi_{\nu+jm_{k-1}}, \varphi_{k,x}^{(q)}) =$$

$$\frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{m_{k-1}-1} a_{\nu+jm_{k-1}}\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right) = \frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-1}\theta_{k,j}(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right).$$

Обозначим

$$\Theta_{k,j}(x) = \sum_{p=0}^{j}\theta_{k,p}(x), \qquad \Theta_{k,-1}(x) = 0.$$

Ясно, что

$$(3.6)\qquad |\Theta_{k,j}(x)| \le S^*(x), \quad 0 \le j < p_k.$$

Применяя преобразование Абеля, из (3.5), получим

$$(3.7)\qquad \sigma_{k,q}(x) = \frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-1}(\Theta_{k,j}(x) - \Theta_{k,j-1}(x))K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right) =$$

$$\frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-2}\Theta_{k,j}(x)\left(K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right) - K_{q-1}\left(\frac{2\pi(j+1)}{p_k}\right)\right) +$$

$$\frac{2}{q}\Theta_{k,p_k-1}(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi(p_k-1)}{p_k}\right) =: A_1 + A_2.$$

Поскольку ядро Фейера удовлетворяет условию $0 \le K_{q-1}(t) \le \frac{q}{2}$ для всех $t \in [0, 2\pi]$, то из (3.6) и (3.7) имеем, что

$$(3.8)\qquad |A_2| \le S^*(x).$$

Ясно, что

$$(3.9)\qquad |A_1| \le \frac{2S^*(x)}{q}\sum_{j=0}^{p_k-2}\int_{\frac{2\pi j}{p_k}}^{\frac{2\pi(j+1)}{p_k}} |K'_{q-1}(t)|dt \le \frac{2S^*(x)}{q}\int_0^{2\pi}|K'_{q-1}(t)|dt =$$

$$\frac{4S^*(x)}{q}\int_0^{\pi}|K'_{q-1}(t)|dt = \frac{4S^*(x)}{q^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\left(\frac{\sin^2(qu)}{\sin^2 u}\right)'\right|du.$$

Производная функции $g(u)=\dfrac{\sin^2(qu)}{\sin^2 u}$ представим в следующем виде:

$$g'(u)=\left(\frac{\sin^2(qu)}{u^2}\cdot\frac{u^2}{\sin^2 u}\right)'=\frac{2qu\sin(qu)\cos(qu)-2\sin^2(qu)}{u^3}\cdot\frac{u^2}{\sin^2 u}+$$

$$+\frac{\sin^2(qu)}{u^2}\cdot\frac{2u\sin u-2u^2\cos u}{\sin^3 u}=:g_1(u)+g_2(u). \tag{3.10}$$

Учитывая, что $\sin u\geq\frac{2}{\pi}u$, когда $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, получим следующую оценку:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|g_1(u)|du\leq\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{qu\sin(2qu)-2\sin^2(qu)}{u^3}\right|du=$$

(3.11)

$$=\frac{\pi^2q^2}{4}\int_0^{\frac{\pi q}{2}}\left|\frac{t\sin(2t)-2\sin^2 t}{t^3}\right|dt\leq\frac{\pi^2q^2}{4}\int_0^{\infty}\left|\frac{t\sin(2t)-2\sin^2 t}{t^3}\right|dt\leq C_1q^2.$$

Ясно также, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|g_2(u)|du\leq q^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{2u\sin u-2u^2\cos u}{\sin^3 u}\right|du\leq C_2q^2.$$

Сопоставляя последнее неравенство с (3.9)-(3.11) получим, что

$$|A_1|\leq C_3S^*(x). \tag{3.12}$$

Из (3.12), (3.7), (3.8) выводим $|\sigma_{k,q}(x)|<C_4S^*(x)$ для всех $k\in\mathbb{N}$, $0<q\leq\frac{p_k}{2}$. Тем самым соотношение (1.8) доказано. Теперь допустим для $x\in[0,1)$ выполняется

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n\Psi_n(x)=S. \tag{3.13}$$

Обозначим

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=m_{k-1}}^{m_k-1}a_n\Psi_n(x)\quad\text{и}\quad S^{k,*}(x)=\max_{m<m_k}\left|\sum_{m_{k-1}}^{m}a_n\Psi_n(x)\right|.$$

Тогда из (3.13) имеем

$$\lim_{k\to\infty}S^{k,*}(x)=0.$$

Поэтому, из уже доказанной части теоремы, получим

$$\lim_{k\to\infty}|\sigma_{k,q}(x)-(S_{m_{k-1}-1},\varphi_{k,x}^{(q)})|=\lim_{k\to\infty}|(S^{(k)},\varphi_{k,x}^{(q)})|\leq C\lim_{k\to\infty}S^{k,*}(x)=0.$$

Поскольку сумма $S_{m_{k-1}-1}$ на носителе функции $\varphi_{k,x}^{(q)}$ постоянна и $\|\varphi_{k,x}^{(q)}\|_1=1$, то $(S_{m_{k-1}-1},\varphi_{k,x}^{(q)})=S_{m_{k-1}-1}(x)$. Поэтому,

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{k,q}(x)=S.$$

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Пусть частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда (1.5) по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется (1.11).

Для неотрицательного целого n выберем наименьшее s для которого $n < m_s$. На интервалах $I_u \in \mathfrak{J}_s$, $u = 1, 2, \ldots, m_s$, функция Ψ_n принимает ненулевые постоянные значения. Эти значения обозначим через $\Psi_n(I_u)$. Ясно, что $|\Psi_n(I_u)| = 1$ для всех u и

$$a_n = \int_0^1 S_{m_s-1}(t)\overline{\Psi_n(t)}dt = \sum_{u=1}^{m_s} \overline{\Psi_n(I_u)} \int_{I_u} S_{m_s-1}(t)dt.$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать, что для любого натурального s и любого $I \in \mathfrak{J}_s$ имеет место

$$\lim_{p\to\infty} \int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt = \int_I S_{m_s-1}(t)dt. \tag{3.14}$$

Для фиксированного $I \in \mathfrak{J}_s$ докажем (3.14). Положим

$$E_p = \{x \in I : \sigma^*(x) > \lambda_p\} \ \text{ и } \ E_p^c = \{x \in I : \sigma^*(x) \leq \lambda_p\}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{20p_{s+1}})$. Выберем натуральное число p настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$|\sigma_{k,q}(t)| < \lambda_p \quad \text{для всех} \quad k \leq s+1,\ q \leq \frac{p_k}{2},\ t \in [0,1),$$

$$\lambda_p \cdot \mathrm{mes}(E_p) < \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I). \tag{3.15}$$

Применив лемму **2.3** к I, $E = E_p$, $E_p^c = \{x \in I : \sigma^*(x) \leq \lambda_p\}$, для любого $\nu \geq s+1$ получим разложение

$$\mathbf{1}_I(t) = \sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta\in\mathfrak{J}_k} \alpha_\Delta \varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t) + \sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta\in\mathfrak{J}_k} \beta_\Delta \varphi_\Delta^{(0)}(t) + \sum_{\Delta\in\mathfrak{J}_\nu} \gamma_\Delta \varphi_\Delta^{(1)}(t), \tag{3.16}$$

со свойствами

$$\alpha_\Delta \geq 0, \quad \beta_\Delta \geq 0, \quad \gamma_\Delta \geq 0,$$
$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)} \cap E_p) > \frac{1}{6}\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}),$$
$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(0)} \cap E_p) > \frac{1}{20}\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(0)}),$$

и если $\alpha_\Delta \neq 0$ или $\beta_\Delta \neq 0$ или $\gamma_\Delta \neq 0$, то

$$\mathrm{mes}(\Delta \cap E_p^c) \geq \frac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta).$$

Обозначим

$$F_\nu := \left(\bigcup_{k=s+1}^{\nu} \bigcup_{\Delta\in\mathfrak{J}_k:\alpha_\Delta\neq 0} \mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=s+1}^{\nu-1} \bigcup_{\Delta\in\mathfrak{J}_k:\beta_\Delta\neq 0} \mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(0)}\right) \tag{3.17}$$

и докажем, что

(3.18)

$$\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta+\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset F_\nu}\gamma_\Delta\le 60\mathrm{mes}(E_p)\quad и\quad \sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu}\gamma_\Delta\le\mathrm{mes}(I).$$

Сначала отметим, что интегралы функций $\varphi_\Delta^{(q)}$, фигурирующие в (3.16), равны единице. Поэтому второе неравенство из (3.18) следует из неотрицательности коэффициентов в (3.16). Из (2.11), (2.12) следует, что $\mathcal{M}^*(\mathrm{I}_{E_p},x)>\frac{1}{60}$ когда $x\in F_\nu$. Поэтому (см. (2.18))

$$\mathrm{mes}(F_\nu)<60\mathrm{mes}(E_p). \tag{3.19}$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta+\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset F_\nu}\gamma_\Delta=\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt+$$

$$\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(0)}(t)dt+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset F_\nu}\gamma_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt<\int_{F_\nu}dt<60\mathrm{mes}(E_p).$$

Соотношения (3.18) доказаны. Для любого $\nu\ge s$ имеет место

$$\int_I S_{m_\nu-1}(t)dt=\int_I S_{m_\nu-1}(t)dt \tag{3.20}$$

и (см. (3.19))

$$\left|\int_I[f(t)]_{\lambda_\nu}dt-\int_{I\setminus F_\nu}[f(t)]_{\lambda_\nu}dt\right|<60\lambda_\nu\mathrm{mes}(E_p). \tag{3.21}$$

Из (3.16) имеем

$$\int_I S_{m_\nu-1}(t)dt=\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt+ \tag{3.22}$$

$$\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(0)}(t)dt+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt=$$

$$\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta\int_I S_{m_k-1}(t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt+\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta\int_I S_{m_k-1}(t)\varphi_\Delta^{(0)}(t)dt+$$

$$\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset F}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset I\setminus F_\nu}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt=:$$

$$\omega_{\nu,1}+\omega_{\nu,2}+\omega_{\nu,3}+\omega_{\nu,4}.$$

Из (3.17), (3.16), (1.4) следует, что

$$\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\in I\setminus F_\nu}\gamma_\Delta\varphi_\Delta^{(1)}(t)=\mathrm{I}_{I\setminus F_\nu}.$$

Поэтому

$$\omega_{\nu,4} = \int_{I\setminus F_\nu} S_{m_\nu-1}(t)dt. \tag{3.23}$$

Из методов выборов функций $\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}$, $\varphi_\Delta^{(0)}$, $\varphi_\Delta^{(1)}$ (см. (2.13), (2.16), (3.1), (2.14)), имеем

$$\left|\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt\right| < \lambda_p, \quad \left|\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(0)}(t)dt\right| < \lambda_p,$$

$$\left|\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt\right| < \lambda_p$$

Поэтому, с учетом (3.18), (3.15), получим

$$\omega_{\nu,1} + \omega_{\nu,2} + \omega_{\nu,3} < 60\lambda_p \mathrm{mes}(E_p) < 60\varepsilon \mathrm{mes}(I). \tag{3.24}$$

Очевидно

$$D_p \subset E_p, \quad \text{где} \quad D_p = \{x \in I : [f(x)]_{\lambda_p} \neq f(x)\}. \tag{3.25}$$

Из (3.20)–(3.24) следует, что для любого $\nu > s$ имеет место

(3.26)

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt - \int_I S_{m_s-1}(t)dt\right| < \left|\int_{I\setminus F_\nu} ([f(t)]_{\lambda_p} - S_{m_\nu-1}(t))dt\right| + 120\lambda_p \mathrm{mes}(E_p).$$

Учитывая, что $|S_{m_\nu-1}(t)| \leq \lambda_p$, когда $t \in I\setminus F_\nu$, из (3.25), (3.26), получим

(3.27)

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt - \int_I S_{m_s-1}(t)dt\right| < \left|\int_{I\setminus(F_\nu\cup E_p)} (f(t) - S_{m_\nu-1}(t))dt\right| + 122\lambda_p \mathrm{mes}(E_p).$$

Поскольку последовательность $S_{m_\nu-1}(t)$ по мере сходится к $f(t)$ то для достаточно больших ν

$$\mathrm{mes}\{t \in I : \ |S_{m_\nu-1}(t) - f(t)| > \varepsilon\} < \varepsilon \mathrm{mes}(I).$$

Поэтому с учетом того, что $|S_{m_\nu-1}(t) - f(t)| \leq 2\lambda_p$, $t \in I\setminus(F_\nu \cup E_p)$, из (3.27) и (3.15) получим

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt - \int_I S_{m_s-1}(t)dt\right| \leq 125\varepsilon\, \mathrm{mes}(I).$$

Теорема 1.4 доказана.

Abstract. In this paper, we prove uniqueness theorems and restoration formulas for coefficients of series by Vilenkin system. The series is assumed to be convergent in measure and the distribution function of the majorant of partial sums satisfies some necessary condition.

Список литературы

[1] Н. Я. Виленкин, "Об одном классе полных ортонормальных систем", Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, no. 4, 363 – 400 (1947).

[2] В. А. Скворцов, М. П. Королева, "О рядах по мультипликативным системам, сходящимся к функциям интегрируемым по Данжуа", Матем. сб., **186**, no. 12, 129 – 150 (1995).

[3] G. G. Gevorkyan, K. A. Navasardyan, "On a summation method for Vilenkin and generalized Haar systems", Proceedings of the YSU, Phis.-Math. series, **51**, no. 1, 13 – 17 (2017).

[4] F. Weisz, "Summation of Fourier series", Acta Math. Paedagog. Nyhazi., **20**, 239 – 266 (2004).

[5] В. В. Костин, "К вопросу восстановления коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций", Матем. заметки, **73**, no. 5, 704 – 723 (2003).

[6] В. В. Костин, "Обобщение теоремы Л. А. Балашова о подрядах ряда Фурье-Хаара", Матем. заметки, **76**, no. 5, 740 – 747 (2004).

[7] Г. Г. Геворкян, "О единственности аддитивных функций двоичных кубов и рядов по системе Хаара", Изв. НАН Армении, сер. матем., **30**, no. 5, 7 – 21 (1995).

[8] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, "Об одном методе суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара", Докл. НАН Армении, **117**, no. 1, 20 – 25 (2017).

[9] Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Матем. сборник, **184**, no. 11, 93 – 130 (1993).

[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, М., Наука (1989).

[11] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, Издательство АФЦ (1999).

Поступила 24 марта 2017

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 2, 2018, стр. 31 – 46.

ALMOST EVERYWHERE STRONG SUMMABILITY OF FEJÉR MEANS OF RECTANGULAR PARTIAL SUMS OF TWO-DIMENSIONAL WALSH-FOURIER SERIES

U. GOGINAVA

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia[1]
E-mail: *zazagoginava@gmail.com*

Abstract. In this paper we prove a BMO-estimate for rectangular partial sums of two-dimensional Walsh-Fourier series, and using this result we establish almost everywhere exponential summability of rectangular partial sums of double Walsh-Fourier series.

MSC2010 numbers: 42C10.

Keywords: two-dimensional Walsh system; strong summability; a.e. summability.

1. Introduction

We denote the set of all non-negative integers by $\mathbf{N}$, the set of all integers by $\mathbb{Z}$ and the set of dyadic rational numbers in the unit interval $\mathbf{I} = [0,1)$ by $\mathbf{Q}$. In particular, each element of $\mathbf{Q}$ has the form $\frac{p}{2^n}$ for some $p,n \in \mathbf{N}$, $0 \leq p \leq 2^n$.

Let $r_0(x)$ be the function defined by

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in [0,1/2) \\ -1, & \text{if } x \in [1/2,1), \end{cases} \qquad r_0(x+1) = r_0(x).$$

The Rademacher system is defined by $r_n(x) = r_0(2^n x)$, $n \geq 1$. Let $w_0, w_1, \ldots$ denote the Walsh functions, that is, $w_0(x) = 1$ and if $k = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_s}$ is a positive integer with $n_1 > n_2 > \cdots > n_s$, then $w_k(x) = r_{n_1}(x) \cdots r_{n_s}(x)$. The Walsh-Dirichlet kernel is defined by

$$D_0(x) = 0, \; D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x), \quad n \geq 1.$$

Given $x \in \mathbf{I}$, the expansion

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-(k+1)}, \tag{1.1}$$

where each $x_k = 0$ or 1, will be called a dyadic expansion of x. If $x \in \mathbf{I} \backslash \mathbf{Q}$, then (1.1) is uniquely determined. For the dyadic expansion $x \in \mathbf{Q}$ we choose the one

[1]The research was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation grant no.DI/9/5-100/13

for which $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. The dyadic addition of numbers $x, y \in \mathbb{I}$ in terms of their dyadic expansions

$$x \dotplus y := \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - y_k| \, 2^{-(k+1)}.$$

Denote $I_N := [0, 2^{-N})$ and $I_N(x) := x \dotplus I_N$. We consider the double system $\{w_n(x) \times w_m(y) : n, m \in \mathbb{N}\}$ on the unit square $\mathbb{I}^2 = [0,1) \times [0,1)$. Throughout the paper the notation $a \lesssim b$ will stand for $a \leq c \cdot b$, where c is an absolute constant.

The norm (or pre-norm) of the space $L_p(\mathbb{I}^2)$ is defined by

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{I}^2} |f|^p \right)^{1/p} \qquad (0 < p < +\infty).$$

If $f \in L_1(\mathbb{I}^2)$, then

$$\hat{f}(n,m) = \int_{\mathbb{I}^2} f(x_1, x_2) \, w_n(x_1) w_m(x_2) dx_1 dx_2$$

is the (n,m)-th Fourier coefficient of f.

The rectangular partial sums of double Fourier series with respect to the Walsh system are defined by

$$S_{M,N}(x_1, x_2; f) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(m,n) \, w_m(x_1) w_n(x_2).$$

Denote

$$S_n^{(1)}(x_1, x_2; f) := \sum_{l=0}^{n-1} \hat{f}(l, x_2) \, w_l(x_1), \quad S_m^{(2)}(x_1, x_2; f) := \sum_{r=0}^{m-1} \hat{f}(x_1, r) \, w_r(x_2),$$

where

$$\hat{f}(l, x_2) = \int_{\mathbb{I}} f(x_1, x_2) \, w_l(x_1) \, dx_1, \quad \hat{f}(x_1, r) = \int_{\mathbb{I}} f(x_1, x_2) \, w_r(x_2) \, dx_2.$$

Recall the definition of the space $BMO[\mathbb{I}^2]$. Let $f \in L_1(\mathbb{I}^2)$. We say that f has a bounded mean oscillation $(f \in BMO[\mathbb{I}^2])$ if

$$\|f\|_{BMO} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

where $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f$ and the supremum is taken over all dyadic squares $Q \subset \mathbb{I}^2$.

For an arbitrary sequence of numbers $\xi := \{\xi_{n_1 n_2} : n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots\}$, and $\delta_k^n := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ we define

$$BMO[\xi] := \sup_{0 \leq n_1, n_2 < \infty} \left\| \sum_{k_1=0}^{2^{n_1}-1} \sum_{k_2=0}^{2^{n_2}-1} \xi_{k_1 k_2} \mathbb{I}_{\delta_{k_1}^{n_1}}(t_1) \mathbb{I}_{\delta_{k_2}^{n_2}}(t_2) \right\|_{BMO},$$

where $\mathbb{I}_E$ is the characteristic function of a set $E \subset \mathbb{I}^2$.

We denote by $L(\log L)^{\alpha}(\mathbb{I}^2)$ the class of measurable functions f satisfying

$$\int_{\mathbb{I}^2} |f| \left(\log^+ |f|\right)^{\alpha} < \infty,$$

where $\log^+ u := \mathbb{I}_{(1,\infty)} \log u$. Denote by $S_n^T(x,f)$ the partial sums of the trigonometric Fourier series of f, and let

$$\sigma_n^T(x,f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k^T(x,f)$$

be the $(C,1)$ means. Fejer [1] proved that $\sigma_n^T(f)$ converges to f uniformly for any 2π-periodic continuous function. In [15], Lebesgue established almost everywhere convergence of $(C,1)$ means for $f \in L_1(\mathbb{T}), \mathbb{T} := [-\pi, \pi)$. The strong summability problem, that is, convergence of the strong means

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \left|S_k^T(x,f) - f(x)\right|^p, \quad x \in \mathbb{T}, \quad p > 0, \tag{1.2}$$

was first considered by Hardy and Littlewood in [13]. They showed that for any $f \in L_r(\mathbb{T})$ $(1 < r < \infty)$ the strong means tend to 0 a.e. as $n \to \infty$. The Fourier series of a function $f \in L_1(\mathbb{T})$ is said to be (H,p)-summable at $x \in T$, if the strong means (1.2) converge to 0 as $n \to \infty$. The (H,p)-summability problem in $L_1(\mathbb{T})$ has been investigated by Marcinkiewicz [16] for $p = 2$, and later by Zygmund [29] for general case $1 \le p < \infty$. In [18], Oskolkov obtained the following result: let $f \in L_1(\mathbb{T})$ and let Φ be a continuous positive convex function on $[0, +\infty)$ with $\Phi(0) = 0$ and $\ln \Phi(t) = O(t/\ln\ln t)$, $t \to \infty$, then for almost all x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \Phi\left(\left|S_k^T(x,f) - f(x)\right|\right) = 0. \tag{1.3}$$

It was noted in [18] that Totik announced a conjecture that (1.3) holds almost everywhere for any $f \in L_1(\mathbb{T})$, provided that $\ln \Phi(t) = O(t)$, $t \to \infty$. In [19] Rodin proved the following statement.

Theorem R. *Let $f \in L_1(\mathbb{T})$. Then for any $A > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \left(\exp\left(A\left|S_k^T(x,f) - f(x)\right|\right) - 1\right) = 0$$

for a.e. $x \in \mathbb{T}$.

