

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵԴԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2017

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ОДНО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Н. ЕНГИБАРЯН, Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Институт Математики НАН Армении¹

E-mail: b.yengibaryan@eif.am, yengib@instmath.sci.am

Аннотация. Пусть $E = E(a, b)$ некоторое банахово пространство измеримых функций; I – единичный оператор; $\tilde{K}$ действующий в E регуляризованный интегральный оператор типа Фредгольма, а $K_{\pm}$ его треугольные части. Рассматривается представление $I - K = (I - K_-)(I - \hat{U})(I - K_+)$, для нескольких известных классов интегральных операторов. В частности показывается, что при определенных условиях оператор $\hat{U}$ положительный и его спектральный радиус $r(\hat{U}) < 1$. Отмечаются некоторые возможные применения рассмотренного представления.

MSC2010 number: 45A05

Ключевые слова: треугольные части интегрального оператора; факторизация; положительность, уменьшение нормы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$(1.1) \quad (I - \tilde{K})f = g.$$

Здесь I – единичный оператор, а $\tilde{K}$ интегральный оператор:

$$(1.2) \quad \tilde{K}f(x) = \int_a^b K(x, t)f(t)dt, \quad x \in (a, b) \subset (-\infty, \infty),$$

ограниченно действующий в некотором вещественном банаховом пространстве $E = E(a, b)$ измеримых функций на $(a, b) \subset (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим следующее трехфакторное представление оператора $I - \tilde{K}$:

$$(1.3) \quad I - \tilde{K} = (I - K_-)(I - \hat{U})(I - K_+),$$

где $K_{\pm}$ – треугольные части K :

$$(1.4) \quad K_+f(x) = \int_a^x K(x, t)f(t)dt, \quad K_-f(x) = \int_x^b K(x, t)f(t)dt.$$

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №15T-1A246.

Преобразование вида (1.3) было рассмотрено в работе [1] в связи с решением уравнения Вингра-Хопфа. Оно допускает распространение на широкие классы линейных интегральных операторов (а также матриц). Для этого достаточно потребовать обратимость операторов $I - K_{\pm}$ в E . Это требование автоматически выполняется, если треугольные операторы $K_{\pm}$ из рассматриваемого класса гильбертовы.

Будучи простым по форме и по способу построения, представление (1.3) может значительно способствовать численно-аналитическому решению уравнения (1.1), благодаря возможному улучшению некоторых свойств оператора U по сравнению с K , включая уменьшение нормы.

Настоящая работа посвящена изучению представления (1.3) для некоторых известных классов интегральных операторов, и применению (1.3) к уравнению (1.1). В частности показывается, что если K действующий в $L_2(a, b)$ отрицательный (в смысле гильбертовых пространств) оператор с произвольной нормой, то интегральный оператор U положительный и сжимающий. Представление (1.3) может быть использовано в вопросе численно-аналитического решения ряда интегральных уравнений математической физики.

2. КЛАССЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Обозначим через $B = B(E)$ алгебру с единицей I линейных ограниченных операторов, действующих в $E = E(a, b)$, снабженной операторной нормой в E . Рассмотрим некоторое банахово пространство $\Omega \subset B$ регулярных интегральных операторов вида (1.2). Оператор K является регулярным, если вместе с ним в E ограничено действует также оператор $|K|$ с ядром $|K|$.

Предполагается, что класс Ω обладает следующими свойствами.

- а) Ω является прямой суммой подпространств $\Omega^{\pm}$, состоящих из нижних и верхних треугольных (формально гильбертовых) операторов вида (1.4).
- б) Классы $\Omega^{\pm}$ замкнуты относительно умножения и являются алгебрами.
- в) Если $\tilde{V}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, то

$$(2.1) \quad \tilde{V}_- \tilde{V}_+ \in \Omega.$$

- г) При умножении в Ω имеет место обычное правило композиции ядер.

Замкнутость всего класса Ω относительно умножения не требуется.

