

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵԴԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2018

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ON GENERALIZED DERIVATIONS AND CENTRALIZERS OF
OPERATOR ALGEBRAS WITH INVOLUTION

S. ALI, A. POŠNER, W. JING

King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia

University of Primorska, Koper, Slovenia

Fayetteville State University, Fayetteville, USA

E-mails: shakir.ali.mm@amu.ac.in; ajda.fosner@fm-kp.si; wjing@uncfsu.edu

Abstract. Let $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space H and $\mathcal{A}(H) \subseteq B(H)$ be a standard operator algebra which is closed under the adjoint operation. Let $F : \mathcal{A}(H) \rightarrow B(H)$ be a linear mapping satisfying $F(AA^*A) = F(A)A^*A + Ad(A^*)A + AA^*d(A)$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$, where the associated linear mapping $d : \mathcal{A}(H) \rightarrow B(H)$ satisfies the relation $d(AA^*A) = d(A)A^*A + Ad(A^*)A + AA^*d(A)$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$. Then F is of the form $F(A) = SA - AT$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$ and some $S, T \in B(H)$, that is, F is a generalized derivation. We also prove some results concerning centralizers on $\mathcal{A}(H)$ and semisimple H^* -algebras.

MSC2010 numbers: 47B47, 46K15, 16W10.

Keywords: generalized derivation; generalized Jordan derivation; left centralizer; standard operator algebra; H^* -algebra.

1. INTRODUCTION

Let $\delta : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ be an additive map on a ring $\mathcal{R}$. Recall that δ is called a generalized Jordan derivation if there exists a Jordan derivation $d : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ such that the equality

$$(1.1) \quad \delta(a^2) = \delta(a)a + ad(a)$$

holds for all $a \in \mathcal{R}$, and δ is said to be a generalized derivation if there is a derivation d on $\mathcal{R}$ satisfying

$$(1.2) \quad \delta(ab) = \delta(a)b + ad(b)$$

for all $a, b \in \mathcal{R}$.

In [7], it was proved that every generalized Jordan derivation on a 2-torsion free prime ring is a generalized derivation. This result was generalized in [14] to generalized Jordan derivations on 2-torsion free semiprime rings.

In particular, if $d = \delta$ in (1.1) and (1.2), then δ is called a Jordan derivation and derivation, respectively. The first result on Jordan derivation is due to Herstein [6] who proved that any Jordan derivation on a 2-torsion free prime ring is a Jordan derivation. Cusack [4] and Brešar [2] showed that this is also true for Jordan

derivations on 2-torsion free semiprime rings. If $c \in \mathcal{R}$ is a fixed element and $\delta(a) = [c, a] = ca - ac$ for all $a \in \mathcal{R}$, then it is easy to see that δ is a derivation which is called an inner derivation determined by c . It is also well known that every linear derivation on standard operator algebra is inner (cf. [3]). Some related results on operator algebras can be found in [5], [8], [12], and references therein.

In [13], Vukman proved that if a linear mapping d on a standard operator algebra, which is closed under the adjoint operation, or a semisimple H^* -algebra, satisfying

$$d(AA^*A) = d(A)A^*A + Ad(A^*)A + AA^*d(A),$$

then d is a derivation.

Motivated by the above result and the concept of generalized Jordan derivations, in this paper, we aim to show that if F is a linear mapping on a standard operator algebra which is closed under the adjoint operation satisfying

$$F(AA^*A) = F(A)A^*A + Ad(A^*)A + AA^*d(A),$$

where the associated linear mapping d satisfies the relation

$$d(AA^*A) = d(A)A^*A + Ad(A^*)A + AA^*d(A),$$

then F is a generalized derivation. A similar result is also obtained for the case of linear mappings on semisimple H^* -algebras. It should be noted that in order to prove the result on semisimple H^* -algebras, we need to have some results about left centralizers. Recall that a linear map $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ on an algebra $\mathcal{A}$ is called a left centralizer if $\phi(xy) = \phi(x)y$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. The definition of a right centralizer should be self explanatory.

We now list some basic notation, definitions, and results. Throughout the paper, $\mathcal{L}(H)$ and $\mathcal{B}(H)$ will stand for the algebra of all linear operators and the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space H , respectively. By $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ we denote the subalgebra of all bounded finite rank operators. We call a subalgebra $\mathcal{A}(H)$ of $\mathcal{B}(H)$ standard if it contains $\mathcal{F}(H)$. Notice that every standard operator algebra is prime. An operator $P \in \mathcal{B}(H)$ is said to be a projection if $P^* = P$ and $P^2 = P$. Each rank one operator can be expressed as $x \otimes y$, where $x \otimes y(u) = \langle u, y \rangle x$ for all $u \in H$.

Let $\mathcal{A}$ be an algebra over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. An involution in $\mathcal{A}$ is a map $a \mapsto a^*$ of $\mathcal{A}$ into itself such that

$$(1) (a^*)^* = a$$

$$(2) (a + b)^* = a^* + b^*$$

$$(3) (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$$

$$(4) (ab)^* = b^* a^*$$

for any $a, b \in \mathcal{A}$ and $\lambda \in \mathbb{C}$. An algebra over $\mathbb{C}$ endowed with an involution is called an involution algebra or a $\ast$ -algebra. Recall that a semisimple $H^\ast$ -algebra is a complex semisimple Banach $\ast$ -algebra whose norm is a Hilbert space norm such that $\langle x, yx^\ast \rangle = \langle xz, y \rangle = \langle z, x^\ast y \rangle$ is fulfilled for all elements x, y, z . Let $\mathcal{A}$ be a semisimple $H^\ast$ -algebra and $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ be the collection of minimal closed ideals of $\mathcal{A}$ such that $\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha$. Then any element $x \in \mathcal{A}$ can be expressed as $x = \sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha$ and $x_\alpha x_\beta = 0$ for $x_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ and $x_\beta \in \mathcal{A}_\beta$ with $\alpha \neq \beta$. For every x and y in $\mathcal{A}$ with $x = \sum_{\alpha} x_\alpha$ and $y = \sum_{\alpha} y_\alpha$, we have $xy = \sum_{\alpha} x_\alpha y_\alpha$. A self-adjoint idempotent element $e \in \mathcal{A}$ is called a projection. A nonzero projection is said to be minimal if it can't be represented as a sum of two mutually orthogonal nonzero projections in $\mathcal{A}$. For more information about $H^\ast$ -algebras, we refer the reader to [1] and [11].

2. MAIN RESULTS

Our first theorem is a generalization of Theorem 1 of [13].

Theorem 2.1. *Let H be a complex Hilbert space, and let $\mathcal{A}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ be a standard operator algebra, which is closed under the adjoint operation. Suppose there exists a linear mapping $F : \mathcal{A}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ satisfying the relation*

$$(2.1) \quad F(AA^\ast A) = F(A)A^\ast A + Ad(A^\ast)A + AA^\ast d(A)$$

for all $A \in \mathcal{A}(H)$, where the associated linear mapping $d : \mathcal{A}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ satisfies the relation

$$(2.2) \quad d(AA^\ast A) = d(A)A^\ast A + Ad(A^\ast)A + AA^\ast d(A)$$

for all $A \in \mathcal{A}(H)$. Then $F(A) = SA - AT$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$ and some $S, T \in \mathcal{B}(H)$, which means that F is a linear generalized derivation.

It should be mentioned that in the proof below, we borrow some ideas from [10] and [13].

Proof. First we consider the restriction of F to $\mathcal{F}(H)$. Suppose $A \in \mathcal{F}(H)$. Then $A^\ast \in \mathcal{F}(H)$. Pick a projection $P \in \mathcal{F}(H)$ such that $AP = PA = A$ and $A^\ast P = PA^\ast = A^\ast$. Hence, in view of relation (2.1), we obtain

$$(2.3) \quad F(P) = F(P)P + Pd(P)P + Pd(P).$$

Right multiplication by P to (2.3) yields that $2Pd(P)P = 0$. This implies that

$$(2.4) \quad Pd(P)P = 0.$$

In view of above relation, we find that

$$(2.5) \quad Pd(P)A = 0, \quad Ad(P)P = 0, \quad \text{and} \quad Ad(P)A = 0.$$

Using (2.4) in (2.3), we get

$$(2.6) \quad F(P) = F(P)P + Pd(P).$$

Replacing A by $A + P$ in (2.1) and using the fact that $A^* = (A + P)^* = A^* + P$, we obtain

$$(2.7) \quad F((A + P)(A^* + P)(A + P)) = F(A)A^*A + Ad(A^*)A \\ + AA^*d(A) + F(AA^* + A^*A + A^2) + 2F(A) + F(A^*) + F(P)P + Pd(P).$$

On the other hand, we find that

$$(2.8) \quad F((A + P)(A^* + P)(A + P)) = F(A)A^*A + F(A)A + F(A)A^* \\ + F(A)P + F(P)A^*A + F(P)A^* + F(P)A + F(P)P + Ad(A^*)A + Pd(A^*)A \\ + Ad(P)A + Pd(P)A + Ad(A^*)P + Pd(A^*)P + Ad(P)P + Pd(P)P + AA^*d(A) \\ + A^*d(A) + Ad(A) + Pd(A) + AA^*d(P) + A^*d(P) + Ad(P) + Pd(P).$$

Combining (2.7) and (2.8), we obtain

$$F(AA^* + A^*A + A^2) + 2F(A) + F(A^*) \\ = F(A)A + F(A)A^* + F(A)P + F(P)A^*A + F(P)A^* + F(P)A + Pd(A^*)A \\ + Ad(P)A + Pd(P)A + Ad(A^*)P + Pd(A^*)P + Ad(P)P + Pd(P)P \\ + A^*d(A) + Ad(A) + Pd(A) + AA^*d(P) + A^*d(P) + Ad(P).$$

An application of (2.5) and (2.6) yields

$$(2.9) \quad F(AA^* + A^*A + A^2) + 2F(A) + F(A^*) = F(A)A + F(A)A^* \\ + F(A)P + F(P)A^*A + F(P)A^* + F(P)A + Pd(A^*)A \\ + Ad(A^*)P + Pd(A^*)P + A^*d(A) + Ad(A) \\ + Pd(A) + AA^*d(P) + A^*d(P) + Ad(P).$$

Replacing A by $-A$ in (2.9), we get

$$(2.10) \quad F(AA^* + A^*A + A^2) - 2F(A) - F(A^*) = F(A)A^* + F(A)A \\ + F(P)A^*A - F(P)A^* - F(P)A - F(A)P + Pd(A^*)A + Ad(A^*)P \\ - Pd(A^*)P + A^*d(A) + Ad(A) - Pd(A) + AA^*d(P) - A^*d(P) - Ad(P).$$

Adding (2.9) and (2.10), we arrive at

$$(2.11) \quad F(AA^* + A^*A + A^2) = F(A)A^* + F(A)A + F(P)A^*A$$

$$+Pd(A^*)A + Ad(P)P + A^*d(A) + Ad(A) + AA^*d(P).$$

Subtracting (2.10) from (2.9), we obtain

$$(2.12) \quad 2F(A) + F(A^*) = F(P)A^* + F(P)A + F(A)P + Pd(A^*)P \\ + Pd(A) + A^*d(P) + Ad(P).$$

Next, substituting iA for A into (2.10) and (2.11), we find that

$$(2.13) \quad F(A^2 - AA^* - A^*A) = F(A)A - F(A)A^* - F(P)A^*A \\ - Pd(A^*)A + Ad(P)A + Ad(A) - A^*d(A) - AA^*d(P)$$

$$(2.14) \quad 2iF(A) - iF(A^*) = iF(P)A - iF(P)A^* + iF(A)P \\ - iPd(A^*)P + iPd(A) - iA^*d(P) + iAd(P).$$

This implies that

$$(2.15) \quad 2F(A) - F(A^*) = F(P)A - F(P)A^* + F(A)P \\ - Pd(A^*)P + Pd(A) - A^*d(P) + Ad(P).$$

Adding (2.12) and (2.15), we arrive at

$$(2.16) \quad 2F(A) = F(A)P + Ad(P) + F(P)A + Pd(A).$$

Now adding (2.11) and (2.13), we get

$$(2.17) \quad F(A^2) = F(A)A + Ad(A)$$

for all $A \in \mathcal{A}(H)$.

By Theorem 1 of [13], we see that d is an inner derivation on $\mathcal{A}(H)$. So, there exists an operator $N \in \mathcal{B}(H)$ such that

$$(2.18) \quad d(A) = NA - AN$$

for all $A \in \mathcal{F}(H)$. In view of relations (2.16) and (2.17), we conclude that F maps $\mathcal{F}(H)$ into itself. Also, from (2.17), it is clear that F is a generalized Jordan derivation on $\mathcal{F}(H)$.

Note that $\mathcal{F}(H)$ is prime and hence F is a generalized derivation on $\mathcal{F}(H)$ by Theorem 2.5 of [7]. Furthermore, Theorem 4.2 of [7] asserts that F is a generalized inner derivation on $\mathcal{F}(H)$, that is, there exist $S, T \in \mathcal{B}(H)$ such that

$$(2.19) \quad F(A) = SA - AT$$

for all $A \in \mathcal{F}(H)$.

To complete the proof, it remains to show that the relation (2.19) holds for all $A \in \mathcal{A}(H)$.

We first claim that the operators N in (2.18) and T in (2.19) differ by a scalar multiple of the identity operator I . Indeed, for any $A, B \in \mathcal{F}(H)$, $F(AB) = SAB - ABT$. On the other hand, we have

$$F(A)B + Ad(B) = SAB - ATB + ANB - ABN.$$

Comparing the above two relations, we see that

$$(2.20) \quad AB(N - T) = A(N - T)B$$

holds true for all $A, B \in \mathcal{F}(H)$.

Pick $y, u \in H$ such that $\langle u, y \rangle = 1$. Now for arbitrary $x, v \in H$, the relation (2.20) becomes $x \otimes y \cdot u \otimes v \cdot (N - T) = x \otimes y \cdot (N - T) \cdot u \otimes v$. This leads to $(N - T)^*v = ((N - T)u, y)v$ for any $v \in H$. Hence, $(N - T)^* = ((N - T)u, y)I$, or equivalently, $N - T = \langle y, (N - T)u \rangle I$. Taking $\lambda = \langle y, (N - T)u \rangle$, we get $N - T = \lambda I$.

We now define a linear map $G: \mathcal{A}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ as follows: $G(A) = SA - AT$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$. We set $F_0 = F - G$, and observe that $F_0(A) = 0$ for any $A \in \mathcal{F}(H)$. Thus, it remains to show that $F_0(A) = 0$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$.

For any $A \in \mathcal{A}(H)$, we can write

$$\begin{aligned} F_0(AA^*A) &= F(AA^*A) - G(AA^*A) = \\ &= F(A)A^*A + Ad(A^*)A + AA^*d(A) - SAA^*A + AA^*AT \\ &= F(A)A^*A + ANA^*A - AA^*NA + AA^*NA - AA^*AN - SAA^*A + AA^*AT \\ &= F(A)A^*A + A(T + \lambda I)A^*A - AA^*(T + \lambda I)A + AA^*(T + \lambda I)A \\ &\quad - AA^*A(T + \lambda I) - SAA^*A + AA^*AT = F(A)A^*A - SAA^*A + ATA^*A. \end{aligned}$$

and

$$F_0(A)A^*A = F(A)A^*A - G(A)A^*A = F(A)A^*A - SAA^*A + ATA^*A.$$

Therefore, we have $F_0(AA^*A) = F_0(A)A^*A$ for any $A \in \mathcal{A}(H)$.

Let $A \in \mathcal{A}(H)$ and P be a rank one projection. We write $K = A - AP - PA + PAP$. One can easily check that $KP = PK = K^*P = PK^* = 0$ and $F_0(K) = F_0(A)$. We have

$$\begin{aligned} F_0(A)K^*K &= F_0(K)K^*K = F_0(KK^*K) = F_0(KK^*K + P) = \\ &= F_0((K + P)(K + P)^*(K + P)) = F_0(K + P)(K + P)^*(K + P) = \\ &= F_0(A)(K^* + P)(K + P) = F_0(A)K^*K + F_0(A)P, \end{aligned}$$

implying that $F_0(A)P = 0$. Since P is arbitrary, it follows that $F_0(A) = 0$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$. This completes the proof of the theorem. $\square$

As an immediate consequence of Theorem 2.1, we have the following corollary.

Corollary 2.1 ([13], Theorem 1). *Let H be a complex Hilbert space, and let $\mathcal{A}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ be a standard operator algebra, which is closed under the adjoint operation. Suppose there exists a linear mapping $d: \mathcal{A}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ satisfying the relation*

$$d(AA^*A) = d(A)A^*A + Ad(A^*)A + AA^*d(A)$$

for all $A \in \mathcal{A}(H)$. Then $d(A) = TA - AT$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$ and some $T \in \mathcal{B}(H)$, which means that d is an inner derivation.

The proof of the following theorem is similar to that of Lemma of [10]. For the sake of completeness, we include it here.

Theorem 2.2. *Let H be a complex Hilbert space, and let $\mathcal{A}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ be a standard operator algebra, which is closed under the adjoint operation. Further, let $\phi: \mathcal{A}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ be a linear mapping satisfying*

$$(2.21) \quad \phi(AA^*A) = \phi(A)A^*A$$

for all $A \in \mathcal{A}(H)$. Then ϕ is a left centralizer and there exists a linear operator $C \in \mathcal{L}(H)$ such that for all $A \in \mathcal{A}(H)$ $\phi(A) = CA$.

Proof. Let $A \in \mathcal{F}(H)$ and P be a finite rank projection such that $AP = PA = A$. Substituting $A + P$ for A in relation (2.21), we obtain

$$\begin{aligned} & \phi(A^2 + A^*A + AA^* + 2A + A^*) \\ = & \phi(A)A + \phi(P)A^*A + \phi(A)A^* + \phi(A)P + \phi(P)A + \phi(P)A^*. \end{aligned}$$

Replacing A by $A + P$ and $A - P$ respectively in the above relation, we can get

$$(2.22) \quad \phi(2A + A^*) = \phi(A)P + \phi(P)A + \phi(P)A^*.$$

Replacing A by iA in (2.22), we get

$$\phi(2iA - iA^*) = i\phi(A)P + i\phi(P)A - i\phi(P)A^*.$$

It follows that

$$(2.23) \quad \phi(-2A + A^*) = -\phi(A)P - \phi(P)A + \phi(P)A^*$$

Equalities (2.22) and (2.23) yield that $\phi(A^*) = \phi(P)A^*$. Replacing A^* by A results in

$$(2.24) \quad \phi(A) = \phi(P)A.$$

We now show that ϕ is a left centralizer on $\mathcal{F}(H)$, that is, $\phi(AB) = \phi(A)B$ for all $A, B \in \mathcal{F}(H)$. If H is finite dimensional, the choosing $P = I$, we get $\phi(AB) = \phi(I)AB = \phi(A)B$. If H is of infinite dimension, then we fix an element $x \in H$, and

claim that for any $y \in H$, there exists an element $x_y \in H$ such that $\phi(x \otimes y) = x_y \otimes y$. Let $y_1, y_2 \in H$. If y_1 and y_2 are linearly independent, then

$$\phi(x \otimes (y_1 + y_2)) = x_{y_1+y_2} \otimes (y_1 + y_2) = x_{y_1+y_2} \otimes y_1 + x_{y_1+y_2} \otimes y_2.$$

On the other hand, we have

$$\phi(x \otimes y_1) + \phi(x \otimes y_2) = x_{y_1} \otimes y_1 + x_{y_2} \otimes y_2.$$

It follows that $x_{y_1} = x_{y_1+y_2} = x_{y_2}$. In the case where y_1 and y_2 are linearly dependent, we may find a $y_3 \in H$ such that y_1, y_3 as well as y_2, y_3 are linearly independent. Therefore, $x_{y_1} = x_{y_2} = x_{y_3}$.

Pick an element $u \in H$ such that $\langle u, y \rangle \neq 0$. Let $v \in H$ be arbitrary. We have

$$\begin{aligned} \phi(x \otimes y \cdot u \otimes v) &= \phi(\langle u, y \rangle x \otimes v) = x_{\langle u, y \rangle v} \otimes \langle u, y \rangle v \\ &= \langle u, y \rangle x_{\langle u, y \rangle v} \otimes v = \langle u, y \rangle x_y \otimes v = x_y \otimes y \cdot u \otimes v = \phi(x \otimes y) u \otimes v. \end{aligned}$$

If $\langle u, y \rangle = 0$, we have $\phi(x \otimes y \cdot u \otimes v) = 0$ and, by (2.24),

$$\phi(x \otimes y \cdot u \otimes v) = \phi(P)x \otimes y \cdot u \otimes v = 0$$

for some finite rank projection P . Now, we can conclude that for any $A, B \in \mathcal{F}(H)$ $\phi(AB) = \phi(A)B$. This implies that ϕ is a left centralizer on $\mathcal{F}(H)$.

Next, we pick $y, u \in H$ with $\langle y, u \rangle = 1$, and define $Cx = \phi(x \otimes u)y$ for any $x \in H$. Obviously, C is linear. Now for any $A \in \mathcal{F}(H)$ and $x \in H$,

$$CAx = \phi(Ax \otimes u)y = \phi(A)x \otimes u(y) = \phi(A)(\langle y, u \rangle x) = \phi(A)x.$$

Thus, $\phi(A) = CA$ for all $A \in \mathcal{F}(H)$.

To complete the proof, it remains to show that $\phi(A) = CA$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$.

Define Φ by $\Phi(A) = CA$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$ and let $\phi_0 = \phi - \Phi$. It is obvious that $\phi_0(A) = 0$ for all $A \in \mathcal{F}(H)$. One can check that $\phi_0(\lambda A^* A) = \phi_0(A) A^* A$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$. Let $A \in \mathcal{A}(H)$. Suppose that P is a finite rank projection and let $K = A - AP - PA + PAP$. We have

$$\begin{aligned} \phi_0(K)K^*K &= \phi_0(KK^*K) = \phi_0(KK^*K + P) = \phi_0((K+P)(K+P)^*(K+P)) \\ &= \phi_0(K+P)(K+P)^*(K+P). \end{aligned}$$

This leads to $\phi_0(K)P = 0$. Observing that $\phi_0(K) = \phi_0(A)$, we get $\phi_0(A)P = 0$ for any finite rank projection P . Hence, $\phi_0(A) = 0$ for all $A \in \mathcal{A}(H)$. $\square$

The proof of the next result is just a modification of that of Theorem of [10]. We present the proof for the reader's convenience.

Theorem 2.3. Let $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ be a linear mapping on a semisimple H^* -algebra $\mathcal{A}$ satisfying

$$(2.25) \quad \phi(xx^*x) = \phi(x)x^*x$$

for all $x \in \mathcal{A}$. Then ϕ is a left centralizer.

Proof. Let $e \in \mathcal{A}$ be a projection. Replacing x by $x + e$ and $x - e$ in (2.25), respectively, and comparing the resulting equalities, we arrive at

$$(2.26) \quad \phi(ee^*x + xe^*e + ex^*e) = \phi(e)e^*x + \phi(x)e^*e + \phi(e)x^*e.$$

Let $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ be a collection of minimal closed ideals of $\mathcal{A}$ such that their orthogonal direct sum is $\mathcal{A}$. For $\alpha \in \Gamma$ and $x \in \mathcal{A}_\alpha$, let e be a minimal projection with $e \in \mathcal{A}_\beta$ ($\alpha \neq \beta$). It follows from (2.26) that $\phi(x)e = 0$. Thus, $\phi(x) \in \mathcal{A}_\alpha$, which implies that $\mathcal{A}_\alpha$ is invariant under ϕ . By Theorem 2.2, we conclude that ϕ is a left centralizer on $\mathcal{A}_\alpha$ for each $\alpha \in \Gamma$. Furthermore, it follows from Theorem 2.2 and Remark 1 of [9] that ϕ is continuous on $\mathcal{A}_\alpha$ for every $\alpha \in \Gamma$.

Let $\{x_n\} \subseteq \mathcal{A}$ and $y \in \mathcal{A}$ be such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) \rightarrow y.$$

If $e \in \mathcal{A}$ is a minimal projection, from (2.26) we see that

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} [\phi(e)ex_n + \phi(x_n)e + \phi(e)x_n^*e] = ye,$$

implying that $y = 0$. By Closed Graph Theorem, ϕ is continuous.

For any $x, y \in \mathcal{A}$, we write $x = \sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha$ and $y = \sum_{\alpha \in \Gamma} y_\alpha$, where $x_\alpha, y_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$). We have

$$\begin{aligned} \phi(xy) &= \phi\left(\sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha \sum_{\alpha \in \Gamma} y_\alpha\right) = \phi\left(\sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha y_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \phi(x_\alpha y_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \phi(x_\alpha) y_\alpha \\ &= \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} \phi(x_\alpha)\right) \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} y_\alpha\right) = \phi\left(\sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha\right) \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} y_\alpha\right) = \phi(x)y. \end{aligned}$$

Thus, $\phi(xy) = \phi(x)y$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. This completes the proof. $\square$

We conclude our paper by proving an analog of Theorem 1 on semisimple H^* -algebras.

Theorem 2.4. Let $\mathcal{A}$ be a semisimple H^* -algebra. Suppose there exists a linear mapping $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ satisfying the relation

$$F(xx^*x) = F(x)x^*x + xd(x^*)x + xx^*d(x)$$

for all $x \in \mathcal{A}$, where the associated linear mapping $d: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ satisfies the relation

$$d(xx^*x) = d(x)x^*x + xd(x^*)x + xx^*d(x)$$

for all $x \in \mathcal{A}$. Then F is a generalized derivation.

Proof. By Theorem 2 of [13], d is a linear derivation. Now, for any $x \in \mathcal{A}$, we have

$$\begin{aligned}(F - d)(xx^*x) &= F(xx^*x) - d(xx^*x) = \\&= (F(x)x^*x + xd(x^*)x + xx^*d(x)) - (d(x)x^*x + xd(x^*)x + xx^*d(x)) \\&= F(x)x^*x - d(x)x^*x = (F - d)(x)x^*x.\end{aligned}$$

In view of Theorem 2.3, we conclude that $F - d$ is a left centralizer. Therefore, for any $x, y \in \mathcal{A}$, using the fact that d is a derivation, we obtain

$$F(xy) = (F - d)(xy) + d(xy) = (F - d)(x)y + d(x)y + xd(y) = F(x)y + xd(y).$$

Hence, F is a generalized derivation. $\square$

Corollary 2.2 ([13], Theorem 2). *Let $\mathcal{A}$ be a semisimple H^* -algebra. Suppose there exists a linear mapping $d: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ satisfying the relation*

$$d(xx^*x) = d(x)x^*x + xd(x^*)x + xx^*d(x)$$

for all $x \in \mathcal{A}$. Then d is a derivation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Ambrose, "Structure theorems for a special class of Banach algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87**, 364 – 388 (1948).
- [2] M. Brešar, "Jordan derivations on semiprime rings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**, 1003 – 1006 (1988).
- [3] P. R. Chernoff, "Representations, automorphisms, and derivations of some operator algebras", *J. Funct. Anal.*, **12**, 278 – 289 (1973).
- [4] J. M. Cusack, "Jordan derivation on rings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **63**, 321 – 324 (1978).
- [5] A. Pócsor and J. Vukman, "Some functional equations on standard operator algebras", *Acta Math. Hungar.*, **118**, 299 – 306 (2008).
- [6] I. N. Herstein, "Jordan derivations of prime rings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**, 1104 – 1119 (1967).
- [7] W. Jing and S. Lu, "Generalized Jordan derivations on prime rings and operator algebras", *Taiwanese J. Math.*, **7**, 605 – 613 (2003).
- [8] J. Li and H. Pandharkar, "Derivations on certain operator Algebras", *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, **24**, no. 6, 345 – 349 (2000).
- [9] L. Molnár, "A condition for a function to be a bounded linear operator", *Indian. J. Math.*, **35**, 1 – 4 (1993).
- [10] L. Molnár, "On centralisers of an H^* -algebra", *Publ. Math. Debrecen*, **46**, 89 – 95 (1995).
- [11] P. P. Saworotnow and J. C. Friedell, "Trace-class for an arbitrary H^* -algebra", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26**, 95 – 100 (1970).
- [12] P. Šemrl, "Ring derivations on standard operator algebras", *J. Funct. Anal.*, **112**, 318 – 324 (1993).
- [13] J. Vukman, "On derivations of algebras with involution", *Acta. Math. Hungar.*, **112**, 181 – 186 (2006).
- [14] F. Pong and Z. Xiao, "Generalized Jordan derivations on semiprime rings and its applications in range inclusion problems", *Mediterr. J. Math.*, **8**, 271 – 291 (2011).

Поступила 4 декабря 2015

ОБ ОДНОРОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ДВУМЯ ЯДРАМИ

Л. Г. АРАБАДЖЯН, С. А. ХАЧАТРЯН

Институт математики НАН РА
Армянский Государственный Педагогический Университет
E-mails: arabadjan@mail.ru, kachaturyan@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена условиям не trivialной (не нулевой) разрешимости некоторых классов однородных интегральных уравнений вида

$$S(x) = \int_0^{\infty} T_1(x-t)S(t)dt + \int_{-\infty}^0 T_2(x-t)S(t)dt, \quad x \in R,$$

относительно искомой функции S . Изучено асимптотическое поведение решения S .

MSC2010 number: 45A05, 45B05.

Ключевые слова: интегральное уравнение; ядро уравнения; асимптотика решения.