G. Karagulyan [15] proved that the following is true.

Theorem K. *Suppose that a continuous increasing function $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\Phi(0) = 0$, satisfies the condition*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log \Phi(t)}{t} = \infty.$$

Then there exists a function $f \in L_1(\mathbb{T})$ *for which*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \Phi\left(\left|S_k^{\mathbb{T}}(x, f)\right|\right) = \infty$$

for any $x \in \mathbb{T}$.

For Walsh system Rodin [22] proved that the following is true.

Theorem R2 (Rodin). *If* $\Phi(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$, *is an increasing continuous function satisfying*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \Phi(t)}{t} < \infty, \tag{1.4}$$

then the partial sums of Walsh-Fourier series of any function $f \in L_1(\mathbb{I})$ *satisfy the condition*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi\left(|S_k(x; f) - f(x)|\right) = 0$$

almost everywhere on $\mathbb{I}$.

In [3] it was established that, as in the trigonometric case [15], the condition (1.4) is sharp for a.e. Φ-summability of Walsh-Fourier series. More precisely, in [3] was proved the following statement.

Theorem GGK. *If an increasing function* $\Phi(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *satisfies the condition*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \Phi(t)}{t} = \infty,$$

then there exists a function $f \in L_1(\mathbb{I})$ *such that*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi\left(|S_k(x; f)|\right) = \infty \quad \textit{for any} \quad x \in \mathbb{I}.$$

The two-dimensional Fejér summability of $f \in L\log^+ L(\mathbb{I}^2)$ was proved by Zygmund [30] for trigonometric Fourier series and by Myricz et al. [18] (see also Weisz [26]) for Walsh-Fourier series. The two-dimensional strong summability, that is,

$$\frac{1}{2^{n_1+n_2}} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} |S_{k_1,k_2}(x_1, x_2; f) - f(x_1, x_2)|^p \to 0 \quad \text{a.e. as } n \to \infty$$

was established by Gogoladze [10] for trigonometric Fourier series and for $f \in L\log^+ L(\mathbb{T}^2)$. The same result for multi-dimensional Walsh-Fourier series is due to Rodin [21] (see also Weisz [27]). These results show that in the case of two-dimensional functions both the $(C; 1, 1)$ summability and the $(C; 1, 1)$ strong summability have the same maximal convergence space $L\log^+ L$.

In [9], a BMO-estimate for quadratic partial sums of two-dimensional trigonometric Fourier series was proved, from which almost everywhere exponential summability of quadratic partial sums of double Fourier series was derived.

The results on strong summation and approximation of trigonometric Fourier series have been extended for several other orthogonal systems. The problem of summability of multiple Fourier series have been investigated by Gogoladze [11, 12], Wang [26], Zhag [29], Glukhov [4], Goginava [5, 6], Goginava and Gogoladze [7, 8] and Gat et al. [2]. In this paper we study the problem of BMO-estimation for rectangular partial sums of two-dimensional Walsh-Fourier series.

The main results of the present paper are the following two theorems.

Theorem 1.1. *If $f \in L(\log L)^2(\mathbb{I}^2)$, then*

$$\left|\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2 : BMO[S_{n_1 n_2}(x_1, x_2; f)] > \lambda\right\}\right| \lesssim \frac{1}{\lambda}\left(1 + \int_{\mathbb{I}^2} |f| (\log |f|)^2\right).$$

The next theorem shows that the rectangular sums of two-dimensional Walsh-Fourier series of a function $f \in L(\log L)^2(\mathbb{I}^2)$ are almost everywhere exponentially summable to the function f.

Theorem 1.2. *Suppose that $f \in L(\log L)^2(\mathbb{I}^2)$. Then for any $A > 0$*

$$\lim_{m_1, m_2 \to \infty} \frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left(\exp\left(A\left|S_{n_1 n_2}(x_1, x_2; f) - f(x_1, x_2)\right|\right) - 1\right) = 0$$

for a.e. $(x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2$.

2. Auxiliary Results

In this section we recall some known results and prove two lemmas needed in the proofs of main results. Consider the following operator, introduced by Schipp [23]:

$$V_n(x; f) := \left(\sum_{l=0}^{2^n-1}\left(\int_{l2^{-n}}^{(l+1)2^{-n}} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} \mathbb{I}_{I_j}(t) S_{2^n}(x + t + e_j, f)\, dt\right)^2\right)^{1/2},$$

and denote $V(f) := \sup_n V_n(f)$. The following theorems were proved by Schipp [23].

Theorem Sch1. [23] *Let $f \in L_1(\mathbb{I})$. Then*

$$\mu\{|Vf| > \lambda\} \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda} \quad \|Vf\| \lesssim 1 + \int_{\mathbb{I}} |f| \log^+ |f| \quad \left(f \in L \log^+ L(\mathbb{I})\right).$$

Theorem Sch2. [23] *The following estimate holds:*

$$\left\{\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{2^n-1}|S_m(x;f)|^2\right\}^{1/2}\lesssim V_n(x;|f|).$$

We set

$$V_{m_1m_2}(x_1,x_2;f)$$
$$:=\left(\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}\left(\int\limits_{l_12^{-m_1}}^{(l_1+1)2^{-m_1}}\int\limits_{l_22^{-m_2}}^{(l_2+1)2^{-m_2}}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}2^{j_1-1}\mathbb{I}_{I_{j_1}}(t_1)\sum_{j_2=0}^{m_2-1}2^{j_2-1}\mathbb{I}_{I_{j_2}}(t_2)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1+e_{j_1},x_2+t_2+e_{j_2};f)\,dt_1dt_2\right)^2\right)^{1/2}.$$

For a two-dimensional integrable function f we introduce the following functions:

$$:\quad V_n^{(1)}(x_1,x_2;f)=\left(\sum_{l=0}^{2^n-1}\left(\int\limits_{l2^{-n}}^{(l+1)2^{-n}}\sum_{j=0}^{n-1}2^{j-1}\mathbb{I}_{I_j}(t)\,S_{2^n}^{(1)}(x_1+t+e_j,x_2;f)^2\,dt\right)^2\right)^{1/2}$$

$$:\quad V_n^{(2)}(x_1,x_2;f)=\left(\sum_{l=0}^{2^n-1}\left(\int\limits_{l2^{-n}}^{(l+1)2^{-n}}\sum_{j=0}^{n-1}2^{j-1}\mathbb{I}_{I_j}(t)\,S_{2^n}^{(2)}(x_1,x_2+t+e_j;f)\,dt\right)^2\right)^{1/2}.$$

and

$$V^{(s)}(x_1,x_2;f):=\sup_n\left|V_n^{(s)}(x_1,x_2;f)\right|,\quad s=1,2.$$

Lemma 2.1. *The following estimate holds:*

$$\left\{\frac{1}{2^{m_1+m_2}}\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1}|f*(D_{n_1}\otimes D_{n_2})|^2\right\}^{1/2}\lesssim V_{m_1m_2}(x_1,x_2;|f|).$$

Proof. Let

$$\varepsilon_{ji}=\begin{cases}-1, & \text{if } j=0,1,...,i-1\\ 1, & \text{if } j=i.\end{cases}$$

In [23], Schipp proved that

$$\begin{aligned}D_m(t)&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{I}_{I_k\setminus I_{k+1}}(t)\sum_{j=0}^{k}\varepsilon_{kj}2^{j-1}w_m(t+e_j)\\&\quad-\frac{1}{2}w_m(t)+(m+1/2)\mathbb{I}_{I_n}(t),\quad m<2^n.\end{aligned}$$

Then we can write

(2.1)
$$H_{m_1m_2}(x_1,x_2;f)$$
$$:=\left\{\frac{1}{2^{m_1+m_2}}\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1}|S_{2^{m_1}2^{m_2}}(f)*(D_{n_1}\otimes D_{n_2})|^2\right\}^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left| \int_{\mathbb{I}^2} S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1, x_2+t_2; f) \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \mathbb{I}_{I_{k_1} \setminus I_{k_1+1}}(t_1) \right.\right.$$

$$\times \sum_{j_1=0}^{k_1} \varepsilon_{k_1 j_1} 2^{j_1-1} w_{n_1}(t_1+e_{j_1}) \sum_{k_2=0}^{m_2-1} \mathbb{I}_{I_{k_2} \setminus I_{k_2+1}}(t_2)$$

$$\left.\left. \times \sum_{j_2=0}^{k_2} \varepsilon_{k_2 j_2} 2^{j_2-1} w_{n_2}(t_2+e_{j_2})\, dt_1 dt_2 \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left| \int_{\mathbb{I}^2} S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1, x_2+t_2; f) \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \mathbb{I}_{I_{k_1} \setminus I_{k_1+1}}(t_1) \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sum_{j_1=0}^{k_1} \varepsilon_{k_1 j_1} 2^{j_1-1} w_{n_1}(t_1+e_{j_1}) \frac{w_{n_2}(t_2)}{2} dt_1 dt_2 \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left| \int_{\mathbb{I}^2} S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1, x_2+t_2; f) \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \mathbb{I}_{I_{k_1} \setminus I_{k_1+1}}(t_1) \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sum_{j_1=0}^{k_1} \varepsilon_{k_1 j_1} 2^{j_1-1} w_{n_1}(t_1+e_{j_1}) (n_2+1/2) \mathbb{I}_{I_{m_2}}(t_2)\, dt_1 dt_2 \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left| \int_{\mathbb{I}^2} S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1, x_2+t_2; f) \sum_{k_2=0}^{m_2-1} \mathbb{I}_{I_{k_2} \setminus I_{k_2+1}}(t_2) \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sum_{j_2=0}^{k_2} \varepsilon_{k_2 j_2} 2^{j_2-1} w_{n_2}(t_2+e_{j_2}) \frac{w_{n_1}(t_1)}{2} dt_1 dt_2 \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left| \int_{\mathbb{I}^2} S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1, x_2+t_2; f) \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{w_{n_1}(t_1)}{2} \frac{w_{n_2}(t_2)}{2} dt_1 dt_2 \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left| \int_{\mathbb{I}^2} S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1, x_2+t_2; f) \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{w_{n_1}(t_1)}{2} (n_2+1/2) \mathbb{I}_{I_{m_2}}(t_2)\, dt_1 dt_2 \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left| \int_{\mathbb{I}^2} S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1, x_2+t_2; f) \sum_{k_2=0}^{m_2-1} \mathbb{I}_{I_{k_2} \setminus I_{k_2+1}}(t_2) \right.\right.$$

$$\times \sum_{j_2=0}^{k_2} \varepsilon_{k_2 j_2} 2^{j_2-1} w_{n_2}\left(t_2+e_{j_2}\right)\left(n_1+1/2\right) \mathbb{I}_{I_{m_1}}\left(t_1\right) dt_1 dt_2 \Bigg|^2 \Bigg\}^{1/2}$$

$$+\left\{\frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left| \int_{\mathbb{I}^2} S_{2^{m_1} 2^{m_2}}\left(x_1+t_1, x_2+t_2; f\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \frac{w_{n_2}\left(t_2\right)}{2}\left(n_1+1/2\right) \mathbb{I}_{I_{m_1}}\left(t_1\right) dt_1 dt_2\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$+\left\{\frac{1}{2^{m_1+m_2}} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \left| \int_{\mathbb{I}^2} S_{2^{m_1} 2^{m_2}}\left(x_1+t_1, x_2+t_2; f\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(n_1+1/2\right) \mathbb{I}_{I_{m_1}}\left(t_1\right)\left(n_2+1/2\right) \mathbb{I}_{I_{m_2}}\left(t_2\right) dt_1 dt_2\right|^2\right\}^{1/2}:=\sum_{i=1}^{5} R_i .$$

There is a suitable vector

$$\left\{\beta_{n_1 n_2}^{(1)}\left(x_1, x_2\right): 0 \leq n_1<2^{m_1}, 0 \leq n_2<2^{m_2}\right\}$$

such that

$$\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1}\left|\beta_{n_1 n_2}^{(1)}\left(x_1, x_2\right)\right|^2=1$$

and

$$2^{(m_1+m_2)/2} R_1=\int_{\mathbb{I}^2} \sum_{j_1=0}^{m_1-1} 2^{j_1-1}\left(\sum_{k_1=j_1}^{m_1-1} \varepsilon_{k_1 j_1} \mathbb{I}_{I_{k_1} \backslash I_{k_1+1}}\left(t_1+e_{j_1}\right)\right) \tag{2.2}$$

$$\times \sum_{j_2=0}^{m_2-1} 2^{j_1-1}\left(\sum_{k_2=j_2}^{m_2-1} \varepsilon_{k_2 j_2} \mathbb{I}_{I_{k_2} \backslash I_{k_2+1}}\left(t_1+e_{j_2}\right)\right)$$

$$\times S_{2^{m_1} 2^{m_2}}\left(x_1+t_1+e_{j_1}, x_2+t_2+e_{j_2}; f\right)$$

$$\times \sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \beta_{n_1 n_2}^{(1)}\left(x_1, x_2\right) w_{n_1}\left(t_1\right) w_{n_2}\left(t_2\right) dt_1 dt_2$$

$$\leq \int_{\mathbb{I}^2} \sum_{j_1=0}^{m_1-1} 2^{j_1-1} \mathbb{I}_{I_{j_1}}\left(t_1\right) \sum_{j_2=0}^{m_2-1} 2^{j_2-1} \mathbb{I}_{I_{j_2}}\left(t_2\right)$$

$$\times S_{2^{m_1} 2^{m_2}}\left(x_1+t_1+e_{j_1}, x_2+t_2+e_{j_2} ;|f|\right)$$

$$\times\left|\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1} \beta_{n_1 n_2}^{(1)}\left(x_1, x_2\right) w_{n_1}\left(t_1\right) w_{n_2}\left(t_2\right)\right| dt_1 dt_2 .$$

Analogously, we can prove that

$$2^{(m_1+m_2)/2} R_2 \leq \int_{\mathbb{I}^2} \sum_{j_1=0}^{m_1-1} 2^{j_1-1} \mathbb{I}_{I_{j_1}}\left(t_1\right) \tag{2.3}$$

$$\times S_{2^{m_1} 2^{m_2}}\left(x_1+t_1+e_{j_1}, x_2+t_2+e_0 ;|f|\right)$$

$$\times\left|\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1}\beta^{(2)}_{n_1n_2}(x_1,x_2)\,w_{n_1}(t_1)\,w_{n_2}(e_0)\,w_{n_2}(t_2)\right|dt_1dt_2,$$

(2.4)

$$2^{(m_1+m_2)/2}R_4\lesssim\int\limits_{\mathbb{I}^2}\sum_{j_2=0}^{m_2-1}2^{j_2-1}\mathbb{I}_{I_{j_2}}(t_2)\,S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1+e_0,x_2+t_2+e_{j_2};|f|)$$

$$\times\left|\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1}\beta^{(4)}_{n_1n_2}(x_1,x_2)\,w_{n_1}(t_1)\,w_{n_1}(e_0)\,w_{n_2}(t_2)\right|dt_1dt_2.$$

(2.5) $$2^{(m_1+m_2)/2}R_5\lesssim\int\limits_{\mathbb{I}^2}S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1+e_0,x_2+t_2+e_0;|f|)$$

$$\times\left|\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1}\beta^{(5)}_{n_1n_2}(x_1,x_2)\,w_{n_1}(t_1)\,w_{n_1}(e_0)\,w_{n_2}(t_2)\,w_{n_2}(e_0)\right|dt_1dt_2,$$

where

$$\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\left|\beta^{(s)}_{n_1}(x_1,x_2)\right|^2=1\ \ (x_1,x_2)\in\mathbb{I}^2,\ s=2,4,5.$$

Now, we estimate R_3. There is a suitable vector $\left\{\beta^{(3)}_{n_1}(x_1,x_2):0\leq n_1<2^{m_1}\right\}$ such that

$$\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\left|\beta^{(3)}_{n_1}(x_1,x_2)\right|^2=1,\ \ (x_1,x_2)\in\mathbb{I}^2$$

and

(2.6) $$2^{(m_1+m_2)/2}R_3$$

$$\leq c2^{3m_2/2}\int\limits_{I\times I_{m_2}}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}2^{j_1-1}\mathbb{I}_{I_{j_1}}(t_1)\,S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1+e_{j_1},x_2+t_2;|f|)$$

$$\times\left|\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\beta^{(3)}_{n_1}(x_1,x_2)\,w_{n_1}(t_1)\right|dt_1dt_2.$$

Analogously, we can prove that

(2.7) $$2^{(m_1+m_2)/2}R_6\lesssim2^{(3/2)m_2}\int\limits_{I\times I_{m_2}}S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1+e_0,x_2+t_2;|f|)$$

$$\times\left|\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\beta^{(6)}_{n_1}(x_1,x_2)\,w_{n_1}(e_0)\,w_{n_1}(t_1)\right|dt_1dt_2,$$

(2.8) $$2^{(m_1+m_2)/2}R_7\lesssim2^{(3/2)m_1}\int\limits_{I_{m_1}\times I}\sum_{j_2=0}^{m_2-1}2^{j_2-1}\mathbb{I}_{I_{j_2}}(t_2)$$

$$\times S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1,x_2+t_2+e_{j_2};|f|)$$

$$\times\left|\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\beta_{n_1}^{(7)}(x_1,x_2)\,w_{n_2}(t_2)\right|dt_1dt_2,$$

$$2^{(m_1+m_2)/2}R_8\lesssim 2^{(3/2)m_1}\int\limits_{I_{m_1}\times I}S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1\dotplus t_1,x_2\dotplus t_2\dotplus e_0;|f|) \tag{2.9}$$

$$\times\left|\sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1}\beta_{n_2}^{(8)}(x_1,x_2)\,w_{n_2}(e_0)\,w_{n_2}(t_2)\right|dt_1dt_2,$$

$$2^{(m_1+m_2)/2}R_9\lesssim 2^{(3/2)(m_1+m_2)}\int\limits_{I_{m_1}\times I_{m_2}}S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1\dotplus t_1,x_2\dotplus t_2;|f|), \tag{2.10}$$

where

$$\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\left|\beta_{n_1}^{(s)}(x_1,x_2)\right|^2=1,\ \sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1}\left|\beta_{n_2}^{(8)}(x_1,x_2)\right|^2=1\ \ (x_1,x_2)\in\mathbb{I}^2.\ \ (x_1,x_2)\in\mathbb{I}^2,\ \ s=6,7$$

Next, we set

$$P_{m_1m_2}^{(1)}(x_1,x_2):=\sum_{n_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{n_2=0}^{2^{m_2}-1}\beta_{n_1n_2}^{(1)}(x_1,x_2)\,w_{n_1}(t_1)\,w_{n_2}(t_2),$$

and use (2.2) to obtain

$$2^{(m_1+m_2)/2}R_1$$

$$=\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}\left|P_{m_1m_2}^{(1)}\left(\frac{l_1}{2^{m_1}},\frac{l_2}{2^{m_2}}\right)\right|\int\limits_{l_12^{-m_1}}^{(l_1+1)2^{-m_1}}\int\limits_{l_22^{-m_2}}^{(l_2+1)2^{-m_2}}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}2^{j_1-1}\mathbb{I}_{I_{j_1}}(t_1)$$

$$\times\sum_{j_2=0}^{m_2-1}2^{j_2-1}\mathbb{I}_{I_{j_2}}(t_2)\,S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1\dotplus t_1\dotplus e_{j_1},x_2\dotplus t_2\dotplus e_{j_2};|f|)\,dt_1dt_2$$

$$\leq\left(\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}\left|P_{m_1m_2}^{(1)}\left(\frac{l_1}{2^{m_1}},\frac{l_2}{2^{m_2}}\right)\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}\left(\int\limits_{l_12^{-m_1}}^{(l_1+1)2^{-m_1}}\int\limits_{l_22^{-m_2}}^{(l_2+1)2^{-m_2}}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}2^{j_1-1}\mathbb{I}_{I_{j_1}}(t_1)\sum_{j_2=0}^{m_2-1}2^{j_2-1}\mathbb{I}_{I_{j_2}}(t_2)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1\dotplus t_1\dotplus e_{j_1},x_2\dotplus t_2\dotplus e_{j_2};|f|)\,dt_1dt_2\right)^2\right)^{1/2}.$$

Taking into account that

$$\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}\left|P_{m_1m_2}^{(1)}\left(\frac{l_1}{2^{m_1}},\frac{l_2}{2^{m_2}}\right)\right|^2$$

$$=2^{m_1+m_2}\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}\int\limits_{l_12^{-m_1}}^{(l_1+1)2^{-m_1}}\int\limits_{l_22^{-m_2}}^{(l_2+1)2^{-m_2}}\left|P_{m_1m_2}^{(1)}(t_1,t_2)\right|^2dt_1dt_2$$

$$2^{m_1+m_2}\int_{I^2}\left|P^{(1)}_{m_1 m_2}(t_1,t_2)\right|^2 dt_1 dt_2 \le 2^{m_1+m_2},$$

we obtain

(2.11) $$R_1 \lesssim V_{m_1 m_2}(x_1,x_2;|f|).$$

Analogously, using (2.3)-(2.10) we can prove that for $s=2,\dots,9$

(2.12) $$R_s \lesssim V_{m_1 m_2}(x_1,x_2;|f|).$$

Combining (2.1), (2.11) and (2.12) we conclude the proof of lemma 2.1. □

Lemma 2.2. *The following estimate holds:*

$$V_{m_1 m_2}(x_1,x_2;|f|) \lesssim V^{(1)}\left(x_1,x_2;V^{(2)}(|f|)\right).$$

Proof. There is a suitable vector$\{a_{l_1 l_2}(x_1,x_2) : 0\le l_1<2^{m_1}, 0\le l_2<2^{m_2}\}$ such that

$$\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}|a_{l_1 l_2}(x_1,x_2)|^2=1$$

and

$$V_{m_1 m_2}(x_1,x_2;|f|)=\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\int_{l_1 2^{-m_1}}^{(l_1+1)2^{-m_1}}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}2^{j_1-1}\mathbb{I}_{I_{j_1}}(t_1)$$

$$\times\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}a_{l_1 l_2}(x_1,x_2)\left(\int_{l_2 2^{-m_2}}^{(l_2+1)2^{-m_2}}\sum_{j_2=0}^{m_2-1}2^{j_2-1}\mathbb{I}_{I_{j_2}}(t_2)\right.$$

$$\left.\times S_{2^{m_1}2^{m_2}}(x_1+t_1+e_{j_1},x_2+t_2+e_{j_2};|f|)\,dt_2\right)dt_1$$

$$\le\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\int_{l_1 2^{-m_1}}^{(l_1+1)2^{-m_1}}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}2^{j_1-1}\mathbb{I}_{I_{j_1}}(t_1)\left(\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}|a_{l_1 l_2}(x_1,x_2)|^2\right)^{1/2}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}$$

$$\left(\int_{l_2 2^{-m_2}}^{(l_2+1)2^{-m_2}}\sum_{j_2=0}^{m_2-1}2^{j_2-1}\mathbb{I}_{I_{j_2}}(t_2)\right.$$

$$\left.\left.\times S^{(2)}_{2^{m_2}}(x_1+t_1+e_{j_1},x_2+t_2+e_{j_2};|f|)\,dt_2\right)^2\right)^{1/2}dt_1$$

$$\le\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\left(\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}|a_{l_1 l_2}(x_1,x_2)|^2\right)^{1/2}\int_{l_1 2^{-m_1}}^{(l_1+1)2^{-m_1}}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}2^{j_1-1}\mathbb{I}_{I_{j_1}}(t_1)$$

$$\times V^{(2)}(x_1+t_1+e_{j_1},x_2;|f|)\,dt_1$$

$$\le\left(\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}|a_{l_1 l_2}(x_1,x_2)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\left(\int_{l_1 2^{-m_1}}^{(l_1+1)2^{-m_1}}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}2^{j_1-1}\mathbb{I}_{I_{j_1}}(t_1)\right.\right.$$

$$\times V^{(2)}\left(x_1+t_1+e_{j_1},x_2;|f|\right)dt_1\Big)^2\Bigg)^{1/2}\lesssim V^{(1)}\left(x_1,x_2;V^{(2)}\right).$$

Lemma 2.2 is proved. □

3. Proof of Main Results

Proof of Theorem 1.1. Set

$$f_{n_1,n_2}\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right):=\sum_{k_1=0}^{2^{n_1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{n_2}-1}S_{k_1,k_2}\left(x_1,x_2;f\right)\mathbb{I}_{\delta_{k_1}^{n_1}}\left(t_1\right)\mathbb{I}_{\delta_{k_2}^{n_2}}\left(t_2\right),$$

$$J_1:=\left[j_12^{-m},\left(j_1+1\right)2^{-m}\right),J_2:=\left[j_22^{-m},\left(j_2+1\right)2^{-m}\right).$$

Then we can write $(n_1\leq n_2)$

$$\left\|f_{n_1,n_2}\left(x_1,x_2,\cdot,\cdot\right)\right\|_{BMO} \tag{3.1}$$

$$=\sup_m\sup_{0\leq j_1,j_2<2^m}\left(\frac{1}{\left|J_1\times J_2\right|}\int\limits_{J_1\times J_2}\left|f_{n_1,n_2}\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\left|J_1\times J_2\right|}\int\limits_{J_1\times J_2}f_{n_1,n_2}\left(x_1,x_2,u_1,u_2\right)du_1du_2\right|^2dt_1dt_2\right)^{1/2}$$

$$\leq\left(\sup_{m\leq n_1}\sup_{0\leq j_1,j_2<2^m}+\sup_{n_1<m\leq n_2}\sup_{0\leq j_1,j_2<2^m}+\sup_{m>n_2}\sup_{0\leq j_1,j_2<2^m}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\left|J_1\times J_2\right|}\int\limits_{J_1\times J_2}\left|f_{n_1,n_2}\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\left|J_1\times J_2\right|}\int\limits_{J_1\times J_2}f_{n_1,n_2}\left(x_1,x_2,u_1,u_2\right)du_1du_2\right|^2dt_1dt_2\right)^{1/2}$$

$$:=P_1\left(n_1,n_2\right)+P_2\left(n_1,n_2\right)+P_3\left(n_1,n_2\right).$$

Let $n_1\leq n_2<m$. Since $f_{n_1,n_2}\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right)$ is constant on $\left[\frac{j_1}{2^{n_1}},\frac{j_1+1}{2^{n_1}}\right)\times\left[\frac{j_2}{2^{n_2}},\frac{j_2+1}{2^{n_2}}\right)$, for fixed $(x_1,x_2)\in\mathbb{I}^2$ we conclude that

$$P_3\left(n_1,n_2\right)=0. \tag{3.2}$$

Let $m\leq n_1$. Then for P_1 we can write

$$P_1\left(n_1,n_2\right)=\sup_{m\leq n_1}\sup_{0\leq j_1,j_2<2^m}\left(2^{2m}\int\limits_{J_1\times J_2}\left|\sum_{k_1=j_12^{n_1-m}}^{(j_1+1)2^{n_1-m}-1}\sum_{k_2=j_22^{n_2-m}}^{(j_2+1)2^{n_2-m}-1}\right.\right.$$

$$S_{k_1,k_2}\left(x_1,x_2;f\right)\mathbb{I}_{\delta_{k_1}^{n_1}}\left(t_1\right)\mathbb{I}_{\delta_{k_2}^{n_2}}\left(t_2\right)-2^{2m}$$

$$\times\int\limits_{J_1\times J_2}\sum_{k_1=j_12^{n_1-m}}^{(j_1+1)2^{n_1-m}-1}\sum_{k_2=j_22^{n_2-m}}^{(j_2+1)2^{n_2-m}-1}S_{k_1,k_2}\left(x_1,x_2;f\right)$$

$$\times \mathbb{I}_{\delta^{n_1}_{s_1}}(u_1)\,\mathbb{I}_{\delta^{n_2}_{s_2}}(u_2)\,du_1du_2\Big|^2 dt_1dt_2\Big)^{1/2}$$

$$= \sup_{m\le n_1}\ \sup_{0\le j_1,j_2<2^m}\Bigg(2^{m-n_1}2^{m-n_2}\sum_{k_1=j_12^{n_1-m}}^{(j_1+1)2^{n_1-m}-1}\ \sum_{k_2=j_22^{n_2-m}}^{(j_2+1)2^{n_2-m}-1}$$

$$\big|S_{k_1,k_2}(x_1,x_2;f) - 2^{m-n_1}2^{m-n_2}$$

$$\times \sum_{k_1=j_12^{n_1-m}}^{(j_1+1)2^{n_1-m}-1}\ \sum_{k_2=j_22^{n_2-m}}^{(j_2+1)2^{n_2-m}-1} S_{k_1,k_2}(x_1,x_2;f)\Bigg|^2\Bigg)^{1/2}$$

$$= \sup_{m_1\le n_1, m_2\le n_2}\ \sup_{0\le j_1<2^{m_1}, 0\le j_2<2^{m_2}}\Bigg(2^{-m_1}2^{-m_2}\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}$$

$$\big|S_{l_1+j_12^{m_1},l_2+j_22^{m_2}}(x_1,x_2;f) - 2^{-m_1}2^{-m_2}$$

$$\times \sum_{q_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{q_2=0}^{2^{m_2}-1} S_{q_1+j_12^{m_1},q_2+j_22^{m_2}}(x_1,x_2;f)\Bigg|^2\Bigg)^{1/2}.$$

Since

$$\begin{aligned}
& S_{l_1+j_12^{m_1},l_2+j_22^{m_2}}(x_1,x_2;f)\\
= \ & S_{j_12^{m_1},j_22^{m_2}}(x_1,x_2;f) + S_{l_1,j_22^{m_2}}(x_1,x_2;fw_{j_12^{m_1}})\,w_{j_12^{m_1}}(x_1)\\
& + S_{j_12^{m_1},l_2}(x_1,x_2;fw_{j_22^{m_2}})\,w_{j_22^{m_2}}(x_2)\\
& + S_{l_1,l_2}(x_1,x_2;fw_{j_12^{m_1}}\otimes w_{j_22^{m_2}})\,w_{j_12^{m_1}}(x_1)\,w_{j_22^{m_2}}(x_2),
\end{aligned}$$

we can write

$$P_1(n_1,n_2) \le \sup_{m_1\le n_1, m_2\le n_2}\ \sup_{0\le j_1<2^{m_1}, 0\le j_2<2^{m_2}}\Bigg(2^{-m_1-m_2}\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1} \tag{3.3}$$

$$S_{l_1,l_2}(x_1,x_2;fw_{j_12^{m_1}}\otimes w_{j_22^{m_2}}) - 2^{-m_1-m_2}$$

$$- \times \sum_{q_1=0}^{2^{m_1}-1}\sum_{q_2=0}^{2^{m_2}-1} S_{q_1,q_2}(x_1,x_2;fw_{j_12^{m_1}}\otimes w_{j_22^{m_2}})\Bigg|^2\Bigg)^{1/2}$$

$$+ \sup_{m_1\le n_1, m_2\le n_2}\ \sup_{0\le j_1<2^{m_1}, 0\le j_2<2^{m_2}}\Bigg(2^{-m_1}\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\big|S_{l_1,j_22^{m_2}}(x_1,x_2;fw_{j_12^{m_1}})$$

$$- 2^{-m_1}\sum_{q_1=0}^{2^{m_1}-1} S_{q_1,j_22^{m_2}}(x_1,x_2;fw_{j_12^{m_1}})\Bigg|^2\Bigg)^{1/2}$$

$$+ \sup_{m_1\le n_1, m_2\le n_2}\ \sup_{0\le j_1<2^{m_1}, 0\le j_2<2^{m_2}}\Bigg(2^{-m_2}\sum_{l_2=0}^{2^{m_2}-1}\big|S_{j_12^{m_1},l_2}(x_1,x_2;fw_{j_22^{m_2}})$$

$$- 2^{-m_2}\sum_{q_2=0}^{2^{m_2}-1} S_{j_12^{m_1},q_2}(x_1,x_2;fw_{j_22^{m_2}})\Bigg|^2\Bigg)^{1/2}$$

$$:= P_{11}(n_1,n_2) + P_{12}(n_1,n_2) + P_{13}(n_1,n_2).$$

Next, from Lemmas 2.1 and 2.2 we obtain

$$P_{11}(n_1,n_2) \lesssim \sup_{m_1\le n_1, m_2\le n_2} \sup_{0\le j_1<2^{m_1}, 0\le j_2<2^{m_2}} V_{m_1,m_2}\left(x_1,x_2;\left|f w_{j_1 2^{m_1}} \otimes w_{j_2 2^{m_2}}\right|\right)$$

$$\lesssim V^{(1)}\left(x_1,x_2;V^{(2)}(|f|)\right).$$

Consequently, by Theorem Sch1 we can write

$$\left|\left\{(x_1,x_2)\in \mathbb{I}^2 : \sup_{n_1,n_2} P_{11}(n_1,n_2) > \lambda\right\}\right| \tag{3.4}$$

$$\lesssim \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{I}}\left(\int_{\mathbb{I}} V^{(2)}(x_1,x_2;|f|)\,dx_1\right)dx_2$$

$$\lesssim \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{I}}\left(\int_{\mathbb{I}} |f(x_1,x_2)|\log^+|f(x_1,x_2)|\,dx_2 + 1\right)dx_1$$

$$\lesssim \frac{1}{\lambda}\left(\int_{\mathbb{I}^2} |f|\log^+|f| + 1\right).$$

Since

$$S_{l_1,j_2 2^m}(x_1,x_2;f w_{j_1 2^m}) = S^{(1)}_{l_1}(x_1,x_2;S_{j_2 2^m}(f)\,w_{j_1 2^m}),$$

we can apply Lemma 2 to obtain $P_{12}(n_1,n_2)$

$$\lesssim \sup_{m_1\le n_1, m_2\le n_2} \sup_{0\le j_1<2^{m_1}, 0\le j_2<2^{m_2}} \left(2^{-m_1}\sum_{l_1=0}^{2^{m_1}-1}\left|S^{(1)}_{l_1}(x_1,x_2;S_{j_2 2^{m_2}}(f)\,w_{j_1 2^{m_1}})\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\lesssim \sup_{m_1\le n_1, m_2\le n_2} \sup_{0\le j_1<2^{m_1}, 0\le j_2<2^{m_2}} V^{(1)}\left(x_1,x_2;\left|S^{(2)}_{j_2 2^{m_2}}(f)\,w_{j_1 2^{m_1}}\right|\right)$$

$$\lesssim V^{(1)}\left(x_1,x_2;S^{(2)}_{*}(f)\right),$$

where $S^{(2)}_{*}(f) := \sup_n \left|S^{(2)}_n(f)\right|$. If $f\in L\left(\log^+ L\right)^2(\mathbb{I}^2)$, then $f(x_1,\cdot)\in L\left(\log^+ L\right)^2(\mathbb{I})$ for a.e. $x_1\in\mathbb{I}$, and from the well-known theorem (see [25]), we have $S^{(2)}_{*}(x_1,\cdot,f)\in L_1(\mathbb{I})$ for a.e. $x_1\in\mathbb{I}$. Moreover, we have

$$\int_{\mathbb{I}} S^{(2)}_{*}(x_1,x_2;f)\,dx_2 \lesssim \int_{\mathbb{I}} |f(x_1,x_2)|\left(\log^+|f(x_1,x_2)|\right)^2 dx_2 + 1$$

for a. e. $x_1\in\mathbb{I}$. Hence,

$$\left|\left\{(x_1,x_2)\in \mathbb{I}^2 : \sup_{n_1,n_2} P_{12}(n_1,n_2) > \lambda\right\}\right| \tag{3.5}$$

$$\lesssim \left|\left\{(x_1,x_2)\in \mathbb{I}^2 : V^{(1)}\left(x_1,x_2;S^{(2)}_{*}(f)\right) > \lambda\right\}\right|$$

$$\lesssim \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{I}}\left(\int_{\mathbb{I}} S^{(2)}_{*}(x_1,x_2;f)\,dx_1\right)dx_2$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{I}} \left(\int_{\mathbb{I}} |f(x_1, x_2)| \left(\log^+ |f(x_1, x_2)|\right)^2 dx_2 + 1 \right) dx_1$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{I}^2} |f| \left(\log^+ |f|\right)^2 + 1 \right).$$

Analogously, we can prove that

$$\left| \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2 : \sup_{n_1, n_2} P_{13}(n_1, n_2) > \lambda \right\} \right| \tag{3.6}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{I}^2} |f| \left(\log^+ |f|\right)^2 + 1 \right).$$

Combining (3.3)- (3.6) we get

$$\left| \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2 : \sup_{n_1, n_2} P_1(n_1, n_2) > \lambda \right\} \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{I}^2} |f| \left(\log^+ |f|\right)^2 + 1 \right). \tag{3.7}$$

Analogously, we can prove that

$$\left| \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2 : \sup_{n_1, n_2} P_2(n_1, n_2) > \lambda \right\} \right| \tag{3.8}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{I}^2} |f| \left(\log^+ |f|\right)^2 + 1 \right).$$

Combining (3.1), (3.2), (3.7) and (3.8) we complete the proof of the theorem. □

Proof of Theorem 1.2. The result can easily be deduced from Theorem 1.1 and John-Nirenberg theorem (see [9]). So, we omit the details. □

Список литературы

[1] L. Fejér, "Untersuchungen нber Fouriersche Reihen", Math. Annalen, **58**, 501 – 569 (1904).

[2] G. Gát, U. Goginava, G. Karagulyan, "Almost everywhere strong summability of Marcinkiewicz means of double Walsh-Fourier series", Anal. Math. **40**, no. 4, 243 – 266 (2014).

[3] G. Gát, U. Goginava, G. Karagulyan, "On everywhere divergence of the strong Φ-means of Walsh-Fourier series", J. Math. Anal. Appl. **421**, no. 1, 206 – 214 (2015).

[4] V. A. Glukhov, "Summation of multiple Fourier series in multiplicative systems" [in Russian], Mat. Zametki **39**, no. 5, 665 – 673 (1986).

[5] U. Goginava, "Almost everywhere convergence of (C, α)-means of cubical partial sums of d-dimensional Walsh-Fourier series", J. Approx. Theory **141**, no. 1, 8 – 28 (2006).

[6] U. Goginava, "The weak type inequality for the Walsh system", Studia Math. **185**, no. 1, 35 – 48 (2008).

[7] U. Goginava, L. Gogoladze, "Strong approximation by Marcinkiewicz means of two-dimensional Walsh-Fourier series", Constr. Approx. **35**, no. 1, 1 – 19 (2012).

[8] U. Goginava. L. Gogoladze, "Convergence in measure of strong logarithmic means of double Fourier series", Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **49**, no. 3, 39 – 49 (2014); translation in J. Contemp. Math. Anal. **49**, no. 3, 109 – 116 (2014).

[9] U. Goginava, L. Gogoladze, G. Karagulyan, "BMO-estimation and almost everywhere exponential summability of quadratic partial sums of double Fourier series", Constr. Approx. **40**, no. 1, 105 – 120 (2014).

[10] L. Gogoladze, "The (H,k)-summability of multiple trigonometric Fourier series" [in Russian], Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41**, no. 4, 937 – 958 (1977).

[11] L. Gogoladze, "On the exponential uniform strong summability of multiple trigonometric Fourier series", Georgian Math. J. **16**, 517 – 532 (2009).

[12] L. D. Gogoladze, "Strong means of Marcinkiewicz type" [in Russian], Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR **102**, no. 2, 293 – 295 (1981).

[13] B. I. Golubov, A. V. Efimov, V. A. Skvortsov, Series and Transformations of Walsh, Moscow (1987) [in Russian]; English translation, Kluwer Academic, Dordrecht (1991).

[14] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "Sur la series de Fourier d'une fonction a carre sommable", Comptes Rendus (Paris) **156**, 1307 – 1309 (1913).

[15] G. A. Karagulyan, "Everywhere divergent Φ-means of Fourier series" [in Russian], Mat. Zametki **80**, no. 1, 50 – 59 (2006); translation in Math. Notes 80, no. 1-2, 47 – 56 (2006).

[16] H. Lebesgue, "Recherches sur la sommabilite forte des series de Fourier", Math. Annalen **61**, 251 – 280 (1905).

[17] J. Marcinkiewicz, "Sur la sommabilité forte de séries de Fourier" [in French], J. London Math. Soc. **14**, 162 – 168 (1939).

[18] F. Myricz, F. Schipp, W. R. Wade, "Cesàro summability of double Walsh-Fourier series", Trans. Amer. Math. Soc. **329**, no. 1, 131 – 140 (1992).

[19] K. I. Oskolkov, "Strong summability of Fourier series" [in Russian], Studies in the theory of functions of several real variables and the approximation of functions, Trudy Mat. Inst. Steklov. **172**, 280 – 290, (1985).

[20] V. A. Rodin, "The space BMO and strong means of Fourier series", Anal. Math. **16**, no. 4, 291 – 302 (1990).

[21] V. A. Rodin, "BMO-strong means of Fourier series" [in Russian], Funct. anal. Appl. **23**, 73 – 74 (1989).

[22] V. A. Rodin, "The space BMO and strong means of Fourier-Walsh series" [in Russian], Mat. Sb. **182**, no. 10, 1463 – 1478 (1991); translation in Math. USSR-Sb. **74**, no. 1, 203 – 218 (1993).

[23] F. Schipp, "On the strong summability of Walsh series", Publ. Math. Debrecen **52**, no. 3 - 4, 611 – 633 (1998).

[24] F. Schipp, W. Wade, P. Simon, P. Pol, Walsh Series, an Introduction to Dyadic Harmonic Analysis, Adam Hilger, Bristol, New York (1990).

[25] J. Tateoka, "On almost everywhere convergence of Walsh-Fourier series", Proc. Japan Acad. **44**, 647 – 650 (1968).

[26] Kun Yang Wang, "Some estimates for the strong approximation of continuous periodic functions of the two variables by their sums of Marcinkiewicz type" [in Chinese], Beijing Shifan Daxue Xuebao, no. 1, 7 – 22 (1981).

[27] F. Weisz, "Strong Marcinkiewicz summability of multi-dimensional Fourier series", Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **29**, 297 – 317 (2008).

[28] F. Weisz, "Lebesgue points of double Fourier series and strong summability", J. Math. Anal. Appl. **432**, no. 1, 441 – 462 (2015).

[29] Y. Zhang, X. He, "On the uniform strong approximation of Marcinkiewicz type for multivariable continuous functions", Anal. Theory Appl. **21**, 377 – 384 (2005).

[30] Zygmund A., Trigonometric series. Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

Поступила 15 октября 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 2, 2018, стр. 47 - 60.

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ И ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. А. ДАРБИНЯН, А. Г. ТУМАНЯН

Российско-Армянский (Славянский) Университет[1]
E-mails: *arman.darbinyan@rau.am*, *ani.tumanyan92@gmail.com*

Аннотация. Работа посвящена априорным оценкам специального вида и фредгольмовости дифференциальных операторов, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$. Изучаются условия на символ оператора, необходимые для выполнения априорной оценки. При определенных условиях на коэффициенты получены априорные оценки в соотвествующих весовых пространствах.

MSC2010 number: 35H30, 47A53.

Ключевые слова: фредгольмовость; индекс оператора; априорная оценка; полуэллиптический оператор.

1. Введение и основные понятия и определения

В работе исследуется фредгольмовость и выполнение специальных априорных оценок для дифференциальных операторов со специальными переменными коэффициентами в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$. Для рассматриваемых операторов устанавливается связь с полуэллиптичностью.