1. ВВЕДЕНИЕ, ВОСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

1.1 Вопросы не trivialной разрешимости однородных уравнений вида

$$(1.1) \quad S(x) = \int_0^{\infty} T_1(x-t)S(t)dt + \int_{-\infty}^0 T_2(x-t)S(t)dt, \quad x \in R,$$

где ядра T_1 и T_2 - данные на R функции, удовлетворяющие условиям (консервативности):

$$(1.2) \quad 0 \leq T_j \in L_1(R), \quad \mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x)dx = 1, \quad j = 1, 2,$$

были изучены в работах [1]-[2]. В указанных работах, на основе развитого в [3] - [4] общего подхода, а именно, вольтерровской факторизации интегрального оператора и применения нелинейных функциональных уравнений Н. В. Енгибаряна, были получены достаточные условия разрешимости однородных (и неоднородных) уравнений вида (1.1), (1.2) и изучено асимптотическое поведение их решений в $\pm\infty$. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Если в уравнении (1.1) ядра $T_j (j = 1, 2)$ удовлетворяют условиям (1.8) и одному из следующих условий (а) или (б):

$$(a) \quad T_j(-x) = T_j(x), x \in R, j = 1, 2;$$

$$(b) \quad \omega_1 \geq 0 \quad \omega_2 \leq 0,$$

где $\omega_j = \int_{-\infty}^{\infty} t T_j(t) dt$, в случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| T_j(t) dt < \infty, j = 1, 2,$$

то это уравнение обладает нетривиальным, неотрицательным, локально-интегрируемым на R решением $S : S \in L_1^{loc}(R)$. Если в условии (б) имеют место строгие неравенства, то указанное решение S суммируемо и ограничено на R : $S \in L_1(R) \cap M(R)$.

В настоящей статье результаты работы [1] по разрешимости уравнения (1.1) для случая (1.2) обобщаются на более широкие классы уравнений (1.1).

1.2 Введем в рассмотрение, определяемые на $R^+ = (0, +\infty)$ функции $S_{\pm}(x)$ ~~и~~
 $S(\pm x), x > 0$. Тогда уравнение (1.1) можно представить в виде системы:

$$(1.3) \quad \begin{cases} S_+(x) = \int_0^{\infty} K_1(x-t) S_+(t) dt + \int_0^{\infty} \overset{\circ}{K}_1(x+t) S_-(t) dt, \\ S_-(x) = \int_0^{\infty} \overset{\circ}{K}_2(x+t) S_+(t) dt + \int_0^{\infty} K_2(x-t) S_-(t) dt, \end{cases} \quad x \in R^+,$$

где

$$\begin{aligned} K_1(x) &= T_1(x), K_2(x) = T_2(-x), x \in R; \\ \overset{\circ}{K}_1(x) &= T_2(x), \overset{\circ}{K}_2(x) = T_1(-x), x \in R^+. \end{aligned}$$

В работах [4] – [6] исследовалась задача вольтерровской факторизации интегральных операторов, определяемых правой частью системы (1.3), для различных классов систем типа (1.3). Использование результатов этих работ позволило в [1] свести решение системы (1.3) к последовательному решению двух систем вольтерровского типа:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \varphi_+(x) = \int_0^{\infty} V_1^-(t) \varphi_+(t+x) dx + \int_0^{\infty} V_2^-(t+x) \varphi_-(t) dt, \\ \varphi_-(x) = \int_0^{\infty} V_1^-(t+x) \varphi_+(t) dt + \int_0^{\infty} V_2^-(t) \varphi_-(t+x) dt, \end{cases} \quad x \in R^+.$$

и

$$(1.5) \quad \begin{cases} S_+(x) = \varphi_+(x) + \int_0^{\infty} V_1^+(x-t) S_+(t) dt, \\ S_-(x) = \varphi_-(x) + \int_0^{\infty} V_2^+(x-t) S_-(t) dt, \end{cases} \quad x \in R^+,$$

где ядра $V_1^\pm$ и $V_2^\pm$ соответствующих операторов определяются из следующих нелинейных систем факторизации (см. [3]-[6]):

$$(1.6) \quad V_1^\pm(x) = T_1(\pm x) + \int_0^\infty V_1^\mp(t) V_1^\pm(x+t) dt, \quad x \in R^+$$

и

$$(1.7) \quad V_2^\pm(x) = T_2(\mp x) + \int_0^\infty V_2^\mp(t) V_2^\pm(x+t) dt, \quad x \in R^+.$$

1.3. Вопросы разрешимости нелинейной системы факторизации (уравнений Ен-гбаряна):

$$(1.8) \quad \begin{cases} V^+(x) = T(x) + \int_0^\infty V^-(t) V^+(x+t) dt, \\ V^-(x) = T(-x) + \int_0^\infty V^+(t) V^-(x+t) dt, \quad x \in R^+. \end{cases}$$

подробно изучены в работах [3] - [4]. В [3] доказано, в частности, что при

$$0 \leq T \in L_1(R), \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^\infty T(x) dx \leq 1,$$

система (1.8) обладает неотрицательным суммируемым на $R^\pm$ решением $(V^+, V^-) \in L_1(R^+) \times L_1(R^+)$, $V^\pm \geq 0$, причем

$$(1.9) \quad \gamma^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty V^\pm(x) dx \leq 1 \quad (1 - \gamma^-) \cdot (1 - \gamma^+) = 1 - \mu.$$

В случае $\mu = 1$ хотя бы одна из величин $\gamma^\pm$ равна 1. В этом случае справедливо следующее утверждение (см. [4]).

Теорема 1.2. В консервативном случае $T \geq 0$ и $\mu = 1$ при $\int_{-\infty}^\infty |x| T(x) dx < \infty$ для решения (V_+, V_-) системы (1.8) имеют место

$$\begin{aligned} \text{а) } \omega = 0 &\Leftrightarrow \gamma^\pm = 1; \quad \text{б) } \omega > 0 \Leftrightarrow \gamma^+ = 1, \gamma^- < 1; \quad \text{в) } \omega < 0 \Leftrightarrow \gamma^+ < 1, \gamma^- = 1, \\ \text{где } \omega &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^\infty x T(x) dx, \quad \gamma^\pm = \int_0^\infty V^\pm(x) dx. \end{aligned}$$

В симметрическом случае $T(-x) = T(x)$, $\forall x \in R$ решением системы (1.8) является пара $V_+ = V$, $V_- = V$, где V -решение уравнения

$$(1.10) \quad V(x) = T(x) + \int_0^\infty V(t) V(x+t) dt, \quad x \in R^+,$$

и, поэтому, $\gamma^{\pm} = \gamma = 1$, где $\gamma = \int_0^{\infty} V(x) dx$.

В указанной работе [4] доказано также, что для консервативной системы (1.8) имеют место следующие утверждения:

если $\gamma_- < 1$, то из $\omega^+ \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x T(x) dx < \infty$ следует $\int_0^{\infty} x V^+(x) dx < \infty$, что равносильно включению $F^+ \in L_1(R^+)$, где $F^+(x) \equiv \int_x^{\infty} V^+(t) dt$, $x \in R^+$.

Аналогично имеют место:

если $\gamma_+ < 1$, то из $\omega^- \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x T(-x) dx < \infty$ следует $F^- \in L_1(R^+)$, где $F^-(x) = \int_x^{\infty} V^-(t) dt$.

Если же $\gamma_- = 1$, то из $\nu^+ \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x^2 T(x) dx < \infty$ следует $\int_0^{\infty} x V^+(x) dx < \infty$, и, следовательно, $F^+ \in L_1(R^+)$ и аналогично, при $\gamma_+ = 1$ из $\nu^- \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x^2 T(-x) dx < \infty$ следует $\int_0^{\infty} x V^-(x) dx < +\infty$ и $F^- \in L_1(R^+)$.

1.4. Пусть $E(R^+)$ - одно из пространств $L_p(R^+)$, $p \geq 1$, $M(R^+)$ или $C(R^+)$. Рассмотрим уравнение

$$(1.11) \quad S^*(x) = g(x) + \int_0^x V(x-t) S^*(t) dt, \quad x \in R^+,$$

где данные функции g и V удовлетворяют условиям

$$(1.12) \quad g \in E(R^+), \quad 0 \leq V \in L_1(R^+).$$

Это уравнение имеет локально-интегрируемое на R^+ решение S^* , причем $S^* \geq 0$ при $g \geq 0$ (см. [8]). Если $\gamma < 1$ и $g \in E(R^+)$, то, очевидно, $S^* \in E(R^+)$. В случае $\gamma = 1$ и $g \in E(R^+)$ уравнение (1.11) изучалось в [8], [9] (см. также [4]). Доказано, что при $g \in M(R^+)$ имеет место

$$(1.13) \quad S^*(x) = O(x), \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

Заметим, что к рассматриваемому типу уравнений относятся уравнения (1.5) относительно искомых функций $S^{\pm}$.

1.5 Вопросы разрешимости уравнения (1.10) в закритическом случае

$$(1.14) \quad 0 \leq T \in L_1(R), \quad \mu > 1,$$

рассмотрены в [7]. В указанной работе получены достаточные условия существования комплексного решения (1.10) в случае (1.14). Имеет место следующий результат.

Теорема 1.3. Пусть T - определенная на R четная функция, удовлетворяющая условию (1.14), а на R^+ также условием:

$$(1.15) \quad T \in C^{(2)}(R^+), \quad T' \leq 0, \quad 0 \leq T'' \downarrow \text{ на } R^+.$$

Тогда уравнение (1.10) обладает комплексным решением вида

$$(1.16) \quad V(x) = W(x) + i\sigma \int_0^\infty W(t)dt, \quad x \in R^+,$$

где действительное число σ определяется из уравнения

$$(1.17) \quad \int_0^\infty T(t) \cos \sigma t dt = \frac{1}{2},$$

а вещественная функция W - из нелинейного уравнения факторизации

$$(1.18) \quad W(x) = K(x) + \int_0^\infty W(t)W(x+t)dt, \quad x \in R^+,$$

при консервативной функции $K(x)$:

$$K(x) \stackrel{\text{def}}{=} T(x) - \sigma \cdot \int_0^\infty T(x+t) \sin \sigma t dt, \quad x \in R^+.$$

(Отметим, что при $\mu > 1$ уравнение (1.17) всегда имеет вещественный корень $\sigma \in R, \sigma \neq 0$).

2. КЛАССИФИКАЦИЯ И РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ (1.1)

2.1. Как было отмечено выше, для решения системы (1.3) (а, следовательно, и уравнения (1.1)) достаточно последовательно решить системы (1.4) и (1.5).

Рассмотрим пару функций

$$(2.1) \quad \varphi_+(x) = 1 - \int_0^x V_2^-(t)dt, \quad \varphi_-(x) = 1 - \int_0^x V_1^-(t)dt, \quad x \in R^+.$$

Непосредственно проверяется справедливость следующей леммы.

Лемма 2.1. Для пары функций (φ_+, φ_-) из (2.1) имеют место соотношения

$$(2.2) \quad \int_0^\infty V_1^-(t)\varphi_+(t+x)dt + \int_0^\infty V_2^-(t+x)\varphi_-(t)dt = \varphi_+(x) - (1-\gamma_1^-)(1-\gamma_2^-),$$

$$\int_0^\infty V_1^-(t+x)\varphi_+(t)dt + \int_0^\infty V_2^-(t)\varphi_-(t+x)dt = \varphi_-(x) - (1-\gamma_1^-)(1-\gamma_2^-),$$

$$\text{где } \gamma_j^- = \int_0^{\infty} V_j^-(t) dt, \quad j = 1, 2.$$

Соотношения (2.2) позволяют делать следующее утверждение: если хотя бы одна из величин γ_1^- и γ_2^- равна 1, то пара функций (2.1) будет удовлетворять системе (1.4). Таким образом, в указанном случае решение (S^+, S^-) системы (1.3) можно определить из уравнения

$$(2.3) \quad S_+(x) = 1 - \int_0^x V_2^-(t) dt + \int_0^x V_1^+(x-t) S_+(t) dt, \quad x \in R^+$$

$$(2.4) \quad S_-(x) = 1 - \int_0^x V_1^-(t) dt + \int_0^x V_2^+(x-t) S_-(t) dt, \quad x \in R^+.$$

2.2. Мы будем различать следующие классы уравнения (1.1): (α)-класс "дважды консервативных" уравнений, который определяется следующими, альтернативными, условиями на ядра T_j ($j = 1, 2$):

$$(2.5) \quad 0 \leq T_j \in L_1(R), \quad \mu_j \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x) dx = 1, \quad (-1)^j \omega_j \geq 0,$$

где $\omega_j \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x T_j(x) dx$ в случае $\int_{-\infty}^{\infty} |x| T_j(x) dx < \infty$ $j = 1, 2$; либо условимся

$$(2.6) \quad T_j(-x) = T_j(x), \quad \forall x \in R, \quad j = 1, 2.$$

(β)-класс "консервативно-диссипативных" уравнений, когда одно из ядер T_j ($j = 1$, либо $j = 2$) удовлетворяет одному из условий (2.5) или (2.6), а второе ядро - T_i (здесь $i + j = 3$) - одному из двух альтернативных условий:

$$(2.7) \quad 0 \leq T_i \in L_1(R), \quad \mu_i < 1,$$

либо

$$(2.8) \quad \mu_i = 1, \quad (-1)^i \omega_i < 0,$$

где $\omega_i = \int_{-\infty}^{\infty} x T_i(x) dx$ при условии $\int_{-\infty}^{\infty} |x| T_i(x) dx < \infty$, ($i = 1$, если $j = 2$ и $i = 2$, если $j = 1$).

(γ)-класс "консервативно-закрытических" уравнений, когда одно из ядер T_j ($j = 1$ либо $j = 2$) удовлетворяет одному из условий (2.5) или (2.6), а второе ядро - T_i (здесь $i + j = 3$) - условию

$$(2.9) \quad \mu_i > 1, \quad T_i(-x) = T_i(x), \quad \forall x \in R; \quad T_i \in C^{(2)}(R^+), \quad T_i' \leq 0, \quad 0 \leq T_i'' \downarrow \text{ на } R^+.$$

Теперь, используя результаты работ [3]-[9] по разрешимости и асимптотическому поведению решений консервативных, диссипативных и закрытических уравнений

типа Вольтерра, можно получать следующие достаточные условия существования ненулевого решения системы (1.3) и, следовательно, уравнения (1.1).

Теорема 2.1. *Классы (α), (β), (γ) уравнений (1.1) обладают ненулевым, вещественным решением S, причем поведение функций $S_{\pm}(x) \equiv S(\pm x)$, $x \in R^+$, в зависимости от класса и условий, будет следующим:*

Для класса (α): если каждое из ядер T_j ($j = 1, 2$) удовлетворяет условию (2.5) и $\omega_j = 0$ или же условию (2.6), то $S^{\pm}(x) = O(x)$, при $x \rightarrow \infty$.

Если же эти функции удовлетворяют условию (2.5), причем $(-1)^j \omega_j > 0$, то $S^+ \in M(R^+)$, при $j = 1$ и $S^- \in M(R^+)$, при $j = 2$. Если при этом $\int_0^{\infty} x^2 T_j(x) dx < \infty$, то $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ (при $j = 1$) и $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ (при $j = 2$).

Для класса (β): если T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяет условию (2.5) и $\omega_j = 0$ или условию (2.6), а T_i (здесь $i + j = 3$) - одному из условий (2.7) или (2.8), то для функций $S^{\pm}$ получаем

$$S^+(x) = O(x), \quad x \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad S^-(x) \in M(R^+), \quad \text{при } j = 1,$$

$$S^+(x) \in M(R^+) \quad \text{и} \quad S^-(x) = O(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{при } j = 2.$$

Если существует $\int_0^{\infty} x^2 T_j(-x) dx < \infty$, то получаем $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ при $j = 1$ и $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ при $j = 2$.

Если T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяет условию (2.5) причем $(-1)^j \omega_j > 0$, а T_i (при $i + j = 3$) - одному из условий (2.7) или (2.8), то $S^{\pm} \in M(R^+)$. Более того, если к тому же $\int_0^{\infty} x^2 T_j(-x) dx < \infty$, то $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ при $j = 1$ и $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$, при $j = 2$.

Для класса (γ): если T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяет условию (2.5) и $\omega_j = 0$ или условию (2.6), а T_i (при $i + j = 3$) - условию (2.9), то $S^{\pm}(x) = O(x)$, при $x \rightarrow \infty$.

Если T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяет условию (2.5) и $(-1)^j \omega_j > 0$, а T_i (при $i + j = 3$) - условию (2.9), то $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ и $S^-(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$ в случае $j = 1$; $S^+(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$ и $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$, в случае $j = 2$.

Доказательство. Из определения классов (α), (β) и (γ) следуют (в силу теоремы 2.1), что хотя бы одна из величин γ_1^- и γ_2^- равна 1. Тогда, согласно вышеизложенному, пара функций (2.1) будет решением системы (1.4). Поэтому решение системы (1.3) и уравнения (1.1) могут быть построены посредством решений (2.3) и (2.4). (Заметим, что эти уравнения относятся к типу уравнений (1.11) и при $V_j^+ \in L(R^+)$, $j = 1, 2$ они обладают решениями $S^{\pm} \in L_1^{\text{loc}}(R^+)$).

Для класса (α) в случае, когда T_j ($j = 1, 2$) удовлетворяют условию (2.5) и $\omega_j = 0$ или условию (2.6), имеет место $\gamma_j^\pm = 1$. В этом случае в уравнениях (2.3) и (2.4) будем иметь

$$g_j(x) \equiv 1 - \int_x^\infty V_j^-(t)dt = \int_x^\infty V_j^-(t)dt \in M(R^-), \quad j = 1, 2$$

и согласно с (1.13) будем иметь $S^\pm(x) = O(x)$, при $x \rightarrow \infty$. Если же T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяют условию (2.5) и $(-1)^j \omega_j > 0$, то в силу теоремы 1.2 имеем $\gamma_j^- = 1$ и $\gamma_j^+ < 1$. Тогда будем иметь $\int_0^\infty x V_j^-(x)dx < \infty$ и, следовательно, $g \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$. Поэтому в этом случае $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ при $j = 1$ и $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ при $j = 2$.

Для класса (β) в случае, когда T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяет условию (2.5) и $\omega_j = 0$ или условию (2.6), а T_i (при $i + j = 3$) удовлетворяет одному из условий (2.7) или (2.8), имеем $\gamma_j^\pm = 1$ и $\gamma_i^\pm < 1$. Поэтому для решения уравнений (2.3) и (2.4) будем иметь $S^+(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$ и $S^- \in M(R^+)$, при $j = 1$ и $S^+ \in M(R^+)$ и $S^-(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$, при $j = 2$.

Если T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяет условию (2.5) и $(-1)^j \omega_j > 0$, а T_i (при $i + j = 3$) - одному из условий (2.7) и (2.8), то $\gamma_j^- = 1$, $\gamma_j^+ < 1$ и $\gamma_i^\pm < 1$. В этом случае будем иметь $S^+ \in M(R^+)$; $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$, если $j = 1$ и $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$; $S^- \in M(R^+)$, если $j = 2$.

Для класса (γ) в случае, если T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяет условию (2.5) и $\omega_j = 0$ или условию (2.6), а T_i (где $i + j = 3$) - условию (2.9), имеем $\gamma_j^\pm = 1$, причем $\gamma_i^+ = \gamma_i^-$ является комплексным числом вида $\gamma = 1 + i\sigma\rho$, где σ - вещественное решение уравнения (1.17) при $T = T_i$, а $\rho = \int_0^\infty x W(x)dx < \infty$, где W -определяется из (1.18) посредством функции

$$K(x) = T_i(x) - \sigma \cdot \int_0^\infty T_i(x+t) \sin \sigma t dt, \quad x \in R^+.$$

В этом случае в уравнениях (2.3) и (2.4) при $j = 1$ будем иметь

$$(2.10) \quad S^+(x) = \int_x^\infty W(t)dt - i\sigma \left(\int_0^x t W(t)dt + x \cdot \int_x^\infty W(t)dt \right) + \int_0^x V_1^+(x-t) S^+(t)dt$$

и

$$(2.11) \quad S^-(x) = \int_x^\infty V_1^-(t)dt + \int_0^x V_2(x-t) S^-(t)dt,$$

где ядро V_2 - комплекснозначная функция вида

$$V_2(x) = W(x) + i\sigma \int_x^{\infty} W(t)dt, \quad x \in R^+.$$

Комплексные решения уравнений (2.10) и (2.11) имеют линейный рост в ∞ : $S^\pm(x) = O(x)$, при $x \rightarrow \infty$ (см. [3]).

Очевидно, что действительные части этих решений: $\hat{S}^\pm(x) = \operatorname{Re}(S^\pm(x))$ будут вещественными решениями системы (1.5) с асимптотикой $\hat{S}^\pm(x) = O(x)$, при $x \rightarrow \infty$. Если же T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяет условию (2.5) в $(-1)^j \omega_j > 0$, а T_i (где $i + j = 3$) - условию (2.9), то имеем $\gamma_j^- = 1$, $\gamma_j^+ < 1$, а $\gamma_i^+ = \gamma_i^- = 1 + i\sigma\rho$, где ρ и σ определены выше. Тогда, при $j = 1$ из уравнения (2.10) получаем

$$\hat{S}^+(x) = \int_x^{\infty} W(t)dt + \int_0^x V_1(x-t)\hat{S}^+(t)dt, \quad x \in R^+,$$

откуда, с учетом $\gamma_1^+ < 1$ получаем $\hat{S}^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$.

Аналогично, при $j = 2$ получаем $\hat{S}^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$. □

Замечание 2.1. Здесь уместно сравнить результаты теорем 1 и 4. В теореме 1 рассмотрены вопросы разрешимости только класса (α) уравнения (1.1). Все утверждения этой теоремы содержатся в первой части теоремы 4. Разрешимости классов (β) и (γ) уравнения (1.1), а также поведение их решений в бесконечности изучены во второй и третьей частях теоремы 4.

Abstract. The present paper is devoted to the finding conditions of nontrivial (non-zero) solvability of some classes of equations of the form

$$S(x) = \int_0^{\infty} T_1(x-t)S(t)dt + \int_{-\infty}^0 T_2(x-t)S(t)dt, \quad x \in R,$$

with respect to unknown function S . The asymptotic behavior of the solution S is also studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Г. Арабаджян, "О консервативном интегральном уравнении с двумя ядрами", Матем. заметки РАН, 62, вып. 3, 323 - 331 (1997).
- [2] А. Г. Барсенко, "О решении уравнения свертки с двумя ядрами", Дифференциальные уравнения, 48, no. 3, 756 - 759 (2012).
- [3] Н. В. Еггибарян, А. А. Арутюкян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. сборник, 97(139), no. 1(5), 35 - 58 (1978).
- [4] Л. Г. Арабаджян, Н. В. Еггибарян, "Уравнения и свертки и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техн. ВИНТИ, 22, ред. Матем. анализ, 175 - 244 (1984).

- [5] Н. В. Ентибарян, Л. Г. Арабаджян, "О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки", Дифференциальные уравнения, 26, no. 8, 1442 – 1452 (1990).
- [6] А. А. Арутюнян, "О факторизации одного интегрального оператора", Дифференц. и интегральные уравнения, Сборник научных трудов, Ереван, 3 – 11 (1979).
- [7] Л. Г. Арабаджян, "Об интегральном уравнении Вигнера-Хопфа в замкнутом случае", Матем. заметки РАН, 76, вып. 1, 11 – 19 (2004).
- [8] Р. Веллман, К. Кук, Дифференциально-Разностные уравнения, Москва, Мир (1967).
- [9] В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и Ее Приложения, том 2, Москва, Мир (1984).

Поступила 20 сентября 2016

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ЯДРА КОТОРЫХ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ СТЕПЕНИ (-1)

А. Г. ВАРСЕГЯН

Институт математики НАН РА ¹

E-mail: anibagzeghyan@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается интегральное уравнение, ядро которого является однородной функцией степени (-1). Развивается факторизационный подход к уравнению. Построения операторной факторизации применяется к уравнению с положительным симметричным ядром. Доказывается, что в консервативном случае положительными решениями могут одновременно обладать как однородное уравнение, так и неоднородное уравнение с положительным свободным членом.

MSC2010 number: 45A05, 45H05, 45D05.

Ключевые слова: нелинейное уравнение факторизации; основное решение; однородная функция степени (-1); консервативное уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующее интегральное уравнение, ядро которого является однородной функцией степени (-1):

$$(1.1) \quad f(x) = g(x) + \int_0^1 P\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t) dt.$$

Уравнениям (1.1) посвящен ряд исследований (см. [1]–[4]). Наиболее подробно изучено известное уравнение А. Джексона

$$(1.2) \quad f(x) = g(x) + \gamma \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t} dt.$$

В [2] был рассмотрен вопрос решения аналога уравнения (1.1) на полупрямой, с применением преобразования Меллина. Уравнениям (1.1) свойственно нерегулярное поведение ядра в окрестности точки (0, 0). Путем перехода к новым аргументам $x = e^{-u}$, $t = e^{-v}$, (1.1) сводится к уравнению Вьенера-Хопфа (УВХ). Это обстоятельство позволяло перенести на (1.1) ряд положений теории УВХ.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта No. 15T-1A246

С привлечением метода Винера-Хопфа в [3] было построено решение уравнения Диксона в виде разложения по гипергеометрическим функциям.

В работе [4] построена факторизация уравнения (1.1) в пространстве $L_2(0, 1)$. Представляет теоретический и прикладной интерес прямое изучение уравнения (1.1), установление аналогов факторизационных, редукционных и других методов теории УВХ.

В настоящей работе развывается прямой подход к уравнениям (1.1) с использованием метода нелинейных уравнений факторизации (НУФ) (см. [5]-[7]). Получены аналоги некоторых результатов [5] и [6] по уравнениям Винера-Хопфа. Операторная факторизация применяется к уравнению (1.1) с положительным симметричным ядром в так называемом консервативном случае. Показывается, что тогда положительными решениями одновременно могут обладать как однородное уравнение, так и — неоднородное уравнение с положительным свободным членом. Некоторые факты, имеющие прямые аналоги в теории уравнений свертки, будут приведены без доказательства.

2. КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ОПЕРАТОРОВ

Введем в рассмотрение некоторые банаховы пространства (В. пространства) вещественных функций на $(a, b) \subset (0, \infty)$.

Обозначим через $\tilde{L}(a, b)$ В. пространство функций, интегрируемых с весом $\frac{1}{\sqrt{x}}$, с нормой

$$(2.1) \quad \|f\|_{\tilde{L}} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} |f(x)| dx < +\infty, \quad 0 \leq a < b \leq \infty.$$

Через $\tilde{M}(a, b)$ обозначается В. пространство функций f , ограниченных с весом $\sqrt{x}$ (то есть удовлетворяющих условию $\sqrt{x}f(x) \in \tilde{M}(a, b)$) с нормой

$$(2.2) \quad \|f\|_{\tilde{M}} = \sup_{x \in (a, b)} \sqrt{x} |f(x)| < +\infty.$$

Под $\tilde{E}$ будем подразумевать любое из пространств $\tilde{L}(0, 1)$, $L_2(0, 1)$, $\tilde{M}(0, 1)$. По необходимости, в этот список могут быть включены интерполяционные весовые пространства из серии L_p , а также — некоторые подпространства $\tilde{M}$, состоящие из непрерывных функций. Через I обозначается единичный оператор в любом из рассматриваемых функциональных пространств. Обозначим через Ω пространство интегральных операторов $\hat{P}$ на $(0, 1)$ с ядром вида

$$(2.3) \quad K(x, t) = P\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t}.$$

Имеем

$$(2.4) \quad P \in \tilde{L}_1(0, \infty) : \mu = \mu(P) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} |P(x)| dx < +\infty,$$

где

$$(\hat{P}f)(x) = \int_0^1 P\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t) dt.$$

Функцию P назовем ядерной функцией оператора $\hat{P}$. Симметричность ядра $K(x, t)$ означает выполнение равенства

$$(2.5) \quad P\left(\frac{1}{x}\right) = xP(x), \quad 0 < x < \infty.$$

Заметим, что ядро уравнения Диксона (1.2) симметричное, положительное при $\gamma > 0$, а для величины μ (см. (2.4)) получается выражение

$$\mu = \gamma \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \gamma\pi.$$

Из (2.3) и (2.4) следуют неравенства:

$$(2.6) \quad \int_0^{\infty} |K(x, t)| \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \mu \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \int_0^{\infty} |K(x, t)| \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \mu \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Первое из неравенств (2.6) означает, что оператор $\hat{P}$ ограниченно действует в $\tilde{L}(0, 1)$ и имеет место следующая оценка нормы:

$$(2.7) \quad \|\hat{P}\| \leq \mu(P).$$

Второе из неравенств (2.6) обеспечивает выполнение оценки (2.7) в $\tilde{M}(0, 1)$. С использованием неравенства Коши-Буняковского проверяется выполнение (2.7) в $L_2(0, 1)$. Справедлив следующий результат.

Лемма 2.1. Оператор $\hat{P} \in \Omega$ ограниченно действует в $\tilde{E}$. В любом из пространств $\tilde{E}$ имеет место неравенство (2.7), где μ определяется согласно (2.4). Пространство Ω является в. пространстве с нормой

$$(2.8) \quad \|\hat{P}\|_{\Omega} = \mu(P).$$

Покажем, что нетривиальный оператор $\hat{P}$ не является вполне непрерывным в пространствах $\tilde{E}$.