Для сингулярных интегро-дифференциальных операторов, определенных на гладких компактных многообразиях с краем и без края М. С. Аграновичем (см. [1]) получена априорная оценка, установлена эквивалентность фредгольмовости, выполнения априорной оценки и эллиптичности в определенных соболевских пространствах. В работе [2] получены априорные оценки для полуэллиптических операторов с постоянными коэффициентами в ограниченной области и на основе этих оценок доказана фредгольмовость таких операторов. В [3] получено

[1]Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОБНРФ и при поддержке тематического финансирования комитета науки при МОН РА (код проекта SCS N 15T-1A197).

необходимое и достаточное условие фредгольмовости для произвольных операторов с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах в $\mathbb{R}^n$. Инвариантность индекса полуэллиптических операторов на шкале анизотропных пространств исследована в работе [4].

Определение 1.1. *Ограниченный линейный оператор A, определенный на всем банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, называется n-нормальным, если выполняются следующие условия:*

(1) *ядро оператора A является конечномерным* ($\dim Ker(A) < \infty$)*;*

(2) *область значений оператора A замкнуто* ($Im(A) = \overline{Im(A)}$)*;*

и называется фредгольмовым, если кроме того

(3) *коядро оператора A конечномерно* ($\dim coker(A) = \dim Y/Im(A) < \infty$)*.*

Определение 1.2. *Ограниченный линейный оператор A, определенный на всем банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, называется d-нормальным, если выполняются следующие условия:*

(1) *ядро сопряженного оператора A^* конечномерно* ($\dim Ker(A^*) < \infty$) *;*

(2) *область значений оператора A замкнуто* ($Im(A) = \overline{Im(A)}$)*.*

Индексом фредгольмова оператора A назовем разность между размерностью ядра и коядра:

$$ind\,(A) = \dim Ker(A) - \dim coker(A).$$

Пусть $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{Z}_+^n$ – множество n-мерных мультииндексов, $\mathbb{N}^n$ - множество n-мерных мультииндексов с натуральными компонентами.

Для $k \in \mathbb{R}$ и $\nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S' : \hat{u} - \text{функция}, \|u\|_{k,\nu} = \left(\int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|_\nu)^{2k} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

где $|\xi|_\nu = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^{2\nu_i}\right)^{1/2}$, S' пространство обобщенных функций медленного роста, $\hat{u}$ - преобразование Фурье распределения u.

Замечание 1.1. *Из равенства Парсеваля следует, что при $k \in \mathbb{Z}_+$ норма в пространстве $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна следующей:*

$$\|u\|'_{k,\nu} = \left(\sum_{(\alpha:\nu) \le k} \int |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Пусть $C(\mathbb{R}^n)$ множество непрерывных функций. Для $r \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$C^{r,\nu}(\mathbb{R}^n) := \left\{a(x) : D^\beta a(x) \in C(\mathbb{R}^n), \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta a(x)| < \infty, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n \ s.t.\ (\beta : \nu) \leq r\right\},$$

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{r\in\mathbb{Z}_+} C^{r,\nu}(\mathbb{R}^n),$$

$$Q = \{g(x) \in C(\mathbb{R}^n) : g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$Q^{r,\nu} = \left\{g(x) \in C^{r,\nu}(\mathbb{R}^n) : g(x) \in Q \ \text{ и } \frac{1}{g(x)} \rightrightarrows 0, \frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)} \rightrightarrows 0 \text{ при } |x| \to \infty,\right.$$
$$\left.\beta \in \mathbb{Z}_+^n, 0 < (\beta : \nu) \leq r\right\}.$$

Для $k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ и $q \in Q$ обозначим $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ множество измеримых функций $\{u\}$ с нормой

$$\|u\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu)\leq k} \|D^\alpha u \cdot q^{(k-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$P(x, \mathbf{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1.1}$$

где $s \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \nu \in \mathbb{N}^n$, $(\alpha : \nu) = \frac{\alpha_1}{\nu_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\nu_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, D_j = i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_\alpha(x) \in C(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим

$$P_s(x, \mathbf{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)=s} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1.2}$$

главную часть дифференциального выражения $P(x, \mathbf{D})$, а

$$P_s(x, \xi) = \sum_{(\alpha:\nu)=s} a_\alpha(x) \xi^\alpha \tag{1.3}$$

символ главной части $P(x, \mathbf{D})$. Обозначим

$$L(x, \mathbf{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)<s} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1.4}$$

младшие члены дифференциального выражения $P(x, \mathbf{D})$.

Определение 1.3. *Дифференциальная форма $P(x, \mathbf{D})$ полуэллиптична в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если $P_s(x_0, \xi) \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \neq 0$. Дифференциальная форма $P(x, \mathbf{D})$ полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$, если $P(x, \mathbf{D})$ полуэллиптична в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$.*

Для положительного числа N и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$K_N = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq N\}, \quad K_N(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq N\}.$$

2. Необходимые условия выполнения априорных оценок

Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq s, q \in Q$ и коэффициенты дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ вида (1.1) удовлетворяют условиям:

$$|D^{\beta} a_{\alpha}(x)| \leq C_{\alpha,\beta}\, q(x)^{(s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu))} \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+ \ (\alpha : \nu) \leq s, (\beta : \nu) \leq k - s.$$

Нетрудно заметить, что $P(x, \mathbb{D})$ порождает ограниченный линейный оператор из $H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}_q(\mathbb{R}^n)$. Обозначим этот оператор через $\left(P; H^{k,\nu}_q\right)$.

Теорема 2.1. *Пусть для дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right) \ , \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n)\,. \tag{2.1}$$

Тогда $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Предположим обратное, что $P(x, \mathbb{D})$ не полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то есть существуют $x^0, \xi^0 \in \mathbb{R}^n$, $|\xi^0| \neq 0$ такие, что $P_s(x^0, \xi^0) = 0$.

Пусть N любое фиксированное положительное число и $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $supp\phi \subset K_N(x^0)$, $\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1$. Для положительного числа λ обозначим $\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0 = \left(\lambda^{\frac{1}{\nu_1}}\xi^0_1, \dots, \lambda^{\frac{1}{\nu_n}}\xi^0_n\right)$ и $u_{\lambda,\nu}(x) = e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0, x\right)}\phi(x)$. Так как для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$

$$D^{\alpha} u_{\lambda,\nu}(x) = \left(\xi^0\right)^{\alpha} \lambda^{(\alpha:\nu)} e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0, x\right)}\phi(x) + \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C^{\alpha}_{\beta} \lambda^{(\beta:\nu)} \left(\xi^0\right)^{\beta} e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0, x\right)} D^{\alpha-\beta}\phi(x),$$

то для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, (\alpha : \nu) \leq k$ имеем

$$\|D^{\alpha} u_{\lambda,\nu} \cdot q^{(k-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{(\alpha:\nu)} |\left(\xi^0\right)^{\alpha}| \, \|\phi \cdot q^{(k-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^{(\alpha:\nu)}).$$

Тогда

$$\|u_{\lambda,\nu}\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu) \leq k} \lambda^{(\alpha:\nu)} |\left(\xi^0\right)^{\alpha}| \, \|\phi \cdot q^{(k-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^k) \ \text{ при } \lambda \to \infty. \tag{2.2}$$

С другой стороны, в силу условия на коэффициенты $P(x, \mathbb{D})$ и учитывая, что $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $supp\phi \subset K_N(x^0)$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $(\alpha : \nu) \leq k - s$ при $\lambda \to \infty$ имеем

$$\|D^{\alpha}\left(P(x, \mathbb{D})\, u_{\lambda,\nu}\right) q^{(k-s-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq |\left(\xi^0\right)^{\alpha}| \lambda^{(\alpha:\nu)} \lambda^{s} \cdot \max_{x \in K_N(x^0)} |P_s(x, \xi^0)| \, \|\phi \cdot q^{(k-s-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^k).$$

Отсюда при $\lambda \to \infty$ получим

(2.3)
$$\|Pu_{\lambda,\nu}\|_{k-s,\nu,q} \leq \sum_{(\alpha:\nu) \leq k-s} |\left(\xi^0\right)^{\alpha}| \, \lambda^{(\alpha:\nu)+s} \max_{x \in K_N(x^0)} |P_s(x, \xi^0)| \, \|\phi \cdot q^{(k-s-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^k).$$

Тогда из оценки (2.1) в силу (2.2)-(2.3), разделив на λ^k и устремив $\lambda \to \infty$, получим

$$\sum_{(\alpha:\nu)=k} |(\xi^0)^\alpha| \le C \sum_{(\alpha:\nu)=k-s} |(\xi^0)^\alpha| \max_{x\in K_N(x^0)} |P_s(x,\xi^0)|. \tag{2.4}$$

Так как $\nu \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N}, k \ge s$, то нетрудно заметить, что существуют положительные числа δ_1 и δ_2 такие, что

$$rl \sum_{(\alpha:\nu)=k} |\xi^\alpha| \ge \delta_1 |\xi|_\nu^k, \quad \sum_{(\alpha:\nu)=k-s} |\xi^\alpha| \le \delta_2 |\xi|_\nu^{k-s} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

С учетом (2.5) из (2.4), получим

$$\delta_1 |\xi^0|_\nu^k \le C\delta_2 |\xi^0|_\nu^{k-s} \max_{x\in K_N(x^0)} |P_s(x,\xi^0)|.$$

Обозначим $(\xi^0)' = \left(\frac{\xi_1^0}{|\xi^0|_\nu^{\frac{\nu_1}{1}}}, \dots, \frac{\xi_n^0}{|\xi^0|_\nu^{\frac{\nu_n}{1}}}\right)$.

В силу $1/\nu$-однородности порядка s многочлена $P_s(x,\xi)$ имеем, что $P_s(x,\xi^0) = |\xi^0|_\nu^s P_s(x,(\xi^0)')$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно

$$\delta_1 |\xi^0|_\nu^k \le C\delta_2 |\xi^0|_\nu^k \max_{x\in K_N(x^0)} \left|P_s\left(x,(\xi^0)'\right)\right|. \tag{2.6}$$

Так как $P_s\left(x^0,(\xi^0)'\right) = |\xi^0|_\nu^{-s} P_s(x^0,\xi^0)$, то в силу обратного предположения получим, что $P_s(x^0,(\xi^0)') = 0$. Следовательно в силу непрерывности коэффициентов $P_s(x,\mathbb{D})$ существует $N_0 > 0$ такое, что $\max_{x\in K_{N_0}(x^0)} |P_s(x,(\xi^0)')| < \frac{\delta_1}{C\delta_2}$. Последнее при $N = N_0$ противоречит оценке (2.6) и доказывает теорему. □

Теорема 2.2. (см. [5] теорема 7.1). *Пусть E, F, E_0 банаховы пространства, причем E компактно вложено в E_0. Пусть A ограниченный линейный оператор, действующий из E в F. Для того, чтобы оператор A, действующий из E в F, был n-нормальным необходимо и достаточно выполнение априорной оценки:*

$$\|x\|_E \le C\left(\|Ax\|_F + \|x\|_{E_0}\right), \ \forall x \in E.$$

Из теоремы 2.2 получаем следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (1.1). Тогда для того, чтобы оператор $(P; H_q^{k,\nu})$ был n-нормальным необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $C > 0$ и некоторым числом $M > 0$ выполнялась следующая оценка*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \quad \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Легко убедиться, что из теоремы 2.1, в силу следствия 2.1 следует утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть* $(P; H^{k,\nu}_{*})$ *фредгольмов оператор. Тогда* $P(x, \mathrm{D})$ *полуэллиптичен в* $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения, являющегося аналогом предложения 1.8.1 из [8].

Предложение 2.1. *Пусть* $k_1 < k < k_2$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $C_\varepsilon > 0$ *такое, что для функций* $u \in H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq \varepsilon \|u\|_{k_2,\nu} + C_\varepsilon \|u\|_{k_1,\nu}. \tag{2.7}$$

Замечание 2.1. *В общем случае из полуэллиптичности в* $\mathbb{R}^n$ *не следует выполнение априорной оценки (2.1).*

Проверим это для $q \equiv 1$. Рассмотрим полуэллиптическую в $\mathbb{R}^n$ дифференциальную форму $P(x, \mathrm{D})$ такую, что $a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha : \nu) = s, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Покажем, что априорная оценка вида (2.1) не выполняется.

Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим $\Delta(P_s, \Omega) := \max\limits_{(\alpha:\nu)=s} \sup\limits_{x\in\Omega} |a_\alpha(x)|$.

Из условия на коэффициенты следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое что $\Delta(P_s, \mathbb{R}^n \backslash K_N) < \varepsilon$. Допустим, что имеет место оценка (2.1). Пусть $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \leq \phi \leq 1$ и $\phi(x) = 1$ при $x \in K_N$. Тогда из оценки (2.1) следует

$$\|(1-\phi)u\|_{k,\nu} \leq C \left(\|P(1-\phi)u\|_{k-s,\nu} + \|(1-\phi)u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{2.8}$$

Применяя Предложение 2.1, из (2.8) легко получить

$$\|(1-\phi)u\|_{k,\nu} \leq C' \left(\Delta(P_s, \mathbb{R}^n \backslash K_N)\|(1-\phi)u\|_{k,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{C'}$. Тогда получим оценку

$$\|(1-\phi)u\|_{k,\nu} \leq C'' \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{2.9}$$

Докажем, что оценка (2.9) не может выполняться для всех $u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\eta(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| \geq 2$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K_N$ такая, что $K_2(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K_N$.

Обозачим $u_m(x) = \eta(m \cdot (x - x_0))$, $m \in \mathbb{N}$, тогда для произвольного $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$

$$D^\beta u_m(x) = m^{|\beta|} \left(D^\beta \eta\right)(m \cdot (x - x_0)).$$

Подставив $u_m(x)$ в (2.9), после простых преобразований получим

$$\sum_{(\beta:\nu)\leq k} m^{|\beta|} \|D^\beta \eta\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\eta\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.10}$$

Очевидно, что оценка (2.10) не может выполняться для достаточно больших m. Получили противоречие, доказывающее, что для такого оператора априорная оценка вида (2.1) не выполняется.

3. Достаточные условия выполнения априорных оценок

Предложение 3.1. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма вида (1.1) с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и постоянными коэффициентами в главной части. Тогда при произвольном $k\in\mathbb{R}, k>0$ с некоторой постоянной $C>0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим через $P_s(\xi)$ символ главной части $P(x,\mathbb{D})$. Из полуэллиптичности $P(x,\mathbb{D})$ следует, что существует постоянная $\delta>0$ такая, что

$$|P_s(\xi)|\geq\delta|\xi|_\nu^s,\forall\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Рассмотрим оператор

$$R_0=F^{-1}\frac{|\xi|_\nu^s}{(1+|\xi|_\nu^s)P_s(\xi)}F. \tag{3.3}$$

Из оценки (3.2) следует, что R_0 является ограниченным линейным оператором, действующим из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда R_0P_s можно представить в виде

$$R_0P_s=I+T,$$

где $T=-F^{-1}\frac{1}{(1+|\xi|_\nu^s)}F$. Нетрудно заметить, что для произвольного $k\in\mathbb{R}$ оператор T является ограниченным линейным оператором из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для $R_0P(x,D)$ получим следующее представление

$$\begin{aligned}R_0P(x,D)&=R_0P_s(D)+R_0L(x,D)=\\&=I+T+R_0L(x,D).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Используя представление (3.4), в силу оценки (2.7), получим

$$\|u\|_{k,\nu}=\|R_0Pu-Tu-R_0Lu\|_{k,\nu}\leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\ \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Этим утверждение предложения 3.1 доказано. □

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (1.1) обозначим

$$\Delta_0(P_s)=\max_{(\alpha,\nu)=s}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|a_\alpha(x)-a_\alpha(0)|,\quad \delta=\delta(P_s)=\min_{|\xi|_\nu=1}|P_s(0,\xi)|.$$

Предложение 3.2. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая дифференциальная форма в $\mathbb{R}^n$ вида (1.1) с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда для произвольного $k\in\mathbb{R}$, $k\geq s$ существует $\eta_0=\eta_0(k,\delta)>0$ такое, что при $\Delta_0(P_s)<\eta_0$ с некоторой постоянной $C>0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.5}$$

Доказательство. Так как $P_s(0,\mathbb{D}):H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям предложения 3.1, то

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|P_s(0,D)u\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.6}$$

Дифференциальную форму $P_s(0,\mathbb{D})$ представим в следующем виде

$$P_s(0,\mathbb{D})=P(x,\mathbb{D})-(P_s(x,\mathbb{D})-P_s(0,\mathbb{D}))-L(x,\mathbb{D}).$$

Используя это представление из оценки (3.6) с некоторой постоянной $C>0$ получим

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|P_s(0,D)u\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\leq$$
$$\leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|(P_s(x,D)-P_s(0,D))u\|_{k-s,\nu}+\|Lu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),$$
$$\forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда в силу Предложения 2.1 для произвольного $\varepsilon>0$ получим

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\Delta_0(P_s)\|u\|_{k,\nu}+\varepsilon\|u\|_{k,\nu}+(C_1+1)\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

При $C\varepsilon<1$ получим

$$\|u\|_{k,\nu}\leq\frac{C}{1-C\varepsilon}\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+(C_1+1)\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}+\Delta_0(P_s)\|u\|_{k,\nu}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $\Delta_0(P_s)<\eta_0:=\frac{1-C\varepsilon}{C}$.

Тогда с некоторой постоянной $C_2>0$ отсюда получим требуемую оценку

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C_2\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

□

Рассмотрим следующий класс дифференциальных форм

$$P(x,\mathbb{D})=\sum_{(\alpha:\nu)\leq s}a^0_\alpha(x)q(x)^{(s-(\alpha:\nu))}D^\alpha+R(x,\mathbb{D}),$$

где $a^0_\alpha(x)\in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, $q\in Q$ и

$$R(x,\mathbb{D})=\sum_{(\alpha,\nu)\leq s}b_\alpha(x)D^\alpha,$$

где $D^\beta(b_\alpha(x))=o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ при $|x|\to\infty$ для всех $(\alpha:\nu)\leq s$, $(\beta:\nu)\leq k-s$.

Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$P^0(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x_0) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha,$$

$$P^1(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x_0) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha + R(x,\mathbb{D}).$$

Условие 3.1. *Пусть*

$$\sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x_0) \lambda^{(s-(\alpha:\nu))} \xi^\alpha \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Предложение 3.3. *Пусть $q \in Q^{k,\nu}$ и $P^1(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма, удовлетворяющая условию 3.1. Тогда с некоторой постоянной $C > 0$ и числом $M > 0$ выполняется:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C\left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.7}$$

Доказательство. При условиях предложения, в силу теоремы 4.1 из [6], с некоторой постоянной $C_1 > 0$ и числом $M_1 > 0$ выполняется оценка:

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C_1\left(\|P^0 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_{M_1})}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

Тогда из определения дифференциальной формы $P^0(x,\mathbb{D})$ получим

$$\|P^0 u\|_{k-s,\nu,q} \leq \|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|Ru\|_{k-s,\nu,q}, \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.9}$$

Так как $D^\beta(b_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha:\nu) \leq s$, $(\beta:\nu) \leq k-s$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N(\epsilon) > 0$ такое, что

$$\frac{|D^\beta b_\alpha(x)|}{q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)}} < \epsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus K_{N(\epsilon)}, (\alpha:\nu) \leq s,\ (\beta:\nu) \leq k-s.$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\psi(x) = 1$ при всех $|x| \leq 1$ и $\psi(x) = 0$ при всех $|x| \geq 2$. Обозначим $\psi_\epsilon(x) = \psi(\frac{x}{N(\epsilon)}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

С некоторой постоянной $C_2 > 0$ получим

$$\|R\left((1-\psi_\epsilon)u\right)\|_{k-s,\nu,q} \leq C_2\, \varepsilon \|u\|_{k,\nu,q} \quad, \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.10}$$

В силу полуэллиптичности $P^1(x,\mathbb{D})$, применяя априорную оценку из работы [7], получим

$$\|R\left(\psi_\varepsilon u\right)\|_{k-s,\nu,q} \leq C_3 \|\psi_\varepsilon u\|_{k,\nu,q} \leq C_4\left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_{N(\varepsilon)})}\right). \tag{3.11}$$

Из оценок (3.8)–(3.11) с некоторой постоянной $C_5 > 0$ получим

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C_5\left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) + C_1 C_2 \varepsilon \|u\|_{k,\nu,q}, \tag{3.12}$$

где $M = \max(N(\varepsilon), M_1)$. Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{C_1 C_2}$ и получим оценку (3.7) для оператора $(P^1; H^{k,\nu}_q)$. □

Для дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$, $x_0 \in R^n$ и $q \in Q$обозначим

$$\Delta(P, q) := \max_{(\alpha:\nu)\leq s, (\beta:\nu)\leq k-s} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^\beta \left(a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(x_0)\right) q(x)^{-(\beta:\nu)}\right|.$$

Теорема 3.1. *Пусть $q \in Q^{k,\nu}$ и $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма, удовлетворяющая условию 3.1. Тогда существует $\eta_0 = \eta_0(k) > 0$, такое что, при $\Delta(P, q) < \eta_0$ для оператора $\left(P; H^{k,\nu}_q\right)$ с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.13}$$

Доказательство. Обозначим

$$P^2(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} \left(a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(x_0)\right) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha.$$

Тогда $P(x, \mathbb{D})$ представляется в виде

$$P(x, \mathbb{D}) = P^1(x, \mathbb{D}) + P^2(x, \mathbb{D}). \tag{3.14}$$

Из предложения 3.3, в силу условий теоремы, имеем, что с некоторой постоянной $C > 0$ и числом $M > 0$

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C\left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.15}$$

Для $(P^2; H^{k,\nu}_q)$ с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\|P^2 u\|_{k-s,\nu,q} \leq C_1 \Delta(P, q) \|u\|_{k,\nu,q}, \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.16}$$

Учитывая (3.15)–(3.16) получим оценки

$$\begin{aligned}
\|u\|_{k,\nu,q} &\leq C\left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) \\
&\leq C\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + C\|P^2 u\|_{k-s,\nu,q} + C\|u\|_{L_2(K_M)} \\
&\leq C\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + C_1 C \Delta(P, q)\|u\|_{k,\nu,q} + C\|u\|_{L_2(K_M)}.
\end{aligned}$$

Взяв $\eta_0 < \frac{1}{CC_1}$, получим априорную оценку (3.13). □

4. Некоторые приложения априорных оценок для фредгольмовости

Предложение 4.1. *Пусть $k_0 > 0$ и с некоторой постоянной $C > 0$ при всех $k \in [0, k_0]$ выполняется оценка*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{4.1}$$

Если для $k_1 \in [0, k_0]$ оператор $\left(P; H^{k_1,\nu}\right)$ является n–нормальным, то для всех $k_2 \geq k_1, k_2 \in [0, k_0]$ оператор $\left(P; H^{k_2,\nu}\right)$ также будет n-нормальным.

Доказательство. Из n-нормальности оператора $(P; H^{k_1,\nu})$ в силу следствия 2.1 имеем, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$ и числом $R > 0$ выполняется

$$(4.2) \qquad \|u\|_{k_1,\nu} \leq C_1 \left(\|Pu\|_{k_1-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_R)}\right), \quad \forall u \in H^{k_1,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Очевидно, что при $k_2 \geq k_1 \geq 0$ с некоторыми постоянными $C_2, C_3 > 0$ выполняются следующие оценки

$$(4.3) \qquad \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{k_1,\nu}, \quad \forall u \in H^{k_1,\nu}(\mathbb{R}^n)$$

$$(4.4) \qquad \|Pu\|_{k_1-s,\nu} \leq C_3 \|Pu\|_{k_2-s,\nu}, \quad \forall u \in H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Из оценки (4.1) при $k = k_2$ в силу оценок (4.3)-(4.4) имеем

$$(4.5) \qquad \begin{aligned} \|u\|_{k_2,\nu} &\leq C\left(\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right) \leq C\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + CC_2\|u\|_{k_1,\nu} \leq \\ &\leq C\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + C_4\left(\|Pu\|_{k_1-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_R)}\right) \leq \\ &\leq C_5\left(\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_R)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу следствия 2.1, оператор $(P; H^{k_2,\nu})$ n-нормален. □

Рассмотрим дифференциальную форму, формально сопряженную для $P(x, \mathbb{D})$

$$P^*(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} D^\alpha \left(\overline{a_\alpha(x)}\, \cdot\right),$$

где $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 4.1. *Пусть $k > 0$ и $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптическая дифференциальная форма в $\mathbb{R}^n$ вида (1.1) с постоянными коэффициентами в главной части. Пусть оператор $(P; H^{k,\nu})$ нормально разрешим. Тогда $coker(P; H^{k,\nu})$ конечномерен тогда и только тогда, когда $Ker(P^*; H^{k,\nu})$ конечномерен, при этом*

$$\dim coker(P; H^{k,\nu}) = \dim Ker(P^*; H^{k,\nu}).$$

Доказательство. Зададим скалярное произведение в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$(u, v)_{k,\nu} = \int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1 + |\xi|_\nu)^{2k} d\xi,$$

а скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать следующим образом:

$$(u, v)_0 = \int u(x)\overline{v(x)} dx$$

В силу замкнутости $Im(P; H^{k,\nu})$ существует $L \subset H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ такое, что

$$Im(P; H^{k,\nu}) \oplus L = H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Для $l \in \mathbb{R}$ обозначим $\Lambda^l := F^{-1}(1+|\xi|_\nu)^l F$ действующий из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-l,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Оператор Λ^l является изометрическим изоморфизмом из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-l,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Докажем, что $\Lambda^{2(k-s)}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между L и $Ker(P^*, H^{k,\nu})$.

Для произвольных $u, v \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ имеет место:

$$(Pu, v)_0 = (u, P^* v)_0. \tag{4.6}$$

Продолжим $(\cdot,\cdot)_0$ на прямое произведение $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Равенство (4.6) сохранится для $u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n), v \in H^{-(k-s),\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\omega \in L$. Обозначим $v = \Lambda^{2(k-s)}\omega \in H^{-(k-s),\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда с использованием равенства Планшареля получим

$$(Pu, v)_0 = (Pu, \Lambda^{2(k-s)}w)_0 = \int Pu \cdot \overline{F^{-1}\left((1+|\xi|_\nu)^{2(k-s)}\widehat{w}(\xi)\right)}dx$$

$$= \int \widehat{Pu}(\xi)\overline{\widehat{w}(\xi)}\,(1+|\xi|_\nu)^{2(k-s)}\,d\xi = (Pu, w)_{k-s,\nu} = 0, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда, в силу (4.6)

$$(Pu, v)_0 = (u, P^* v)_0 = 0\ , \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Обозначим $u_0 = \Lambda^{-2k}(P^* v) \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Подставив u_0 в последнее равенство и применяя равенство Планшареля, из последнего равенства получим

$$(u_0, P^* v)_0 = \left(\Lambda^{-2k}(P^* v), P^* v\right)_0 = \int F^{-1}\left((1+|\xi|_\nu)^{-2k}\widehat{P^* v}(\xi)\right)\overline{P^* v}dx$$

$$= \int |\widehat{P^* v}(\xi)|^2\,(1+|\xi|_\nu)^{-2k}\,d\xi = 0.$$

Следовательно, $P^* v = 0$ в $H^{-k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Так как по условию леммы коэффициенты главной части $P(x, \mathbb{D})$ постоянные, то постоянными будут также коэффициенты главной части $P^*(x, \mathbb{D})$. Для дифференциальной формы $P^*(x, \mathbb{D})$ имеет место представление

$$P^*(x, \mathbb{D}) = P_s^*(D) + \overline{Q}(x, \mathbb{D}),$$

где

$$\overline{Q}(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)<s}\ \sum_{0\le\beta\le\alpha} C_\alpha^\beta D^\beta\left(\overline{a_\alpha(x)}\right) D^{\alpha-\beta}.$$

Обозначим через $P_s^*(\xi)$ символ главной части $P^*(x, \mathbb{D})$.

Рассмотрим оператор

$$\overline{R} = F^{-1}\frac{|\xi|_\nu^s}{(1+|\xi|_\nu^s)P_s^*(\xi)}F$$

Легко заметить, что $\bar{R}$ является ограниченным оператором из $H^{r-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ для любого $r \in \mathbb{R}$. Для $\bar{R}P^*$ имеет место представление

$$\bar{R}P^* = I + T + \widetilde{RQ},$$

где $T = F^{-1}\frac{1}{1+\Lambda^{s}}F$. Нетрудно заметить, что для произвольного $r \in \mathbb{R}$ T является ограниченным оператором из $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r+\gamma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ при всех $0 \leq \gamma \leq s$. В силу условий леммы, для произвольного $r \in \mathbb{R}$ $\widetilde{Q}$ является ограниченным оператором из $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r-s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma = \left(\prod_{i=1}^{n} \nu_i\right)^{-1}$, следовательно, $\widetilde{RQ}$ – ограниченный оператор из $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим $T_1 = T + \widetilde{RQ}$. Для $\bar{R}P^*$ имеет место представление

$$\bar{R}P^* = I + T_1, \tag{4.7}$$

где $T_1 : H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{r+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ при произвольном $r \in \mathbb{R}$ и $\sigma = \left(\prod_{i=1}^{n} \nu_i\right)^{-1}$.

Из того, что $P^*v = 0$ в $H^{-k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, следует, что $v \in Ker(P^*; H^{-k+s,\nu})$. Применив $\bar{R}$ к P^*v в силу представления (4.7) получим, что $v = -T_1 v \in H^{-k+s+\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, получили, что $v \in Ker(P^*; H^{-k+s+\sigma,\nu})$. Повторяя аналогичные рассуждения m раз ($m\sigma \geq 2k - s$), получим, что $v \in Ker(P^*; H^{k,\nu})$. Пусть теперь $v \in Ker(P^*; H^{k,\nu})$. Докажем, что $\omega = \Lambda^{-2(k-s)}v \in L$.

В силу предположения $v \in Ker(P^*; H^{k,\nu})$ и равенства $(Pu, v)_0 = (u, P^*v)_0$ получим, что $(Pu, v)_0 = 0$, $\forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, применяя равенство Планшареля, получим

$$(Pu, w)_{k-s,\nu} = (Pu, \Lambda^{2(k-s)}w)_0 = (Pu, v)_0 = 0, \ \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, $\omega \in L$. Получили взаимно однозначное соответствие между L и $Ker(P^*; H^{k,\nu})$. Тем самым лемма 4.1 доказана. □

Теорема 4.1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq s$ и $P(x, \mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (1.1), такая, что $(\alpha : \nu) = s$ $a_\alpha(x) \equiv a_\alpha$ являются постоянными действительными числами, а при $(\alpha : \nu) < s$ $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ вещественнозначные функции такие, что $D^\beta a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n, 0 < (\beta : \nu) \leq k, (\alpha : \nu) < s$. Тогда оператор $(P; H^{k,\nu})$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда существуют постоянная $C > 0$ и число $M > 0$ такие, что выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{4.8}$$

Доказательство. Необходимость следует из следствия 2.1. Докажем достаточность. Из условий теоремы следует, что дифференциальную форму $P^*(x, \mathbb{D})$ можно представить в виде

$$P^*(x, \mathbb{D}) = P(x, \mathbb{D}) + \bar{L}(x, \mathbb{D}), \text{ где}$$

$$\overline{L}(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s}\sum_{0<\beta\leq\alpha} C^\alpha_\beta D^\beta(a_\alpha(x))D^{\alpha-\beta}.$$

Так как $D^\beta a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$, то легко проверить, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $R = R(\varepsilon) > 0$ и $C_\varepsilon > 0$ такие, что $\|\overline{L}u\|_{k-s,\nu} \leq \varepsilon\|u\|_{k,\nu} + C_\varepsilon\|u\|_{L_2(K_R)}$. Из оценки (4.8) получим

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)}) \leq C\left(\|P^*u\|_{k-s,\nu} + \|\overline{L}u\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right).$$

Тогда возьмем $\varepsilon < \frac{1}{C}$ и получим априорную оценку для $(P^*; H^{k,\nu})$:

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C'(\|P^*u\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_N)}), \tag{4.9}$$

где $N = \max(R, M)$.

Из оценок (4.8) и (4.9), в силу следствия 2.1, соответственно имеем

$$\dim Ker(P; H^{k,\nu}) < \infty \text{ и } Im(P; H^{k,\nu}) = \overline{Im(P; H^{k,\nu})},$$

$$\dim Ker(P^*; H^{k,\nu}) < \infty \text{ и } Im(P^*; H^{k,\nu}) = \overline{Im(P^*; H^{k,\nu})}.$$

Отсюда, на основе леммы 4.1, получим

$$\dim coker(P; H^{k,\nu}) = \dim Ker(P^*; H^{k,\nu}) < \infty.$$

Следовательно, оператор $(P; H^{k,\nu})$ фредгольмов. □

Abstract. The paper is devoted to special a priori estimates and Fredholm property of differential operators acting in anisotropic Sobolev spaces in $\mathbb{R}^n$. Necessary conditions for a priori estimates in terms of the symbol of an operator are obtained. Under appropriate conditions imposed on the coefficients, a priori estimates are also obtained in the corresponding weighted spaces.

Список литературы

[1] М.С. Агранович, "Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы", Успехи Мат. Наук, 20, вып. 5(125), 3 – 120 (1965).

[2] Г. А. Карапетян, А. А. Дарбинян, "Нетеровость полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в области", Уч. Записки ЕГУ, no. 3 (2008).

[3] А. А. Дарбинян, А. Г. Туманян, "Необходимое и достаточное условие нетеровости оператора с постоянными коэффициентами", Вестник РАУ, no. 2, Ер.: Изд-во РАУ, 4 – 14 (2014).

[4] А. Туманян, "Об инвариантности индекса полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств", Известия НАН Армении, серия Математика, 51, no. 4, 51 – 69 (2016).

[5] С. Г. Крейн, Линейные Уравнения в Банаховых Пространствах, Наука, Москва (1971).

[6] Г. А. Карапетян и А. А. Дарбинян, "Индекс полуэллиптических операторов в R^n", Известия НАН Армении, серия Математика, 42, no. 5, 53 – 71 (2007).

[7] E. Pehkonen, "Ein hypoelliptisches Diriclet problem", Com.Mat.Phys., 48, no. 3, 131 – 143 (1978).

[8] М. С. Агранович, Соболевские Пространства, Их Обобщения и Эллиптические Задачи в Областях с Гладкой и Липшицевой Границей, М., МЦНМО, 379 стр. (2013).

Поступила 4 мая 2017

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 2, 2018, стр. 61 – 74.

HANKEL AND BEREZIN TYPE OPERATORS ON WEIGHTED BESOV SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS ON POLYDISKS

A. V. HARUTYUNYAN, G. MARINESCU

Yerevan State University[1]
University of Cologne, Cologne, Germany
E-mails: *anahit@ysu.am*, *gmarines@math.uni-koeln.de*

Abstract. Let S be the space of functions of regular variation and let $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$. The weighted Besov space of holomorphic functions on polydisks, denoted by $B_p(\omega)$ $(0 < p < +\infty)$, is defined to be the class of all holomorphic functions f defined on the polydisk U^n such that $\|f\|^p_{B_p(\omega)} = \int_{U^n} |Df(z)|^p \prod_{j=1}^n \frac{\omega_j(1-|z_j|)dm_{2n}(z)}{(1-|z_j|^2)^{2-p}} < +\infty$, where $dm_{2n}(z)$ is the $2n$-dimensional Lebesgue measure on U^n and D stands for a special fractional derivative of f. We prove some theorems concerning fractional boundedness of the generalized little Hankel and Berezin type operators on the spaces $B_p(\omega)$ and $L_p(\omega)$ (the weighted L_p-space).

MSC2010 numbers: 32A36, 45P05, 47B35.
Keywords: weighted space; polydisk; little Hankel operator; Berezin operator.

1. Introduction and auxiliary constructions

Numerous authors have contributed to the theory of holomorphic Besov spaces in the unit disk in $\mathbb{C}$ and in the unit ball in $\mathbb{C}^n$ (see, e.g., J. Arazy et al. [1], K. Stroethoff [17], O. Blasco [3], A. Karapetyants and F. Kodzoeva [10], K. Zhu [19], and references therein). The study of holomorphic Besov spaces on the polydisk is of special interest. Since the polydisk is a product of n disks, one would expect that the natural extensions of results from one-dimensional case would be valid here, but it turns out that, in general, this is not true. Thus, the results for polydisk generally are different from that of for one-dimensional disk and for n-dimensional ball. For example, let us recall the classical theorem by Privalov stating that if $f \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, then $Kf \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, where Kf is a Cauchy type integral. It is known that the analogue of this theorem for multidimensional Lipschitz classes is not true (see [9]), even though its analogue for a sphere is valid (see [14]). In many cases, especially when the classes are defined by means of derivatives, the generalization of functional spaces to the polydisk is different from those on a unit ball. For generalization of

[1]Supported by DFG MA 2469/3-1

holomorphic Besov spaces to the polydisk we refer to [8]. Let

$$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_j| < 1,\ 1 \le j \le n\}$$

be the unit polydisk in the n-dimensional complex plane $\mathbb{C}^n$, and let

$$T^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_i| = 1,\ 1 \le i \le n\}$$

be its torus. We denote by $H(U^n)$ the set of holomorphic functions on U^n, by $L^\infty(U^n)$ the set of bounded measurable functions on U^n, and by $H^\infty(U^n)$ the subspace of $L^\infty(U^n)$ consisting of holomorphic functions.

Let S be the class of all non-negative measurable functions ω on $(0,1)$, for which there exist positive numbers M_ω, q_ω, m_ω, $(m_\omega, q_\omega \in (0,1))$, such that

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega$$

for all $r \in (0,1)$ and $\lambda \in [q_\omega, 1]$. Some properties of functions from S can be found in [15]. We set

$$-\alpha_\omega = \frac{\log m_\omega}{\log q_\omega^{-1}}; \qquad \beta_\omega = \frac{\log M_\omega}{\log q_\omega^{-1}},$$

and assume that $0 < \beta_\omega < 1$. For example, $\omega \in S$ if $\omega(t) = t^\alpha$ with $-1 < \alpha < \infty$.

In what follows, for convenience of notation, for $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$ and $z = (z_1, ..., z_n)$, we set

$$\omega(1-|z|) = \prod_{j=1}^n \omega_j(1-|z_j|),\ 1-|z| = \prod_{j=1}^n (1-|z_j|),\ 1-\overline{\zeta}z = \prod_{j=1}^n (1-\overline{\zeta}_j z_j).$$

Further, for $m = (m_1, ..., m_n)$, we set

$$(m+1) = (m_1+1)...(m_n+1),\ (m+1)! = (m_1+1)!...(m_n+1)!,$$

$$(1-|z|)^m = \prod_{j=1}^n (1-|z_j|)^{m_j}.$$

Throughout the paper, we assume that $\omega_j \in S$, $1 \le j \le n$. Using the results of [15] one can prove that

$$\omega_j(t) = \exp\left\{\eta_j(t) + \int_t^1 \frac{\varepsilon_j(u)}{u} du\right\},$$

where $\eta(u)$, $\varepsilon(u)$ are bounded measurable functions and $-\alpha_{\omega_j} \le \varepsilon_j(u) \le \beta_{\omega_j}$ $(1 \le j \le n)$. Without loss of generality, we can assume that $\eta(u) = 0$. Then $t^{\alpha_{\omega_j}} \le \omega_j(t) \le t^{-\beta_{\omega_j}}$ is always true. Now define the notion of fractional differential.

Definition 1.1. *For a holomorphic function $f(z) = \sum_{(k)=(0)}^{(\infty)} a_k z^k$, $z \in U^n$, and for $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, $\beta_j > -1$, $(1 \le j \le n)$, we define the fractional differential $D^\beta f$ as follows:*

$$D^\beta f(z) = \sum_{(k)=(0)}^{(\infty)} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\beta_j + 1 + k_j)}{\Gamma(\beta_j+1)\Gamma(k_j+1)} a_k z^k,\ \ k = (k_1, ..., k_n), \quad z \in U^n,$$

where $\Gamma(\cdot)$ *is the Gamma function and* $\sum_{(k)=(0)}^{(\infty)} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty}$.

If $\beta = (1, \ldots, 1)$, then we put $D^{\beta} f(z) \equiv Df(z)$, and hence

$$Df(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\partial^n (f(z_1, \ldots, z_n) z_1 \cdots z_n)}{\partial z_1 \ldots \partial z_n}.$$

If $n = 1$ then Df is the usual derivative of function $zf(z)$.

Next, we define the weighted $L_p(\omega)$ spaces of holomorphic functions.

Definition 1.2. *Let* $0 < p < +\infty$ *and* $\beta_{\omega_j} < -1$ $(1 \leq j \leq n)$. *We denote by* $L_p(\omega)$ *the set of all measurable functions on* U^n, *for which*

$$\|f\|_{L_p(\omega)}^p := \int_{U^n} |f(z)|^p \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^2} dm_{2n}(z) < +\infty.$$

Note that $L_p(\omega)$ is the L_p-space with respect to measure $\omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{-2} dm_{2n}(z)$. Using the conditions imposed on ω $(\omega_j \in S)$, we conclude that this measure is bounded. Now we define the weighted holomorphic Besov spaces on the polydisk.

Definition 1.3. *Let* $0 < p < +\infty$ *and* $f \in H(U^n)$. *A function* f *is said to be in Besov space* $B_p(\omega)$ *if*

$$\|f\|_{B_p(\omega)}^p := \int_{U^n} |Df(z)|^p \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}} dm_{2n}(z) < +\infty.$$

From the definition of differential Df it follows that $\|\cdot\|_{B_p(\omega)}$ is indeed a norm. Notice that it is not necessary to add $|f(0)|$). This follows from the fact that here $Df = 0$ implies $f = 0$ for holomorphic f. As in the one-dimensional case, $B_p(\omega)$ is a Banach space with respect to the norm $\|\cdot\|_{B_p(\omega)}$. For properties of weighted holomorphic Besov spaces we refer to [8].

Toeplitz operators on various spaces have been studied in a number of papers (see [5, 6, 18, 11], and references therein). Notice that some problems concerning Toeplitz operators can be solved by means of Hankel operators and vice versa. In the classical Hardy theory of holomorphic functions on the unit disk there is only one type of Hankel operator. In the $B_p(\omega)$ theory we have two: the little and big Hankel operators. The analogue of Hankel operators of the Hardy theory here are the little Hankel operators, which were studied by many authors (see [13, 2, 8]).

Now we define the little Hankel operators. Denote by $\overline{B}_p(\omega)$ the space of conjugate holomorphic functions on $B_p(\omega)$. For an integrable function f on U^n, we define the generalized little Hankel operator with symbol $g \in L^{\infty}(U^n)$ by

$$h_g^{\alpha}(f)(z) = \overline{P}_{\alpha}(fg)(z) = \int_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha}}{(1-\zeta\overline{z})^{\alpha+2}} f(\zeta) g(\zeta) dm_{2n}(\zeta),$$
$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_j > -1,\ 1 \leq j \leq n.$$

Observe that in the special case $n = 1$, $\alpha = 0$ we have the classical little Hankel operator (see [20]). In Section 2 we study the boundedness of little Hankel operator on $B_p(\omega)$. For the cases $0 < p < 1$ and $p = 1$ we have the following results.

Theorem 1.1. *Let $0 < p < 1$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$. Then $h_g^\alpha(f) \in \overline{B}_p(\omega)$ if and only if $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \le j \le n$.*

Theorem 1.2. *Let $f \in B_1(\omega)$ and $g \in L^\infty(U^n)$. Then $h_g^\alpha(f) \in \overline{B}_1(\omega)$ if and only if $\alpha_j > \alpha_{\omega_j} - 2$, $1 \le j \le n$.*

The result in the case $p > 1$ is different from those for the cases $0 < p < 1$ and $p = 1$. Specifically, in this case we have the following assertion.