Рассмотрим следующую функцию:

$$W(x) = \int_x^{+\infty} P(t) \frac{1}{\sqrt{t}} dt, \quad x > 0.$$

Сделавшее предположение о не trivialности оператора $\hat{P}$ означает, что функция $W(x)$ не нулевая. Пусть $W(a) \neq 0$. Будем считать, что $W(a) > 0$, в противном случае будет рассмотрена эквивалентная задача некомпактности оператора $(-\hat{P})$. Из непрерывности функции $W(x)$, равенства $W(+\infty) = 0$, и из неравенства $W(a) > 0$ следует, что существует точка ae^h , $h > 0$ такая, что

$$(2.9) \quad 0 < W(ae^h) < W(a) \quad \text{и} \quad W(x) > 0, \quad x \in [a, ae^h].$$

Из непрерывности функции $W(x)$ следует, что существует число $\delta \in (0, h)$ такое, что при $x \in [ae^{h-\delta}, ae^h]$ имеет место неравенство

$$(2.10) \quad W(xe^{h-\delta}) - W(xe^h) \geq \epsilon \equiv \frac{1}{2} [W(a) - W(ae^h)] > 0.$$

Рассмотрим теперь следующую последовательность функций $f_n(x)$ $n = 1, 2, \dots$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если } x \in [e^{-n-h}, e^{-n}], \\ 0, & \text{если } x \in (0, 1) \setminus [e^{-n-h}, e^{-n}]. \end{cases}$$

где число h определяется в соответствии с (2.9). Функции $f_n(x)$ образуют ограниченную последовательность в любом из пространств $\tilde{E}$. Так, например, $\|f_n\|_L =$

$$\int_{e^{-n-h}}^{e^{-n}} \frac{1}{x} dx = h. \quad \text{Пусть } \varphi_n(x) = (\hat{P}f_n)(x). \quad \text{Имеем}$$

$$(2.11) \quad \varphi_n(x) = \int_0^1 P\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f_n(t) dt = \int_{e^{-n-h}}^{e^{-n}} P\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{ae^{-n}}^{ae^{-n+h}} P(z) \frac{1}{\sqrt{z}} dz,$$

то есть $\varphi_n(x) = (\hat{P}f_n)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} [W(xe^{-n}) - W(xe^{-n+h})]$. Из (2.10) следует неравенство

$$(2.12) \quad \varphi_n(x) \geq \frac{\epsilon}{\sqrt{x}}, \quad \text{при } x \in [ae^{-n}, ae^{-n+h}].$$

Эти функции образуют ограниченную последовательность также в любом из пространств $\tilde{E}$. Из (2.4) имеем

$$\|\varphi_n\|_L \leq h \cdot \int_0^{ae^{-n+h}} |P(x)| \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq h \cdot \mu.$$

Из неравенства (2.12) следует, что как сама последовательность φ_n , так и ее произвольная подпоследовательность не может сходиться к нулевому элементу ни в одном из пространств $\tilde{E}$. С другой стороны, из (2.11) следует, что $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ в произвольной фиксированной точке $x \geq 0$. Следовательно, из последовательности φ_n нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность ни в одном из пространств $\tilde{E}$, что и доказывает некомпактность оператора $\hat{P}$ в $\tilde{E}$.

3. КЛАССЫ ТРЕУГОЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введем следующие подпространства $\Omega^\pm \subset \Omega$ треугольных (формально вольтерровых) операторов: если $\hat{V}^\pm \in \Omega^\pm$, то

$$(3.1) \quad \begin{aligned} (\hat{V}^+ f)(x) &= \int_x^1 V^+ \left(\frac{x}{t} \right) \frac{1}{t} f(t) dt, \\ (\hat{V}^- f)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x V^- \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt, \quad V^\pm \in L_1(0, 1). \end{aligned}$$

Поскольку в выражении для ядра оператора $\hat{V}$ аргументы поставлены в обратном порядке, то обе функции $V^\pm$ сосредоточены на $(0, 1)$. Считается, что

$$(3.2) \quad V^\pm(x) = 0 \quad \text{при } x > 1.$$

Имеем $\Omega = \Omega^+ \oplus \Omega^-$. Если $\hat{P} \in \Omega$, то $\hat{P} = \hat{P}^+ + \hat{P}^-$, $\hat{P}^\pm \in \Omega^\pm$, где

$$(3.3) \quad (\hat{P}^+ f)(x) = \int_x^1 P^+ \left(\frac{x}{t} \right) \frac{1}{t} f(t) dt, \quad (\hat{P}^- f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x P^- \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt.$$

Здесь $P^+(x) = P(x)$ и $P^-(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x}$; $0 < x < 1$.

Покажем, что подпространства $\Omega^\pm$, в отличие от Ω , замкнуты относительно операторного умножения. Пусть $\hat{U}^+, \hat{V}^+ \in \Omega^+$ и $\hat{U}^-, \hat{V}^- \in \Omega^-$. Обозначим $\hat{W}^\pm = \hat{U}^\pm \hat{V}^\pm$. Для ядер $W^\pm$ интегральных операторов $\hat{W}^\pm$ получаем выражения

$$(3.4) \quad \begin{aligned} W^+(x, t) &= \frac{1}{t} \int_{x/t}^1 U^+ \left(\frac{x/t}{z} \right) \frac{1}{z} V^+(z) dz, \\ W^-(x, t) &= \frac{1}{x} \int_{t/x}^1 U^- \left(\frac{t/x}{z} \right) \frac{1}{z} V^-(z) dz. \end{aligned}$$

Откуда видно, что, $\hat{W}^\pm \in \Omega^\pm$.

Можно показать, что $\Omega^\pm$ являются коммутативными банаховыми алгебрами с нормой (2.8).

4. УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрим следующие, верхний и нижний, формально вольтерровые уравнения:

$$(4.1) \quad f(x) = g(x) + \int_x^1 V^+ \left(\frac{x}{t} \right) \frac{1}{t} f(t) dt,$$

$$(4.2) \quad f(x) = g(x) + \frac{1}{x} \int_0^x V^- \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt,$$

где $V^\pm \in \bar{L}(0, 1)$, $g \in \bar{E}(0, 1)$.

Уравнение (4.1) может быть рассмотрено на любом интервале $(r, 1)$, где $0 \leq r < 1$. Используя абсолютную непрерывность первообразной от функции $\frac{1}{\sqrt{x}} |V^+ (x)|$ на $(\delta, 1)$, $\delta \in (0, 1)$ можно показать, что уравнение (4.1) обладает единственным решением f на $(0, 1)$ таким, что $f \in \bar{E}(r, 1)$, $\forall r \in (0, 1)$. Если функции V^+ и g неотрицательны, то решение f также неотрицательно.

Несколько иначе обстоит дело в случае уравнения (4.2), в котором точка 0 фигурирует в качестве предела интегрирования. Операторы $I - \hat{V}^\pm$ назовем нормально обратимыми в $\bar{E}$, если

$$(4.3) \quad (I - \hat{V}^\pm)^{-1} = I + \Phi^\pm,$$

где $\Phi^\pm \in \Omega^\pm$ и

$$(4.4) \quad \begin{aligned} (\Phi^+ f)(x) &= \int_x^1 \Phi^+ \left(\frac{x}{t} \right) \frac{1}{t} f(t) dt, \\ (\Phi^- f)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x \Phi^- \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt. \end{aligned}$$

Нормальная обратимость операторов $I - \hat{V}^\pm$ в $\bar{E}$ эквивалентна принадлежности к $\bar{L}(0, 1)$ решений следующих уравнений типа Вольтерра вида (4.1) относительно резольвентных функций:

$$(4.5) \quad \Phi^+(x) = V^+(x) + \int_x^1 V^+ \left(\frac{x}{t} \right) \frac{1}{t} \Phi^+(t) dt,$$

$$(4.6) \quad \Phi^-(x) = V^-(x) + \int_x^1 V^- \left(\frac{x}{t} \right) \frac{1}{t} \Phi^-(t) dt.$$

Обозначим $\gamma^\pm = \mu(V^\pm)$. Если $\gamma^\pm < 1$, то (4.1) и (4.2) являются уравнениями со сжимающими в $\bar{E}$ интегральными операторами и операторы $I - \hat{V}^\pm$ нормально обратимы.

Лемма 4.1. *Выполнены следующие утверждения:*

- Пусть $V^+ \geq 0$ и $\gamma^+ \geq 1$. Тогда оператор $I - \hat{V}^+$ не является нормально обратимым в $\bar{E}$.

ii. Пусть $V^- \geq 0$ и $\gamma^- \geq 1$. Тогда оператор $I - \hat{V}^-$ не является нормально обратимым в E .

Доказательство. Рассмотрим уравнение (4.5). В условиях леммы функция V^+ ненулевая и неотрицательна на $(0, 1)$. Умножая обе части (4.5) на $\frac{1}{\sqrt{x}}$ и интегрируя от 0 до 1 получаем равенство $\mu(\Phi^+) = \gamma^+ + \mu(\Phi^+) \gamma^+$, или

$$(1 - \gamma^+) \mu(\Phi^+) = \gamma^+.$$

Это равенство противоречивое, поскольку его правая часть положительна, а левая часть не является таковой. Аналогичное рассмотрение уравнения (4.6) приводит к доказательству второго утверждения леммы. $\square$

5. ЗАДАЧА ТРЕУГОЛЬНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

Классы $\Omega^\pm$ обладают следующими совместными мультипликативными свойствами: если $\hat{V}^\pm \in \Omega^\pm$, то $\hat{V}^- \hat{V}^+ \in \Omega$. Прямыми выкладками проверяется, что ядро K оператора $\hat{V}^- \hat{V}^+$ имеет вид (2.3), где P определяется по формуле

$$(5.1) \quad P(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\min(x, 1)} V^-\left(\frac{s}{x}\right) V^+(s) ds.$$

Этот факт будет играть принципиальную роль в дальнейших рассуждениях.

Можно проверить, что если $\hat{P}_1, \hat{P}_2 \in \Omega$ и произведение $\hat{P}_1 \hat{P}_2 \in \Omega$, то

$$(5.2) \quad \|\hat{P}_1 \hat{P}_2\|_\Omega \leq \|\hat{P}_1\|_\Omega \|\hat{P}_2\|_\Omega,$$

где $\|\hat{P}\|_\Omega$ определяется согласно (2.8).

Пусть $\hat{P} \in \Omega$. Рассмотрим задачу факторизации:

$$(5.3) \quad (I - \hat{P}) = (I - \hat{V}^-) (I - \hat{V}^+),$$

где $\hat{V}^\pm \in \Omega^\pm$ - искомые операторы. Факторизация (5.3) рассматривается как равенство операторов, действующих в пространствах $\tilde{E}$. В специальных условиях она может быть рассмотрена также в некоторых расширениях пространства $\tilde{E}$. Подчеркнем, что в постановке задачи (5.3) обратимость оператора $I - \hat{P}$ не предполагается. Факторизацию (5.3) назовем канонической, если факторы $I - \hat{V}^\pm$ нормально обратимы.

В случае канонической факторизации (5.3), используя (4.3) получаем формулы

$$(5.4) \quad \begin{aligned} V^+(x) &= P^+(x) + \int_0^1 \Phi^-(t) P^+(xt) dt, \\ V^-(x) &= P^-(x) + \int_0^1 P^-(xt) \Phi^+(t) dt, \end{aligned}$$

где $\Phi^\pm$ определяются из (4.5), (4.6).

Нелинейное уравнение факторизации. Задача (5.3) будет изучена методом нелинейных уравнений факторизации (НУФ) Н. В. Енгибярjana (см. [5]-[7]). Используя (6.1) (аналогично случаю уравнения Винера-Хопфа) приходим к следующей лемме.

Лемма 5.1. *Факторизация (5.3) эквивалентна следующей нелинейной системе интегральных уравнений относительно ядерных функций $V^\pm$ операторов $\hat{V}^\pm \in \Omega^\pm$:*

$$(5.5) \quad \begin{aligned} V^+(x) &= P^+(x) + \int_0^1 V^-(t) V^+(xt) dt, \\ V^-(x) &= P^-(x) + \int_0^1 V^-(xt) V^+(t) dt. \end{aligned}$$

В случае симметричного ядра, нелинейное уравнение факторизации (5.5) допускает следующее упрощение. Пусть $P^-(x) = P^+(x)$. Тогда система (5.5) сведется к одному уравнению:

$$(5.6) \quad V(x) = P(x) + \int_0^1 V(t) V(xt) dt,$$

в следующем смысле: если $V(x) \in \tilde{L}_1(0,1)$ удовлетворяет уравнению (5.6), то функции $V^\pm(x) = V(x)$ удовлетворяют системе (5.5). При этом возможна потеря "несимметричных" решений (5.5) (это может оказаться несущественной в вопросе применения факторизации).

Используя нелинейные уравнения факторизации (5.5) проверяется, что в случае канонической факторизации (5.3) функции $\Phi^\pm$ удовлетворяют линейным

уравнениям

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \Phi^+(x) &= P^+(x) + \int_0^1 P^+\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} \Phi^+(t) dt, \\ \Phi^-(x) &= P^-(x) + \int_0^1 \Phi^-(t) P^-\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

6. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОСНОВНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ФАКТОРИЗАЦИИ (5.5) И (5.6)

Рассмотрим уравнения (5.5) в случае выполнения условий

$$(6.1) \quad P^\pm(x) \geq 0, \mu(P) \leq 1,$$

где μ определяется согласно (2.4).

Случай $\mu < 1$ назовем диссипативным, а случай $\mu = 1$ — консервативным. Диссипативному случаю соответствует уравнение (1.1) со сжимающим в $\tilde{E}$ интегральным оператором. Консервативный случай является особым случаем уравнения (1.1), о чем речь пойдет позже. Рассмотрим простые итерации для системы (5.5):

$$(6.2) \quad \begin{aligned} V_{n+1}^+(x) &= P^+(x) + \int_0^1 V_n^-(t) V_n^+(xt) dt, \\ V_{n+1}^-(x) &= P^-(x) + \int_0^1 V_n^-(xt) V_n^+(t) dt, \\ V_0^\pm(x) &= 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Из алгебраических свойств классов $\Omega^\pm$, отмеченных в пп. 3 и 5 следует, что итерации (6.2) определяют последовательности $V_n^\pm$ в $\tilde{L}$. Из неотрицательности $P^\pm$ следует, что

$$(6.3) \quad V_n^\pm(x) \geq 0, \quad V_n^\pm(x) \text{ возрастают по } n.$$

В симметрическом случае (2.5) имеем $V_n^\pm = V_n$, где V_n определяются посредством итерационного процесса для (5.6):

$$(6.4) \quad V_{n+1}(x) = P(x) + \int_0^1 V_n(t) V_n(xt) dt, \quad V_0(x) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Перейдем к рассмотрению итераций (6.2). Введем обозначения

$$\mu^\pm = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} P^\pm(x) dx, \quad \mu = \mu^+ + \mu^-, \quad \gamma_n^\pm = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} V_n^\pm(x) dx, \quad \gamma_n = \frac{\gamma_n^+ + \gamma_n^-}{2}.$$

Имеем:

$$(6.5) \quad \gamma_n^{\pm} \geq 0 \quad \text{и } \gamma_n^{\pm} \text{ возрастают по } n.$$

Аналогично случаю ураланпейя Винера-Хопфа (см. [5], [6]) мы приходим к следующему алгебраическому соотношению:

$$\gamma_{n+1}^{+} + \gamma_{n+1}^{-} = \mu^{+} + \mu^{-} + \gamma_n^{-} \gamma_n^{+} = \mu + \gamma_n^{-} \gamma_n^{+}.$$

Это соотношение, в сочетании со свойством монотонности (6.5), позволяет оценить обе последовательности $\gamma_n^{\pm}$:

$$(6.6) \quad \gamma_n^{\pm} \leq \mu (\leq 1), \quad \gamma_n \leq 1 - \sqrt{1 - \mu}.$$

Обозначим

$$\gamma^{\pm} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{\pm} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\gamma^{+} + \gamma^{-}}{2}.$$

Имеем:

$$(6.7) \quad \gamma^{\pm} \leq \mu, \quad \gamma \leq 1 - \sqrt{1 - \mu},$$

$$(6.8) \quad (1 - \gamma^{+})(1 - \gamma^{-}) = 1 - \mu.$$

Из теоремы Б. Леви о монотонной сходимости следует, что существуют пределы последовательностей $V_n^{\pm}$ в $\bar{L}$. С использованием (5.2) показывается, что в соотношениях (6.2) можно совершить предельный переход. Имеет место следующий результат.

Теорема 6.1. Пусть выполнены условия (6.1) диссипативности или консервативности. Тогда существует основное решение (V^{+}, V^{-}) системы (5.5), которое является пределом в $\bar{L}(0, 1) \times \bar{L}(0, 1)$ последовательности (V_n^{+}, V_n^{-}) , определяемой согласно (6.2). Имеют место равенства

$$(6.9) \quad \gamma^{+} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} V^{+}(x) dx, \quad \gamma^{-} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} V^{-}(x) dx$$

и свойства (6.7), (6.8).

В диссипативном случае решение нелинейного уравнения факторизации порождает каноническую факторизацию (5.3). В консервативном случае хотя бы один из факторов в (5.3) необратим в $\bar{E}$. В симметрическом случае (2.5) имеем:

$$(6.10) \quad V^{\pm}(x) = V(x), \quad \gamma = 1 - \sqrt{1 - \mu}.$$

Из (6.8) видно, что в консервативном случае имеет место хотя бы одно из равенств $\gamma^{+} = 1$, $\gamma^{-} = 1$, что означает простое или двойное вырождение оператора

$I - \hat{P}$. Согласно лемме 2.1, тогда факторизация (5.3) не является канонической. В симметрическом консервативном случае имеет место двойное вырождение.

7. О РАБОТЕ Л. САХНОВИЧА [4]

В работе [4] рассмотрено (комплексное) уравнение (1.1) в следующей записи:

$$(7.1) \quad Sf = f(x) - \int_0^1 P\left(\frac{t}{x}\right) \frac{1}{x} f(t) dt = g(x),$$

где $f(x) \in L^2(0, 1)$ и

$$(7.2) \quad P\left(\frac{t}{x}\right) \frac{1}{x} = \overline{P\left(\frac{x}{t}\right)} \frac{1}{t}.$$

Здесь черточкой сверху отмечается переход к комплексному сопряженному. Предполагается выполнение условия:

$$(7.3) \quad \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \left| P\left(\frac{1}{x}\right) \right| dx < +\infty.$$

В [4] доказана следующая факторизационная теорема.

Теорема 7.1. Пусть выполнены условия (7.2) и (7.3), и соответствующий оператор S является положительным и обратимым. Тогда оператор S допускает левую тригонометрическую факторизацию.

Теоремы 6.1 и 7.1 в определенном смысле дополняют друг друга.

О применении факторизации (5.3) к решению уравнения (1.1) Каноническая факторизация (5.3) сводит уравнение (1.1) к последовательному решению следующих двух вольтерровых уравнений вида (4.1) и (4.2):

$$(7.4) \quad F(x) = g(x) + \frac{1}{x} \int_0^x V^-\left(\frac{t}{x}\right) F(t) dt,$$

$$(7.5) \quad f(x) = F(x) + \int_x^1 V^+\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t) dt.$$

Уравнения (7.4) и (7.5) могут быть использованы также в консервативном случае, когда факторизация (5.3) не является канонической. Обращаем внимание на следующее обстоятельство. Факторизация (5.3) понимается как равенство операторов, действующих в $\tilde{E}$, а последовательное решение уравнения (7.4) и (7.5) в консервативном случае может привести к функции f , не принадлежащей пространству $\tilde{E}$. Аналогично случаю консервативных уравнений Винера-Хопфа

(см. [5], [6]) можно показать, что построенное решение уравнения факторизации удовлетворяет исходному уравнению.

8. КОНСЕРВАТИВНОЕ УРАВНЕНИЕ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Нижже нам будет кратко рассмотрен вопрос решения однородного и неоднородного консервативного уравнения (1.1) с симметричным ядром. В рассматриваемом случае ядерная функция обладает следующими свойствами:

$$(8.1) \quad P \geq 0; \mu(P) = 1; P\left(\frac{1}{x}\right) = xP(x), \quad 0 < x < \infty,$$

а основное решение нелинейного уравнения факторизации (5.6) обладает свойствами:

$$V^{\pm} = V \geq 0; \gamma = \mu(V) = 1.$$

Факторизация (5.3) сводит рассматриваемое уравнение к консервативным уравнениям (7.4) и (7.5).

Рассмотрим сначала однородное консервативное уравнение (1.1):

$$(8.2) \quad f(x) = \int_0^1 P\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t) dt.$$

Легко проверить, что соответствующее однородное уравнение (7.4) обладает решениями $F(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$, $c = \text{const}$. Решения уравнения (7.5) имеют вид:

$$(8.3) \quad f(x) = c\bar{f}(x); c = \text{const}, \bar{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + \int_0^1 \Phi(t) \frac{1}{\sqrt{t}} dt \right),$$

где Φ определяется из (4.5), при $V^+ = V$. Имеет место:

Теорема 8.1. *Однородное консервативное уравнение (8.2) с симметричным ядром обладает решениями вида (8.3). Функция $\bar{f}$ абсолютно непрерывна и ограничена на $[\delta, 1]$, $\forall \delta \in (0, 1)$.*

Вопрос поведения функции $\bar{f}$ в окрестности точки 0 мы здесь рассматривать не будем.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1.1) при выполнении условий консервативности (8.1). Будем считать, что $0 \leq g(x) \in \bar{L}(0, 1)$. Можно показать, что тогда уравнение (1.1) имеет минимальное положительное решение, интегрируемое на $(\delta, 1)$, $\delta > 0$. Существование такого решения очевидно, например, в случае, когда функция g обращается в 0 в окрестности точки 0. Из уравнения (7.5) определяется минимальное положительное решение рассматриваемого неоднородного уравнения. Здесь возникает такая ситуация, когда положительными

решениями одновременно обладают как неоднородное, так и — однородное консервативное уравнение (1.1).

9. Симпол уравнения (1.1) и его факторизация

В конце работы вкратце укажем на связь операторной факторизации (5.3) с факторизацией символа оператора $I - \check{P}$.

Пусть $\mathcal{M}$ пространство функций на $(-\infty, \infty)$ являющихся преобразованиями Меллина функций из $\bar{L}_1(0, \infty)$: $\check{P} \in \mathcal{M}$ если

$$(9.1) \quad \check{P}(s) \equiv \mathcal{M}\{P\}(s) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}+is} P(x) dx.$$

Можно показать, что $\check{P}$ непрерывная функция на вещественной оси. Под символом оператора $I - \check{P}$ и уравнения (1.1) понимается функция $1 - \check{P}(s)$. Известно, что множество $\mathcal{M}$ замкнуто относительно поточечного умножения и образует алгебру. Введем подалгебры $\mathcal{M}^{\pm}$, состоящие из функций вида

$$(9.2) \quad \check{V}^{\pm}(s) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2} \pm is} V^{\pm}(x) dx.$$

Рассмотрим факторизацию:

$$(9.3) \quad 1 - \check{P}(s) = \left(1 - \check{V}_-(s)\right) \left(1 - \check{V}_+(s)\right), \quad \text{Im } s = 0.$$

Используя нелинейное уравнение факторизации (5.5) можно показать, что факторизация (9.3) эквивалентна задаче (5.3). Проверим, что из (5.5) следует (9.3). Пусть функции $V^{\pm}$ удовлетворяют системе (5.5). Умножая первое из уравнений (5.5) на $x^{-1/2+is}$ а второе на $x^{-1/2-is}$, затем интегрируя по x от 0 до 1, получаем

$$\begin{aligned} \check{V}^+(s) &= \int_0^1 x^{-1/2+is} P(x) dx + \int_0^1 x^{-1/2-is} V^-(x) \left[\int_0^{\infty} t^{-1/2+is} V^+(t) dt \right] dx, \\ \check{V}^-(s) &= \int_1^{\infty} x^{-1/2+is} P(x) dx + \int_0^1 V^-(x) \left[\int_x^1 t^{-1/2+is} V^+(t) dt \right] x^{-1/2-is} dx. \end{aligned}$$

Складывая полученные равенства приходим к (9.3). Чтобы показать, что из (9.3) следует (5.5), можно воспользоваться изоморфизмом между сверточной алгеброй Ω и алгеброй $\mathcal{M}$.

Автор выражает благодарность проф. Н. Б. Елгибаряну за внимание к работе.

Abstract. The present paper deals with integral equations the kernels of which are homogeneous functions of degree (-1) . Factorization approach to such equations is

developed. The constructed operator factorization is applied to the equation with a positive symmetric kernel. We prove that in the conservative case, both the homogeneous equation and the corresponding nonhomogeneous equation with a positive free term can possess positive solutions simultaneously.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. C. Dixon, "On the solving nuclei of certain integral equation etc.", *Proc. London Math. Soc.*, **27**, no. 2, 233 – 272 (1926).
- [2] С. Ч. Титчмарш, *Введение в Теорию Интегралов Фурье*, М., ОГИЗ, гос. изд-ство технико-теоретической литературы (1948).
- [3] М. Г. Крейн, *Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов*, УМН, **13**, 5, 3 – 120 (1958).
- [4] Lev A. Sakhnovich, "On Triangular Factorization of Positive Operators, Operator Theory", *Advances and Applications*, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, **170**, 289 – 306 (2007).
- [5] Н. В. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами", *Мат. сб. (РАН)*, **97**(139), no. 1 (5), 35 – 56 (1973).
- [6] Л. Г. Арабаджян, Н. В. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал.*, **22**, ВИНТИ, М., 173 – 244 (1984).
- [7] Н. В. Енгибарян, "Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов", *Матем. сб.*, **191**, no. 12, 61 – 76 (2000).

Поступила 10 сентября 2016

ГРУППЫ ОБРАТИМЫХ БИНАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

П. С. ГЕВОРКЯН

Московский педагогический государственный университет

E-mail: pgev@yandex.ru

Аннотация. Исследуются непрерывные бинарные операции топологического пространства и доказываются критерий их обратимости. Решается проблема классификации групп обратимых непрерывных бинарных операций локально компактных и локально связных пространств. Доказывается теорема о бинарном дистрибутивном представлении топологической группы.

MSC2010 number: 54H15, 22A25.

Ключевые слова: бинарная операция; топологическая группа; группы гомеоморфизмов; представления топологических групп.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОВОЗНАЧЕНИЯ

В данной статье под пространством мы подразумеваем топологическое пространство. Все пространства предполагаются хаусдорфовыми.

Через $C(X, Y)$ обозначается пространство всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y , снабженное компактно-открытой топологией, то есть топологией, предбазой которой является семейство множеств вида $W(K, U) = \{f : X \rightarrow Y; f(K) \subset U\}$, где K компактное подмножество пространства X , а U открытое подмножество пространства Y . Все пространства отображений рассматриваются в компактно-открытой топологии.

Если G топологическая группа, то на пространстве $G(X, G)$ рассматривается естественная групповая операция: для произвольных непрерывных отображений $f, g \in C(X, G)$ их произведение $fg \in C(X, G)$ определяется формулой $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 1.1 ([1]). Если G топологическая группа, то $C(X, G)$ также является топологической группой.

Группа всех гомеоморфизмов пространства X обозначается через $H(X)$. Эта группа, вообще говоря, не является топологической группой. Однако, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2 ([2]). Пусть пространство X локально компактно и локально связно. Тогда $H(X)$ является топологической группой.

Симметрическая группа множества X обозначается через $S(X)$. В случае конечного множества X эта группа обозначается $S_n(X)$ или S_n , где n — число элементов множества X . Порядок группы $S_n(X)$ равен $n!$: $|S_n(X)| = n!$ Подробное изложение этих и других, используемых в статье без ссылок, определений, понятий и результатов можно найти в работах [3]–[7].

2. НЕПРЕРЫВНЫЕ БИНАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ. КРИТЕРИЙ ОБРАТИМОСТИ

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Непрерывное отображение $f : X^2 \rightarrow X$ назовем *непрерывной бинарной операцией* пространства X . Множество всех непрерывных бинарных операций пространства X обозначим через $C_2(X)$. Определим композицию двух бинарных операций $f, \varphi \in C_2(X)$ формулой

$$(2.1) \quad (f \circ \varphi)(t, x) = f(t, \varphi(t, x)),$$

где $t, x \in X$.

Если $f : X^2 \rightarrow X$ непрерывная бинарная операция, то для произвольного $t \in X$ определим непрерывное отображение $f_t : X \rightarrow X$ формулой

$$(2.2) \quad f_t(x) = f(t, x).$$

Заметим, что непрерывную бинарную операцию $f : X^2 \rightarrow X$ можно представить как семейство непрерывных отображений $\{f_t\}$: $f = \{f_t\}$, которое непрерывно зависит от индекса $t \in X$. В этих обозначениях закон композиции (2.1) двух бинарных операций $f = \{f_t\}$ и $\varphi = \{\varphi_t\}$ примет вид

$$f \circ \varphi = \{f_t \circ \varphi_t\},$$

что показывает естественность формулы (2.1).

Предложение 2.1. Пространство $C_2(X)$ является полугруппой с единицей $e(t, x) = x$, т. е. моноидом, относительно композиции бинарных операций.

Доказательство этого предложения проводится непосредственной проверкой аксиом полугруппы.

Определение 2.1. Непрерывная бинарная операция $f \in C_2(X)$ называется *обратимой*, если существует непрерывная бинарная операция $f^{-1} \in C_2(X)$ такая,

что

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e.$$

В этом случае f и f^{-1} называются взаимно-обратными бинарными операциями.

Подмножество всех обратимых элементов множества $C_2(X)$ обозначим через $H_2(X)$. Итак, $H_2(X)$ является группой.

Пример 2.1. Пусть $X = \{a, b\}$ двухточечное дискретное пространство. Симметрическая группа подстановок этого множества $S_2(X)$ является циклической группой Z_2 , а группа всех обратимых бинарных операций множества $X = \{a, b\}$ — это группа 4-го порядка с двумя образующими φ_1 и φ_2 , которые задаются следующим образом:

φ_1 :	b	a	a
	a	b	b
		a	b
φ_2 :	b	b	a
	a	a	b
		a	b

Это, как известно, четверная группа Клейна. В случае трехточечного множества X порядок группы $H_2(X)$ равен $(3!)^3 = 216$ (см. далее, следствие 3.2).

Справедлива следующая не сложно доказываемая теорема.