Theorem 1.3. *Let $1 < p < +\infty$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$. If $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \le j \le n$, then $h_g^\alpha(f) \in \overline{B}_p(\omega)$.*

The Berezin transform, which is an analogue of Poisson transform in the spaces $A^p(\alpha)$ (respectively, in $B_p(\omega)$), plays an important role especially in the study of Hankel and Toeplitz operators. In particular, some properties of these operators (for example, compactness, boundedness, etc.) can be proved by means of the Berezin transform (see [17, 12, 20]). On the other hand, the Berezin-type operators are of independent interest.

In Section 3, it will be shown that some properties of Berezin-type operators of the one-dimensional classical case remain valid in more general situations.

For an integrable function f on U^n and for $g \in L^\infty(U^n)$ we define the Berezin-type operator as follows:

$$B_g^\alpha f(z) = \frac{(\alpha+1)}{\pi^n}(1-|z|^2)^{\alpha+2}\int_{U^n}\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\zeta}|^{4+2\alpha}}f(\zeta)g(\zeta)dm_{2n}(\zeta).$$

In the special case $\alpha = 0$, $g \equiv 1$, the operator B_g^α will be called Berezin transform.

We have the following statements.

Theorem 1.4. *Let $0 < p < 1$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$, and let $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \le j \le n$. Then $B_g^\alpha(f) \in L^p(\omega)$.*

Theorem 1.5. *Let $1 < p < +\infty$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$, and let $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \le j \le n$. Then $B_g^\alpha(f) \in L_p(\omega)$.*

Theorem 1.6. *Let $f \in B_1(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_1(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$. Then $B_g^\alpha(f) \in L_1(\omega)$ if and only if $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \le j \le n$.*

Note that, in general, the operators h_g^α and B_g^α are not bounded.

To prove the main results, we need more notation and some auxiliary results. Observe first that the partition of the polydisk into dyadic quadrangles plays an important role (see [4, 16]). Define

$$\Delta_{k_j,l_j} = \left\{ z_j \in U : 1 - \frac{1}{2^{k_j}} \leq |z_j| < 1 - \frac{1}{2^{k_j+1}},\ \frac{\pi l_j}{2^{k_j}} \leq \arg z_j < \frac{\pi(l_j+1)}{2^{k_j}} \right\},$$
$$\Delta^*_{k_j,l_j} = 4/3\Delta_{k_j,l_j},$$

where $k = (k_1, \dots, k_n)$ $(k_j \geq 0)$, l_j are some integers such that $-2^{k_j} \leq l_j \leq 2^{k_j+1} - 1$ $(1 \leq j \leq n)$ and $2^k = (2^{k_1}, \dots, 2^{k_n})$. Then $\Delta_{k,l} = \Delta_{k_1,l_1} \times \dots \times \Delta_{k_n,l_n}$ and $\Delta^*_{k,l}$ can be defined similarly. The system $\{\Delta_{k,l}\}$ is called the system of dyadic quadrangles.

Proposition 1.1. *Let ζ_{k_j,l_j} be the center of Δ_{k_j,l_j}, $1 \leq j \leq n$. Then*

$$1 - |\zeta_{k_j,l_j}| \asymp 1 - |\zeta_j| \quad \zeta_j \in \Delta_{k_j,l_j} \quad \text{and} \quad (1 - |\zeta_{k_j,l_j}|)^2 \asymp |\Delta_{k_j,l_j}| \quad 1 \leq j \leq n.$$

Note that the partition of the polydisk into dyadic quadrangles is important for obtaining some integral estimates particularly in the case $0 < p \leq 1$ (see [16]). Besides, the system $\{\Delta_{kl}\}$, as well as the system $\{\Delta^*_{kl}\}$, are coverings of U^n, and one can observe that the interiors of Δ_{kl} for distinct indices are disjoint, which is no longer true for Δ^*_{kl}. On the other hand, $\{\Delta^*_{k,l}\}$ is a finite covering in the sense that any quadrangle $\{\Delta^*_{kl}\}$ has nonempty intersection only with a finite number of quadrangles from $\{\Delta_{kl}\}$, and this number is independent of k and l. Also, note that such partitions for the spaces A^p_α were used for the first time by F. A. Shamoyan [16] in the study of weighted classes of functions in the polydisk and unit ball in $\mathbf{C}^n$. The following two lemmas will be used in the proofs of main results of the paper.

Lemma 1.1. *Let $m = (m_1, \dots, m_n)$ and $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$. If $f \in B_p(\omega)$, then*

$$|f(z)| \leq C \int_{U^n} \frac{(1 - |\zeta|^2)^m}{|1 - \bar{\zeta} z|^{m+1}} |Df(\zeta)| dm_{2n}(\zeta), \tag{1.1}$$

where $m_j \geq \alpha_{\omega_j} - 1$ $(1 \leq j \leq n)$.

The proof follows from [8, Lemma 2.5].

Lemma 1.2. *Let $n = 1$. Assume that $a + 1 - \beta_\omega > 0$, $b > 1$ and $b - a - 2 > \alpha_\omega$. Then*

$$\int_U \frac{(1 - |\zeta|^2)^a \omega(1 - |\zeta|^2)}{|1 - z\bar{\zeta}|^b} dm_2(\zeta) \leq \frac{\omega(1 - |z|^2)}{(1 - |z|^2)^{b-a-2}}. \tag{1.2}$$

The proof can be found in [6, Lemma 2].

2. Little Hankel operators on $B_p(\omega)$

In this section we study the little Hankel operators h_g^α on $B_p(\omega)$ $(0 < p < +\infty)$. We denote the restriction of $\|\cdot\|_{L^p(\omega)}$ to $B_p(\omega)$ by $\|\cdot\|_{\overline{B}_p(\omega)}$, and first consider the case $0 < p < 1$.

Theorem 2.1. *Let $0 < p < 1$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}^p(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$. Then $h_g^\alpha(f) \in B_p(\omega)$ if and only if $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \leq j \leq n$.*

Proof. Let $0 < p < 1$, $f \in B^p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}^p(\omega)$), $g \in L^\infty(\omega)$ and $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \leq j \leq n$. We show that $h_g^\alpha(f) \in \overline{B}^p(\omega)$. Denote $I := \|h_g^\alpha f\|_{\overline{B}^p(\omega)}$. Using the partition of the polydisk, Lemma 3 of [16] and Proposition 1.1, we can write

$$I = \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}} \left(\int_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-\overline{z}\zeta|^{\alpha+2}} |f(\zeta)||g(\zeta)| dm_{2n}(\zeta) \right)^p dm_{2n}(z) \leq$$
$$C(g) \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}} \sum_{k,l} \left(\int_{\Delta_{k,l}} \frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{|1-\overline{z}\zeta|^{\alpha+2}} |f(\zeta)| dm_{2n}(\zeta) \right)^p dm_{2n}(z) \leq$$
$$C(g) \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}} \sum_{k,l} \max_{\zeta\in\overline{\Delta}_{k,l}} |f(\zeta)|^p |\Delta_{k,l}|^p \frac{(1-|\zeta_{k,l}|)^{\alpha p}}{|1-\overline{z}\zeta_{k,l}|^{(\alpha+2)p}} dm_{2n}(z) =$$
$$C(g) \sum_{k,l} \max_{\zeta\in\overline{\Delta}_{k,l}} |f(\zeta)|^p |\Delta_{k,l}|^p (1-|\zeta_{k,l}|)^{\alpha p} \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{p-2}}{|1-\overline{z}\zeta_{k,l}|^{(\alpha+2)p}} dm_{2n}(z),$$

where $\zeta_{k,l}$ is the center of $\Delta_{k,l}$ and $C(g) := C(\alpha, p, \omega)\|g\|_\infty$.

Recalling that the system $\{\Delta^*_{k,l}\}$ forms a finite covering of U^n, by (1.2) and Lemma 4 of [16], we obtain

$$I \leq C(g) \sum_{k,l} \max_{\zeta\in\overline{\Delta}_{k,l}} |f(\zeta)|^p |(1-|\zeta_{k,l}|)^{-2+2} \omega(1-|\zeta_{k,l}|) \leq$$
$$C(g) \sum_k \sum_l \int_{\Delta^*_{k,l}} |f(z)|^p \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^2}) dm_{2n}(\zeta) \leq$$
$$C(g) \int_{U^n} |f(z)|^p \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^2}) dm_{2n}(\zeta).$$

Next, using (1.1) and Lemma 1.2, we get

$$I \le C(g) \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^2} \left(\int_{U^n} \frac{(1-|t|^2)^m}{|1-\bar{t}\zeta|^{m+1}} |Df(t)| dm_{2n}(t) \right)^p dm_{2n}(\zeta) \le$$

$$C(g) \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^2} \sum_{k,l} \left(\int_{\Delta_{k,l}} \frac{(1-|t|^2)^m}{|1-\bar{t}\zeta|^{m+1}} |Df(t)| dm_{2n}(t) \right)^p dm_{2n}(\zeta) \le$$

$$C(g) \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^2} \sum_{k,l} \max_{t\in\overline{\Delta}_{k,l}} |Df(t)|^p |\Delta_{k,l}|^p \frac{(1-|t_{k,l}|^2)^{mp}}{|1-\bar{t}\zeta|^{(m+1)p}} dm_{2n}(\zeta) \le$$

$$C(g) \sum_{k,l} \max_{t\in\overline{\Delta}_{k,l}} |Df(t)|^p |\Delta_{k,l}|^p \frac{\omega(1-|t_{k,l}|)(1-|t_{k,l}|^2)^{mp}}{(1-|t_{k,l}2)^{(m+1)p-2+2}} =$$

$$C(g) \sum_{k,l} \max_{t\in\overline{\Delta}_{k,l}} |Df(t)|^p (1-|t_{k,l}|^2)^{p-2+2}.$$

An application of Lemma 4 of [16] yields

$$I \le C(g)) \sum_k \sum_l \int_{\Delta^*_{k,l}} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}} |Df(z)| dm_{2n}(z) \le$$

$$\int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}} |Df(z)| dm_{2n}(z) = C(\alpha,p,\omega)\|g\|_\infty \|f\|^p_{B_p(\omega)},$$

showing that $h^\alpha_g(f) \in \overline{B}_p(\omega)$.

Conversely, let $h^\alpha_g(f) \in \overline{B}_p(\omega)$ for all $g \in L^\infty(U^n)$. For $r = (r_1, ..., r_n)$, $r_j \in (0,1)$, and $k = (k_1, ..., k_n)$ we take the function

$$f_r(z) = C_r(1-rz)^{-k},\ k_j > (\alpha_{\omega_j}+2)/p,\ 1 \le j \le n, \tag{2.1}$$

where $C_r = (1-r)^k \omega^{-1/p}(1-r)$, and observe that $\|f_r\|_{B_p(\omega)} \sim const.$

Consider the following domains

$$\tilde{U}_j = \{z_j \in U, |\arg z_j| < (1-r_j)/2;\ (4r_j-1)/3 < |z_j| < (1+2r_j)/3\}$$

and $\tilde{U}^n = \tilde{U}_1 \times \ldots \times \tilde{U}_n$. Taking the function $g_r(\zeta)$ as $g_r(\zeta) = \exp^{-\arg f_r(\zeta)}$ and a polydisk V^n centered at $(r_1, ..., r_n)$ with radius of $(1-r_1)...(1-r_n)$ such that $\overline{V}^n \subset \tilde{U}^n$ (here $\overline{V}^n$ is the closure of V^n), we get

$$\|h^\alpha_{g_r} f_r\|_{\overline{B}_p(\omega)} \ge \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}} \left(\int_{V^n} \frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{|1-\bar{z}\zeta|^{\alpha+3}} |f_r(\zeta)| dm_{2n}(\zeta) \right)^p dm_{2n}(z).$$

Let

$$\max_{\zeta\in\overline{V}^n} |1-\bar{z}\zeta| = |1-\bar{z}\tilde{\zeta}|,$$

then we have

$$\|h^\alpha_{g_r} f_r\|_{B_p(\omega)} \ge C_1(\alpha,p,\omega) \frac{(1-r)^{\alpha p}}{\omega(1-r)} \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{2-p}} \left(\int_{V^n} \frac{dm_{2n}(\zeta)}{|1-\bar{z}\zeta|^{\alpha+3}} \right)^p dm_{2n}(z)$$

$$\ge C_1(\alpha,p,\omega) \frac{(1-r)^{(\alpha+2)p}}{\omega(1-r)} \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|) dm_{2n}(z)}{|1-\bar{z}\tilde{\zeta}|^{(\alpha+3)p}(1-|z|)^{2-p}}.$$

Assuming the opposite that $(\alpha_j+2)p\leq \alpha_{\omega_j}$ for some j, for the corresponding integral with $\omega_j(t)=t^{\alpha_{\omega_j}}$, we get

$$\int_{U^n}\frac{\omega(1-|z|)dm_{2n}(z)}{|1-z\bar{\zeta}|^{(\alpha+3)p}(1-|z|)^{2-p}}\sim const,\quad \text{if}\quad (\alpha_j+2)p<\alpha_{\omega_j}$$

and

$$\int_{U^n}\frac{\omega(1-|z|)dm_{2n}(z)}{|1-\bar{z}\zeta|^{(\alpha+3)p}(1-|z|)^{2-p}})\sim \log\frac{1}{1-|\zeta_j|},\quad \text{if}\quad (\alpha_j+2)p=\alpha_{\omega_j}+2.$$

Consequently,

$$\frac{(1-r_j)^{(\alpha_j+2)p}}{\omega_j(1-r_j)}\to\infty,\quad \frac{(1-r_j)^{(\alpha_j+2)p}}{\omega_j(1-r_j)}\log\frac{1}{1-r_j}\to\infty\quad \text{as}\quad r_j\to 1-0,$$

and the result follows. □

Corollary 2.1. *Let $0<p<1$, $\alpha_j>\alpha_{\omega_j}/p-2$, $1\leq j\leq n$ and $g\in L^\infty(U^n)$. Then the operator h_g^α is bounded on $B_p(\omega)$, (and on $\overline{B}_p(\omega)$). Moreover, we have $\|h_g^\alpha(f)\|\leq C\|f\|\cdot\|g\|$.*

In the case $p=1$ we have the following result.

Theorem 2.2. *Let $f\in B_1(\omega)$ and $g\in L^\infty(U^n)$. Then $h_g^\alpha(f)\in\overline{B}_1(\omega)$ if and only if $\alpha_j>\alpha_{\omega_j}-2$, $1\leq j\leq n$.*

Proof. Let $f\in B_1(\omega)$, $g\in L^\infty(U^n)$ and $\tilde{C}:=C(\alpha,\omega)\|g\|_\infty$. Then by (1.1) and (1.2) we have

$$\|h_g^\alpha(f)\|_{\overline{B}_1(\omega)}\leq\|g\|_\infty\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^\alpha|f(\zeta)|\int_{U^n}\frac{\omega(1-|z|)dm_{2n}(z)}{|1-\zeta\bar{z}|^{\alpha+3}(1-|z|)}dm_{2n}(\zeta)\leq$$
$$\tilde{C}\int_{U^n}|f(\zeta)|\frac{\omega(1-|\zeta|^2)}{(1-|\zeta|)^2}dm_{2n}(\zeta)\leq\tilde{C}\int_{U^n}\frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|)^2}\int_{U^n}\frac{(1-|t|^2)^m}{|1-\bar{t}\zeta|^{m+1}}|Df(t)|\times$$
$$dm_{2n}(t)dm_{2n}(\zeta)=\tilde{C}\int_{U^n}(1-|t|^2)^m|Df(t)|\int_{U^n}\frac{\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)dm_{2n}(t)}{|1-\bar{t}\zeta|^{m+1}(1-|\zeta|^2)^2}.$$

Using (1.1) again, we get

$$\|h_g^\alpha(f)\|_{\overline{B}_1(\omega)}\leq\tilde{C}\int_{U^n}\frac{\omega(1-|t|)}{(1-|t|)}|Df(t)|dm_{2n}(t)=\tilde{C}\|f\|_{\overline{B}_1(\omega)},$$

showing $h_g^\alpha f\in\overline{B}_1(\omega)$.

The proof of necessity of the condition $\alpha_j>\alpha_{\omega_j}$, $1\leq j\leq n$ is similar to that of in Theorem 2.1, and so, we omit the details. □

Corollary 2.2. *Let $\alpha_j>\alpha_{\omega_j}$, $1\leq j\leq n$ and $g\in L^\infty(U^n)$. Then the operator h_g^α is bounded on $B_1(\omega)$ and $\|h_g^\alpha(f)\|\leq C\|f\|\cdot\|g\|$.*

For the case $1<p<+\infty$ we have the following result.

Theorem 2.3. *Let $1 < p < +\infty$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$. If $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \le j \le n$, then $h_g^\alpha(f) \in \overline{B}_p(\omega)$.*

Proof. By Holder inequality and (1.2), we get

$$|Dh_g^\alpha(f)(z)| \le \int_{U^n} \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\xi\bar{z}|^{\alpha+3}} |f(\xi)| \cdot |g(\xi)| \, dm_{2n}(\xi) \le$$

$$\|g\|_\infty \int_{U^n} \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha |f(\xi)|}{|1-\xi\bar{z}|^{\alpha+3}} dm_{2n}(\xi) \le \|g\|_\infty \times$$

$$\left(\int_{U^n} \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha |f(\xi)|^p}{|1-\xi\bar{z}|^{\alpha+3}} dm_{2n}(\xi)\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{U^n} \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha \, dm_{2n}(\xi)}{|1-\xi\bar{z}|^{\alpha+3}}\right)^{1/q} \le$$

$$\frac{C(\alpha,q)\|g\|_\infty}{(1-|z|)^{1/q}} \left(\int_{U^n} \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha |f(\xi)|^p}{|1-\xi\bar{z}|^{\alpha+3}} dm_{2n}(\xi)\right)^{1/p}.$$

Setting $C = C(\alpha,q)\|g\|_\infty$ and using (1.1), we can write

$$\|h_g^{(\alpha)}(f)\|_{B_p(\omega)} = \int_{U_n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}} |Dh_g^\alpha(f)(z)|^p \, dm_{2n}(z) \le$$

$$C\int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{|1-|z|^2)^{2-p+p/q}} \int_{U^n} \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha |f(\xi)|^p}{|1-\xi\bar{z}|^{\alpha+3}} dm_{2n}(\xi) dm_{2n}(z) \le$$

$$C\int_{U^n} |f(\xi)|^p (1-|\xi|^2)^\alpha \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|) dm_{2n}(z) dm_{2n}(\xi)}{|1-\xi\bar{z}|^{\alpha+3}(|1-|z|^2)^{2-p+p/q}} \le$$

$$C_1 \int_{U^n} (1-|\xi|^2)^\alpha |f(\xi)|^p \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|^2)^{p-3-p/q}}{(1-|\xi|^2)^{\alpha+1}} dm_{2n}(\xi) =$$

$$\int_{U^n} (1-|xi|^2)^{p-2-p/q-1} \omega(1-|\xi|) |f(\xi)|^p \, dm_{2n}(\xi).$$

On the other hand, by (1.1) we get

$$|f(\xi)|^p \le \left(\int_{U^n} \frac{(1-|t|^2)^m}{|1-\bar{t}\xi|^{m+1}} |Df(t)| \, dm_{2n}(t)\right)^p \le$$

$$\left(\int_{U^n} \frac{(1-|t|^2)^{m-\delta}(1-|t|^2)^\delta}{|1-\bar{t}\xi|^{m+1}} |Df(t)| \, dm_{2n}(t)\right)^p \le$$

$$\int_{U^n} \frac{(1-|t|^2)^{m-\delta}}{|1-\bar{t}\xi|^{m+1}} (1-|t|^2)^{\delta p} |Df(t)|^p \, dm_{2n}(t) \cdot \frac{C(m,\delta,q)}{(1-|\xi|^2)^{(\delta-1)p/q}},$$

for some $\delta > 1$. Therefore, we have

$$\|h_g^{\alpha)}(f)\|B_p(\omega) \le C_1 \int U^n (1-|t|^2)^{m-\delta+\delta p} |Df(t)|^p \int_{U^n} \frac{(1-|\xi|^2)^{p-3-\delta p/q}}{|1-\bar{t}\xi|^{m+1}} \times$$

$$\omega(1-|\xi|) dm_{2n}(\xi) \int_{U^n} (1-|t|^2)^{m-\delta+\delta p} |Df(t)|^p \le$$

$$C_2 \int_{U^n} \frac{\omega(1-|\xi|)(1-|\xi|)^{(1-\delta)p/q-2}}{|1-\bar{t}\xi|^{m+1}} dm_{2n}(\xi) d_{2n}(t) \le$$

$$\int_{U^n} (1-|t|^2)^{m-\delta+\delta p} \frac{|Df(t)|^p \omega(1-|t|) dm_{2n}(t)}{(1-|t|^2)^{m-1+2-(1-\delta)p/q}} =$$

$$\int_{U^n} (1-|t|^2)^{p-2} |Df(t)|^p \omega(1-|t|) \, dm_{2n}(t) = \|f\|_{B_p(\omega)}.$$

Thus, $\|h_g^\alpha(f)\|_{B_p(\omega)} \le C_3\|f\|_{B_p(\omega)}\|g\|_\infty$, where $C_3 = C_2 \cdot C^p(m,\delta,q)$, and the result follows. $\square$

Corollary 2.3. *Let $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \le j \le n$ and $g \in L^\infty(U^n)$. Then the operator h_g^α is bounded on $B_p(\omega)$ and $\|h_g^\alpha(f)\|_{B_p(\omega)} \le C_3\|f\|_{B_p(\omega)} \cdot \|g\|_\infty$.*

3. Berezin-type operators on $B_p(\omega)$

In this section we establish the boundedness of Berezin-type operators B_g^α on weighted Besov spaces $B_p(\omega)$. We first consider the case $0 < p < 1$.

Theorem 3.1. *Let $0 < p < 1$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$, and let $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \le j \le n$. Then $B_g^\alpha(f) \in L^p(\omega)$.*

Proof. Let $f \in B_p(\omega)$ or $f \in \overline{B}_p(\omega)$. We show that $B_\alpha f \in L_p(\omega)$. To this end, we estimate the corresponding integral:

$$I = \int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^2}\left((1-|z|^2)^{\alpha+2}\int_{U^n}\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha|f(\zeta)||g(\zeta)|}{|1-z\overline{\zeta}|^{4+2\alpha}}dm_{2n}(\zeta)\right)^p dm_{2n}(z).$$

Using the partition of the polydisk, we can write

$$\begin{aligned}
I &\le \|g\|_\infty \int_{U^n}(1-|z|^2)^{(\alpha+2)p-2}\omega(1-|z|) \\
&\times \sum_{k,l}\left(\int_{\overline{\Delta}_{k,l}}\frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{|1-\overline{\zeta}z|^{4+2\alpha}}|f(\zeta)|dm_{2n}(\zeta)\right)^p dm_{2n}(z) \le C(\alpha,\omega,p)\|g\|_\infty \\
&\times \int_{U^n}(1-|z|^2)^{(\alpha+2)p-2}\omega(1-|z|)\sum_{k,l}\max_{\zeta\in\overline{\Delta}_{k,l}}|f(\zeta)|^p|\Delta_{k,l}|^p\frac{(1-|\zeta_{k,l}|)^{\alpha p}dm_{2n}(z)}{|1-\overline{\zeta}_{k,l}z|^{(4+2\alpha)p}} \\
&= C(\alpha,\omega,p)\|g\|_\infty\sum_{k,l}\max_{\zeta\in\overline{\Delta}_{k,l}}|f(\zeta)|^p|\Delta_{k,l}|^p \\
&\times \int_{U^n}(1-|z|^2)^{(\alpha+2)p-2}\omega(1-|z|)\frac{(1-|\zeta_{k,l}|)^{\alpha p}dm_{2n}(z)}{|1-\overline{\zeta}_{k,l}z|^{(4+2\alpha)p}}.
\end{aligned}$$

Taking into account that $p(4+2\alpha_j) > (\alpha_j+2)p + \alpha_{\omega_j}$ $(1 \le j \le n)$, we can use (1.1) and Lemma 4 of [16], to obtain

$$\begin{aligned}
I &\le C(\alpha,p,\omega)\|g\|_\infty\sum_{k,l}\max_{\zeta\in\overline{\Delta}_{k,l}}|f(\zeta)|^p|(1-|\zeta_{k,l}|)^{2-2}\omega(1-|\zeta_{k,l}|) \\
&\le C(\omega,\alpha,p)\|g\|_\infty\int_{U^n}|f(z)|^p\frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|z|^2)}dm_{2n}(\zeta).
\end{aligned}$$

Now we estimate the last integral. Using Lemma 1.1 we obtain

$$I \le C(\omega,\alpha,p)\|g\|_\infty\int_{U^n}\frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-\zeta|^2)}\left(\int_{U^n}\frac{(1-|t|^2)^m}{|1-\overline{t}\zeta|^{m+1}}|Df(t)|dm_{2n}(t)\right)^p dm_{2n}(\zeta).$$

Then, in view of the following inequality

$$\left(\int_{U^n} \frac{(1-|t|^2)^m}{|1-\bar{t}\zeta|^{m+1}}|Df(t)|dm_{2n}(t)\right)^p$$
$$\leq \sum_{k,l}\left(\int_{\Delta_{k,l}} \frac{(1-|t|^2)^m}{|1-\bar{t}\zeta|^{m+1}}|Df(t)|dm_{2n}(t)\right)^p$$
$$\leq \sum_{k,l} \max_{t\in\overline{\Delta}_{k,l}} |Df(t)|^p|\Delta_{k,l}|^p \frac{(1-|t_{k,l}|^2)^{mp}}{|1-\bar{t}_{k,l}\zeta|^{(m+1)p}}$$

and Lemma 4 of [16], we conclude that

$$I \leq C(\omega,\alpha,p)\|g\|_\infty \sum_{k,l} \max_{t\in\overline{\Delta}_{k,l}} |Df(t)|^p|\Delta_{k,l}|^p(1-|t_{k,l}|^2)^{mp} \times$$
$$\int_{U^n} \frac{\omega(1-|z|)(1-|\zeta|)^{-2}}{|1-\bar{t}_{k,l}\zeta|^{(m+1)p}}dm_{2n}(z) \leq$$
$$C(\omega,\alpha,p)\|g\|_\infty \sum_{k,l} \max_{t\in\overline{\Delta}_{k,l}} |Df(t)|^p|\Delta_{k,l}|^p(1-|t_{k,l}|^2)^{mp}\frac{\omega(1-|t_{k,l}|)}{(1-|t_{k,l}|^2)^{(m+1)p}} =$$
$$C(\omega,\alpha,p)\|g\|_\infty \sum_{k,l} \max_{t\in\overline{\Delta}_{k,l}} |Df(t)|^p\omega(1-|t_{k,l}|)(1-|t_{k,l}|^2)^p \leq$$
$$\int_{U^n} |Df(t)|^p\frac{\omega(1-|t|)}{(1-|t|^2)^{2-p}}dm_{2n}(t).$$

Thus, we have

$$I \leq C(\omega,\alpha,p)\|g\|_\infty\|f\|_{B_p(\omega)},$$

and the result follows. □

Remark 3.1. The condition $\alpha_j + 2 > \alpha_{\omega_j}/p, (1 \leq j \leq n)$ in Theorem 3.1 is also necessary. Moreover, if the operator B_g^α is bounded on $L^p(\omega)$, then $\alpha_j + 2 > (\alpha_{\omega_j}+2)/p, (1 \leq j \leq n)$.

The proof is similar to the corresponding part of Theorem 2.1, and we omit it.

Corollary 3.1. *Let $0 < p < 1$, $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \leq j \leq n$ and $g \in L^\infty(U^n)$. Then the operator B_g^α is bounded on $B_p(\omega)$ (and on $\overline{B}_p(\omega)$).*

Theorem 3.2. *Let $1 < p < +\infty$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$, and let $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \leq j \leq n$. Then $B_g^\alpha(f) \in L_p(\omega)$.*

Proof. Let $f \in B_p(\omega)$ or $f \in \overline{B}_p(\omega)$. Our aim is to show that $B_\alpha f \in L^p(\omega)$. We have

$$|B_g^\alpha(f)(z)|^p \le (1-|z|^2)^{(\alpha+2)p}\frac{C(\alpha,\pi,p)}{(1-|z|^2)^{(\alpha+2)p/q}}$$
$$\le \int_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha|f(\xi)|^p|g(\xi)|^p}{|1-z\bar\xi|^{2\alpha+4}}\,dm_{2n}(\xi) \le C(\alpha,\pi,p)(1-|z|^2)^{\alpha+2}$$
$$\times\int_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha|f(\xi)|^p}{|1-\xi z|^{2\alpha+4}}\,dm_{2n}(\xi) \le C(\alpha,\pi,p)(1-|z|^2)^{\alpha+2}\cdot\|g\|_\infty$$
$$\times\int_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-z\bar\xi|^{2\alpha+4}}\int_{U^n}\frac{(1-|t|^2)^{m-\delta}(1-|t|^2)^{\delta p}|Df(t)|^p}{|1-t\bar\xi|^{m+1}(1-|\xi|^2)^{(\delta-1)p/q}}\,dm_{2n}(t)dm_{2n}(\xi)$$
$$=C(\alpha,\pi,p)(1-|z|^2)^{\alpha+2}\|g\|_\infty\int_{U^n}(1-|t|^2)^{m-\delta+\delta p}|Df(t)|^p$$
$$\times\int_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^{\alpha-(\delta-1)p/q}}{|1-\xi z|^{2\alpha+4}|1-\bar t\xi|^{m+1}}\,dm_{2n}(\xi)dm_{2n}(t).$$

Therefore

$$\|B_g^\alpha(f)\|_{L_p(\omega)} = \int_{U^n}(1-|t|^2)^{m-\delta+\delta p}|Df(t)|^p\int_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^{\alpha-(\delta-1)p/q}}{|1-t\bar\xi|^{m+1}}$$
$$\times\int_{U^n}\frac{\omega(1-|z|)(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\xi z|^{2\alpha+4}}\,dm_{2n}(z)dm_{2n}(\xi)dm_{2n}(t) \le \int_{U^n}(1-|t|^2)^{m-\delta+\delta p}\times$$
$$|Df(t)|^p\int_{U^n}\frac{(1-|xi|^2)^{\alpha-(\delta-1)p/q}\omega(1-|\xi|)}{|1-\bar t\xi|^{m+1}(1-|\xi|)^{\alpha+2}}\,dm_{2n}(\xi)dm_{2n}(t)$$
$$=\int U^n(1-|t|^2)^{m-\delta+\delta p}|Df(t)|^p\int_{U^n}\frac{\omega(1-|\xi|)}{|1-\bar t\xi|^{m+1}}(1-|xi|^2)^{-2-(\delta-1)p/q}\,dm_{2n}(\xi)$$
$$\int_{U^n}(1-|t|^2)^{m-\delta+\delta p}\frac{\omega(1-|t|)|Df(t)|^p}{(1-|t|^2)^{m-1+2(\delta-1)p/q}}\,dm_{2n}(t)$$
$$=\int_{U^n}\frac{\omega(1-|t|)|Df(t)|^p}{(1-|t|^2)^{2-p}}\,dm_{2n}(t)=\|f\|_{B_p(\omega)}\|g\|_\infty C(\alpha,\pi,p),$$

and the result follows. □

For the case $p=1$ we have the following result.

Theorem 3.3. *Let $f \in B_1(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_1(\omega)$) and $g \in L^\infty(U^n)$. Then $B_g^\alpha(f) \in L_1(\omega)$ if and only if $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \le j \le n$.*

Proof. Let $f \in B_1(\omega)$ or $f \in \overline{B}_1(\omega)$. Our aim is to show that $B_g^\alpha f \in L_1(\omega)$. We have

$$|B_g^\alpha(f)| \le (1-|z|^2)^{\alpha+2}\int_{U^n}\int_{U^n}\frac{(1-|xi|^2)^\alpha|f(\xi)|\cdot|g(\xi)|\,dm_{2n}(\xi)}{|1-\bar{xi}|z|^{4+2\alpha}}$$
$$\le \|g\|_\infty(1-|z|^2)^{\alpha+2}\int_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\xi z|^{4+2\alpha}}\int_{U^n}\frac{(1-|t|^2)^m|Df(t)|}{|1-t\bar\xi|^{m+1}}\,dm_{2n}(t)dm_{2n}(\xi).$$

Then, using (1.2), we get

$$\begin{aligned}\|B_g^\alpha\|_{L_1(\omega)} &\leq \int_{U^n}\int_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\xi z|^{2\alpha+4}}\int_{U^n}\frac{(1-|t|^2)^m|Df(t)|\omega(1-|z|)}{|1-t\xi|^{m+1}(1-|z|^2)^{2-\alpha-2}}\,dm_{2n}(z)dm_{2n}(t)dm_{2n}(\xi)\\ &= \int_{U^n}(1-|t|^2)^m|Df(t)|\int_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-t\xi|^{m+1}}\int_{U^n}\frac{\omega(1-|z|)\,dm_{2n}(z)dm_{2n}(\xi)dm_{2n}(t)}{|1-\xi z|^{4+2\alpha}(1-|z|^2)^{-\alpha}}\\ &\leq \int_{U^n}(1-|t|^2)^m|Df(t)|\frac{(1-|t|^2)^\alpha\omega(1-|t|)}{(1-|t|^2)^{m-1+2+\alpha}}\,dm_{2n}(t)\\ &= \int_{U^n}\frac{|Df(t)|\omega(1-|t|)\,dm_{2n}(t)}{(1-|t|)} = \|f\|_{B_1(\omega)}\cdot\|g\|_\infty,\end{aligned}$$

showing that $B_g^\alpha f \in L_1(\omega)$.

To prove the necessity of the condition $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \leq j \leq n$, we proceed as in the proof of Theorem 2.1. We again use the described technique of selection of f_r by (2.1) for $p=1$ and V^n, and take $f_r(\zeta) \equiv |f_r(\zeta)|$, to obtain

$$\begin{aligned}\|B_n(f_r)\|_{L^1(\omega)} &\geq \int_{U^n}\omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{\alpha+2}\int_{V^n}\frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{|1-\overline{\zeta}z|^{2\alpha+4}}|f_r(\zeta)|dm_{2n}(\zeta)dm_{2n}(z)\\ &\geq C_1(\alpha,\omega)\frac{(1-r)^\alpha}{\omega(1-r)(1-r)^2}\int_{U^n}\frac{\omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{\alpha+2}}{|1-rz|^{2\alpha+4}}dm_{2n}(z).\end{aligned}$$

As in the case of little Hankel operators, assuming the opposite that $\alpha_j \leq \alpha_{\omega_j}$ for some j, we get a contradiction. □

Corollary 3.2. *Let $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \leq j \leq n$ and $g \in L^\infty(U^n)$. Then the operator B_g^α is bounded on $L^1(\omega)$.*

Список литературы

[1] J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre, "Mobius invariant function spaces", J. Reine Angew. Math. **363**, 110 – 145 (1985).

[2] J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre, "Hankel operators on weighted Bergman spaces", Amer. Math. J. **110**, 989 – 1054 (1988).

[3] O. Blasco, "Multipliers on weighted Besov spaces of analytic functions", Contemporary Mathematics **144**, 23 – 33 (1993).

[4] A. E. Djrbashian, F. Shamoyan, Topics in the Theory of $A^p(\omega)$ Spaces, Teubner Texte Math. Leipzig (1988).

[5] A. V. Harutyunyan, "Toeplitz operators and division theorems in spaces $H^p(\omega)$", Complex Variables, **48**, no. 10, 803 – 813 (2003).

[6] A. V. Harutyunyan, "Toeplitz operators and division theorems in anisotropic spaces of holomorphic functions in the polydisk", Complex Variables, **48**, no. 4, 347 – 363 (2003).

[7] A. V. Harutyunyan, "Bloch spaces of holomorphic functions in the polydisk", J. Funct. Spaces Appl. **5**, no. 3, 213 – 230 (2007).

[8] A. V. Harutyunyan, W. Lusky, "$\omega-$ weighted holomorphic Besov space on the polydisk", Function Spaces and Applications, **9**, 1 – 16 (2011).

[9] B. Jöricke, "A multidimensional analogy of Privalov theorem", Math. Nachrichten **107**, 221 – 233 (1982).

[10] A. N. Karapetyants, F. D. Kodzoeva, "Analytic weighed Besov spaces on the unit disk", Proc. A. Razmadze Math.Inst. **139**, 125 – 127 (2005).

[11] G. Marinescu, X. Ma, "Toeplitz operators on symplectic manifolds", J. Geom. Anal. **18**, no. 2, 565 – 611 (2008).

[12] G. Marinescu, C.-Y. Hsiao, "Berezin-Toeplitz quantization for lower energy forms", arXiv:1411.6654.

[13] S. Janson, J. Peetre, R. Rochberg, "Hankel forms and the Fock space", Revista Math. Ibero-Amer. 3, 61 – 138 (1987).

[14] W. Rudin, Theory of Functions in the Unit Ball of C^n, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 241, Springer-Verlag, New York-Berlin, xiii+436 pp. (1980).

[15] E. Seneta, Regularly Varying Functions, Lecture Notes in Mathematics, 508, Springer-Verlag, Berlin-New York, v+112 pp. (1976).

[16] F. Shamoyan, "Diagonal mappings and questions of representation of anisotropic spaces in polydisk " [in Russian], Sib. mat. Journ. 3, no. 2, 197 – 215 (1990).

[17] K. Stroethoff, "Besov type characterisations for the Bloch space", Bull. Australian Math. Soc. 39, 405 – 420 (1989).

[18] K. Stroethoff, "Hankel and Topelitz oprators on the Fock space", Michigan Math. J. 30, 3 – 16 (1992).

[19] K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York (1990).

[20] K. Zhu, "Duality and Hankel operators on the Bergman space of bounded symmetric domains", J. Func. Anal. 81, 260 – 278 (1988).

Поступила 10 сентября 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 2, 2018, стр. 75 - 82.

SOME PERTURBATION OF ℓ_p-LOCALIZED FRAMES

M. A. HASANKHANI FARD

Department of Mathematics Vali-e-Asr University, Rafsanjan, Iran
E-mail: *m.hasankhani@vru.ac.ir*

Abstract. In this paper, we give some sufficient conditions under which perturbations preserve ℓ_p-localized frames. Using an arbitrary given sequence, we provide a simple way for constructing ℓ_p-localized sequences.

MSC2010 numbers: 42C15.
Keywords: Frame; frame sequence; ℓ_p-localized; ℓ_p-self localized.

1. Introduction

The concept of frames in a Hilbert space was originally introduced by Duffin and Schaeffer [6] in the context of non-harmonic Fourier series. Frames are redundant sets of vectors in a Hilbert space, which yield one natural representation of each vector in the space, but may have infinitely many different representations for any given vector. This redundancy makes frames is useful in applications. For instance, in signal processing, this concept has become very useful in analyzing the completeness and stability of linear discrete signal representations. Since the last decade, various generalizations of the frames have been proposed such as frame of subspaces, pseudo-frames, oblique frames, continuous frames, fusion frames and g-frames.

Given a separable Hilbert space $\mathcal{H}$ with inner product $<.,.>$, a sequence $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ is called a frame for $\mathcal{H}$ if there exist constants $A > 0$, $B < \infty$ such that for all $f \in \mathcal{H}$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |< f, f_k >|^2 \leq B\|f\|^2.$$

The constant A is called a lower frame bound and B is called an upper frame bound. If only an upper bound B exists, then $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ is called a B-Bessel sequence or simply Bessel when the constant is implicit. If $A = B$, then the sequence $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ is called a tight frame, and if $A = B = 1$, it is called a Parseval frame. A sequence $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ in Hilbert space $\mathcal{H}$ is called a frame sequence in $\mathcal{H}$ if it is a frame for Hilbert space $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

A bounded linear operator T defined by

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}, \quad T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

is called the pre frame operator of $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ (see [4, Theorem 3.1.3]). Also, a linear operator S defined by

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad Sf = \sum_{k=1}^{\infty} < f, f_k > f_k$$

is called the frame operator of $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. The frame operator S is bounded, invertible, self-adjoint, and positive (see [4, Lemma 5.1.6]). It is easy to show that $S = TT^*$, where T^* is the adjoint operator of T (see [4, page 100]). Two frames $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ and $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ are said to be dual frames for $\mathcal{H}$ if

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} < f, f_k > g_k = \sum_{k=1}^{\infty} < f, g_k > f_k, \quad \text{for any} \quad f \in \mathcal{H}.$$

Observe that the frame $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a dual frame of the frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, and is called the canonical dual frame of $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. For more information concerning frames we refer to [4, 7, 9].

The fundamental and useful property of frames is their overcompleteness. Balan et al. [1] – [3] used the ℓ_p-localization of a sequence $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ (I is an index set), and a sequence $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j \in G}$ (G is a discrete abelian group), in a separable Hilbert space $\mathcal{H}$ with respect to the associated map $a : I \to G$ for excess, overcompleteness and decay of the coefficients of the expansion of elements of $\mathcal{F}$ in terms of the elements of $\mathcal{E}$. They constructed an infinite subset of a frame which can be removed yet still leave a frame. They also proved that any sufficiently localized frame can be written as a finite union of Riesz sequences.

Perturbation theory is a very important tool in several areas of mathematics. In applications where bases appear, a famuos classical perturbation result is given by Paley and Wiener [8]. The Paley-Wiener theorem state that a sequence that is sufficiently near to a basis in a Hilbert space automatically forms a basis. A version of Paley-Wiener Theorem for frames can be found in Christensen [5].

In this paper, we concentrate on perturbation theory for ℓ_p-localized frames. We show that some perturbations of the localization map $a : I \to G$ preserve the ℓ_p-localization property (Theorems 2.2 and 2.3). Also, using the convolution on ℓ_1, biorthogonal sequences and orthogonal projections we obtain new ℓ_p-localized sequences (Theorems 2.4 - 2.9). Finally, using an arbitrary given sequence, we provide a simple way for constructing ℓ_p-localized sequences (Theorem 2.10).

2. Main Results

Throughout the paper, I will stand for a countable index set, G will denote an additive discrete group of the form

$$G = \prod_{i=1}^{d} a_i\mathbb{Z} \times \prod_{j=1}^{e} \mathbb{Z}_{n_j},$$

which is equipped with a metric defined as follows. For $m_j \in \mathbb{Z}_{n_j}$, we set $\delta(m_j) = 0$ if $m_j = 0$, and $\delta(m_j) = 1$, otherwise. Then given $g = (a_1n_1, ..., a_dn_d, m_1, ..., m_e) \in G$, we set

$$|g| = \sup\{|a_1n_1|, ..., |a_dn_d|, \delta(m_1), ..., \delta(m_e)\}.$$

The metric is then defined by $d(f, g) = |f - g|$. Also, let $a : I \to G$ be a map and let

$$\ell_p(G) = \left\{ r = (r_j)_{j\in G} : \sum_{j\in G} |r_j|^p < \infty \right\}.$$

Balan et al. [2] defined the ℓ_p-localization as follows:

Definition 2.1. Let $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j\in G}$ be sequences in $\mathcal{H}$, and let $a : I \to G$ be an associated map. a) $\mathcal{F}$ is ℓ_p-localized with respect to the sequence $\mathcal{E}$ and the map a, or simply that $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E})$ is ℓ_p-localized, if

$$\sum_{j\in G} \sup_{i\in I} |\langle f_i, e_{j+a(i)}\rangle|^p < \infty.$$

Equivalently, there exists an element $r \in \ell_p(G)$ such that

$$|\langle f_i, e_j\rangle| \le r_{a(i)-j}, \forall i \in I, \forall j \in G.$$

b) $(\mathcal{F}, a)$ is ℓ_p-self-localized, if there exists an element $r \in \ell_p(G)$ such that

$$|\langle f_i, f_j\rangle| \le r_{a(i)-a(j)}, \forall i, j \in I.$$

Also, if $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ is a frame for $\mathcal{H}$ with a canonical dual frame $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f}_i\}_{i\in I}$, then c) $(\mathcal{F}, a)$ is ℓ_p-localized with respect to its canonical dual frame $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f}_i\}_{i\in I}$, if there exists an element $r \in \ell_p(G)$ such that

$$\left|\left\langle f_i, \tilde{f}_j\right\rangle\right| \le r_{a(i)-a(j)}, \quad i, j \in I.$$

The next theorem states that the ℓ_2-localization property is stable under perturbation of the localization map $a : I \to G$.