Теорема 2.1. Если непрерывная бинарная операция $f = \{f_t\} \in C_2(X)$ обратима, то непрерывное отображение $f_t : X \rightarrow X$, заданное формулой (2.2) является гомеоморфизмом для произвольного $t \in X$ и $f^{-1} = \{f_t^{-1}\}$.

Обратное утверждение теоремы 2.1 верно для локально компактных и локально связных пространств.

Теорема 2.2. Пусть пространство X локально компактно и локально связно, а $f = \{f_t\} : X^2 \rightarrow X$ непрерывная бинарная операция. Если отображение $f_t : X \rightarrow X$ для произвольного $t \in X$ является гомеоморфизмом, то бинарная операция $f = \{f_t\}$ обратима и $f^{-1} = \{f_t^{-1}\}$.

Доказательство. Рассмотрим бинарную операцию f^{-1} , заданную формулой $f^{-1}(t, x) = f_t^{-1}(x)$, и докажем, что она является обратной непрерывной бинарной операцией для $f : X^2 \rightarrow X$.

Сначала установим непрерывность отображения $f^{-1} : X^2 \rightarrow X$. Пусть $(t_0, x_0) \in X^2$ — произвольная точка и $f^{-1}(t_0, x_0) = f_{t_0}^{-1}(x_0) = y_0$. Рассмотрим произвольную открытую окрестность $W \subset X$ точки y_0 такую, что замыкание $\bar{W}$ компактно. Тогда существует такая компактная и связная окрестность K точки x_0 , что

$$(2.3) \quad f_{t_0}^{-1}(K) \subset W.$$

Внутренность множества K обозначим через K° . Имеем:

$$(2.4) \quad f_{t_0}(y_0) = x_0 \in K^\circ.$$

Из включения (2.3) следует, что

$$(2.5) \quad f_{t_0}(W^C \cap \bar{W}) \subset K^C,$$

где W^C и K^C дополнения множеств W и K , соответственно.

Поскольку $f : X^2 \rightarrow X$ непрерывная бинарная операция, y_0 и $W^C \cap \bar{W}$ компактные, в K° и K^C открытые подмножества пространства X , то из (2.4) и (2.5) следует, что существует такая открытая окрестность U точки t_0 , что

$$(2.6) \quad f_t(y_0) \in K^\circ$$

и $f_t(W^C \cap \bar{W}) \subset K^C$ для произвольного $t \in U$. Следовательно, имеем $K \subset f_t(W \cup W^C)$ для произвольного $t \in U$. Поэтому, $f_t^{-1}(K) \subset W \cup W^C$.

Так как $f_t^{-1}(K)$ связное множество, а W и W^C дизъюнктные открытые множества, то из последнего включения следует, что $f_t^{-1}(K)$ лежит в одном из множеств W и W^C . Однако, в силу (2.6), становится очевидным, что $f_t^{-1}(K) \subset W$. А значит,

$$(2.7) \quad f_t^{-1}(K^\circ) \subset W$$

для всех $t \in U$.

Итак, для произвольной открытой окрестности W точки $y_0 = f_{t_0}^{-1}(x_0)$ мы нашли такие открытые окрестности U точки t_0 и K° точки x_0 , что выполняется (2.7). Тем самым непрерывность бинарной операции $f^{-1} = \{f_t^{-1}\}$ доказана.

Осталось заметить, что непрерывная бинарная операция $f^{-1} : X^2 \rightarrow X$ является обратной для $f : X^2 \rightarrow X$, что проверяется элементарно. $\square$

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает следующий критерий обратимости непрерывных бинарных операций локально компактных и локально связных пространств.

Теорема 2.3. Пусть пространство X локально компактно и локально связно. Непрерывная бинарная операция $f = \{f_t\} : X^2 \rightarrow X$ обратима тогда и только тогда, когда непрерывное отображение $f_t : X \rightarrow X$ является гомеоморфизмом для произвольного $t \in X$.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУПП ОБРАТИМЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ БИНАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Как показывает следующее предложение группы обратимых непрерывных бинарных операций являются естественными расширениями групп гомеоморфизмов.

Предложение 3.1. *Группа всех гомеоморфизмов $H(X)$ топологического пространства X изоморфна (алгебраически и топологически) некоторой подгруппе группы обратимых бинарных операций $H_2(X)$.*

Доказательство. Каждому $f \in H(X)$ поставим в соответствие непрерывное отображение $\bar{f} : X^2 \rightarrow X$, определяемое формулой $\bar{f}(t, x) = f(x)$, $t, x \in X$. Очевидно, что $\overline{f^{-1}} = \bar{f}^{-1}$. Итак, $\bar{f}$ — непрерывная обратимая бинарная операция, то есть $\bar{f} \in H_2(X)$. Соответствие $f \rightarrow \bar{f}$ является искомым изоморфизмом группы $H(X)$ на некоторую подгруппу группы $H_2(X)$. $\square$

Следующая теорема решает проблему классификации групп обратимых непрерывных бинарных операций локально компактных и локально связных пространств с помощью групп гомеоморфизмов.

Теорема 3.1. *Пусть пространство X локально компактно и локально связно. Тогда группа $H_2(X)$ изоморфна (алгебраически и топологически) группе $C(X, H(X))$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $p : C(X, H(X)) \rightarrow H_2(X)$, заданное формулой:

$$p(f)(t, x) = f(t)(x),$$

$f \in C(X, H(X))$, $t, x \in X$. Так как для произвольного $t \in X$ отображение $f(t) : X \rightarrow X$ является гомеоморфизмом, то, в силу теоремы 2.3, бинарная операция $p(f) : X \times X \rightarrow X$ обратима, то есть она действительно принадлежит группе $H_2(X)$.

Докажем, что p является мономорфизмом. Пусть $f, g \in C(X, H(X))$ и $f \neq g$. Тогда существует такая точка $t_0 \in X$, что $f(t_0) \neq g(t_0)$. Так как $f(t_0), g(t_0) \in H(X)$, то $f(t_0)(x_0) \neq g(t_0)(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in X$. Итак, $p(f)(t_0, x_0) \neq p(g)(t_0, x_0)$, а значит $p(f) \neq p(g)$.

Отображение p является также эпиморфизмом. Действительно, пусть $\varphi \in H_2(X)$ произвольная непрерывная бинарная операция. В силу теоремы 2.3 отображение $\varphi_t : X \rightarrow X$, заданное формулой $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, $t, x \in X$, является гомеоморфизмом. Несложно заметить, что элемент $f \in C(X, H(X))$, определяемый равенством $f(t) = \varphi_t$, является прообразом бинарной операции φ : $p(f)(t, x) =$

$f(t)(x) = \varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. Итак, отображение $p^{-1} : H_2(X) \rightarrow C(X, H(X))$, заданное формулой

$$p^{-1}(\varphi)(t)(x) = \varphi(t, x),$$

$\varphi \in H_2(X)$, $t, x \in X$, является обратным для отображения $p : C(X, H(X)) \rightarrow H_2(X)$.

Отображение p является гомоморфизмом, то есть $p(f \circ g) = p(f) \circ p(g)$. Действительно, для произвольных $t, x \in X$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} p(f \circ g)(t, x) &= (f \circ g)(t)(x) = (f(t) \circ g(t))(x) = f(t)(g(t)(x)) = \\ &= f(t)(p(g)(t, x)) = p(f)(t, p(g)(t, x)) = (p(f) \circ p(g))(t, x). \end{aligned}$$

Докажем непрерывность отображения p . Пусть $W(K \times K', U)$ — произвольный элемент предбазы компактно-открытой топологии пространства $H_2(X)$, где $U \subset X$ открытое, а $K, K' \subset X$ компактные подмножества пространства X . Покажем, что прообразом множества $W(K \times K', U)$ является множество $W(K, W(K', U))$, которое является элементом предбазы компактно-открытой топологии пространства $C(X, H(X))$. Действительно, для $\forall \varphi \in W(K \times K', U)$ и $f = p^{-1}(\varphi) \in C(X, H(X))$ имеет место:

$$\begin{aligned} \varphi \in W(K \times K', U) &\iff \varphi(t, x) \in U \iff p(f)(t, x) \in U \iff \\ &\iff f(t)(x) \in U \iff f \in W(K, W(K', U)), \end{aligned}$$

где $t \in K$ и $x \in K'$ — произвольные элементы. Точно также можно доказать непрерывность обратного отображения $p^{-1} : H_2(X) \rightarrow C(X, H(X))$. $\square$

Группа обратимых непрерывных бинарных операций $H_2(X)$ вообще говоря не является топологической группой. Однако справедлива следующая теорема.

Следствие 3.1. Пусть X локально компактное и локально связное пространство. Тогда $H_2(X)$ топологическая группа.

Доказательство. Из теоремы 1.2 следует, что $H(X)$ является топологической группой. Следовательно, $C(X, H(X))$ также является топологической группой (теорема 1.1). Значит, в силу теоремы 3.1, $H_2(X)$ топологическая группа. $\square$

Следствие 3.2. Пусть $|X| = n < \infty$. Тогда $|H_2(X)| = (n!)^n$.

Доказательство. Для конечного множества X справедливо $H(X) = S_n(X)$, где $S_n(X)$ симметрическая группа подстановок множества X . Так как $|S_n(X)| = n!$, то утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 3.1. $\square$

4. БИНАРНЫЕ ДИСТРИБУТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Определение 4.1. Подгруппа $D \subset H_2(X)$ называется *дистрибутивной*, если для любых $x, x', x'' \in X$ и любых $g, h \in D$ выполняется условие

$$(4.1) \quad g(h(x, x'), h(x, x'')) = h(x, g(x', x'')).$$

Теорема 4.1. Подгруппа $D \subset H_2(X)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда для произвольных $g = \{g_t\}, h = \{h_{t'}\} \in D, t, t' \in X$, выполняется равенство

$$(4.2) \quad g_t \circ h_{t'} = h_{g_t(t')} \circ g_t.$$

Доказательство. Пусть $D \subset H_2(X)$ дистрибутивная подгруппа. Тогда, учитывая условие дистрибутивности (4.1), получим:

$$\begin{aligned} (g_t \circ h_{t'})(x) &= g_t(h_{t'}(x)) = g_t(h(t', x)) = g(t, h(t', x)) = h(g(t, t'), g(t, x)) = \\ &= h_{g(t, t')}(g(t, x)) = h_{g_t(t')}(g_t(x)) = (h_{g_t(t')} \circ g_t)(x) \end{aligned}$$

для произвольного $x \in X$, то есть выполняется равенство (4.2).

Теперь предположим, что верно равенство (4.2). Тогда для произвольных $g, h \in G$ и $t, t', x \in X$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} h(g(t, t'), g(t, x)) &= h_{g(t, t')}(g(t, x)) = h_{g_t(t')}(g_t(x)) = (h_{g_t(t')} \circ g_t)(x) = \\ &= (g_t \circ h_{t'})(x) = g_t(h_{t'}(x)) = g_t(h(t', x)) = g(t, h(t', x)), \end{aligned}$$

то есть D дистрибутивная подгруппа. □

Группы обратимых непрерывных бинарных операций весьма богаты дистрибутивными подгруппами. Более того, любую топологическую группу можно рассматривать как дистрибутивную подгруппу подходящим образом выбранной группы обратимых непрерывных бинарных операций.

Теорема 4.2 (о бинарном дистрибутивном представлении топологической группы). *Любая топологическая группа является дистрибутивной подгруппой некоторой группы обратимых бинарных операций.*

Доказательство. Пусть G — топологическая группа. Рассмотрим группу обратимых бинарных операций $H_2(G)$ пространства G . Определим отображение $i: G \rightarrow H_2(G)$, которое каждому элементу $g \in G$ сопоставляет бинарную операцию $i_g \in H_2(G)$, определенную формулой:

$$i_g(h_1, h_2) = h_1 g h_1^{-1} h_2,$$

где $g, h_1, h_2 \in G$.

Так как для любого $g \in G$ $i_g(e, e) = g$, где e — единица группы G , то отображение i является мономорфизмом. Отображение i является также гомоморфизмом. Действительно,

$$\begin{aligned} i_{gk}(h_1, h_2) &= h_1 g k h_1^{-1} h_2 = h_1 g h_1^{-1} h_1 k h_1^{-1} h_2 = i_g(h_1, h_1 k h_1^{-1} h_2) = \\ &= i_g(h_1, i_k(h_1, h_2)) = (i_g \circ i_k)(h_1, h_2), \end{aligned}$$

где $g, k, h_1, h_2 \in G$.

Непрерывность отображения i следует из непрерывности операций $(g, h) \rightarrow gh$ и $g \rightarrow g^{-1}$ для всех $g, h \in G$. Итак, i — изоморфизм группы G на свой образ. Теперь заметим, что $i(G)$ является дистрибутивной подгруппой группы $H_2(G)$. Действительно, для произвольных $g, h, k, k_1, k_2 \in G$ справедливы следующие цепочка равенств:

$$\begin{aligned} i_g(i_h(k, k_1), i_k(h, k_2)) &= i_g(k h k^{-1} k_1, k h k^{-1} k_2) = k h k^{-1} k_1 g k_1^{-1} k h^{-1} k^{-1} k h k^{-1} k_2 = \\ &= k h k^{-1} k_1 g k_1^{-1} k_2 = i_k(k, k_1 g k_1^{-1} k_2) = i_k(k, i_g(k_1, k_2)). \end{aligned} \quad \square$$

Эта теорема является бинарным топологическим аналогом классической теоремы Кэли о представлении произвольной конечной группы унарными операциями (подстановками).

Abstract. In this paper, continuous binary operations of a topological space are studied and a criterion of their invertibility is proved. The classification problem of groups of invertible continuous binary operations of locally compact and locally connected spaces is solved. A theorem on the binary distributive representation of a topological group is also proved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. A. McCoy, J. Ntantu, *Topological Properties of Spaces of Continuous Functions*, Berlin, Springer-Verlag (1988).
- [2] R. Arens, "Topologies for homeomorphism groups", *Amer. J. Math.*, **68**, 593 – 610 (1946).
- [3] G. E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, New York (1972).
- [4] Р. Энгелькинг, *Общая Топология*, М., Мир (1988).
- [5] П. С. Геворкян, "О бинарных G -пространствах", *Матем. заметки*, **98**, no. 4, 623 – 626 (2014).
- [6] P. S. Gevorgyan, "Equivariant movability of topological groups", *Topology and its Applications*, **159**, no. 7, 1761 – 1765 (2012).
- [7] P. S. Gevorgyan, "Groups of binary operations and binary G -spaces", *Topology and its Applications*, **201**, 18 – 28 (2016).

Поступила 17 февраля 2016

ON A COMPOSITION PRESERVING INEQUALITIES BETWEEN POLYNOMIALS

S. GULZAR AND N. A. RATHER

*S. P. Collego, Srinagar, Jammu & Kashmir, India
Kashmir University, Hazratbal, India*

E-mails: *sgmattoo@gmail.com; dr.narather@gmail.com*

Abstract. The Schur-Szegő composition of two polynomials $f(z) = \sum_{j=0}^n A_j z^j$ and $g(z) = \sum_{j=0}^n B_j z^j$, both of degree n , is defined by $f \circ g(z) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^{-1} A_j B_j z^j$. In this paper, we estimate the minimum and the maximum of the modulus of $f \circ g(z)$ on $|z| = 1$ and thereby obtain results analogous to Bernstein type inequalities for polynomials.

MSC2010 numbers: 30C10, 30C15, 41A17.

Keywords: polynomials; Schur-Szegő composition of polynomials; inequalities in the complex domain.

1. INTRODUCTION AND STATEMENTS OF RESULTS

Let $P(z)$ be a polynomial of degree n and $P'(z)$ be its derivative, then concerning the estimate of $|P'(z)|$ on the unit disk $|z| \leq 1$, we have

$$(1.1) \quad \max_{|z|=1} |P'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

The inequality (1.1) is an immediate consequence of S. Bernstein's theorem on the derivative of a trigonometric polynomial (see, e.g., [7, 8]), and by applying the maximum modulus principle (see [6, 7]) to the polynomial $Q(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$ one concludes that

$$(1.2) \quad \max_{|z|=1} |P(Rz)| \leq R^n \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Both the inequalities (1.1) and (1.2) can be sharpened if we restrict ourselves to the class of polynomials having no zeros in $|z| < 1$. In fact, if $P(z)$ is a polynomial of degree n having no zeros in $|z| < 1$, then the inequalities (1.1) and (1.2) can be respectively replaced by

$$(1.3) \quad \max_{|z|=1} |P'(z)| \leq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|$$

and

$$(1.4) \quad \max_{|z|=1} |P(Rz)| \leq \frac{R^n + 1}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

The inequality (1.3) was conjectured by Erdős and later it was verified by Lax [4], whereas the inequality (1.4) was proved by Ankeny and Rivlin [1].

Given two polynomials $f(z) = \sum_{j=0}^n A_j z^j$ and $g(z) = \sum_{j=0}^n B_j z^j$, both of degree n , their Schur-Szegő composition is defined by

$$f * g(z) = \sum_{j=0}^n \frac{A_j B_j}{\binom{n}{j}} z^j.$$

For any n th degree polynomial $P(z)$, one can easily see that if $q(z) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j$, $g(z) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j$ and $f(z) = Rz$, then

$$P * q(z) = zP'(z) \quad \text{and} \quad (P \circ f) * g(z) = P(Rz).$$

In view of these observations, it is natural to look for results analogous to the above inequalities for the Schur-Szegő composition of polynomials. Our first result in this direction is the following theorem.

Theorem 1.1. *Let $P(z)$ be a polynomial of degree n and let $h(z) = \sum_{j=0}^n l_j z^j$ be a polynomial of degree n having all its zeros in the disk $|z| \leq 1$. Then for every $R > 1$,*

$$(1.5) \quad \max_{|z|=1} |(P \circ f) * h(z)| \leq R^n |l_n| \max_{|z|=1} |P(z)|$$

where $f(z) = Rz$. The result is sharp, as is shown by the extremal polynomial $P(z) = az^n$, $a \neq 0$.

A variety of interesting results can be easily deduced from Theorem 1.1 as special cases. Here we mention few of them.

The following Corollary is obtained by letting $R \rightarrow 1$ in inequality (1.5).

Corollary 1.1. *Let $P(z)$ be a polynomial of degree n and let $h(z) = \sum_{j=0}^n l_j z^j$ be polynomial of degree n having all its zeros in the disk $|z| \leq 1$, then*

$$(1.6) \quad \max_{|z|=1} |P * h(z)| \leq |l_n| \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

The result is best possible and equality in (1.6) holds for $P(z) = az^n$, $a \neq 0$.

Remark 1.1. For $h(z) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j$, Corollary 1.1 reduces to inequality (1.1). Whereas if we take $h(z) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j$ in Theorem 1.1, we get inequality (1.2).

If in Corollary 1.1 we choose $h(z) = z^n + z^k$, where $k = 0, 1, \dots, n-1$, then we obtain the following extension of Visser's inequality (see [9]).

Corollary 1.2. *If $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ is a polynomial of degree n , then*

$$|a_n| + \frac{|a_k|}{\binom{n}{k}} \leq \max_{|z|=1} |P(z)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

The result is sharp.

By a different method, Corollary 1.2 was recently proved by S. Gulzar [3].

Next, we state an analog of Theorem 1.1 for the minimum modulus of a polynomial $P(z)$ on $|z| = 1$, when there is a restriction on the zeros of $P(z)$. More precisely, we have the following result.

Theorem 1.2. Let $P(z)$ and $h(z) = \sum_{j=0}^n l_j z^j$ be polynomials of degree n having all their zeros in the disk $|z| \leq 1$. Then for $R > 1$ the following inequality holds:

$$(1.7) \quad \min_{|z|=1} |(P \circ f) * h(z)| \geq R^n |l_n| \min_{|z|=1} |P(z)|,$$

where $f(z) = Rz$. The result is best possible and equality in (1.7) holds for $P(z) = az^n$, $a \neq 0$.

Remark 1.2. A result due to Aziz and Dawood [2, Theorem 1] can be obtained from Theorem 1.2 for a suitable choice of $h(z)$.

Next, letting $R \rightarrow 1$ in (1.7), we get the following result.

Corollary 1.3. Let $P(z)$ and $h(z) = \sum_{j=0}^n l_j z^j$ be polynomials of degree n having all their zeros in the disk $|z| \leq 1$, then

$$(1.8) \quad \min_{|z|=1} |P * h(z)| \geq |l_n| \min_{|z|=1} |P(z)|.$$

The result is sharp and the extremal polynomial is $P(z) = az^n$, $a \neq 0$.

The next result is obtained by taking $h(z) = z^n + z^k$, where $k = 0, 1, \dots, n-1$, in Corollary 1.3.

Corollary 1.4. If $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ is a polynomial of degree n having all its zeros in $|z| \leq 1$, then

$$(1.9) \quad |a_n| - \frac{|a_k|}{\binom{n}{k}} \geq \min_{|z|=1} |P(z)|, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

The result is sharp.

Theorem 1.1 can be sharpened, if we restrict ourselves to the class of polynomials having no zero in $|z| < 1$. In fact, we have the following result.

Theorem 1.3. Let $P(z)$ be a polynomial of degree n having no zero in $|z| < 1$ and let $h(z) = \sum_{j=0}^n l_j z^j$ be a polynomial of degree n having all its zeros in $|z| \leq 1$, then for every $R > 1$,

$$(1.10) \quad \max_{|z|=1} |(P \circ f) * h(z)| \leq \frac{R^n |l_n| + |l_0|}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|,$$

where $f(z) = Rz$. The result is sharp and equality in (1.10) holds for polynomial $P(z) = az^n + b$, $|a| = |b| \neq 0$.

The following corollary immediately follows by letting $R \rightarrow 1$ in Theorem 1.3.

Corollary 1.5. Let $P(z)$ be a polynomial of degree n having no zero in $|z| < 1$ and let $h(z) = \sum_{j=0}^n l_j z^j$ be a polynomial of degree n having all its zeros in $|z| \leq 1$, then

$$\max_{|z|=1} |P * h(z)| \leq \frac{|l_n| + |l_0|}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

The result is best possible and the equality holds for polynomial $P(z) = az^n + b$, $|a| = |b| \neq 0$.

Remark 1.3. It is easy to see that for suitable choices of $h(z)$, the inequalities (1.3) and (1.4) become special cases of Theorem 1.3.

The next corollary is obtained by taking $h(z) = z^n + z^k$, $0 \leq k \leq n-1$ in Corollary 1.5.

Corollary 1.6. If $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ is a polynomial of degree n which does not vanish in $|z| < 1$, then

$$|a_n| + \frac{|a_k|}{\binom{n}{k}} \leq \frac{\Lambda}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

where

$$\Lambda = \begin{cases} 1, & \text{if } 1 \leq k \leq n-1 \\ 2, & \text{if } k=0. \end{cases}$$

The result is sharp.

Applying Corollary 1.6 to polynomial $z^n P(1/z)$, we obtain the next result.

Corollary 1.7. If $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ is a polynomial of degree n having all its zeros in $|z| \leq 1$, then

$$|a_0| + \frac{|a_k|}{\binom{n}{k}} \leq \frac{\Lambda}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|, \quad 1 \leq k \leq n,$$

where

$$\Lambda = \begin{cases} 1, & \text{if } 1 \leq k \leq n-1 \\ 2, & \text{if } k=n. \end{cases}$$

A polynomial $P \in \mathcal{P}_n$ is said to be self-inversive if $P(z) \equiv uQ(z)$, where $|u| = 1$ and $Q(z)$ is the conjugate polynomial of $P(z)$, that is, $Q(z) := z^n \overline{P(1/\bar{z})}$.

Finally, we present the following result for self-inversive polynomials.

Theorem 1.4. Let $P(z)$ be a self-inversive polynomial of degree n and let $h(z) = \sum_{j=0}^n l_j z^j$ be a polynomial of degree n having all its zeros in $|z| \leq 1$, then for every $R > 1$,

$$\max_{|z|=1} |(P \circ f) \circ h(z)| \leq \frac{R^n |l_n| + |l_0|}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|,$$

where $f(z) = Rz$. The result is sharp, as is shown by the extremal polynomial $P(z) = az^n + b$, $|a| = |b| \neq 0$.

Remark 1.4. A variety of interesting results can easily be deduced from Theorem 1.4 in the same way as we have deduced from Theorems 1.1 and 1.3.

2. LEMMAS

For the proofs of the above stated theorems we need a number of lemmas. The first lemma is a consequence of the Schur-Szegő composition theorem [5].

Lemma 2.1. Let f and g be polynomials of degree n . If all the zeros of f are of modulus at most r and all the zeros of g are of modulus at most s , then all the zeros of $f \circ g$ are of modulus at most rs .

Lemma 2.2. Let $F(z)$ and $h(z)$ be polynomials of degree n having all their zeros in $|z| \leq 1$, and let $P(z)$ be a polynomial of degree n such that $|P(z)| \leq |F(z)|$ for $|z| = 1$. Then

$$(2.1) \quad |(P \circ f) \circ h(z)| \leq |(F \circ f) \circ h(z)| \quad \text{for } |z| = 1,$$

where $f(z) = Rz$ with $R > 1$.

Proof. If $P(z) = e^{i\alpha} F(z)$, then (2.1) is trivial. Therefore, we suppose that $P(z) \neq e^{i\alpha} F(z)$ for all $\alpha \in \mathbb{R}$. Let $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, $h(z) = \sum_{j=0}^n l_j z^j$ and $F(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j$. Furthermore, let $P^*(z) := z^n \overline{P(1/\bar{z})}$ and $F^*(z) := z^n \overline{F(1/\bar{z})}$. Since all the zeros of $F^*(z)$ lie in $|z| \geq 1$, $P^*(z)/F^*(z)$ is analytic in $|z| \leq 1$ and $|P^*(z)/F^*(z)| \leq 1$ for $|z| = 1$. By the maximum modulus principle, $|P^*(z)| \leq |F^*(z)|$ for $|z| \leq 1$, or equivalently $|P(z)| \leq |F(z)|$ for $|z| \geq 1$. Taking $z = Re^{i\theta}$, $R > 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, we obtain $|P(Rz)| \leq |F(Rz)|$ for $|z| = 1$. By Rouché's theorem, all the zeros of polynomial

$$(P \circ f)(z) - \lambda (F \circ f)(z) = P(Rz) - \lambda F(Rz) = \sum_{j=0}^n R^j (a_j - \lambda b_j) z^j$$

lie in $|z| < 1$ for every $\lambda \in \mathbb{C}$ with $|\lambda| > 1$ and $f(z) = Rz$.

Applying Lemma 2.1 to the polynomial $P \circ f(z) - \lambda F \circ f(z)$, it follows that all the zeros of polynomial

$$\begin{aligned}(P \circ f - \lambda F \circ f) \circ h(z) &= \sum_{j=0}^n \frac{l_j R^j (a_j - \lambda b_j)}{\binom{n}{j}} z^j \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{l_j R^j a_j}{\binom{n}{j}} z^j - \lambda \sum_{j=0}^n \frac{l_j R^j b_j}{\binom{n}{j}} z^j \\ &= (P \circ f) \circ h(z) - \lambda (F \circ f) \circ h(z)\end{aligned}$$

lie in $|z| < 1$. This implies

$$(2.2) \quad |(P \circ f) \circ h(z)| \leq |(P \circ f) \circ h(z)|$$

for $|z| \geq 1$ and $R > 1$. If the inequality (2.2) is not true, then there exists a point $z = z_0$ with $|z_0| \geq 1$ such that

$$|(P \circ f) \circ h(z_0)| > |(P \circ f) \circ h(z_0)|.$$

But all the zeros of $F(Rz)$ lie in $|z| \leq 1/R < 1$. Therefore, by Lemma 2.1, we have

$$(F \circ f) \circ h(z_0) \neq 0.$$

We take

$$\lambda = \frac{(P \circ f) \circ h(z_0)}{(F \circ f) \circ h(z_0)},$$

so that λ is a well defined real or complex number with $|\lambda| > 1$, and with this choice of λ , we obtain $(P \circ f) \circ h(z) - \lambda (F \circ f) \circ h(z_0) = 0$, where $|z_0| \geq 1$, which contradicts the fact that all the zeros of $(P \circ f - \lambda F \circ f) \circ h(z)$ lie in $|z| < 1$, and the result follows. $\square$

The next Lemma immediately follows from Lemma 2.2 by taking $F(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$.

Lemma 2.3. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n which does not vanish in $|z| < 1$ and $Q(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$, then*

$$(2.3) \quad |(P \circ f) \circ h(z)| \leq |(Q \circ f) \circ h(z)| \quad \text{for } |z| = 1,$$

where $f(z) = Rz$ with $R > 1$.

Lemma 2.4. *Let $P(z)$ be a polynomial of degree n and let $h(z) = \sum_{j=0}^n l_j z^j$ be a polynomial of degree n having all its zeros in $|z| \leq 1$, then for every $R > 1$ and $|z| = 1$, we have*

$$(2.4) \quad |(P \circ f) \circ h(z)| + |(Q \circ f) \circ h(z)| \leq \{l_n R^n + |l_0|\} M,$$

where $f(z) = Rz$ and $Q(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$.

Proof. Let $M = \max_{|z|=1} |P(z)|$. Since $P(z)$ is a polynomial of degree n and $|P(z)| \leq M$ for $|z| = 1$. By Rouché's theorem $P(z) - \lambda M$ does not vanish in $|z| < 1$ for every complex number λ with $|\lambda| \geq 1$. Applying Lemma 2.3 to the polynomial $P(z) - \lambda M$, we obtain

$$(2.5) \quad |(P \circ f) \circ h(z) - \lambda l_0 M| \leq |(Q \circ f) \circ h(z) - \lambda l_n R^n M z^n| \quad \text{for } |z| = 1.$$

Since $|Q(z)| = |P(z)| \leq M$ for $|z| = 1$, by Theorem 1.1, we have for $|z| = 1$

$$(2.6) \quad |(Q \circ f) \circ h(z)| \leq |l_n| R^n M.$$

In view of inequality (2.6), we can choose $\arg \lambda$ such that

$$|(Q \circ f) \circ h(z) - \lambda l_n R^n M z^n| = |\lambda l_n R^n M z^n| - |(Q \circ f) \circ h(z)| \quad \text{for } |z| = 1.$$

Thus, in view of (2.5) we can conclude that

$$|(P \circ f) \circ h(z)| + |(Q \circ f) \circ h(z)| \leq |\lambda| \{ |l_n| R^n + |l_0| \} M \quad \text{for } |z| = 1,$$

which is equivalent to (2.4). $\square$

3. PROOFS OF THEOREMS

Proof of Theorem 1.1. The proof follows from Lemma 2.2 by taking $F(z) = M z^n$, where $M = \max_{|z|=1} |P(z)|$. $\square$

Proof of Theorem 1.2. Let $m = \min_{|z|=1} |P(z)|$. If $P(z)$ has a zero on $|z| = 1$, then the inequality (1.7) is trivial. Therefore, we assume that $P(z)$ has all its zeros in $|z| < 1$, so that $m > 0$. Also, we have

$$|m z^n| \leq |P(z)| \quad \text{for } |z| = 1.$$

Applying Lemma 2.2 to the polynomials $m z^n$ and $P(z)$, we get the inequality (1.7). This completes the proof of Theorem 1.2. $\square$

Proof of Corollary 1.4. Taking $h(z) = z^n + z^k$, where $k = 0, 1, \dots, n-1$, in Corollary 1.3, we get

$$(3.1) \quad \min_{|z|=1} \left| a_n z^n + \frac{a_k}{\binom{n}{k}} z^k \right| \geq \min_{|z|=1} |P(z)|, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

If $z_1, z_2, \dots, z_n$ are the roots of $P(z)$, then $|z_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, and we have by Viète's formula

$$(-1)^{n-k} \frac{a_k}{a_n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_{n-k}}.$$

This implies

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} |z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_{n-k}}| \leq \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

or equivalently

$$(3.2) \quad |a_n| \geq \frac{|a_k|}{\binom{n}{k}},$$

which gives

$$(3.3) \quad \min_{|z|=1} \left| a_n z^n + \frac{a_k}{\binom{n}{k}} z^k \right| = \left| |a_n| - \frac{|a_k|}{\binom{n}{k}} \right| = |a_n| - \frac{|a_k|}{\binom{n}{k}}.$$

Combining (3.1) and (3.3), we obtain (1.9). $\square$

Proof of Theorem 1.3. The inequality (2.3) in conjunction with Lemma 2.4 gives for every $R > 1$ and $|z| = 1$

$$2|(P \circ f) \circ h(z)| \leq |(P \circ f) \circ h(z)| + |(Q \circ f) \circ h(z)| \leq \{ |l_n| R^n + |l_0| \} \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

This is equivalent to inequality (1.10) and completes the proof of Theorem 1.3. $\square$

Proof of Theorem 1.4. Since $P(z)$ is a self-inversive polynomial of degree n , then for some $u \in \mathbb{C}$ with $|u| = 1$, we have $P(z) = uQ(z)$ for all $z \in \mathbb{C}$, where $Q(z)$ is the conjugate polynomial of $P(z)$. This gives

$$|(P \circ f) \circ h(z)| = |(Q \circ f) \circ h(z)| \quad \text{for } |z| = 1.$$

Using this in place of (2.3), and proceeding similarly as in the proof of Theorem 1.3, we get the desired result. $\square$

Acknowledgement. The authors would like to thank the anonymous referees for comments and suggestions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. C. Ankeny and T. J. Rivlin, "On a theorem of S. Bernstein", *Pacific J. Math.*, **5**, 849 – 852 (1965).
- [2] A. Aziz and Q. M. Dawood, "Inequalities for a polynomial and its derivative", *J. Approx. Theory*, **54**, 305 – 313 (1988).
- [3] S. Gulsar, "On estimates for the coefficients of a polynomials", *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **354**, 357 – 363 (2016).
- [4] P. D. Lax, "Proof of a conjecture of P. Erdős on the derivative of a polynomial", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60**, 509 – 513 (1944).
- [5] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Math. Surveys, no. 3, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1949).
- [6] G. Polya and G. Szegő, *Aufgaben und Lehrätze Aus Der Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1925).
- [7] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford University Press, New York (2002).
- [8] A. C. Schaffer, "Inequalities of A. Markov and S. Bernstein for polynomials and related functions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47**, 565 – 579 (1941).
- [9] C. Vlasar, "A simple proof of certain inequalities concerning polynomials", *Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **47**, 276 – 281 (1948).

Поступила 5 декабря 2016

О ВЫДЕЛЕНИИ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - армянский (Славянский) университет¹

Ереванский государственный университет

E-mail: vachagan.margaryan@yahoo.com haikghazaryan@mail.ru

Аннотация. Линеиный дифференциальный оператор $P(x, D) = P(x_1, \dots, x_n, D_1, \dots, D_n) = \sum \gamma_\alpha(x) D^\alpha$ с коэффициентами $\{\gamma_\alpha(x)\}$, определенными в E^n , называется формально почти гипоеллиптическим в E^n , если все производные $D^\alpha P(x, \xi)$ оцениваются через $P(x, \xi)$ и оператор $P(x, D)$ имеет равномерно постоянную мощность в E^n . В работе доказывается, что если оператор $P(x, D)$ формально почти гипоеллиптический, то все решения уравнения $P(x, D)u = 0$, которые, вместе с некоторыми их производными, интегрируемы с квадратом с определенным экспоненциальным весом, являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

MSC2010 number: 12E10, 28C05.

Ключевые слова: формально гипоеллиптический оператор; оператор постоянной мощности (силы); многогранник Ньютона; мультианнизотропные пространства Соболева.

1. Постановка задачи и вспомогательные предложения

После знаменательного примера Г. Леви уравнения $P(x, D)u = (-iD_1 + D_2 - 2(x_1 + x_2)D_3)u = f$, которое для некоторых $f \in C^\infty(E^3)$ не имеет гладких решений ни в какой области из E^3 (см. [13] или [14]), естественным образом возник вопрос о существовании и выделении гладких решений того или иного класса дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Для изучения вопросов существования, единственности и гладкости решений линейных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами существуют классические методы Лере - Шаудера, параметрикса Леви или аппроксимация Корна.

¹Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 15T - 1A 197 и тематического фонда Российско - Армянского университета министерства образования и науки Российской Федерации.

Точные результаты о гладкости решений гипозеллиптических или частично - гипозеллиптических уравнений с переменными коэффициентами постоянной силы получены Питре (см. [1] или [2]) и улучшены в работах Мальгранжа, Хёрмандера, Тейлора, Гудмундслоттера и других (см. [2] - [9]). В отмеченных работах либо показано, что все непрерывные решения соответствующих уравнений являются бесконечно дифференцируемыми функциями (для формально гипозеллиптических операторов), либо, при определённых априорных предположениях на решения соответствующих уравнений, выделены бесконечно дифференцируемые решения (для формально частично - гипозеллиптических операторов).

Что касается более общих уравнений (не являющихся гипозеллиптическими или частично - гипозеллиптическими), таковыми как гипозеллиптические по Горюну, по Егорову или по Вурепкову уравнения, почти гипозеллиптические и другие уравнения, то для некоторых классов таких уравнений с постоянными коэффициентами аналогичные вопросы изучены в работах [10]- [12] и [15] - [17]. Здесь этот вопрос рассматривается для одного класса формально почти гипозеллиптических уравнений с переменными коэффициентами, имеющих постоянную мощность.

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ - множество n - мерных мультииндексов, E^n и $\mathbb{R}^n$ n -мерные евклидовы пространства точек (векторов) соответственно $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ или $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ($j = 1, \dots, n$).

Для линейного дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами через $\tilde{P}(\xi)$ будем обозначать функцию Л. Хёрмандера, определяющую формулой

$$\tilde{P}^2(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |D^\alpha P(\xi)|^2.$$

Определение 1.1. Пусть $R_1(D)$ и $R_2(D)$ линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Будем говорить, что оператор $R_1(D)$ (многочлен $R_1(\xi)$) мощнее оператора $R_2(D)$ (многочлена $R_2(\xi)$) и записывать $R_2 < R_1$, если существует число $C > 0$ такое, что

$$|R_2(\xi)| \leq C[1 + |R_1(\xi)|] \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Если с некоторой постоянной $C > 0$ $\bar{R}_2(\xi) \leq C \bar{R}_1(\xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, то будем говорить, что оператор $R_1(D)$ сильнее (по Л. Хермандеру) оператора $R_2(D)$ (запись $R_2 \prec R_1$.)

Определение 1.2. Оператор $P(x, D)$ назовём оператором постоянной мощности в Ω , если для каждой пары точек x_1 и x_2 из Ω операторы $P(x_1, D)$ и $P(x_2, D)$ имеют одинаковую мощность. Оператор $P(x, D)$ назовём оператором равномерно постоянной мощности в Ω , если существует число $c > 0$ такое, что для любой пары точек x и y из Ω

$$c^{-1} [1 + |P(x, \xi)|] \leq 1 + |P(y, \xi)| \leq c [1 + |P(x, \xi)|] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 1.3. Оператор $R(D)$ (многочлен $R(\xi)$) с постоянными коэффициентами назовём гипозамплическим, если для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ $D^\nu P(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ и назовём почти гипозамплическим, если $D^\nu R < R$ для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$. Оператор $P(x, D)$ (многочлен $P(x, \xi)$) назовём (формально) почти гипозамплическим в Ω , если оператор $P(x^0, D)$ почти гипозампличесок для любой точки $x^0 \in \Omega$.

В работах [18] - [19] найдены алгебраические условия при которых оператор $P(x, D)$ имеет равномерно постоянную мощность в Ω и условия при которых такой оператор (формально) почти гипозампличесок в Ω . Настоящая заметка является продолжением этих работ. Здесь в основном мы будем пользоваться определениями и обозначениями указанных работ, повторяя лишь ряд необходимых понятий.

Наша цель в настоящей работе - для одного класса формально почти гипозамплических операторов $\{P(x, D)\}$ равномерно постоянной мощности из множества всех обобщенных решений уравнения $P(x, D)u = 0$ выделить бесконечно дифференцируемые решения.

Ниже будем часто пользоваться следующим простым предложением, являющимся аналогом Леммы 13.1.2 монографии [2]

Предложение 1.1. Пусть оператор $P(x, D)$ имеет постоянную мощность в Ω . Фиксируем x^0 и положим $P_0(D) = P(x^0, D)$. Пусть $P_0, P_1, \dots, P_r$ - базис в конечномерном векторном пространстве операторов с постоянными коэффициентами менее мощных P_0 . Тогда

$$(1.1) \quad P(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=0}^r a_j(x) P_j(D).$$

где коэффициенты a_j определяются однозначно, обращаются в нуль в точке x^0 и имеют те же свойства гладкости, что и коэффициенты оператора $P(x, D)$.

Класс $H(\Omega)$ исследуемых операторов состоит из формально погги гипозлиптических линейных дифференциальных операторов $P(x, D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}(x) D^{\alpha}$ с бесконечно дифференцируемыми в E^n коэффициентами, имеющих равномерно постоянную мощность в E^n и такими, что $\gamma_{\alpha}(x) \equiv \gamma_{\alpha}$ const для всех $x \in E^n \setminus \Omega$, где Ω некоторая ограниченная область. При этом будем считать (см. (1.1)), что $a_0(x) \equiv 0$ с некоторой постоянной $\sigma > 0$

$$(1.2) \quad \sigma |\xi| \leq 1 + |P_0(\xi)| \quad \text{для любых } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание 1.1. 1) Если обозначить через I_n множество многочленов n переменных таких, что $|R(\xi)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, то, очевидно, что многочлен P_0 , удовлетворяющий условию (1.2), принадлежит этому множеству. 2) Из определения равномерной постоянной мощности многочлена $P(x, \xi)$ следует существование числа $\sigma_1 > 0$ такого, что для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in E^n$ имеем

$$(1.3) \quad \sigma_1 (1 + |P_0(\xi)|) \leq 1 + |P(x, \xi)| \leq \sigma_1^{-1} (1 + |P_0(\xi)|),$$

3) из определения многочленов $\{P_j\}$ следует существование числа $\sigma_2 > 0$ такого, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$(1.4) \quad \sum_{j=0}^{\infty} |P_j(\xi)| \leq \sigma_2 (|P_0(\xi)| + 1).$$

Опишем теперь класс весовых функциональных пространств, типа С. Л. Соболева, где будем исследовать нашу задачу. В качестве веса рассмотрим произвольную фиксированную положительную функцию $g \in C^{\infty}(E^n)$ такую, что 1) с некоторой постоянной $\kappa > 0$ ($g_{\delta}(x) = g(\delta x)$ для любого $\delta > 0$)

$$(1.5) \quad \kappa^{-1} e^{-\delta|x|} \leq g(x) \leq \kappa e^{-\delta|x|}, \quad \text{для любого } x \in E^n,$$

2) для любого $\alpha \in N_0^n$ существует число $\kappa_{\alpha} > 0$ такое, что

$$(1.6) \quad |D^{\alpha} g_{\delta}(x)| \leq \kappa_{\alpha} \delta^{|\alpha|} g_{\delta}(x), \quad \text{для любого } x \in E^n.$$

3) С некоторой постоянной $C > 0$

$$(1.6') \quad |g_{\delta}(x + y) - g_{\delta}(x)| \leq C |y| g_{\delta}(x) \quad \text{для любого } x \in E^n.$$

Для любого $\delta > 0$ обозначим через $L_{2, \delta} = L_{2, \delta}(E^n)$ множество функций с конечной нормой

$$(1.7) \quad \|u\|_{L_{2, \delta}} = \sqrt{\int |u(x) g_{\delta}(x)|^2 dx}.$$

Для каждого $k = 0, 1, \dots$ через $W_{\delta}^k = W_{2, \delta}^k$ множество функций с конечной нормой

$$(1.8) \quad \|u\|_{W_{\delta}^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{L_{2, \delta}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \| |D^{\alpha} u| g_{\delta} \|_{L_2},$$

а для дифференциального оператора $P_0(D)$ через $W_{\delta}^k(P_0) = W_{2, \delta}^k(P_0)$ множество функций с конечной нормой

$$(1.9) \quad \|u\|_{W_{\delta}^k(P_0)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \| |D^{\alpha} P_0(D) u| \|_{L_{2, \delta}} + \|u\|_{L_{2, \delta}},$$

при этом положим $W_{\delta}(P_0) = W_{\delta}^0(P_0)$.

Аналогично тому, как это делается в [16] (см. Лемма 2.2 и Следствие 2.2) доказывается следующее предложение.

Предложение 1.2. Для любого почти гипозаммитического многочлена $P_0 \in I_n$ существует число $\delta_0 = \delta_0(P_0) > 0$ такое, что для любых $\delta \in (0, \delta_0)$ и $k = 0, 1, \dots$ множество C_0^{∞} плотно в $W_{\delta}^k(P_0)$.

Ниже, не оговаривая это каждый раз, будем считать, что число $\delta_0 = \delta_0(P_0) > 0$ выбрано по этому предложению.

Пользуясь плотностью C_0^{∞} -функций в $W_{\delta}^k(P_0)$, и преобразовывая Фурье, легко доказать следующие предложения.

Лемма 1.1. Пусть P_0 почти гипозаммитический оператор, $Q < P_0$ и $\delta \in (0, \delta_0)$. Тогда существует постоянная $c = c(\delta_0, k) > 0$ такая (см. (1.7) - (1.9))

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|Q(D) |D^{\alpha} u| \|_{L_{2, \delta}} \leq C \|u\|_{W_{\delta}^k(P_0)} \quad \forall u \in W_{\delta}^k(P_0), \quad k = 0, 1, \dots$$

Лемма 1.2. Для любого дифференциального оператора $Q(D)$ с постоянными коэффициентами и любого числа $\delta_1 > 0$ существует число $C = C(Q, \delta_1) > 0$ такое, что для всех $\delta \in (0, \delta_1)$ и $u \in C_0^{\infty}$

$$\|Q(D)u\|_{L_{2, \delta}} = \| |Q(D)u| g_{\delta} \|_{L_2} \leq C \sum_{\beta} \|Q^{(\beta)}(D) (u g_{\delta})\|_{L_2}.$$

Лемма 1.3. Пусть $P_0 \in I_n$ почти гипозаммитический оператор вида (1.1), $P_j(\xi)/P_0(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, r$, $\{a_j\}_{j=1}^r$ измеримые, ограниченные в E^n функции. Тогда с некоторой постоянной $c > 0$ и для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ и $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ имеем

$$c^{-1} \|u\|_{W_{\delta}(P_0)} \leq \|P(x, D)u\|_{L_{2, \delta}} + \|u\|_{L_{2, \delta}} \leq c \|u\|_{W_{\delta}(P_0)}.$$

2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Пусть S_1 единичная сфера в E^n , $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(S_1)$, $\int \varphi(x) dx = 1$, $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$, $u \in L_{2,\delta}$ и $u_\varepsilon(x) = (u * \varphi_\varepsilon)(x)$. Функцию u_ε принято называть усреднением функции u с радиусом усреднения ε .

Лемма 2.1. Если $u \in L_{2,\delta}$, то $u_\varepsilon \in W_1^k \cap W_2^k(P_0)$ для любого $k = 0, 1, \dots$

Доказательство. Докажем больше, что $D^\alpha u_\varepsilon \in L_{2,\delta}$ для любого $\alpha \in N_0^n$. Сначала отметим, что из леммы 1.1 работы [16] и из свойств (1.6) функции g_δ следует (см. также [19], неравенства (3.2)) существование числа $C_1 = C_1(\varepsilon) > 0$ такого, что $g_\delta(x) \leq C_1 g_\delta(x-y)$ при $|y| < \varepsilon$.

Пусть число $\varepsilon > 0$, мультииндекс α и функция $u \in L_{2,\delta}$ фиксированы. Применяя обобщенное неравенство Мянковского, откуда примем с некоторой постоянной $C_2 = C_2(\alpha) > 0$

$$\begin{aligned} \|(D^\alpha u_\varepsilon) g_\delta\|_{L_2} &= \|D^\alpha(u * \varphi_\varepsilon) g_\delta\|_{L_2} = \left\{ \int \left| \int u(x-y) D^\alpha \varphi_\varepsilon(y) dy g_\delta(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \int \left[\int |u(x-y) g_\delta(x)|^2 dx \right]^{1/2} |D^\alpha \varphi_\varepsilon(y)| dy \\ &\leq C_1 \int \left[\int |u(x-y) g_\delta(x-y)|^2 dx \right]^{1/2} |D^\alpha \varphi_\varepsilon(y)| dy \\ &\leq C_1 \|u g_\delta\|_{L_2} \varepsilon^{-|\alpha|} \int |(D^\alpha \varphi)_\varepsilon(y)| dy \leq C_1 C_2 \varepsilon^{-|\alpha|} \|u g_\delta\|_{L_2}, \end{aligned}$$

что доказывает лемму 2.1.

Следующее предложение дополняет доказательную лемму.

Лемма 2.2. Пусть P оператор вида (1.1), $k = 0, 1, \dots$, $\delta \in (0, \delta_0)$ и $u \in W_\delta^k(P_0)$. Тогда для любого $\alpha \in N_0^n : |\alpha| \leq k$ имеем

$$\|P(x, D)[D^\alpha u_\varepsilon]\|_{L_{2,\delta}} \rightarrow \|P(x, D)[D^\alpha u]\|_{L_{2,\delta}} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доказательство. Пусть числа k и δ фиксированы и $u \in W_\delta^k(P_0)$, т.е. $[D^\alpha P_0(D)]u \in L_{2,\delta}$ для всех $\alpha \in N_0^n : |\alpha| \leq k$. Сначала покажем существование числа $C_1 > 0$ такого, что для любых $\delta \in (0, \delta_0)$, $k = 0, 1, \dots$ и для всех $u \in W_\delta^k(P_0)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{j=0}^{\infty} \|D^\alpha P_j(D)u\|_{L_{2,\delta}} &\leq C_1 \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha [P_0(D)u]\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}} \right] \\ (2.1) \quad &= C_1 \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \| [D^\alpha P_0(D)]u \|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}} \right] = C_1 \|u\|_{W_\delta^k(P_0)}. \end{aligned}$$

Из Предложения 1.2 следует, что неравенства (2.1) достаточно доказать для функций $u \in C_0^\infty$.

Так как $\| [D^\alpha P_j(D)u] \|_{L_{2,\delta}} = \| P_j(D) [D^\alpha u] g_\delta \|_{L_2}$ для каждого $j = 0, 1, \dots, k$, каждого $\alpha \in N_0^n : |\alpha| \leq j$ и для всех $u \in C_0^\infty$, то в силу леммы 1.2 имеем с некоторой постоянной $C_2 = C_2(P_j, \delta_0) > 0$

$$\| [D^\alpha P_j(D)u] \|_{L_{2,\delta}} \leq C_2 \sum_\beta \| P_j^{(\beta)}(D) [D^\alpha u] g_\delta \|_{L_2}.$$

Для каждой тройки $j, \alpha, \beta : 0 \leq j \leq r, \alpha \in N_0^n : |\alpha| \leq k, \beta \in N_0^n : |\beta| \leq \text{ord } P_j$ обозначим $A_{j,\alpha,\beta} = \| P_j^{(\beta)}(D) [D^\alpha u] g_\delta \|_{L_2}$. Из равенства Парсеваля следует, что выражение $A_{j,\alpha,\beta}$ эквивалентно выражению $\| F_j^{(\beta)}(\xi) F [D^\alpha u] g_\delta \|_{L_2}$, где $F(u)$ преобразование Фурье функции $u \in C_0^\infty$.

Так как для любого $\beta \in N_0^n$ $P_j^{(\beta)} \prec P_j \prec P_0$, то (см. (1.4)) с некоторой постоянной $C_3 > 0$ имеем для всех $u \in C_0^\infty$ $A_{j,\alpha,\beta} \leq C_3 \| [P_0(\xi) + 1] F [D^\alpha u] g_\delta \|_{L_2} \leq C_3 \{ \| P_0(D) [D^\alpha u] g_\delta \|_{L_2} + \| D^\alpha u g_\delta \|_{L_2} \}$. Из почти гипотизитичности $P_0(D)$ отсюда для всех $u \in C_0^\infty$ с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$A_{j,\alpha,\beta} \leq C_4 \{ \| P_0(D) D^\alpha u \|_{L_2} + \| D^\alpha u g_\delta \|_{L_2} \} \leq C_4 \| u \|_{W_\delta^k(P_0)} + \| D^\alpha u g_\delta \|_{L_2}.$$

Отсюда в силу леммы 1.1 при $Q(\xi) \equiv 1$ получим требуемое неравенство (2.1), откуда следует, что $D^\alpha P_j(D)u \in L_{2,\delta}$ ($j = 0, 1, \dots, r$) для любого мультииндекса $\alpha : |\alpha| \leq k$ и для всех $u \in W_\delta^k(P_0)$.

Перейдем к непосредственному доказательству леммы. Так как по уже доказанной части $P_j(D) [D^\alpha u] \in L_{2,\delta}$, $j = 0, 1, \dots, r$ и коэффициенты $\{a_j(x)\}$ в представлении (1.1) гладкие, ограниченные в E^n функции, то $P(x, D)u = \sum_{j=0}^r a_j(x) P_j(D) [D^\alpha u] \in L_{2,\delta}$, при этом $\| P(x, D) [D^\alpha u] \|_{L_{2,\delta}} = \| [P(x, D) D^\alpha u] \|_{L_{2,\delta}}$ для всех $u \in W_\delta^k(P_0)$. По известным свойствам усредненных функций (см. [20], Лемма 3.2) имеем

$$\begin{aligned} \| P(x, D) [D^\alpha u_\varepsilon] - P(x, D) [D^\alpha u] \|_{L_{2,\delta}} &= \| P(x, D) [(D^\alpha u)_\varepsilon] - P(x, D) [D^\alpha u] \|_{L_{2,\delta}} \\ &= \| P(x, D) [(D^\alpha u)_\varepsilon] - [P(x, D) (D^\alpha u)]_\varepsilon + [P(x, D) (D^\alpha u)]_\varepsilon - P(x, D) [D^\alpha u] \|_{L_{2,\delta}} \\ &\leq \| P(x, D) [(D^\alpha u)_\varepsilon] - [P(x, D) (D^\alpha u)]_\varepsilon \|_{L_{2,\delta}} + \| [P(x, D) (D^\alpha u)]_\varepsilon - \\ &\quad - P(x, D) [D^\alpha u] \|_{L_{2,\delta}} = B_{1,\varepsilon} + B_{2,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Что $B_{2,\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ доказано в работе [16]. Докажем, что $B_{1,\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Имеем

$$B_{1,\varepsilon} = \| [P_0(D) + \sum_{j=1}^r a_j(x) P_j(D)] [(D^\alpha u)_\varepsilon] - \{ [P_0(D) + \sum_{j=1}^r a_j(x) P_j(D) D^\alpha u] \}_\varepsilon \|_{L_{2,\delta}}$$

$$\leq \|P_0(D)[(D^\alpha u)_\varepsilon] - [P_0(D)D^\alpha u]_\varepsilon\|_{L_{2,\delta}} + \sum_{j=0}^r \|a_j(x) P_j(D)[(D^\alpha u)_\varepsilon] - [a_j(x) P_j(D)D^\alpha u]_\varepsilon\|_{L_{2,\delta}} = C_0(\varepsilon) + \sum_{j=0}^r C_j(\varepsilon).$$

Так как (см. [20], Лемма 5.2) $P_0(D)[(D^\alpha u)_\varepsilon] = [P_0(D)D^\alpha u]_\varepsilon$, то $C_0(\varepsilon) = 0$. Остается показать, что $C_j(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($j = 0, 1, \dots, r$). Еще раз пользуясь леммой 5.2 работы [20], получаем

$$\begin{aligned} C_j(\varepsilon) &= \|a_j(x) [P_j(D)D^\alpha u]_\varepsilon - [a_j(x) P_j(D)D^\alpha u]_\varepsilon\|_{L_{2,\delta}} \\ &= \|a_j(x) \int [P_j(D)D^\alpha u](y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy - \int a_j(y) P_j(D)[D^\alpha u(y)] \varphi_\varepsilon(x-y) dy\|_{L_{2,\delta}} \\ &= \|a_j(x) g_\delta(x) \int [P_j(D)D^\alpha u](y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy - \\ &\quad - g_\delta(x) \int a_j(y) P_j(D)[D^\alpha u(y)] \varphi_\varepsilon(x-y) dy\|_{L_2} \\ &= \left\| \int [a_j(x) - a_j(y)] g_\delta(x) P_j(D)[D^\alpha u(y)] \varphi_\varepsilon(x-y) dy \right\|_{L_2} \quad (j = 0, 1, \dots, r). \end{aligned}$$

Так как $a_j \in C^\infty$, при этом $a_j(x) = \text{const}$ при $x \in E^n \setminus \Omega$, в $|x-y| \leq \varepsilon$, то по формуле Лагранжа $|a_j(x) - a_j(y)| \leq \max |\text{grad } a_j(x)| |x-y| \leq c_0 \varepsilon$ ($j = 0, 1, \dots, r$), где $c_0 = \max |\text{grad } a_j(x)|$. С другой стороны, так как при $|x-y| \leq 1$ существует число $\kappa > 0$ такое, что $\kappa^{-1} g_\delta(y) \leq g_\delta(x) \leq \kappa g_\delta(y)$, то при $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$C_j(\varepsilon) \leq c_0 \kappa \varepsilon \left\| \int [P_j(D)[D^\alpha u](y) g_\delta(y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy \right\|_{L_2}.$$

Применяя неравенство Юнга, отсюда имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$ получаем

$$C_j(\varepsilon) \leq c_1 \kappa \varepsilon \| [P_j(D)D^\alpha u] g_\delta \|_{L_1} \| \varphi_\varepsilon \|_{L_1}.$$

Так как $\| \varphi_\varepsilon \|_{L_1} = 1$, и по неравенству (2.1) и равенству Парсеваля получаем

$$\|P_j(D)[D^\alpha u]\|_{L_{2,\delta}} \leq c_1 \left[\sum_{|\theta| \leq \alpha} \| [D^\theta P_0(D)u] \|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}} \right] \quad \text{для любой функции } u \in W_\delta^k(P_0)$$

то отсюда получим с некоторой постоянной $c_2 > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$C_j(\varepsilon) \leq c_2 \kappa \varepsilon \|P_j(D)[D^\alpha u]\|_{L_{2,\delta}} \leq c_2 \cdot \varepsilon \|u\|_{W_\delta^k(P_0)} \rightarrow 0$$

для всех $u \in W_\delta^k(P_0)$ и $j = 0, 1, \dots, r$, что доказывает лемму 2.2.