Theorem 2.2. *Let $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ be a sequence in $\mathcal{H}$ and $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j\in G}$ be a Bessel sequence in $\mathcal{H}$, and let $a : I \to G$ be an associated map. If $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E})$ is ℓ_2-localized and $b : I \to G$ is a map such that $a = b$ except on a finite subset F of I, then $(\mathcal{F}, b, \mathcal{E})$ is ℓ_2-localized.*

Proof. We have $\sum_{j\in G}\sup_{i\in I}|\langle f_i, e_{j+a(i)}\rangle|^2<\infty$, because $(\mathcal{F},a,\mathcal{E})$ is ℓ_2-localized. Let $i_0\in I=F\cup(I\setminus F)$. If $i_0\in F$, then for all $j\in G$ we have

$$|\langle f_{i_0}, e_{j+b(i_0)}\rangle|^2\le\sup_{i\in F}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2\le\sup_{i\in F}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2+\sup_{i\in(I\setminus F)}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2.$$

Also, if $i_0\in(I\setminus F)$, then for all $j\in G$ we have

$$\begin{aligned}|\langle f_{i_0}, e_{j+b(i_0)}\rangle|^2&\le\sup_{i\in(I\setminus F)}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2\\&\le\sup_{i\in F}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2+\sup_{i\in(I\setminus F)}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2.\end{aligned}$$

Thus, for all $j\in G$ we have $\sup_{i\in I}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2\le\sup_{i\in F}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2+\sup_{i\in(I\setminus F)}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2$, because i_o is an arbitrary element of I.

Now for all $i\in I$ we have $G+b(i)=G$, because G is a group. Also, $a(i)=b(i)$ for all $i\in I\setminus F$. Thus, we can write

$$\begin{aligned}\sum_{j\in G}\sup_{i\in I}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2&\le\sum_{j\in G}\sup_{i\in F}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2+\sum_{j\in G}\sup_{i\in I\setminus F}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2\\&=\sum_{j\in G}\sup_{i\in F}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2+\sum_{j\in G}\sup_{i\in I\setminus F}|\langle f_i, e_{j+a(i)}\rangle|^2\\&\le\sum_{j\in G}\sum_{i\in F}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2+\sum_{j\in G}\sup_{i\in I\setminus F}|\langle f_i, e_{j+a(i)}\rangle|^2\\&=\sum_{i\in F}\sum_{j\in G}|\langle f_i, e_{j+b(i)}\rangle|^2+\sum_{j\in G}\sup_{i\in I\setminus F}|\langle f_i, e_{j+a(i)}\rangle|^2\\&=\sum_{i\in F}\sum_{j\in G+b(i)}|\langle f_i, e_j\rangle|^2+\sum_{j\in G}\sup_{i\in I\setminus F}|\langle f_i, e_{j+a(i)}\rangle|^2\\&=\sum_{i\in F}\sum_{j\in G}|\langle f_i, e_j\rangle|^2+\sum_{j\in G}\sup_{i\in I\setminus F}|\langle f_i, e_{j+a(i)}\rangle|^2\\&\le\sum_{i\in F}\sum_{j\in G}|\langle f_i, e_j\rangle|^2+\sum_{j\in G}\sup_{i\in I}|\langle f_i, e_{j+a(i)}\rangle|^2\\&\le B\sum_{i\in F}\|f_i\|^2+\sum_{j\in G}\sup_{i\in I}|\langle f_i, e_{j+a(i)}\rangle|^2<\infty,\end{aligned}$$

where B is the Bessel bound of $\mathcal{E}$. Thus, $(\mathcal{F},b,\mathcal{E})$ is ℓ_2-localized. □

For two localization maps a and b, the ℓ_p-localization with respect to a and the ℓ_p-localization with respect to b are equivalent if $a-b$ is constant.

Theorem 2.3. *Let $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{E}=\{e_j\}_{j\in G}$ be sequences in $\mathcal{H}$, and let $a:I\to G$ be an associated map. Suppose that $(\mathcal{F},a,\mathcal{E})$ is ℓ_p-localized. If $b:I\to G$ is a map such that $b-a$ is a constant function, then $(\mathcal{F},b,\mathcal{E})$ is ℓ_p-localized.*

Proof. If $(\mathcal{F},a,\mathcal{E})$ is ℓ_p-localized, then there exists $r\in\ell_p(G)$ such that

$$|\langle f_i, e_j\rangle|\le r_{a(i)-j},\quad i\in I,\quad j\in G.$$

Also, if $b : I \to G$ is a map such that $b - a$ is constant function, then there exists $\lambda \in G$ such that $a(i) = b(i) - \lambda$ for all $i \in I$. Observe that the sequence $s = \{s(j)\}_{j\in j}$ defined by $s(j) := r_{j-\lambda}$ belongs to $\ell_p(G)$, because

$$\sum_{j\in G} |s_j|^p = \sum_{j\in G} |r_{j-\lambda}|^p = \sum_{j\in\lambda+G} |r_j|^p = \sum_{j\in G} |r_{j-\lambda}|^p < \infty.$$

Finally, for all $i \in I$ and all $j \in G$ we have

$$|\langle f_i, e_j\rangle| \leq r_{a(i)-j} = r_{b(i)-j-\lambda} = s_{b(i)-j},$$

and hence $(\mathcal{F}, b, \mathcal{E})$ is ℓ_p-localized. □

Using the convolution on ℓ_1, in the next theorem we obtain new ℓ_1-localized sequences.

Theorem 2.4. *Let $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j\in G}$ be sequences in $\mathcal{H}$, and let $a : I \to G$ be an associated map. If $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E})$ is ℓ_1-localized and $\mathcal{E}' = \{e'_j\}_{j\in G}$, where $e'_j = \sum_{k\in G} s_k e_{j+k}$ for some $s = \{s_k\}_{k\in G} \in \ell_1(G)$, then $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E}')$ is ℓ_1-localized.*

Proof. If $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E})$ is ℓ_1-localized, then there exists $r \in \ell_1(G)$ such that

$$|\langle f_i, e_j\rangle| \leq r_{a(i)-j}, \forall i \in I, \forall j \in G.$$

Now, for all $i \in I$ and $j \in G$, we have

$$|\langle f_i, e'_j\rangle| = \left|\left\langle f_i, \sum_{k\in G} s_k e_{j+k}\right\rangle\right| \leq \sum_{k\in G} |s_k||\langle f_i, e_{j+k}\rangle| \leq \sum_{k\in G} |s_k| r_{a(i)-j-k} = (|s| * r)_{a(i)-j},$$

where $|s| * r$ is the convolution of two sequence $|s|$ and r. Thus, $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E}')$ is ℓ_1-localized. □

In the next theorem, we obtain a new ℓ_p-localized sequence for a given ℓ_p-localized sequence.

Theorem 2.5. *Let $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ be an orthonormal basis for $\mathcal{H}$ and $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j\in G}$ be a sequence in $\mathcal{H}$, and let $a : I \to G$ be an associated map. If $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E})$ is ℓ_p-localized and $\mathcal{E}' = \{e'_j\}_{j\in G}$, where $e'_j = e_j + \sum_{k\in I} s_{a(k)-j} f_k$ for some $s = \{s_k\}_{k\in G} \in \ell_p(G)$, then $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E}')$ is ℓ_p-localized.*

Proof. If $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E})$ is ℓ_p-localized, then there exists $r \in \ell_p(G)$ such that

$$|\langle f_i, e_j\rangle| \leq r_{a(i)-j}, \forall i \in I, \forall j \in G.$$

Now, for all $i \in I$ and $j \in G$, we have

$$\begin{aligned} |\langle f_i, e'_j\rangle| &= \left|\left\langle f_i, e_j + \sum_{k\in I} s_{a(k)-j} f_k\right\rangle\right| \leq |\langle f_i, e_j\rangle| + \left|\sum_{k\in I} s_{a(k)-j} \langle f_i, f_k\rangle\right| \\ &= |\langle f_i, e_j\rangle| + |s|_{a(i)-j}\|f_i\|^2 \leq (r + |s|)_{a(i)-j}. \end{aligned}$$

Thus, $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E}')$ is ℓ_p-localized. □

The next theorem shows that if p and q are conjugate exponents, then using Holder inequality, from a given sequence that is ℓ_p-localized and ℓ_q-localized, we can obtain a new ℓ_2-localized sequence.

Theorem 2.6. *Let $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{E}=\{e_j\}_{j\in G}$ be sequences in $\mathcal{H}$, $a: I\to G$ be an associated map, and let $p,q\geq 1$ such that $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. The following assertions hold.*

a) *If $(\mathcal{F},a,\mathcal{E})$ is ℓ_p-localized and ℓ_q-localized, then $(\mathcal{F},a,\mathcal{E})$ is ℓ_2-localized.*

b) *If $(\mathcal{F},a)$ is ℓ_p-self localized and ℓ_q-self localized, then $(\mathcal{F},a)$ is ℓ_2-self localized.*

c) *If $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ is a frame for $\mathcal{H}$ and $(\mathcal{F},a)$ is ℓ_p-localized and ℓ_q-localized with respect to its canonical dual frame $\tilde{\mathcal{F}}=\{\tilde{f}_i\}_{i\in I}$, then $(\mathcal{F},a)$ is ℓ_2-localized with respect to its canonical dual frame $\tilde{\mathcal{F}}=\{\tilde{f}_i\}_{i\in I}$.*

Proof. If $(\mathcal{F},a,\mathcal{E})$ is ℓ_p-localized and ℓ_q-localized, then there exist $r\in\ell_p(G)$ and $s\in\ell_q(G)$ such that

$$|\langle f_i,e_j\rangle|\leq r_{a(i)-j},\ and\ |\langle f_i,e_j\rangle|\leq s_{a(i)-j}, \forall i\in I,\forall j\in G.$$

Thus, for all $i\in I$ and $j\in G$ we have

$$|\langle f_i,e_j\rangle|^2=|\langle f_i,e_j\rangle||\langle f_i,e_j\rangle|\leq r_{a(i)-j}s_{a(i)-j}=(rs)_{a(i)-j}.$$

By Holder inequality we have $rs\in\ell_1(G)$, and hence $(\mathcal{F},a,\mathcal{E})$ is ℓ_2-localized. The proof of parts b) and c) is similar to that of part a), and so is omitted. □

Remark. Using the generalized Holder inequality and arguments similar to those applied in the proof of Theorem 2.6, it can easily be shown that if $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{E}=\{e_j\}_{j\in G}$ are sequences in $\mathcal{H}$, $a: I\to G$ is an associated map, and $(\mathcal{F},a,\mathcal{E})$ is ℓ_{P_t}-localized for $t=1,2,...,n$ such that $\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{p_t}=\frac{1}{r}\leq 1$, then $(\mathcal{F},a,\mathcal{E})$ is ℓ_{nr}-localized.

The next theorem shows that biorthogonal sequences of $\mathcal{E}=\{e_j\}_{j\in G}$ give a new ℓ_p-localized sequence with respect to $\mathcal{E}$.

Theorem 2.7. *Let $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in G}$ and $\mathcal{E}=\{e_j\}_{j\in G}$ be sequences in $\mathcal{H}$, and let $\mathcal{E}'=\{e_j'\}_{j\in G}$ be a biorthogonal sequence of $\mathcal{E}$. If $(\mathcal{F},id,\mathcal{E})$ is ℓ_p-localized, then $(\mathcal{F}+\mathcal{E}',id,\mathcal{E})$ is also ℓ_p-localized.*

Proof. If $(\mathcal{F},id,\mathcal{E})$ is ℓ_p-localized, then there exist $r\in\ell_p(G)$ such that

$$|\langle f_i,e_j\rangle|\leq r_{i-j},\forall i\in I,\forall j\in G.$$

Now, for all $i\in I$ and $j\in G$, we have

$$|\langle f_i+e_i',e_j\rangle|\leq|\langle f_i,e_j\rangle|+|\langle e_i',e_j\rangle|\leq r_{i-j}+s_{i-j}=(r+s)_{i-j},$$

where $s = \{s(m)\}_{m\in G} \in \ell_p(G)$ is defined by $s(m) = 0$ for $m \neq 0$ and $s(0) = 1$. Thus, $(\mathcal{F} + \mathcal{E}', id, \mathcal{E})$ is ℓ_p-localized. □

Using the convolution on ℓ_1, in the next theorem we obtain new ℓ_1-localized sequences.

Theorem 2.8. *Let $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j\in G}$ be sequences in $\mathcal{H}$, $a : I \to G$ be an associated map, and let $\mathcal{E}' = \{e'_j\}_{j\in G}$, where $e'_j = \sum_{k=1}^{n} e_{j+j_k}$ for some $j_1, j_2, ..., j_n \in G$. If $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E})$ is ℓ_1-localized, then $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E}')$ is also ℓ_1-localized.*

Proof. If $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E})$ is ℓ_1-localized, then there exist $r \in \ell_1(G)$ such that

$$|\langle f_i, e_j\rangle| \leq r_{a(i)-j}, \forall i \in I, \forall j \in G.$$

Now, for all $i \in I$ and $j \in G$, we have

$$|\langle f_i, e'_j\rangle| = \left|\left\langle f_i, \sum_{k=1}^{n} e_{j+j_k}\right\rangle\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\langle f_i, e_{j+j_k}\rangle| \leq \sum_{k=1}^{n} r_{a(i)-j-j_k} = (r * s)_{a(i)-j},$$

where $s = \{s(m)\}_{m\in G} \in \ell_1(G)$ is defined by $s(m) = 1$ for $m \in \{j_1, j_2, ..., j_n\}$ and $s(m) = 0$, otherwise. Thus, $(\mathcal{F}, a, \mathcal{E}')$ is ℓ_1-localized. □

The next theorem gives a new ℓ_p-localized sequence by acting a familly of orthogonal projections on a given ℓ_p-self localized sequence.

Theorem 2.9. *Let $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in G}$ be a bounded sequence in $\mathcal{H}$ and $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j\in G}$ such that $e_j = f_j - p_j f_j$, where p_j is the orthogonal projection onto $M_j := \overline{span}\{f_i\}_{i\neq j}$. If $(\mathcal{F}, id)$ is ℓ_p-self localized, then $(\mathcal{F}, id, \mathcal{E})$ is also ℓ_p-localized.*

Proof. If $(\mathcal{F}, id)$ is ℓ_p-self localized, then there exist $r \in \ell_p(G)$ such that

$$|\langle f_i, f_j\rangle| \leq r_{i-j}, \forall i, j \in G.$$

Also, there exist $M > 0$ such that $\|f_i\| \leq M$, for all $i \in G$. Observe that the sequence $s = \{s(m)\}_{m\in G}$, defined by $s(m) = 2r(m)$ for $m \neq 0$ and $s(0) = 2M^2$, belongs to $\ell_p(G)$. Hence, for all $i \neq j \in G$, we have

$$|\langle f_i, e_j\rangle| = |\langle f_i, f_j - p_j f_j\rangle| \leq |\langle f_i, f_j\rangle| + |\langle f_i, p_j f_j\rangle| = 2|\langle f_i, f_j\rangle| \leq s_{i-j}.$$

Also, for all $i \in G$ we have

$$|\langle f_i, e_i\rangle = |\langle f_i, f_i - p_i f_i\rangle| \leq |\langle f_i, f_i\rangle| + |\langle f_i, p_i f_i\rangle| \leq 2\|f_i\|^2 \leq 2M^2 = s_{i-i}.$$

Thus, $(\mathcal{F}, id, \mathcal{E})$ is ℓ_p-localized. □

A simple way to construct ℓ_p-localized sequences is given in the next theorem.

Theorem 2.10. *Let $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j\in \mathbb{Z}}$ be sequences in $\mathcal{H}$, $a : I \to \mathbb{Z}$ be an arbitrary map, $\mathcal{F}' = \{f'_i\}_{i\in I}$, where $f'_i = \frac{2^{-|a(i)|} f_i}{1+\|f_i\|}$ and $\mathcal{E}' = \{e'_j\}_{j\in \mathbb{Z}}$, where $e'_j = \frac{2^{-|j|} e_j}{1+\|e_j\|}$. Then the following asertions hold:*

a) $(\mathcal{F}', a, \mathcal{E}')$ *is* ℓ_p*-localized.*

b) $(\mathcal{F}', a)$ *is* ℓ_p*-self localized.*

c) $(\mathcal{E}', id)$ *is* ℓ_p*-self localized.*

Proof. For all $i \in I$ and $j \in \mathbb{Z}$ we have

$$|\langle f_i', e_j' \rangle| = \left| \left\langle \frac{2^{-|a(i)|} f_i}{1 + \|f_i\|}, \frac{2^{-|a(j)|} e_j}{1 + \|e_j\|} \right\rangle \right| \le 2^{-(|a(i)|+|j|)} \le 2^{-|a(i)-j|} = r_{a(i)-j},$$

where $r = \{r(m)\}_{m \in \mathbb{Z}} \in \ell_p(\mathbb{Z})$ is defined by $r(m) = 2^{-|m|}$. Thus, $(\mathcal{F}', a, \mathcal{E}')$ is ℓ_p-localized, and assertion a) is proved. The proof of parts b) and c) is similar to that of part a), and so is omitted. □

Список литературы

[1] R. Balan, P. G. Casazza, C. Heil, and Z. Landau, "Density, overcompleteness, and localization of frames", AMS Electronic Research Announcements, 12, 71 – 86 (2006).

[2] R. Balan, P. G. Casazza, C. Heil, and Z. Landau, "Density, overcompleteness, and localization of frames, I", Theory, J. Fourier Anal. Appl. 12, no. 2, 105 – 143 (2006).

[3] R. Balan, P. G. Casazza, C. Heil, and Z. Landau, "Density, overcompleteness, and localization of frames, 2". Gabor systems, J. Fourier Anal. Appl., 12, no. 3, 309 – 344 (2006).

[4] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (2002).

[5] O. Christensen, "A Paley Wiener theorem for frames", Proc. Amer. Math. Soc., 123, 256 – 270 (1995).

[6] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, "A class of nonharmonic Fourier series", Trans. Amer. Math. Soc. 72, 341 – 366 (1952).

[7] C. Heil, D. Walnut, "Continuous and discrete wavelet transform", SIAM Rev., 31, 628 – 666 (1989).

[8] R. Paley and N. Wiener, Fourier Transform in Complex Domains, AMS Colloquium Publications, 19 (1934).

[9] R. Young, An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York (1980).

Поступила 24 февраля 2016

Cover–to–cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)
Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 53, No. 1, 2018

CONTENTS

L.-H. CHEN, A sub-density theorem of Sturm-Liouville eigenvalue problem with finitely many singularities 1

V. N. MARGARYAN AND H. G. GHAZARYAN, On extraction of smooth solutions of a class of almost hypoelliptic equations with constant power 6

F. S. GEVORGYAN, Groups of invertible binary operations of a topological space 16

GULZAR AND N. A. RATHER, On a composition preserving inequalities between polynomials 21

S. ALI, A. FOSNER, W. JING, On generalized derivations and centralizers of operator algebras with involution......... 27

A. KH. KHACHATRYAN, KH. A. KHACHATRYAN, A. A. KHACHATRYAN, One-parameter family of positive solutions for a nonlinear integral equation arising in physical kinetics 34

L. G. ARABADZHYAN, S. A. KHACHATRYAN, On a homogeneous integral equation with two kernels 41

A. G. BARSEGYAN, On integral equations the kernels of which are homogeneous functions of degree (-1) 47

M. H. SAFARYAN, On an equivalency of rare differentiation bases of rectangles .... 56 – 60

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 53, номер 2, 2018

Содержание

Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян, Вычисление геометрических вероятностей с помощью ковариограммы выпуклых тел 3

Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, Теоремы единственности для системы Виленкина 15

U. Goginava, Almost everywhere strong summability of Fejér means of rectangular partial sums of two-dimensional Walsh-Fourier series 31

А. А. Дарбинян, А. Г. Туманян, Об априорных оценках и фредгольмовости дифференциальных операторов в анизотропных пространствах 47

A. V. Harutyunyan, G. Marinescu, Hankel and Berezin type operators on weighted Besov spaces of holomorphic functions on polydisks 61

M. A. Hasankhani Fard, On perturbations of ℓ_p-localized frames 75–82

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 53, No. 2, 2018

Contents

N. G. Aharonyan and V. K. Ohanyan, Calculation of geometric probabilities using covariogram of convex bodies 3

G. G. Gevorkyan, K. A. Navasardyan, Uniqueness theorems for series by Vilenkin system 15

U. Goginava, Almost everywhere strong summability of Fejér means of rectangular partial sums of two-dimensional Walsh-Fourier series 31

A. A. Darbinyan, A. G. Tumanyan, On a priori estimates and Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces 47

A. V. Harutyunyan, G. Marinescu, Hankel and Berezin type operators on weighted Besov spaces of holomorphic functions on polydisks 61

M. A. Hasankhani Fard, On perturbations of ℓ_p-localized frames 75–82