Лемма 2.3. Пусть почти гипозаммитический оператор $P_0(D)$, область $\Omega \subset E^n$ и число $\delta_0 = \delta_0(P_0) > 0$ определяются оператором $P(x, D)$ как выше, $\delta \in (0, \delta_0)$,

$\beta \in \mathbb{N}_0^n$ произвольный мультииндекс такой, что $m = |\beta| - 1 > 0$ и $a \in C_0^\alpha(\Omega)$. Тогда существует число $C = C(a, \beta, P_0)$ такое, что

$$\|D_\alpha^\beta \int [a(x) - a(y)] [P_0(D)u](y) \varphi_\varepsilon(x - y) dy\|_{L_2, \varepsilon} \leq C \|u\|_{W_T^m(P_0)} \quad \forall u \in W_T^m(P_0).$$

Доказательство. Пусть, например, $\beta_1 \neq 0$. Представим вектор β в виде $\beta = \alpha + \varepsilon$, где $|\alpha| = m$, $\varepsilon = (1, 0, \dots, 0)$ и положим $z = x - y$, тогда по формуле Лейбница имеем (также $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2, \varepsilon}$, $A_\beta = \|D_\alpha^\beta \int [a(x) - a(y)] [P_0(D)u](y) \varphi_\varepsilon(x - y) dy\|$)

$$\begin{aligned} A_\beta &= \|D_1 \int D^\alpha [(a(x) - a(x - z)) (P_0(D)u)(x - z)] \varphi_\varepsilon(z) dz\| \\ &\leq \sum_{0 \neq \gamma \leq \alpha} \|D_1 \int C_\alpha^\gamma D^\gamma [a(x) - a(x - z)] [P_0(D)D^{\alpha-\gamma}u](x - z) \varphi_\varepsilon(z) dz\| \\ &\quad + \|D_1 \int [a(x) - a(x - z)] [P_0(D)D^\alpha u](x - z) \varphi_\varepsilon(z) dz\| \\ &\leq \sum_{0 \neq \gamma \leq \alpha} C_\alpha^\gamma \left\{ \left\| \int D_1 D^\gamma [a(x) - a(x - z)] [P_0(D)D^{\alpha-\gamma}u](x - z) \varphi_\varepsilon(z) dz \right\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| \int D^\gamma [a(x) - a(x - z)] [P_0(D)D_1 D^{\alpha-\gamma}u](x - z) \varphi_\varepsilon(z) dz \right\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| D_1 \int [a(x) - a(x - z)] [P_0(D)D^\alpha u](x - z) \varphi_\varepsilon(z) dz \right\| \right\}. \end{aligned}$$

Так как $a \in C_0^\alpha(\Omega)$, и $z \in \text{supp} \varphi_\varepsilon$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$B_1(\varepsilon) := \max_{0 \neq \gamma \leq \alpha} \max_{\varepsilon, |z| < \varepsilon} C_\alpha^\gamma \|D_1 D^\gamma [a(x) - a(x - z)]\| \rightarrow 0,$$

поэтому отсюда, возвращаясь в последнем интеграле к старым переменным, имеем

$$\begin{aligned} A_\beta &\leq B_1(\varepsilon) \sum_{0 \neq \gamma \leq \alpha} [\| |P_0(D)D^{\alpha-\gamma}u| * \varphi_\varepsilon \| + \| |P_0(D)D^{\alpha-\gamma+\varepsilon}u| * \varphi_\varepsilon \|] \\ &\quad + \left\| \int |D_1 a(x)| |P_0(D)D^\alpha u(y)| \varphi_\varepsilon(x - y) dy \right\| \\ &\quad + \left\| \int |a(x) - a(y)| |P_0(D)D^\alpha u(y)| \varepsilon^{-1} |(D_1 \varphi)_\varepsilon(x - y)| dy \right\|. \end{aligned}$$

Так как $|\alpha - \gamma + \varepsilon| \leq m$ при $\gamma \neq 0$, $a \in C_0^\alpha(\Omega)$ и по формуле Лагранжа $|a(x) - a(y)| \leq \max |\text{grad} a(x)| |x - y| \leq \varepsilon \max |\text{grad} a(x)|$ при $x - y \in \text{supp} \varphi_\varepsilon$, то отсюда, в силу неравенства Юнга, с некоторыми положительными постоянными B_2, B_3, B_4 имеем

$$\begin{aligned} A_\beta &\leq B_2 [\|u\|_{W_T^m(P_0)} + \| |P_0(D)D^\alpha u| * \varphi_\varepsilon \|] \\ &\quad + B_3 \varepsilon^{-1} \| |P_0(D)D^\alpha u| * |D_1 \varphi|_\varepsilon \| \leq B_4 \|u\|_{W_T^m(P_0)}. \quad \square \end{aligned}$$

Для $P \in H(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\delta \in (0, \delta_0)$ обозначим $\phi_m(P, \delta) = \{u \in W_\delta^m(P_0) : P(x, D)u = 0\}$.

Лемма 2.4. Пусть $u \in \phi_m(P, \delta)$, тогда $\|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}\|_{W_\delta^{m+1}(P_0)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$.

Доказательство. Из лемм 1.1 и 1.2 и условия (1.2) на функцию из множества $H(\Omega)$ следует, что $P_j(D)D^\alpha u \in L_{2, \delta}$ ($j = 0, 1, \dots, r$) и $D_i D^\alpha u \in L_{2, \delta}$ ($i = 1, \dots, n$) при $|\alpha| \leq m$. Тогда для любых $u \in \phi_m(P, \delta)$, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $|\beta| = m+1$ и $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} P(x, D)(D^\beta u)_\varepsilon &= P(x, D)(D^\beta u_\varepsilon) = D^\beta [P(x, D)u_\varepsilon] \\ &= \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^r C_\beta^\gamma D^\gamma a_j(x) P_j(D) D^{\beta-\gamma} u_\varepsilon = D^\beta [P(x, D)u]_\varepsilon \\ &\quad + \sum_{j=0}^r D^\beta \int [a_j(x) - a_j(y)] [P_j(D)u](y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy \\ &\quad - \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^r C_\beta^\gamma D^\gamma a_j(x) P_j(D) D^{\beta-\gamma} u_\varepsilon \end{aligned}$$

Так как $P(x, D)u = 0$, то отсюда получаем

$$\begin{aligned} P(x, D)(D^\beta u)_\varepsilon &= \sum_{j=0}^r D^\beta \int [a_j(x) - a_j(y)] [P_j(D)u](y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy \\ (2.2) \quad &- \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^r C_\beta^\gamma D^\gamma a_j(x) P_j(D) D^{\beta-\gamma} u_\varepsilon \quad \forall u \in \phi_m(P, \delta). \end{aligned}$$

Отсюда имеем для произвольных $u \in \phi_m(P, \delta)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $|\beta| = m+1$

$$\begin{aligned} P(x, D)[(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}] &= \sum_{j=0}^r D^\beta \int [a_j(x) - a_j(y)] [P_j(D)u](y) \\ (2.3) \quad &[\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)] dy - \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^r C_\beta^\gamma D^\gamma a_j(x) P_j(D) D^{\beta-\gamma} [u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}]. \end{aligned}$$

Так как $u \in W_\delta^m(P_0)$, то в силу леммы 1.2 $P_j(D) D^{\beta-\gamma} u \in L_{2, \delta}$ для любого $0 \neq \gamma \leq \beta$ и для всех $j = 0, 1, \dots, r$. Поэтому отсюда и из ограниченности коэффициентов $\{D^\gamma(x)\}$ следует, что при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$

$$(2.4) \quad \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^r C_\beta^\gamma \| [D^\gamma a_j(x)] P_j(D) D^{\beta-\gamma} [u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}] \|_{L_{2, \delta}} \rightarrow 0.$$

Для оценки первого слагаемого правой части (2.3), предположим, например, что $\beta_1 \neq 0$, представим вектор β в виде $\beta = \alpha + e$, где $|\alpha| = m$, $e = (1, 0, \dots, 0)$

и положим $z = x - y$. Тогда для первого слагаемого правой части (2.3) имеем (также $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2, \delta}$),

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^r \|D^\beta \int [a_j(x) - a_j(y)] [P_j(D)u](y) [\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_1}(x-z)] dy\| \\
 &= \sum_{j=0}^r \|D_1 D^\alpha \int \{[a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)] [P_j(D)u](x - \varepsilon_1 z) - \\
 &\quad - [a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)] [P_j(D)u](x - \varepsilon_2 z)\} \varphi(x) dx\| \\
 &\leq \sum_{j=0}^r \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} C_\alpha^\gamma \|D_1 \int \{D^\gamma [a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)] [P_j(D)D^{\alpha-\gamma}u](x - \varepsilon_1 z) - \\
 &\quad - D^\gamma [a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)] [P_j(D)D^{\alpha-\gamma}u](x - \varepsilon_2 z)\} \varphi(x) dx\| \\
 &\quad + \sum_{j=0}^r \|D_1 \int \{[a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)] [P_j(D)u](x - \varepsilon_1 z) - \\
 &\quad - [a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)] [P_j(D)D^\alpha u](x - \varepsilon_2 z)\} \varphi(x) dx\| = A_1 + A_2.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Так как $P_j(D)D^{\alpha-\gamma}u$, $P_j(D)D^{\alpha-\gamma+\varepsilon}u \in L_2, \delta$ при $0 \neq \gamma \leq \alpha$, то для слагаемого A_1 с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 A_1 &\leq \sum_{j=0}^r \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} C_\alpha^\gamma \{ \|\int [D_1 D^\gamma (a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)) (P_j(D)D^{\alpha-\gamma}u)(x - \varepsilon_1 z)] - \\
 &\quad - D_1 D^\gamma (a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)) (P_j(D)D^{\alpha-\gamma}u)(x - \varepsilon_2 z)] \varphi(x) dx\| \\
 &\quad + \|\int [D^\gamma (a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)) (P_j(D)D^{\alpha-\gamma+\varepsilon}u)(x - \varepsilon_1 z) - \\
 &\quad - D^\gamma (a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)) (P_j(D)D^{\alpha-\gamma+\varepsilon}u)(x - \varepsilon_2 z)] \varphi(x) dx\| \} \\
 &= \sum_{j=0}^r \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} C_\alpha^\gamma \{ \|\int [D_1 D^\gamma a_j(x) - D_1 D^\gamma a_j(y)] [P_j(D)D^{\alpha-\gamma}u](y) \\
 &\quad [\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)] dy\| \\
 &\quad + \|\int [D^\gamma a_j(x) - D^\gamma a_j(y)] [P_j(D)D^{\alpha-\gamma+\varepsilon}u](y) [\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)] dy\| \} \\
 &\leq C_1 \varepsilon_2 \sum_{j=0}^r \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \{ \|\int |P_j(D)D^{\alpha-\gamma}u|(y) |\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)| dy\| \\
 &\quad + \|\int |P_j(D)D^{\alpha-\gamma+\varepsilon}u|(y) |\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)| dy\| \}
 \end{aligned}$$

Так как при $z = y \in \text{supp } \varphi_{\varepsilon_2}$ с некоторой постоянной $C_2 > 0$ $|D^\gamma a_j(x) - D^\gamma a_j(y)| \leq C_2 \varepsilon_2$, то в итоге получаем $A_1 \leq C_3 \varepsilon_2$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$, следовательно $A_1 \rightarrow 0$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \rightarrow 0$.

Для слагаемого A_2 имеем

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \sum_{j=0}^r \|D_1 \int [a_j(x) - a_j(y)] [P_j(D)D^\alpha u](y) [\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)] dy\| \\
 &\leq \sum_{j=0}^r \left\| \int D_1 a_j(x) [P_j(D)D^\alpha u](y) [\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)] dy \right\| \\
 &+ \left\| \int [a_j(x) - a_j(y)] [P_j(D)D^\alpha u](y) \left[\frac{1}{\varepsilon_1} (D_1 \varphi)_{\varepsilon_1}(x-y) - \frac{1}{\varepsilon_2} (D_1 \varphi)_{\varepsilon_2}(x-y) \right] dy \right\| \\
 (2.6) \qquad &\equiv A_{2,1} + A_{2,2}.
 \end{aligned}$$

Так как $P_j(D)D^\alpha u \in L_2$, и коэффициенты $\{D_1 a_j\}$ ограничены в E^n , то для слагаемого $A_{2,1}$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$ и при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 A_{2,1} &= \sum_{j=0}^r \| [D_1 a_j(x)] [(P_j(D)D^\alpha u)_{\varepsilon_1} - (P_j(D)D^\alpha u)_{\varepsilon_2}] \| \\
 (2.7) \qquad &\leq C_3 \sum_{j=0}^r \| P_j(D)D^\alpha u_{\varepsilon_1} - (P_j(D)D^\alpha u)_{\varepsilon_2} \| \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Положим для каждого $j = 0, 1, \dots, r$

$$b_{j, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(x, z) = \frac{a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)}{\varepsilon_1} - \frac{a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)}{\varepsilon_2}$$

тогда для $A_{2,2}$ можем записать

$$\begin{aligned}
 A_{2,2} &= \sum_{j=0}^r \left\| \int_{S_1} \left\{ \frac{a(x) - a(x - \varepsilon_1 z)}{\varepsilon_1} [P_j(D)D^\alpha u](x - \varepsilon_1 z) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{a(x) - a(x - \varepsilon_2 z)}{\varepsilon_2} [P_j(D)D^\alpha u](x - \varepsilon_2 z) \right\} (D_1 \varphi)(x) dx \right\| \\
 &\leq \sum_{j=0}^r \left\| \int_{S_1} b_{j, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(x, z) [P_j(D)D^\alpha u](x - \varepsilon_1 z) (D_1 \varphi)(x) dx \right\| \\
 &\quad + \sum_{j=0}^r \left\| \int_{S_1} \frac{a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)}{\varepsilon_2} [P_j(D)D^\alpha u](x - \varepsilon_1 z) \right. \\
 (2.8) \qquad &\quad \left. - P_j(D)D^\alpha u(x - \varepsilon_2 z) \right\| (D_1 \varphi)(x) dx \| \equiv A'_{2,2} + A''_{2,2}.
 \end{aligned}$$

Так как $\sup_{x \in \Omega} \sup_{z \in S_1} b_{j, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(x, z) \rightarrow 0$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \rightarrow 0$, то $A'_{2,2} \rightarrow 0$ при $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

Для оценки слагаемого $A''_{2,2}$, отметим, что в силу гладкости коэффициентов $\{a_j\}$ и условия $a_j(x) = \text{const}_j$ при $x \in E^n \setminus \Omega$, выражения $\{a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)\}/\varepsilon_2$

ограничены числом, не зависящим от j и от ε_2 . Поэтому, в силу свойства (1.6^o) весовой функции g существуют положительные постоянные C_4, C_5, C_6 такие, что

$$\begin{aligned} A_{2,2}'' &\leq C_4 \sum_{j=0}^r \left\| \int_{S_1} \{ |P_j(D)| [D^\alpha u(x - \varepsilon_1 z) - D^\alpha u(x - \varepsilon_2 z)] (D_1 \varphi)(x) | dx \} g_\delta(x) \right\|_{L_2} \\ &\leq C_4 \sum_{j=0}^r \left\| \int_{S_1} \{ |P_j(D) D^\alpha u g_\delta|(x - \varepsilon_1 z) - |P_j(D) D^\alpha u g_\delta|(x - \varepsilon_2 z) \right. \\ &\quad \left. + |P_j(D) D^\alpha u g_\delta|(x - \varepsilon_1 z) [g_\delta(x) - g_\delta(x - \varepsilon_1 z)] \right. \\ &\quad \left. - [P_j(D) D^\alpha u g_\delta](x - \varepsilon_1 z) [g_\delta(x) - g_\delta(x - \varepsilon_2 z)] \} |D_1 \varphi(x)| dx \right\|_{L_2} \\ &\leq C_4 \left\{ \sum_{j=0}^r \left\| \int_{S_1} \{ |P_j(D) D^\alpha u g_\delta|(x - \varepsilon_1 z) - |P_j(D) D^\alpha u g_\delta|(x - \varepsilon_2 z) |D_1 \varphi(x)| dx \right\|_{L_2} \right. \\ &\quad \left. + C_5 \varepsilon_1 \left\| \int_{S_1} \{ |P_j(D) D^\alpha u| g_\delta|(x - \varepsilon_1 z) |D_1 \varphi(x)| dx \right\|_{L_2} \right. \\ &\quad \left. + C_5 \varepsilon_2 \left\| \int_{S_1} \{ |P_j(D) D^\alpha u| g_\delta|(x - \varepsilon_2 z) |D_1 \varphi(x)| dx \right\|_{L_2} \right\} \\ &\leq C_4 \sum_{j=0}^r \{ \sup_{|s| \leq 1} \| |P_j(D) D^\alpha u g_\delta|(\cdot - \varepsilon_1 z) - |P_j(D) D^\alpha u g_\delta|(\cdot - \varepsilon_2 z) \|_{L_2} \\ &\quad + \varepsilon_2 \| |P_j(D) D^\alpha u| \|_{L_{2,4}} \}. \end{aligned}$$

В силу непрерывности в среднем функций из класса L_2 последнее выражение $\rightarrow 0$, следовательно, $A_{2,2}'' \rightarrow 0$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \rightarrow 0$. Отсюда и из соотношений (2.2) - (2.8) получаем, что $\|P(x, D)[(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}]\|_{L_{2,4}} \rightarrow 0$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \rightarrow 0$.

Так как $[(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}] \in W_\delta(P_0)$, то отсюда с некоторой постоянной $C_7 > 0$ в силу леммы 1.3 получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{|\beta|=m+1} \| (D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2} \|_{W_\delta(P_0)} \\ &\leq C_7 \sum_{|\beta|=m+1} \{ \|P(x, D)[(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}]\|_{L_{2,4}} + \| (D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2} \|_{L_{2,4}} \}. \end{aligned}$$

Так как последнее выражение стремится к нулю при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \rightarrow 0$, то это доказывает лемму 2.4.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 3.1. Пусть $P \in H(\Omega)$, $P_j(\xi)/P_0(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ ($j = 1, \dots, r$) (см. (1.1)), $m \in \mathbb{N}_0^n$ и $\delta \in (0, \delta_0)$. Тогда $\phi_m(P, \delta) \subset W_\delta^{m+1}(P_0)$, т.е. существует число $C > 0$ такое, что

$$\|u\|_{W_\delta^{m+1}(P_0)} \leq C \|u\|_{W_\delta^m(P_0)} \text{ для всех } u \in \phi_m(P, \delta).$$

Доказательство. Так как для произвольных $m \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \in \mathbb{N}_0$: $|\beta| = m+1$ $\epsilon > 0$ и $u \in \phi_m(P, \delta)$ (см. доказательство леммы 2.4)

$$\begin{aligned} P(x, D)(D^\beta u)_\epsilon &= \sum_{j=0}^r D^\beta \int |\alpha_j(x) - \alpha_j(y)| [P_j(D)u](y) \varphi_\epsilon(x-y) dy \\ &\quad - \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^r C_\beta^\gamma D_\gamma \alpha_j(x) [P_j(D)D^{\beta-\gamma} u]_\epsilon, \end{aligned}$$

то применяя неравенство Юнга, лемму 2.3, тот факт, что $P \in H(\Omega)$ и свойства (1.5) - (1.6) функции g получим с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\|P(x, D)(D^\beta u)_\epsilon\|_{L_{2,\epsilon}} \leq C_1 \|u\|_{W_\delta^m(P_0)}.$$

Так как $(D^\beta u)_\epsilon \in W_\delta(P_0)$, то в силу леммы 1.3 с некоторыми положительными постоянными C_2, C_3, C_4 имеем

$$\begin{aligned} \|P_0(D)(D^\beta u)_\epsilon\|_{L_{2,\epsilon}} + \|(D^\beta u)_\epsilon\|_{L_{2,\epsilon}} &\leq C_2 \left[\sum_{|\beta|=m+1} \|P(x, D)(D^\beta u)_\epsilon\|_{L_{2,\epsilon}} + \|(D^\beta u)_\epsilon\|_{L_{2,\epsilon}} \right] \\ (3.1) \quad &\leq C_3 [\|u\|_{W_\delta^m(P_0)} + \sum_{|\beta|=m+1} \|(D^\beta u)_\epsilon\|_{L_{2,\epsilon}}] \leq C_4 \|u\|_{W_\delta^{m+1}(P_0)}, \end{aligned}$$

т.е. множество u_ϵ равномерно относительно ϵ ограничено в $W_\delta^{m+1}(P_0)$.

Так как в силу леммы 2.4 $\{u_\epsilon\}$ фундаментально в $W_\delta^{m+1}(P_0)$ и $u_\epsilon \rightarrow u$ по норме $L_{2,\epsilon}$, то в силу замкнутости оператора обобщенного дифференцирования на функцию u можно применять оператор $D^\beta P_0(D)$, при этом $D^\beta P_0(D)u \in L_{2,\epsilon}$ при всех $\beta \in \mathbb{N}_0$: $|\beta| = m+1$. Тогда из оценки (3.1) непосредственно получаем утверждение теоремы. $\square$

Положим $W_\delta^\infty = \bigcap_{m=0}^\infty W_\delta^m$. Так как, очевидно, $W_\delta^m \subset W^m(\omega)$ $m = 0, 1, \dots$, для любой ограниченной области $\omega \in \mathbb{E}^n$, то по теореме 10.4 работы [20] $W_\delta^\infty \subset C^\infty(\omega)$. Отсюда и из теоремы 3.1 получаем основной результат настоящей заметки.

Теорема 3.2. Пусть $P \in H(\Omega)$, и $\delta \in (0, \delta_0)$, тогда $N(P, \delta) \equiv \{u \in W_\delta(P_0), P(x, D)u = 0\} \subset \bigcap_k W_\delta^k(P_0) = \bigcap_k W_\delta^k \subset C_0^\infty$.

Abstract. A linear differential operator $P(x, D) = P(x_1, \dots, x_n, D_1, \dots, D_n) = \sum \gamma_\alpha(x) D^\alpha$ with coefficients $\{\gamma_\alpha(x)\}$ defined in E^n is called formally almost hypoelliptic in E^n if all the derivatives $D_\xi^s P(x, \xi)$ can be estimated by $P(x, \xi)$, and the operator $P(x, D)$ has uniformly constant power in E^n . In the present paper, we prove that if $P(x, D)$ is a formally almost hypoelliptic operator, then all solutions of equation $P(x, D)u = 0$, which together with some of their derivatives are square integrable with a specified exponential weight, are infinitely differentiable functions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Peetre, *Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels*, Thèse - Lund. (1959).
- [2] L. Hörmander, *The Analysis of linear Partial Differential Operators*. 2, Springer - Verlag (1983).
- [3] L. Hörmander, *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math. 94 (1955).
- [4] L. Ehrenpreis, *Solutions of some problems of division*, 4th, Amer. J. Math. 82, 522 - 588 (1960).
- [5] B. Malgrange, *"Sur un class d'opérateurs différentiels hypoelliptiques"*, Bull. Math. France, 85, 283 - 306 (1957).
- [6] L. Gårding, B. Malgrange, *"Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques"*, Math. Scand. 9, 5 - 21 (1961).
- [7] L. Hörmander, *"On interior regularity of the solutions of partial differential equations"*, Comm Pure Appl. Math. 11, 197 - 218 (1958).
- [8] M. Taylor, *"Gelfand theory of pseudodifferential operators and hypoelliptic operators"*, Trans. Amer. Math. Soc. 158, 495 - 510 (1971).
- [9] G. Gudmundsdóttir, *"Global properties of differential operators of constant strength"*, Ark. Mat. 15, 169 - 198 (1977).
- [10] Е. А. Горин, *"Частично гиповзаключительные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами"*, Сиб. Мат. Журнал, 3, no. 4, 500 - 526 (1962).
- [11] Ю. В. Крорин, *"О субэллиптических операторах"*, УМН, 30, no. 2, 57 - 114 (1975).
- [12] В. И. Вуринский, *"Аналог теорем Л. Хёрмандера о гиповзаключительности для функций стремящихся к нулю на бесконечности"*, Сб. докладов 7-ого Советско-Чехословацкого симпозиума, Ереван, 63 - 67 (1982).
- [13] H. Lewy, *"An example of a smooth linear partial differential equation without solution"*, Ann. of Math. 66, 155 - 158 (1957).
- [14] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. 1, Springer - Verlag (1982).
- [15] G. G. Kazarян, *"On almost hypoelliptic polynomials"*, Doklady Ross. Acad. Nauk, Math. 898, no. 6, 701 - 703 (2004).
- [16] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, *"Об одном классе почти гиповзаключительных операторов"*, Известия НАН Армении, Математика, 41, no. 6, стр. 39 - 56 (2008).
- [17] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, *"On infinite differentiability of solutions of nonhomogeneous almost hypoelliptic equations"*, Eurasian Math. Journal, 1, no. 1, 54 - 72 (2010).
- [18] Г. Г. Казарян, *"О формально почти гиповзаключительных многочленах постоянной мощности"*, Известия НАН Армении, Математика, 50, no. 6, 48 - 62 (2015).
- [19] V. N. Margaryan, H. G. Ghazaryan, *"Almost hypoelliptic operators with constant powers"*, Eurasian Math. Journal,
- [20] О. В. Ветсов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложенки*, Москва, Наука, Физматгиз (1996).

Поступила 10 февраля 2016

ON AN EQUIVALENCY OF RARE DIFFERENTIATION BASES OF RECTANGLES

M. H. SAFARYAN

Yerevan State University, Armenia

Institute of Mathematics of Armenian National Academy of Sciences

King Abdullah University of Science & Technology (KAUST), Thuwal, Saudi Arabia

E-mail: mher.safaryan@gmail.com

Abstract. The paper considers differentiation properties of density bases formed of bounded open sets. We prove that two quasi-equivalent subbases of some density basis differentiate the same class of non-negative functions. Applications for bases formed of rectangles are discussed.

MSC2010 numbers: 42B08, 42B25.

Keywords: dyadic rectangles; differentiation basis; rare basis.

1. INTRODUCTION

Let $\mathcal{R}^n$ be the family of open rectangles $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ in $\mathbb{R}^n$ and $\mathcal{R}_{\text{dyadic}}^n \subset \mathcal{R}^n$ be the family of dyadic rectangles of the form

$$(1.1) \quad \prod_{k=1}^n \left(\frac{j_k - 1}{2^{m_k}}, \frac{j_k}{2^{m_k}} \right), \quad j_k, m_k \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

For a given set $E \subset \mathbb{R}^n$ we denote

$$\text{diam}(E) = \sup_{x, y \in E} \|x - y\|.$$

Definition 1.1. A family $\mathcal{M}$ of bounded open sets from $\mathbb{R}^n$ is said to be a differentiation basis (or simply basis), if for any point $x \in \mathbb{R}^n$ there exists a sequence of sets $E_k \in \mathcal{M}$ such that $x \in E_k$, $k = 1, 2, \dots$ and $\text{diam}(E_k) \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$.

Let $\mathcal{M}$ be a differentiation basis and $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ be the space of locally integrable functions:

$$L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{f: f \in L(K) \text{ for any compact } K \subset \mathbb{R}^n\}.$$

For any function $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ we define

$$\delta_{\mathcal{M}}(x, f) = \limsup_{\text{diam}(E) \rightarrow 0, x \in E \in \mathcal{M}} \left| \frac{1}{|E|} \int_E f(t) dt - f(x) \right|.$$

The integral of a function $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ is said to be differentiable at a point $x \in \mathbb{R}^n$ with respect to the basis $\mathcal{M}$, if $\delta_{\mathcal{M}}(x, f) = 0$. The integral of a function is said to

be differentiable with respect to the basis $\mathcal{M}$ if it is differentiable at almost every point. Consider the following classes of functions

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \{f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n) : \delta_{\mathcal{M}}(x, f) = 0 \text{ almost everywhere}\},$$

$$\mathcal{F}^+(\mathcal{M}) = \{f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n) : f(x) \geq 0, \delta_{\mathcal{M}}(x, f) = 0 \text{ almost everywhere}\}.$$

Let $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ be a convex function. Denote by $\Phi(L)(\mathbb{R}^n)$ the class of measurable functions f defined on $\mathbb{R}^n$ such that $\Phi(|f|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. If Φ satisfies the Δ_2 -condition $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$, then $\Phi(L)$ turns to be an Orlicz space with the norm

$$\|f\|_{\Phi} = \inf \left\{ c > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f|}{c} \right) \leq 1 \right\}.$$

The following classical theorems determine the optimal Orlicz space, which functions have a.e. differentiable integrals with respect to the entire family of rectangles $\mathcal{R}^n$ is the space

$$L(1 + \log^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n),$$

corresponding to the case $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)^{n-1}$ ([1]).

Theorem A. (see [2]).

$$L(1 + \log^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}^n).$$

Theorem B. (see [6]). If the function Φ satisfies

$$\Phi(t) = o(t \log^{n-1} t) \text{ as } t \rightarrow \infty,$$

then $\Phi(L)(\mathbb{R}^n) \not\subset \mathcal{F}(\mathcal{R}^n)$. Moreover, there exists a positive function $f \in \Phi(L)(\mathbb{R}^n)$ such that $\delta_{\mathcal{R}^n}(x, f) = \infty$ everywhere.

Such theorems are valid also for the basis $\mathcal{R}_{dyadic}^n$. The first one trivially follows from embedding $L(1 + \log^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}^n) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}_{dyadic}^n)$. The second can be deduced from the following

Theorem C. (see [10] (also [11, 12])) $\mathcal{F}^+(\mathcal{R}_{dyadic}^n) = \mathcal{F}^+(\mathcal{R}^n)$.

Let $\Delta = \{\nu_k : k = 1, 2, \dots\}$ be an increasing sequence of positive integers. This sequence generates the rare basis $\mathcal{R}_{dyadic}^n(\Delta)$ of dyadic rectangles of the form (1.1) with $m_i \in \Delta, i = 1, 2, \dots, n$. This kind of bases first considered in the papers [8], [9], [7], [4]. A. Stoklosa [8] proved that the analogous of Saks theorem holds for any basis $\mathcal{R}_{dyadic}^n(\Delta)$ with an arbitrary Δ sequence. That means $L(1 + \log^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ is again the largest Orlicz space containing in $\mathcal{F}(\mathcal{R}_{dyadic}^n(\Delta))$. The necessary and sufficient condition for the equivalency of rare dyadic basis $\mathcal{R}_{dyadic}^n(\Delta)$ and complete dyadic basis $\mathcal{R}_{dyadic}^n$ is established in [4]. G. Oniani and T. Zerekidze [5] characterised translation invariant as well as net type bases formed of rectangles that are equivalent to the basis of all rectangles in the class of all non-negative functions. G. A. Karagulyan [3] proved some theorems, establishing an equivalency of some convergence conditions for multiple martingale sequences, those in particular imply some results of the papers [8], [9], [7].

Definition 1.2. A basis $\mathcal{M}$ is said to be density basis if $\mathcal{M}$ differentiates the integral of any characteristic function $\mathbb{I}_E$ of measurable set E :

$$\delta_{\mathcal{M}}(x, \mathbb{I}_E) = 0 \text{ at almost every } x \in \mathbb{R}^n.$$

We will say that the basis $\mathcal{M}$ differentiates a class of functions $\mathcal{F}$, if basis $\mathcal{M}$ differentiates the integrals of all functions of $\mathcal{F}$.

Theorem D. (see [1], III, Theorem 1.4) If $\mathcal{M}$ is a density basis, then it differentiates L^∞ .

Note that any subbasis $\mathcal{M}'$ of a density basis $\mathcal{M}$ is also density basis, since in this case $\delta_{\mathcal{M}'}(x, f) \leq \delta_{\mathcal{M}}(x, f)$ for any $x \in \mathbb{R}^n$ and $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 1.3. Let $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}$ be subbases. We will say that basis $\mathcal{M}_2$ is quasi-coverable by basis $\mathcal{M}_1$ (with respect to basis $\mathcal{M}$) if for any $R \in \mathcal{M}_2$ there exist $R_k \in \mathcal{M}_1$, $k = 1, 2, \dots, p$ and $R' \in \mathcal{M}$ such that

$$(1.2) \quad R \subseteq \bar{R} \subseteq R', \quad \bar{R} = \bigcup_{k=1}^p R_k$$

$$(1.3) \quad \text{diam}(R') \leq c \cdot \text{diam}(R), \quad |R'| \leq c |R_k|, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$(1.4) \quad \sum_{k=1}^p |R_k| \leq c |\bar{R}|, \quad |\bar{R}| \leq c |R|,$$

where constant $c \geq 1$ depends only on the bases $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ and $\mathcal{M}$. We will say two bases are quasi-equivalent if they are quasi-coverable with respect to each other.

In this paper we prove that quasi-equivalent subbases $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ of density basis $\mathcal{M}$ differentiate the same class of non-negative functions, namely $\mathcal{F}^+(\mathcal{M}_1) = \mathcal{F}^+(\mathcal{M}_2)$.

2. MAIN THEOREM

Theorem 2.1. Let $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ be subbases of density basis $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^n$. If the bases $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ are quasi-equivalent with respect to $\mathcal{M}$ then $\mathcal{F}^+(\mathcal{M}_1) = \mathcal{F}^+(\mathcal{M}_2)$.

Proof of Theorem. First, let us suppose that $\mathcal{F}^+(\mathcal{M}_1) \setminus \mathcal{F}^+(\mathcal{M}_2) \neq \emptyset$. That means there exists a non-negative function $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ such that

$$(2.1) \quad \delta_{\mathcal{M}_1}(x, f) = 0, \quad \text{a.e.},$$

$$(2.2) \quad \delta_{\mathcal{M}_2}(x, f) > 0, \quad x \in E_1,$$

where $|E_1| > 0$. From (2.2) it follows that there exist such positive numbers α and γ that the set

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \delta_{\mathcal{M}_2}(x, f) > \alpha, 0 \leq f(x) \leq \gamma\}$$

has positive measure. Set $f = f_\gamma + f^\gamma$, where

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } 0 \leq f(x) \leq \gamma, \\ 0, & \text{if } f(x) > \gamma. \end{cases}$$

Since $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}$ is differentiation basis, then it differentiates L^∞ and therefore differentiates $f_\gamma \in L^\infty$, namely we have $\delta_{\mathcal{M}_2}(x, f_\gamma) = 0$ almost everywhere. Denote by E_3 the subset of E_2 where $\delta_{\mathcal{M}_2}(x, f_\gamma) = 0$. Clearly $|E_3| = |E_2| > 0$. From this we can deduce that if $x \in E_3 \subset E_2$ then $\delta_{\mathcal{M}_2}(x, f) = \delta_{\mathcal{M}_2}(x, f^\gamma)$ and $f^\gamma(x) = 0$, since $0 \leq f(x) \leq \gamma$. Furthermore, using (2.1), we get set $E_4 \subset E_3$ of positive measure such that for any $x \in E_4$

$$(2.3) \quad \delta_{\mathcal{M}_2}(x, f^\gamma) > \alpha, \quad f^\gamma(x) = 0, \quad \delta_{\mathcal{M}_1}(x, f^\gamma) = 0.$$

According to (2.3) for any $x \in E_4$ one can choose a number $\delta(x) > 0$ such that the conditions $x \in R \in \mathcal{M}_1$, $\text{diam}(R) < \delta(x)$, imply

$$(2.4) \quad \frac{1}{|R|} \int_R f^\gamma(u) du < \eta,$$

where $\eta > 0$ will be conveniently chosen later. For some $\delta > 0$ the set $G = \{x \in E_4 : \delta(x) \geq \delta\}$ has positive measure. Thus, we have

$$(2.5) \quad \delta_{\mathcal{M}_2}(x, f^\gamma) > \alpha, \quad f^\gamma(x) = 0, \quad \text{if } x \in G,$$

$$(2.6) \quad \frac{1}{|R|} \int_R f^\gamma(u) du < \eta, \quad \text{if } R \cap G \neq \emptyset, R \in \mathcal{M}_1, \text{diam}(R) < \delta.$$

Since $\mathcal{M}$ differentiates $\mathbb{I}_G$, hence we may fix $x_0 \in G$ with

$$\lim_{\text{diam}(R) \rightarrow 0, x_0 \in R \in \mathcal{M}} \frac{|R \cap G|}{|R|} = 1,$$

which means that for any $\varepsilon > 0$ there exists $\sigma(\varepsilon)$ such that $\text{diam}(R) < \sigma(\varepsilon)$ and $x_0 \in R \in \mathcal{M}$ imply $|R \cap G| > (1 - \varepsilon)|R|$. Using this relation and (2.5), we can fix R such that

$$(2.7) \quad x_0 \in R \in \mathcal{M}_2, \quad \text{diam}(R) < \frac{1}{c} \min \left(\sigma \left(\frac{1}{c} \right), \delta \right),$$

$$(2.8) \quad \frac{1}{|R|} \int_R f^\gamma(u) du > \alpha,$$

As we have that basis $\mathcal{M}_2$ is quasi-coverable with $\mathcal{M}_1$, then for $R \in \mathcal{M}_2$ we can fix $R' \in \mathcal{M}$ and $R_k \in \mathcal{M}_1$, $k = 1, 2, \dots, p$ such that (1.2), (1.3) and (1.4) hold. From this and (2.7) we get

$$x_0 \in R' \in \mathcal{M}, \quad \text{diam}(R') < \sigma \left(\frac{1}{c} \right),$$

which implies

$$(2.9) \quad |R' \cap G| > \left(1 - \frac{1}{c}\right) |R'|.$$

which together with (1.3) gives that $R_k \cap G \neq \emptyset$, $k = 1, 2, \dots, p$. Now, since each R_k contains some point from G , we can use (2.6) and come to contradiction against (2.8). Namely, combining (2.6), (2.7) and (1.3) we have $R_k \cap G \neq \emptyset$, $R_k \in \mathcal{M}_1$, $\text{diam}(R_k) < \delta$ and therefore

$$\frac{1}{|R_k|} \int_{R_k} f^*(u) du < \eta, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

which together with (1.4) implies

$$\int_R f^*(u) du \leq \int_R \sum_{k=1}^p \chi_{R_k}(u) f^*(u) du = \sum_{k=1}^p \int_{R_k} f^*(u) du < \eta \sum_k |R_k| \leq \eta c |R|$$

and

$$\frac{1}{|R|} \int_R f^*(u) du < \eta c.$$

On the other hand, from non-negativity of function f^* and from (2.8), (1.4) follows that

$$\frac{1}{|R|} \int_R f^*(u) du \geq \frac{|R|}{|R|} \cdot \frac{1}{|R|} \int_R f^*(u) du > \frac{\alpha}{c},$$

which is impossible if choose $\eta < \frac{\alpha}{c}$. Thus we have proved that $\mathcal{F}^+(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{F}^+(\mathcal{M}_2)$. In the same way we can prove the inverse inclusion $\mathcal{F}^+(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{F}^+(\mathcal{M}_1)$. $\square$

3. APPLICATIONS

It is well known that the basis of all open rectangles $\mathcal{R}^n$ differentiates $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, i.e. it is a density basis. Therefore we can apply the theorem when $\mathcal{M} = \mathcal{R}^n$ and get criteria for two bases formed of rectangles differentiating the same class of non-negative functions:

Corollary 3.1. *If bases $\mathcal{R}_1$ and $\mathcal{R}_2$ formed of rectangles in $\mathbb{R}^n$ are quasi-equivalent, then $\mathcal{F}^+(\mathcal{R}_1) = \mathcal{F}^+(\mathcal{R}_2)$.*

Let $\Omega = \{\omega_k^i\}_{i,k=1}^{n,\infty}$ be a finite family of sequences with

$$(3.1) \quad \omega_k^i \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty \text{ for } i = 1, 2, \dots, n.$$

Define the basis $\mathcal{R}_\Omega$ as a family of rectangles of the form

$$\prod_{i=1}^n ((m_i - 1)\omega_{k_i}^i, m_i\omega_{k_i}^i), \quad m_i \in \mathbb{Z}, k_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n.$$

and the basis $\bar{\mathcal{R}}_\Omega$ as a family of rectangles with side lengths l_i , $i = 1, 2, \dots, n$ satisfying $c_1 \cdot \omega_{k_i}^i \leq l_i \leq c_2 \cdot \omega_{k_i}^i$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Then, it can be shown that the bases $\mathcal{R}_\Omega$ and $\bar{\mathcal{R}}_\Omega$ are quasi-equivalent, therefore

Corollary 3.2. *For any Ω with (3.1) $\mathcal{F}^+(\bar{\mathcal{R}}_\Omega) = \mathcal{F}^+(\mathcal{R}_\Omega)$.*

Corollary 3.3. If the family of sequences Ω satisfies

$$(3.2) \quad \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\omega_k^i}{\omega_{k+1}^i} < \infty,$$

then

$$(3.3) \quad \mathcal{F}^+(\mathcal{R}_\Omega) = \mathcal{F}^+(\mathcal{R}^n).$$

Proof. Denote by γ the finite quantity of the left hand side of (3.2). Then for coefficients $c_1 = 1$ and $c_2 = \gamma + 1$ we have $\mathcal{F}^+(\mathcal{R}_\Omega) = \mathcal{F}^+(\mathcal{R}^n)$. Hence from the theorem we deduce (3.3). $\square$

Finally, if we take $\omega_k^i = 2^{-\nu_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$, where $\Delta = \{\nu_k : k \geq 1\}$ is an increasing sequence of positive integers, the basis $\mathcal{R}_\Omega$ becomes the basis of all dyadic rectangles $\mathcal{R}_{\text{dyadic}}^n(\Delta)$ corresponding to the sequence Δ .

Corollary 3.4. If the sequence $\Delta = \{\nu_k : k \geq 1\}$ satisfies

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (\nu_{k+1} - \nu_k) < \infty$$

then $\mathcal{F}^+(\mathcal{R}_{\text{dyadic}}^n(\Delta)) = \mathcal{F}^+(\mathcal{R}^n)$. Particularly, if we take $\Delta = \mathbb{N}$, we get Theorem C.

Acknowledgement. Thanks to the referees for useful remarks.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Guzman, *Differentiation of Integrals in $\mathbb{R}^n$* , Springer-Verlag (1975).
- [2] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, "Note of differentiability of multiple integrals", *Fund. Math.*, **26**, 217 – 237 (1935).
- [3] G. A. Karagulyan, "On equivalency of martingales and related problems", *Izvestia NAN Armenii* (English translation in *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*), **48**, no. 2, 81 – 65 (2013).
- [4] G. A. Karagulyan, D. A. Karagulyan, M. H. Safaryan, "On an equivalence for differentiation bases of dyadic rectangles", *Colloq. Math.* **3506**, 295 – 307 (2017).
- [5] G. Oniani, T. Zarekidze, "On differential bases formed of intervals", *Georgian Math. J.* **4**, no. 1, 81 – 100 (1997).
- [6] S. Saks, "Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral", *Fund. Math.*, **22**, 287 – 291 (1934).
- [7] K. Hare and A. Stoicoles, "On weak type inequalities for rare maximal functions", *Colloq. Math.*, **83**, no. 2, 173 – 182 (2000).
- [8] A. Stoicoles, "On weak type inequalities for rare maximal function in $\mathbb{R}^n$ ", *Colloq. Math.*, **104**, no. 2, 311 – 315 (2006).
- [9] P. A. Hagelstein, "A note on rare maximal functions", *Colloq. Math.* **95**, no. 1, 49 – 51 (2003).
- [10] T. Sh. Zarekidze, "Convergence of multiple Fourier-Haar series and strong differentiability of integrals" [in Russian], *Trudy Tbiliss. Mat. inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzii. SSR*, **78**, 80 – 99 (1993).
- [11] T. Sh. Zarekidze, "On some subbases of a strong differential basis", *Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep.* **35**, 31 – 33 (2009).
- [12] T. Sh. Zarekidze, "On the equivalence and nonequivalence of some differential bases", *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **133**, 166 – 169 (2003).

Поступила 13 марта 2017

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

А. Х. ХАЧАТРЯН, Х. А. ХАЧАТРЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

Институт Математики НАН РА¹

Национальный Аграрный Университет Армении

E-mail: aghavard59@mail.ru, Khach82@rambler.ru, hmayakk@bk.ru

Аннотация. Работа посвящена вопросу разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения типа Урысона. Указанное уравнение имеет применение в кинетической теории газов и выводится из модельного уравнения Больцмана. Доказана теорема существования однопараметрического семейства положительных решений в пространстве функций, имеющих линейный рост в бесконечности. Кроме того для каждого представителя из этого семейства найдена точная асимптотическая формула в бесконечности. Получены двусторонние оценки решений, а также предложены итерационный способ построения решений. В конце работы приведены примеры функций, описывающих нелинейность, в удовлетворяющих условиям теоремы.

MSC2010 number: 35Q20, 82B40.

Ключевые слова: уравнение Урысона; однопараметрическое семейство решений; итерации; нелинейность; монотонность; поточечная сходимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается следующее нелинейное интегральное уравнение Урысона

$$(1.1) \quad \varphi(x) = \int_0^{\infty} U(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$$

относительно искомой измеримой и нешестивенной функции $\varphi(x)$. Здесь

$$(1.2) \quad U(x, t, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-t)^2}{p^2}} + \varepsilon e^{-\frac{(x+t)^2}{p^2}} \right) \frac{e^{-p^2}}{p} z(1+Q(z)) e^{-p^2(2Q(z)+Q^2(z))} dp,$$

$(x, t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, где $Q(z)$ – определенная на $[0, +\infty)$ непрерывная вещественнозначная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта No. SCS 15T-1A033

- а) существует число $A > 0$ такое, что $Q(z) \geq 0$, $z \in [A, +\infty)$,
 $Q \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $m_2(Q) = \int_0^\infty z^2 Q(z) dz < +\infty$.
 б) функция $zQ(z)$ убывает по z на $[A, +\infty)$, а функция $z + zQ(z)$ возрастает по z на $[A, +\infty)$.

Уравнением (1.1)-(1.2) описывается задача течения газа в полупространстве $z > 0$, ограниченном твердой плоской стенкой $z = 0$. Уравнение (1.1)-(1.2) можно вывести из стационарного модельного нелинейного уравнения Вольтерра в рамках модифицированной модели Вхатигара-Гросса-Крука [1]-[3].

Искомая функция $\varphi(z)$ играет роль скорости газа, $0 \leq \varepsilon < 1$ -коэффициент аккомодации. Случай $\varepsilon = 0$ соответствует чисто диффузному отражению, $\varepsilon \neq 0$ соответствует случаю совместного учета диффузного и зеркального отражения. Заметим, что при $Q(z) = 0$ уравнение (1.1)-(1.2) становится линейным интегральным уравнением с суммарно-разностным ядром. Настоящая работа посвящена изучению и решению уравнения Урысона (1.1)-(1.2). Доказывается, что при условиях а)-б) уравнение (1.1)-(1.2) обладает однопараметрическим семейством положительных решений, имеющих линейный рост в бесконечности. Более того для каждого решения из этого семейства найдена точная асимптотическая формула в бесконечности. Получены двусторонние оценки решения, также описан конструктивный способ построения решения. В конце работы приведены примеры функций, описывающих нелинейность и удовлетворяющих условиям теоремы.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Нижне докажем, что при условиях а)-б) уравнение (1.1)-(1.2) обладает однопараметрическим семейством положительных решений с асимптотикой $O(x)$. Для получения основного результата нам понадобятся некоторые новые вспомогательные факты. По пунктам приведем доказательство этих фактов.

Пункт 1. Сперва убедимся, что при каждом фиксированном $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функция $U(x, t, z)$ монотонно возрастает по z на множестве $[A, +\infty)$.

Действительно, если обозначать через $\chi(p, z)$ следующую функцию

$$\chi(p, z) = z(1 + Q(z))e^{-p^2(2Q(z) + Q^2(z))},$$

определенную на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, то в силу условий а)-б) нетрудно убедиться, что $\chi(p, z)$ по z возрастает на $[A, +\infty)$. На самом деле, пусть $z_1, z_2 \in [A, +\infty)$ и $z_1 > z_2$. Сперва проверим, что $Q(z_1) \leq Q(z_2)$. Поскольку $zQ(z)$ по z убывает на $[A, +\infty)$, то из соотношения $0 \geq z_1 Q(z_1) - z_2 Q(z_2) = z_1(Q(z_1) - Q(z_2)) + (z_1 - z_2)Q(z_2)$

и в силу неотрицательности функции $Q(x)$ на $[A, +\infty)$ получим $Q(x_1) \leq Q(x_2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \chi(p, x_1) - \chi(p, x_2) &\geq x_1(1+Q(x_1))e^{-p^2(2Q(x_1)+Q^2(x_1))} - x_2(1+Q(x_2))e^{-p^2(2Q(x_2)+Q^2(x_2))} = \\ &= e^{-p^2(2Q(x_2)+Q^2(x_2))}(x_1 - x_2 + x_1Q(x_1) - x_2Q(x_2)) \geq 0, \end{aligned}$$

ибо $x + xQ(x)$ по x возрастает на $[A, +\infty)$.

Из представления (1.2) с учетом монотонности функции $\chi(p, x)$ по x на $[A, +\infty)$, следует, что

$$U(x, t, x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } [A, +\infty).$$

Пункт 2. Наряду с уравнением (1.1) (с ядром (1.2)) рассмотрим следующее вспомогательное однородное уравнение Вигнера-Хопфа:

$$(2.1) \quad S(x) = \int_0^{\infty} u_0(x-t)S(t)dt, \quad x \geq 0,$$

с начальным условием

$$(2.2) \quad S(0) = 1,$$

относительно искомой функции $S(x)$, где

$$(2.3) \quad u_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}\tau} \frac{e^{-p^2}}{p} dp, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Из представления (2.3) легко следует, что

$$u_0(\tau) \geq 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\tau)d\tau = 1, \quad u_0(-\tau) = u_0(\tau), \quad \tau > 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} u_0(\tau) = +\infty$$

и существует

$$(2.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j u_0(\tau)d\tau < +\infty, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Из результатов работы [4] следует, что решение $S(x)$ задачи (2.1)-(2.2) обладает следующими свойствами:

$$(2.5) \quad S(x) \text{ возрастает по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad S(x) \geq \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\text{где } \nu_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 u_0(\tau)d\tau,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2} \right)^{-1}.$$

существуют положительные числа a и b такие, что

$$(2.6) \quad S(x) \leq ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

В нашем случае из (2.3) легко проверить, что $u_1 = 1$. Из (2.5) следует, что

$$(2.7) \quad S(x) \geq \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Пункт 3. Введем и рассмотрим также следующие вспомогательные поднородные интегральные уравнения с суммарно-разностными ядрами:

$$(2.8) \quad \psi(x) = g(x) + \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \psi(t) dt, \quad x \geq 0,$$

$$(2.9) \quad \bar{\psi}(x) = \bar{g}(x) + \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \bar{\psi}(t) dt, \quad x \geq 0$$

относительно искомых функций ψ и $\bar{\psi}$, где функции g и $\bar{g}$ допускают следующие представления:

$$(2.10) \quad g(x) = \int_0^{\infty} (u_1(x-t) + \varepsilon u_1(x+t)) G(\sqrt{2}At + A) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$(2.11) \quad \bar{g}(x) = \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) (\sqrt{1}At + A) Q(\sqrt{2}At + A) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$(2.12) \quad G(z) \equiv z(2Q(z) + Q^3(z)), \quad z \geq 0,$$

$$(2.13) \quad u_1(\tau) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{|\omega|}{2}} p e^{-\tau^2} d\rho, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Из условий а)-б), накладываемых на функции Q , сразу следует, что

$$(2.14) \quad G(z) \text{ убывает по } z \text{ на } [A, +\infty), \quad G(z) \geq 0, \quad z \in [A, +\infty),$$

$$(2.15) \quad G \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}^+) \quad m_1(G) < +\infty.$$

Таким образом, в силу того, что $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j u_1(\tau) d\tau < +\infty$, ($j = 1, 2, \dots$) из (2.10), (2.11) и (2.14), (2.15) следует, что

$$(2.16) \quad g(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad g \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}^+), \quad m_1(g) < +\infty,$$

$$(2.17) \quad \bar{g}(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \bar{g} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}^+), \quad m_1(\bar{g}) < +\infty.$$

Следовательно, из результатов работ [4], [5] вытекает, что уравнения (2.8) и (2.9) обладают положительными и отрицательными решениями ψ и $\bar{\psi}$ соответственно. Обозначим через

$$(2.18) \quad \lambda = \sup_{x \geq 0} \psi(x), \quad \bar{\lambda} = \sup_{x \geq 0} \bar{\psi}(x).$$

Пункт 4. Наряду с уравнением (1.1) ниже займемся изучением следующего однородного уравнения с суммарно-разностным ядром:

$$(2.19) \quad \Phi(x) = \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \Phi(t) dt, \quad x \geq 0,$$

относительно искомой функции $\Phi(x)$, где ядерная функция u_0 задается согласно формуле (2.3), а $\varepsilon \in [0, 1]$.

Ниже убедимся, что уравнение (2.19) имеет положительное решение с асимптотикой $\Phi(x) = \sqrt{2x} + o(x)$, когда $x \rightarrow +\infty$. А именно справедлив следующий результат.

Лемма 2.1. Пусть $u_0(x)$ допускает представление (2.3), а $\varepsilon \in [0, 1]$. Тогда уравнение (2.19) имеет положительное решение с асимптотикой $\Phi(x) = \sqrt{2x} + o(x)$, при $x \rightarrow +\infty$. Более того $\Phi(x) \geq \frac{\sqrt{2x}}{2} + \frac{1}{2}$, $x \geq 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим соответствующее неоднородное уравнение со специальным свободным членом:

$$(2.20) \quad F_0(x) = g_0(x) + \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) F_0(t) dt, \quad x \geq 0,$$

где

$$(2.21) \quad g_0(x) = \int_0^{\infty} u_0(x+t)(at+b)dt, \quad x \geq 0,$$

(числа $a, b > 0$ — выбраны из неравенства (2.6)). Из представления функции g_0 легко следует, что $g_0(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $g_0 \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $m_1(g_0) < +\infty$ и эту функцию можно представить в виде суперпозиции экспонент

$$(2.22) \quad g_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-px} G_0(p) dp, \quad x \geq 0,$$

где

$$(2.23) \quad G_0(p) = \frac{ap+b}{\sqrt{\pi}} e^{-p^2}, \quad p \geq 0.$$

Из результатов работ [6]-[7] непосредственно следует, что уравнение (2.20) обладает положительным ограниченным решением $F_0(x)$, имеющим конечный предел в бесконечности. Для уравнения (2.19) рассмотрим следующие итерации:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \Phi_{n+1}(x) &= \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \Phi_n(t) dt, \quad x \geq 0, \\ \Phi_0(x) &= S(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $S(x)$ — решение задачи (2.1)-(2.2).

Индукцией по n можно убедиться, что последовательность функций $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно возрастает по n . Ниже докажем, что

$$(2.25) \quad \Phi_n(x) \leq S(x) + F_0(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \geq 0.$$

Неравенство (2.25) очевидным образом выполняется в случае когда $n = 0$, ибо $F_0(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$. Пусть (2.25) имеет место при некотором натуральном n . Тогда, учитывая неотрицательность функции u_0 и числа ε и при этом имея в виду (2.20), из (2.24) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(x) &\leq \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) (S(t) + F_0(t)) dt \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} u_0(x-t) S(t) dt + \varepsilon \int_0^{\infty} u_0(x+t) (at + b) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) F_0(t) dt \leq S(x) + g_0(x) + \\ &+ \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) F_0(t) dt = S(x) + F_0(x). \end{aligned}$$

Следовательно последовательность функций $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \Phi(x)$, причем предельная функция удовлетворяет уравнению (2.19) согласно теореме Б. Леви (см. [8]). Из монотонности $\Phi_n(x)$ по n и из неравенства (2.25) сразу следует, что для $\Phi(x)$ выполняется двустороннее неравенство:

$$(2.26) \quad S(x) \leq \Phi(x) \leq S(x) + F_0(x), \quad x \geq 0.$$

Так как $S(x)$ удовлетворяет неравенству (2.7) и имеет асимптотику (2), а $F_0 \in L_{\infty}(\mathbb{R}^+)$, то из (2.26) получим, что

$$\Phi(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}, \quad x \geq 0 \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \sqrt{2}x + \alpha(x),$$

когда $x \rightarrow +\infty$. □

Пункт 5. Перейдем к построению однопараметрического семейства положительных решений исходного уравнения (1.1). Рассмотрим следующее семейство последовательных приближений для уравнения (1.1):

$$(2.27) \quad \varphi_{n+1}^{\gamma}(x) = \int_0^{\infty} U(x, t, \varphi_n^{\gamma}(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ \varphi_0^{\gamma}(x) = \gamma \Phi(x) - \psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где γ — некоторое число из множества параметров:

$$(2.28) \quad \Pi \equiv [2A + 2\lambda, +\infty).$$

Ниже индукцией по n убедимся, что при всяком фиксированном $\gamma \in \Pi$ последовательность функций $\{\varphi_n^{\gamma}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обладает следующими свойствами:

- I) $\varphi_n^{\gamma}(x) \uparrow$ по n , $x \in \mathbb{R}^+$, $\gamma \in \Pi$,
II) $\varphi_n^{\gamma}(x) \leq \gamma \Phi(x) + \tilde{\psi}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\gamma \in \Pi$.

Сначала заметим, что

$$(2.29) \quad \varphi_0^{\gamma}(x) = \gamma \Phi(x) - \psi(x) \geq \sqrt{2}(A + \lambda)x + A, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Действительно, из (2.27), (2.18), (2.7) и (2.26) следует, что

$$\varphi_0^{\gamma}(x) \geq \gamma \Phi(x) - \lambda \geq \gamma S(x) - \lambda \geq \frac{\gamma x}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2} - \lambda \geq \sqrt{2}(A + \lambda)x + A.$$

Сперва убедимся, что $\varphi_1^{\gamma}(x) \geq \varphi_0^{\gamma}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\gamma \in \Pi$. В силу (2.14), условия а)-б), (2.19), (2.7) и (2.28) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\gamma}(x) &= \int_0^{\infty} U(x, t, \varphi_0^{\gamma}(t)) dt \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-t)^2}{p}} + \varepsilon e^{-\frac{(x+t)^2}{p}} \right) \frac{e^{-p^2}}{p} \varphi_0^{\gamma}(t) e^{-p^2(2Q(\varphi_0^{\gamma}(t)) + Q^2(\varphi_0^{\gamma}(t)))} dp dt \geq \\ &\geq \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \varphi_0^{\gamma}(t) dt - \int_0^{\infty} (u_1(x-t) + \varepsilon u_1(x+t)) G(\varphi_0^{\gamma}(t)) dt = \\ &= \gamma \Phi(x) - \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \psi(t) dt - \int_0^{\infty} (u_1(x-t) + \varepsilon u_1(x+t)) G(\gamma S(t) - \psi(t)) dt \geq \\ &\geq \gamma \Phi(x) - \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \psi(t) dt - \int_0^{\infty} (u_1(x-t) + \varepsilon u_1(x+t)) G\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2} - \lambda\right) dt \geq \\ &\geq \gamma \Phi(x) - \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \psi(t) dt - \int_0^{\infty} (u_1(x-t) + \varepsilon u_1(x+t)) G(\sqrt{2}At + A) dt = \end{aligned}$$

$$= \gamma \Phi(x) - \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \psi(t) dt - g(x) = \gamma \Phi(x) - \psi(x) = \varphi_0^{\gamma}(x).$$

Предполагая, что $\varphi_n^{\gamma}(x) \geq \varphi_{n-1}^{\gamma}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\gamma \in \Pi$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ и, учитывая монотонность функции $U(x, t, z)$ по z на $[A, +\infty)$, из (2.27) получим

$$\varphi_{n+1}^{\gamma}(x) \geq \int_0^{\infty} U(x, t, \varphi_{n-1}^{\gamma}(t)) dt = \varphi_n^{\gamma}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma \in \Pi.$$

Следовательно, монотонность по n функциональной последовательности $\{\varphi_n^{\gamma}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ установлена.

Теперь перейдем к доказательству неравенства $II)$. В случае когда $n = 0$ неравенство $II)$ очевидным образом выполняется, ибо $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Предположим, что $II)$ имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу монотонности $U(x, t, z)$ по z на $[A, +\infty)$ с учетом условия б), (2.1) и (2.7), из (2.27) будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^{\gamma}(x) &\leq \int_0^{\infty} U(x, t, \gamma \Phi(t) + \tilde{\psi}(t)) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{-\frac{(x-t)^2}{p}} + \varepsilon e^{-\frac{(x+t)^2}{p}}) \frac{e^{-p^2}}{p} (\gamma \Phi(t) + \tilde{\psi}(t) + (\gamma \Phi(t) + \tilde{\psi}(t)) Q(\gamma \Phi(t) + \tilde{\psi}(t))) dp dt \leq \\ &\leq \gamma \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \Phi(t) dt + \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \tilde{\psi}(t) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2} + \tilde{\psi}(t) \right) Q \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2} + \tilde{\psi}(t) \right) dt \leq \\ &\leq \gamma \Phi(x) + \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \tilde{\psi}(t) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) (\sqrt{2} A t + A) Q(\sqrt{2} A t + A) dt = \\ &= \gamma \Phi(x) + \int_0^{\infty} (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \tilde{\psi}(t) dt + \tilde{g}(x) = \gamma \Phi(x) + \tilde{\psi}(x). \end{aligned}$$

Итак, неравенство $II)$ доказано.

Следовательно, последовательность функций $\{\varphi_n^{\gamma}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при каждом фиксированном $\gamma \in \Pi$ имеет поточечный предел при $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^{\gamma}(x) = \varphi^{\gamma}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Из представления (1.2), с учетом свойств а)-б), в силу предельной теоремы Б. Леви (см. [8]) следует, что $\varphi^{\gamma}(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Из I) и II) следует также двойное неравенство

$$(2.30) \quad \gamma\Phi(x) - \psi(x) \leq \varphi^{\gamma}(x) \leq \gamma\Phi(x) + \tilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

при каждом фиксированном $\gamma \in \Pi$. Так как $\Phi, \tilde{\psi} \in L_{\infty}(\mathbb{R}^+)$, а $\Phi(x)$ удовлетворяет предельному соотношению $\Phi(x) = \sqrt{2}x + o(x)$, $x \rightarrow +\infty$, то из (2.30) следует, что существует

$$(2.31) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{\gamma}(x)}{x} = \sqrt{2}\gamma.$$

Из предельного соотношения (2.31) следует, что различным значениям $\gamma \in \Pi$ соответствуют различные решения уравнения (1.1).

Итак, справедлив следующий результат.

Теорема 2.1. При условиях а)-б) уравнение (1.1) (с ядром) обладает однопараметрическим семейством положительных решений $\{\varphi^{\gamma}(x)\}_{\gamma \in \Pi}$, имеющих линейный рост в бесконечности. Более того, для $\forall \gamma \in \Pi$ справедливо также предельное соотношение (2.31), где множество параметров Π задается согласно формуле (2.28).

Замечание 2.1. Заметим, что в частном случае, когда $Q = 0$, уравнение (1.1) преобразуется в линейное консервативное уравнение (2.19) с ядром $u_0(x)$. Решение $\varphi^{\gamma}(x)$ исходного уравнения (1.1) оценивается решениями линейных уравнений (2.19) и (2.8), (2.9) согласно (2.30). Причем свободные члены уравнения (2.8) и (2.9) строятся специальным образом с помощью функции $Q(x)$ (см. (2.10) и (2.11)).

Приложение. Приведем примеры функций, удовлетворяющих условиям а)-б) теоремы. В качестве функций $Q(x)$ могут служить следующие функции

$$Q(x) = xe^{-x}, \quad x \in [2, +\infty), \quad Q(x) = e^{-x^2}, \quad x \in [1, +\infty),$$

$$Q(x) = \frac{1}{x^4 + 1}, \quad x \in [1, +\infty), \quad Q(x) = \sin \frac{1}{x^4 + 1}, \quad x \in [1, +\infty).$$

Действительно убедимся в достоверности примера $Q(x) = xe^{-x}$. Очевидно, что $(xQ(x))' = xe^{-x}(2-x) \leq 0$, при $x \geq 2$, следовательно $xQ(x) \downarrow$ по x на $[2, +\infty)$, ($A = 2$). С другой стороны

$$(2.32) \quad (x + xQ(x))' = 1 + xe^{-x}(2-x).$$

Нижне проверим, что если $x \in [2, +\infty)$, то правая сторона последнего равенства неотрицательна. Обозначим через $\delta(x)$ следующую функцию: $\delta(x) = e^x + 2x - x^2$.

Имеем $\delta(2) = e^2 > 0$, $\delta'(x) = e^x + 2 - 2x$. Заметим, что $\delta'(x) \geq 0$, при $x \in [2, +\infty)$, ибо $\delta'(2) = e^2 - 2 > 0$, а $\delta''(x) = e^x - 2 \geq x - 1 > 0$, при $x \in [2, +\infty)$. Поскольку $\delta(2) > 0$ и $\delta(x) \uparrow$ по x на $x \in [2, +\infty)$, то из (2.32) сразу следует, что $(x + \varepsilon Q(x))' = e^{-x}(e^x + 2 - 2x) = e^{-x}\delta(x) \geq 0$, $x \in [2, +\infty)$. Остальные условия теоремы на функцию $Q(x)$, легко проверяются.

Abstract. The paper is devoted to the question of solvability of a Urysohn type nonlinear integral equation. This equation has an application in the kinetic theory of gases and can be derived from Boltzmann model equation. We prove an existence theorem of one-parameter family of positive solutions in the space of functions possessing linear growth at infinity. Moreover, for each member of this family we find an exact asymptotic formula at infinity. We obtain two-sided estimates for solution, as well as describe an iterative method for construction of solution. We conclude the paper by giving examples of functions that describe nonlinearity and satisfy the conditions of the main theorem.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross and M. Krook, "A Model for Collision Processes in Gases. I", Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. Phys. Rev., 94, 611 - 628, (1954).
- [2] C. Cercignani, The Boltzmann Equation and its Application, Springer-Verlag, New-York (1988).
- [3] N. B. Engibaryan, A. Kh. Khachatryan, "Exact linearization of the sliding problem for a dilute gas in the Bhatnagar-Gross-Krook model", Theor. Math. Phys., 125, no. 2, 1589 - 1592 (2000).
- [4] L. G. Arakchyan and N. B. Engibaryan, "Convolution equations and nonlinear functional equations", J. Soviet Math., 36, no. 6, 745 - 791 (1987).
- [5] G. G. Gevorkyan and N. B. Engibaryan, "New theorems for the integral renewal equation", J. Contemp. Math. Anal. 32, no. 1, 2 - 16 (1997).
- [6] Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях типа свертки в кинетической теории", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 38, no. 3, 466 - 482 (1998).
- [7] Х. А. Хачатрян, "Применение метода сдвига Ахмедова к решению интегрального уравнения", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 42, no. 6, 905 - 912 (2002).
- [8] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории функций и Функционального Анализа, М., Наука (1981).

Поступила 7 июля 2016

A SUB-DENSITY THEOREM OF STURM-LIOUVILLE EIGENVALUE PROBLEM WITH FINITELY MANY SINGULARITIES

LUNG-BUI CHEN

National Chung Cheng University, Min-Hsiung, Taiwan

E-mail: mr.lunghuichen@gmail.com

Abstract. We study the distribution of the Sturm-Liouville eigenvalues of a potential with finitely many singularities. There is an asymptotically periodical structure on this class of eigenvalues as described by the entire function theory. We describe the singularity of its potential function explicitly in its eigenvalue asymptotics.

MSC2010 numbers: 34B24, 35P25, 35R30.

Keywords: Sturm-Liouville problem; singular eigenvalue problem; Wilder's theorem.

1. INTRODUCTION AND MAIN RESULT

In this short note, we study the eigenvalue distribution for the following differential equation.

$$(1.1) \quad \begin{cases} -y''(x) + p(x)y(x) = \omega^2 y(x), & 0 < x < \pi; \\ y(0; \omega) = 0, \quad y'(0; \omega) = 1; \\ y(\pi; \omega) = 0, \end{cases}$$

where

$$(1.2) \quad p(x) = \sum_{n=0}^M p_n(x) + r_M(x)$$

with $r_M(x) \in C^M[0, \pi]$; Most importantly,

$$(1.3) \quad p_m(x) = \sum_k c_{m,k} 1_{[x_{m,k}, \infty)}(x) (x - x_{m,k})^m / m!, \quad m \geq 1;$$

$$(1.4) \quad p_0(x) = \sum_k c_{0,k} 1_{[x_{0,k}, \infty)}(x),$$

where $\{x_{m,k}\}_{m,k} \in (0, \frac{\pi}{2})$ and $\{c_{m,k}\}_{m,k} \in \mathbb{R}$. We are dealing with a piecewise $C^M[0, \pi]$ potential function $p(x)$. For each m , $x_{m,k}$ are distinct and $p(x)$ has a jump at m -th derivative at $x_{m,k}$. We assume nontrivially the $\{x_{m,k}\}_{m,k} \in (0, \frac{\pi}{2})$ has J elements and are all distinct. If there are two singular points symmetrically to the middle point located in $(0, \pi)$, then our method doesn't apply in this case.

It is asked by Carlson, Threadgill and Shubin [3]: How are the singularities of p manifested in the distribution of eigenvalues? Being considered as a function of ω , $y(\pi; \omega)$ is an entire function of ω . Moreover, the zeros of $y(\pi; \omega)$ are the Dirichlet eigenvalues of the system (1.1). To study the asymptotics of Dirichlet eigenvalues, we examine the zeros of entire function $y(\pi; \omega)$. We try to answer the question from the point of view of complex analysis in this particular setting. In [1], a distribution of the eigenvalues with coefficients in terms of spectral invariants is described in [1, Theorem 4.4] applying the Newton's method. In this paper, we try to characterize the distribution of the eigenvalues explicitly in terms of the singularities themselves and find the composites of the Dirichlet eigenvalues. Can one really hear the singularities of the potential p ? The next statement is the main result of this paper.

Theorem 1.1. *Let $\{\omega_j\}_{j=1}^J$ be the rearrangement of the singular points $\{x_{m,k}\}_{m,k}$ such that $0 =: \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_J < \omega_{J+1} := \frac{\pi}{2}$. There exist exactly $2J + 2$ subsequences of the zeros of $y(\pi; \omega)$, denoted as $\{z_{n_l}\}$, where $l = 1, 2, \dots, 2J + 2$, such that*

$$(1.5) \quad z_{n_l} \sim \frac{n_l \pi}{\omega_l - \omega_{l-1}} + O(1), \text{ as } n_l \rightarrow \pm\infty \text{ in } \mathbb{Z};$$

$$(1.6) \quad \bigcup_{l=1}^{2J+2} \{z_{n_l}\} = \{z_n\},$$

in which $\{z_n\}$ are the zeros of $y(\pi; \omega)$.

In particular, we recover the point set $\{\omega_j\}_{j=1}^J$ from the subsequences of Dirichlet eigenvalues corresponding to each of these points. We may refine the asymptotics (1.1) to next order by the method in [9, p. 37]:

$$(1.7) \quad z_{n_l} \sim \frac{n_l \pi}{\omega_l - \omega_{l-1}} + O\left(\frac{1}{n_l}\right), \text{ as } n_l \rightarrow \pm\infty \text{ in } \mathbb{Z}.$$

This is the only eigenvalue asymptotics containing the information on the position of the singularities of a given potential function known to the author. We may compare the result in [6, 7, 9]. However, in [6], they considered a much general class of potential functions. One may sum up all of the subsequences to obtain the classic eigenvalue density as in [7, 9].

We start with the asymptotic expansion of the solution of (1.1) which we refer to [1, 2]. The following asymptotics holds:

$$(1.8) \quad y(\pi; \omega) = \frac{\sin\{\omega\pi\}}{\omega} - \frac{1}{2} \frac{\cos\{\omega\pi\}}{\omega^2} \int_0^\pi p(t) dt + \\ + 2 \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^m [2\omega]^{-2m} \cos\{\omega\pi\} P_{m-1}(\pi) + 2 \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^{m+1} [2\omega]^{-2m-1} \sin\{\omega\pi\} Q_{m-1}(\pi)$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{m=0}^{M/2-1} (-1)^m [2\omega]^{-2m-3} \times \left\{ \sum_{x_{2m,h} < \pi} c_{2m,h} \sin\{\omega[x - 2x_{2m,h}]\} \right\} \\
& +2 \sum_{m=0}^{M/2-1} (-1)^{m+1} [2\omega]^{-2m-4} \times \left\{ \sum_{x_{2m+1,h} < \pi} c_{2m+1,h} \cos\{\omega[x - 2x_{2m+1,h}]\} \right\} + O\left(\frac{\exp \omega \pi}{\omega^M}\right),
\end{aligned}$$

if $\omega \in \mathbb{C}$ and

$$\begin{aligned}
P_0(x) &:= \int_0^x p(t_1) dt_1; \quad P_m(x) := q_{2m-1}(p; x) - q_{2m-1}(p; 0), \quad m \in \mathbb{N}; \\
Q_m(x) &:= q_{2m}(p; x) + q_{2m}(p; 0), \quad m \in \mathbb{N}_0; \\
q_m(p; x) &:= \left| \sum_{k=0}^M p_k(x) + r_M(x) \right|^{(m)}, \quad r_M(x) \in C^M[0, \pi].
\end{aligned}$$

This is essentially the (3.e) in [1, p. 84]. However, we deal with $\omega \in \mathbb{C}$ in this paper. The only difference is in the big O -term in the end of (1.8). We refer the proof to [1, p. 84], and also [9], which comes from the repeated integration by parts. We will apply the Wilder's theorem to (1.8) which is a sum of asymptotically hyperbolic series to obtain the asymptotics of the Dirichlet eigenvalues.

2. THE WILDER'S THEOREM

There is an asymptotic periodic structure [4, 5, 8] within the zero set of the asymptotically hyperbolic sum, say, the asymptotic expansion (1.8). We refer to [5, 8] for a comprehensive study on the zero distribution theory of this kind. To be more convincing, we start with the following theorem. One can bypass this part if familiar with the entire function theory. The indexing in this section is independent of the others.

Theorem 2.1 (Dickson [4]). *Let*

$$(2.1) \quad R(\alpha, s, h) := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| \leq h, y \in [\alpha, \alpha + s]\};$$

$$(2.2) \quad N_g(R(\alpha, s, h)) := \{\text{the number of zeros of } g(z) \text{ in } R(\alpha, s, h)\},$$

in which

$$g(z) = \sum_{j=1}^n A_j e^{\omega_j z},$$

where $z = x + iy$, $A_j \neq 0$, $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$. Then, there exists $K > 0$ such that

- (1) each zero of g is in $|x| < K$;
- (2) for each pair of reals (α, s) with $s > 0$,

$$(2.3) \quad |N_g(R(\alpha, s, K)) - s(\omega_n - \omega_1)/(2\pi)| \leq n - 1.$$

Let us acquire a more sophisticated theorem of this type. Let

$$(2.4) \quad f(z) = \sum_{j=1}^n A_j z^{m_j} [1 + \epsilon(z)] e^{i\omega_j z},$$

where $n > 1$ and A_j and ω_j are complex numbers such that $A_j \neq 0$ and the ω_j are distinct; the m_j are non-negative integers; the functions ϵ are analytic for $|z| \geq r_0 \geq 0$ with $\lim_{z \rightarrow \infty} \epsilon(z) = 0$. When we are talking about the zeros of $f(z)$, we are referring to its zeros outside certain open ball around the origin.

We set up the following quantities to the $f(z)$ in (2.4): Let Q be the broken line given by the $\bar{\omega}_j$ given in (2.4) with $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$ as its vertices. The indices are labeled counterclockwise. Let L_k be the line segment $[\bar{\omega}_k, \bar{\omega}_{k+1}]$ and $\phi_k := \arg\{\bar{\omega}_k - \bar{\omega}_{k+1}\}$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Let

$$(2.5) \quad e_k = e^{i\phi_k}.$$

Certain $\bar{\omega}_p$ on L_k are assigned doubly indexed subscripts as follows: Let the convex hull of $\bar{\omega}_k, \bar{\omega}_{k+1}$ and $\tau_p = \bar{\omega}_p + im_p e_k$ in which $\bar{\omega}_p$ on L_k ; assign subscripts $j = 1, \dots, \sigma_k$ to ω_{kj} so that $\omega_{k1} = \omega_k, \omega_{k\sigma_k} = \omega_{k+1}$ and τ_{kj} are vertices of this convex hull and preceding in a counterclockwise direction from $\bar{\omega}_k + im_k e_k$ to $\bar{\omega}_{k+1} + im_{k+1} e_k$. For $j = 1, \dots, \sigma_k - 1$,

$$(2.6) \quad L_{kj} := [\tau_{kj}, \tau_{k,j+1}]; \quad \mu_{kj} := \frac{m_{kj} - m_{k,j+1}}{(\omega_{kj} - \omega_{k,j+1})e_k}$$

which is real; n_{kj} is the number of τ_p on L_{kj} . In particular, if L_{kj} in an interval with exactly two end points, then we have $n_{kj} = 2$.

Moreover, for $j = 1, \dots, \sigma_k - 1$ and $h > 0$, we define

$$(2.7) \quad V_{kj}(h) := \{z | \Im(z/e_k) \geq 0, |\Re(z/e_k) + \mu_{kj} \log |z|| \leq h\}.$$

$T_k(\theta)$ is defined to be a closed sector with vertex at zero of opening 2θ about the outward normal to L_k through the origin. For the same k and j and each triple of reals (α, s, h) , $s > 0$ and $h > 0$, the set

$$(2.8) \quad R_{kj}(\alpha, s, h) := \{z | \Im(z/e_k) + \mu_{kj} \arg z \in [\alpha, \alpha + s], |\Re(z/e_k) + \mu_{kj} \log |z|| \leq h\},$$

where $\arg z \in (\phi_k, \phi_k + \pi)$ and $R_{kj}(\alpha, s, h)$ is in $V_{kj}(h) \cap T_k(\theta)$. They are asymptotically logarithmic tubular neighborhoods. We refer to [4] for a comprehensive study. Now we state the following theorem.

Theorem 2.2 (Dickson [4]). *Let $f(z)$ be given as in (2.4). Then, there exists $h > 0$ such that*

- (1) *all but a finite number of zeros of f of modulus greater than r_0 are in*
 $\bigcup_{k,j} V_{kj};$

(2) for each pair of positive reals ϵ and s_0 , there exists an $\alpha_0 = \alpha_0(\epsilon, s_0)$ such that whenever $\alpha \geq \alpha_0$ and $s \geq s_0$,

$$(2.9) \quad |N_f(R_{kj}(\alpha, s, h)) - s|\omega_{kj+1} - \omega_{kj}|/(2\pi)| < n_{kj} - 1 + \epsilon.$$

This is exactly stated as in [4]. The proof is in [5, Theorem 2, p.21]. We refer to [3] for another application of this theorem.

3. PROOF OF THEOREM 1.1

To apply Theorem 2.2 to the hyperbolic sum (1.8), we rewrite (1.8): It is well-known [9] that there is a C_δ depending on the distance to the zeros of $\sin \omega \pi$ such that

$$(3.1) \quad \exp|\Im \omega \pi| < C_\delta \sin\{\omega \pi\}.$$

Hence, (1.8) becomes

$$\begin{aligned} y(\pi; \omega) &= \frac{\sin\{\omega \pi\}}{\omega} \left[1 + O\left(\frac{C_\delta}{\omega^{M-1}}\right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\cos\{\omega \pi\}}{\omega^2} \int_0^\pi p(t) dt \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^m [2\omega]^{-2m} \cos\{\omega \pi\} P_{m-1}(\pi) + 2 \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^{m+1} [2\omega]^{-2m-1} \sin\{\omega \pi\} Q_{m-1}(\pi) \\ &+ 2 \sum_{m=0}^{M-1-1} (-1)^m [2\omega]^{-2m-3} \times \left\{ \sum_{x_{2m,k} < \pi} c_{2m,k} \sin\{\omega[x - 2x_{2m,k}]\} \right\} \\ &+ 2 \sum_{m=0}^{M-1-1} (-1)^{m+1} [2\omega]^{-2m-4} \times \left\{ \sum_{x_{2m+1,k} < \pi} c_{2m+1,k} \cos\{\omega[x - 2x_{2m+1,k}]\} \right\}, \end{aligned}$$

$\omega \notin \mathbb{Z}$. Now we rearrange according to their exponential powers by the theorem assumption to the following form:

$$\begin{aligned} (3.2) \quad y(\pi; \omega) &= \left\{ \frac{-1}{2i\omega} \left[1 + O\left(\frac{C_\delta}{\omega^{M-1}}\right) \right] + \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^m [2\omega]^{-2m} P_{m-1}(\pi) \right. \\ &+ i \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^{m+1} [2\omega]^{-2m-1} Q_{m-1}(\pi) \Big\} e^{-i\omega\pi} \\ &+ \sum_{j=1}^J C_j(m, \omega) e^{-i\omega(\pi-2x_j)} + \sum_{j=J}^1 D_j(m, \omega) e^{i\omega(\pi-2x_j)} \\ &+ \left\{ \frac{1}{2i\omega} \left[1 + O\left(\frac{C_\delta}{\omega^{M-1}}\right) \right] + \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^m [2\omega]^{-2m} P_{m-1}(\pi) \right. \\ &\left. - i \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^{m+1} [2\omega]^{-2m-1} Q_{m-1}(\pi) \right\} e^{i\omega\pi}, \quad \omega \notin \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

in which the $C_j(m, \omega)$ and $D_j(m, \omega)$ can be obtained by comparing (3.2) with (1.8). Besides (3.2), the entire function $y(\pi; \omega)$ is bounded near $\mathbb{Z}$. Without loss of generality,

we consider the zeros of $Y(\omega) := \omega y(\pi; \omega/i)$ by applying Theorem 2.2 in a suitable strip containing the real axis. We observe the zeros of $Y(\omega)$ spread themselves vertically along the imaginary axis, that is, the zeros of $y(\pi; \omega)$ spread themselves along the real axis. In particular, given the singularity sequence $\{x_{m,k}\}_{m,k}$ which are all distinct by assumption with J elements, we let $\{\omega_j\}_{j=1}^J$ be the rearrangement of $\{x_{m,k}\}_{m,k}$ such that

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_J < \omega_{J+1} = \frac{\pi}{2}.$$

We construct following $2J+2$ successive intervals in $[-\pi, \pi]$:

$$L_1 := [-\pi, -\pi + 2\omega_1], L_2 := [-\pi + 2\omega_1, -\pi + 2\omega_2], \dots, L_{J+1} := [-\pi + 2\omega_J, 0], \\ L_{J+2} := [0, \pi - 2\omega_J], \dots, L_{2J+1} := [\pi - 2\omega_2, \pi - 2\omega_1], L_{2J+2} := [\pi - 2\omega_1, \pi].$$

These intervals are applied as the polygons described previously. However, we note that $L_{J+1} \cup L_{J+2}$ combines to generate a sequence of zeros as described by (2.8) and then (2.9) after observing the exponential exponents in (3.2). There are actually $2J+1$ asymptotically rectangular area on duty. Without loss of generality, we take each $\{L_l\}_{l=1}^{2J+2}$ to generate an asymptotically rectangular area $\{R_l\}_{l=1}^{2J+2}$ as described by (2.7) and (2.8). Finally, we note that one can not identify the quantities $\{\mu_{k,j}\}$ in (2.6), because not being able to locate the coefficients $\{m_j\}$ in (2.4) again in (3.2). For our case, the quantities $\{c_k\}$ in (2.5) are equal to 1.

Let zeros in R_l be denoted as z_{n_l} , $l = 1, 2, \dots, 2J+2$ and $n_l \in \mathbb{N}$. Hence, (2.9) implies that

$$(3.3) \quad |N_Y(R_l(\alpha, s, h)) - s(\omega_l - \omega_{l-1})/\pi| < \bar{n}_l - 1 + \epsilon, l = 1, \dots, 2J+2,$$

in which $\bar{n}_l = 2$ by the construction of intervals $\{L_l\}_{l=1}^{2J+2}$ for all l . Here, we define ω_l , $J+1 \leq l \leq 2J+2$ by the symmetry of $\{L_l\}_{l=1}^{2J+2}$. Finally, it is well-known that the zeros of $y(\pi; \omega)$ are simple and real [9], so (3.3) implies

$$z_{n_l} \sim \frac{n_l \pi}{\omega_l - \omega_{l-1}} + O(1), l = 1, \dots, 2J+2; n_l \in \mathbb{N}.$$

Because the zeros of $y(\pi; \omega)$ are symmetric to the imaginary axis, we can rewrite the equation above to be

$$(3.4) \quad z_{n_l} \sim \frac{n_l \pi}{\omega_l - \omega_{l-1}} + O(1), l = 1, \dots, 2J+2; n_l \in \mathbb{Z}.$$

Once again, we note that $\{z_{n_{J+1}}\} \cup \{z_{n_{J+2}}\}$ is the sequence of zeros generated by the interval $L_{J+1} \cup L_{J+2}$. $\square$

We may observe from (3.3) that the total number of the zeros of $y(\pi; \omega)$ is equal to

$$N_Y\left(\bigcup_{l=1}^{2J+2} R_l(\alpha, s, h)\right) = \sum_{l=1}^{2J+2} N_Y(R_l(\alpha, s, h)) \sim$$

$$\sim \sum_{l=1}^{2J+2} s(\omega_l - \omega_{l-1})/\pi + o(1) = s + o(1),$$

which implies the zeros of $y(\pi; \omega)$ denoted as $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ have the following asymptotics: $z_n \sim n + O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, which matches with the Counting Lemma in [9, p. 36]. The bounded error term in (3.4) avoids the possible contradiction to the classic asymptotics [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Carlson, R. Threadgill and C. Shubin, Sturm-Liouville problems with finitely many singularities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, V. 204, 74–101 (1996).
- [2] R. Carlson, A Borg-Levinson theorem for Bessel operators, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 177, No. 1, 1–26 (1997).
- [3] L. -H Chen, An uniqueness result with sparse density theorems with interior transmission eigenvalues, *Applicable Analysis*, Vol. 94, No. 8, 1527–1541 (2015).
- [4] D. G. Dickson, Zeros of exponential sums, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16, 84–89 (1965).
- [5] D. G. Dickson, Expansions in Series of Solutions of Linear Difference-Differential and Infinite Order Differential Equations with Constant Coefficients, *Memoria of the American Mathematical Society*, Rhode Island, USA, No. 23, 1957.
- [6] R. O. Hryniv and Y. V. Mykytyuk, Eigenvalue asymptotics for Sturm-Liouville operators with singular potential, *Journal of Functional Analysis*, 238, 27–57 (2006).
- [7] V. A. Marchenko, *Sturm-Liouville Operators and Applications*, Birkhauser Verlag, Basel, 1986.
- [8] B. Ja. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, revised edition, *Translations of Mathematical Monographs*, American Mathematical Society, 1972.
- [9] J. Pöschel and R. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, Orlando, 1987.

Поступила 20 апреля 2016

Cover-to-cover translation of the present *IZVESTIYA* is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 52, No. 6, 2017

CONTENTS

W. LV, Existence of solutions for discrete fractional difference inclusions with boundary conditions	261
G. A. KARAPETYAN, An integral representation and embedding theorems in the plane for multianisotropic spaces	267
R. K. PARMAR, T. K. POGÁNY, Extended Srivastava's triple hypergeometric $H_{A, \mathcal{P}, \mathcal{M}}$ function and related bounding inequalities	276
B. N. YENGIBARYAN, N. B. YENGIBARYAN, On a transformation of integral equations	288
A. I. PETROSYAN, Bounded projectors and duality in the spaces of functions holomorphic in the unit ball	295
F. WILLOT, Mean covariogram of cylinders and applications to Boolean random sets	305 315

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 53, номер 1, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

S. ALI, A. FOŠNER, W. JING, On generalized derivations and centralizers of operator algebras with involution	3
Л. Г. АРАБАДЖЯН, С. А. ХАЧАТРИАН, Об однородном интегральном уравнении с двумя ядрами	13
А. Г. ВАРСЕГЯН, Об интегральных уравнениях, ядра которых однородные функции степени (-1)	23
П. С. ГЕВОРКЯН, Группы обратимых бинарных операций топологического пространства	37
S. GULZAR AND N. A. RATHER, On a composition preserving inequality between polynomials	45
В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН, О выделениях гладких решений одного класса почти гипотеллиптических уравнений постоянной мощности	53
M. H. SAFARYAN, On an equivalency of rare differentiation bases of rectangles	68
А. Х. ХАЧАТРИАН, Х. А. ХАЧАТРИАН, А. А. ХАЧАТРИАН, Однопараметрическое семейство положительных решений для одного нелинейного интегрального уравнения, возникающего в физической кинетике	74
L.-H. CHEN, A sub-density theorem of Sturm-Liouville eigenvalue problem with finitely many singularities	84-90

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 53, No. 1, 2018

CONTENTS

S. ALI, A. FOŠNER, W. JING, On generalized derivations and centralizers of operator algebras with involution	3
L. G. ARABADZHYAN, S. A. KHACHATRYAN, On a homogeneous integral equation with two kernels	13
A. G. BARSEGYAN, On integral equations the kernels of which are homogeneous functions of degree (-1)	23
P. S. GEVORGYAN, Groups of invertible binary operations of a topological space	37
S. GULZAR AND N. A. RATHER, On a composition preserving inequality between polynomials	45
V. N. MARGARYAN AND H. G. GHAZARYAN, On extraction of smooth solutions of a class of almost hypoelliptic equations with constant power	53
M. H. SAFARYAN, On an equivalency of rare differentiation bases of rectangles	68
A. KH. KHACHATRYAN, KH. A. KHACHATRYAN, A. A. KHACHATRYAN, One-parameter family of positive solutions for a nonlinear integral equation arising in physical kinetics	74
L.-H. CHEN, A sub-density theorem of Sturm-Liouville eigenvalue problem with finitely many singularities	84-90