Замечание 2.1. Условие (2.1) может быть заменено условием $\tilde{V}_+ \tilde{V}_- \in \Omega$.

Пусть $K \in \Omega$ задается посредством (1.2). Через K^T обозначается сопряженный интегральный оператор с транспонированным ядром $K(t, x)$. Оператор K^T , действующий в сопряженном пространстве E^* , может как принадлежать, так и не принадлежать классу Ω .

Определение 2.1. Пусть $\hat{K}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$. Операторы $I - \hat{K}_{\pm}$ назовем нормально обратимыми по классам $\Omega^{\pm}$, если

$$(2.2) \quad (I - \hat{K}_{\pm})^{-1} = I + \hat{\Gamma}_{\pm}, \quad \hat{\Gamma}_{\pm} \in \Omega^{\pm},$$

$$(2.3) \quad \hat{\Gamma}_+ f(x) = \int_a^x \Gamma^+(x, t) f(t) dt, \quad \hat{\Gamma}_- f(x) = \int_b^x \Gamma^-(x, t) f(t) dt.$$

3. Построение представления (1.3). Схема применения к (1.1)

Пусть $K \in \Omega$, а его треугольные части $\hat{K}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$ определены согласно (1.4). Предполагается, что операторы $I - \hat{K}_{\pm}$ нормально обратимы: имеют место равенства (2.2). Представление (1.3) может быть построено аналогично работе [1]. Из равенства $I - \hat{K} = (I - \hat{K}_-)(I - \hat{K}_+) - \hat{K}_- \hat{K}_+$ с учетом (2.2) приходим к (1.3), где $\hat{U} = (I + \hat{\Gamma}_-)\hat{K}_- \hat{K}_+(I + \hat{\Gamma}_+)$. Используя равенства $(I + \hat{\Gamma}_-)\hat{K}_- = \hat{\Gamma}_-$, $\hat{K}_+(I + \hat{\Gamma}_+) = \hat{\Gamma}_+$ получаем:

$$(3.1) \quad \hat{U} = \hat{\Gamma}_- \hat{\Gamma}_+ \in \Omega.$$

Имеет место следующий результат.

Лемма 3.1. При выполнении условий нормальной обратимости (2.2) имеет место представление (1.3), где оператор определяется согласно (3.1).

Из (1.3) видно, что оператор $I - \hat{U}$ обратим в E тогда и только тогда, когда обратим $I - \hat{K}$.

Итак, построение представления (1.3) сводится к определению ядер $\Gamma^{\pm}$ треугольных операторов $\hat{\Gamma}_{\pm}$. В случае симметричного ядра K достаточно найти Γ^+ , поскольку тогда

$$(3.2) \quad \Gamma^-(x, t) = \Gamma^+(t, x).$$

Разложение (1.3) сводит (1.1) к последовательному решению следующих трех уравнений:

$$(3.3) \quad (I - \hat{K}_-)h = g,$$

$$(3.4) \quad (I - \hat{U}_-)F = h,$$

$$(3.5) \quad (I - \hat{K}_-)f = F.$$

Решения уравнений (3.3) и (3.5) выражаются через $\Gamma^{\pm}$, которые участвуют в (1.3). Остается рассмотреть вопрос решения уравнения (3.4).

Успех применения данной схемы решения уравнения (1.1) во многом зависит от того, какие частные свойства оператора $\hat{K}$ переходят к $\hat{U}$ и в каком отношении "улучшается" $\hat{U}$ по сравнению с $\hat{K}$. Эти вопросы будут рассмотрены для некоторых известных классов уравнений (1.1).

4. СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА K В $L_2(a, b)$

4.1. Оценка спектрального радиуса оператора $\hat{U}$. Приведем некоторые вспомогательные факты из теории линейных операторов в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$ со скалярным произведением $\langle f, g \rangle$ (см. [2], [3]).

Действующий в $L_2(a, b)$ интегральный оператор W с вещественным ядром W является положительным, если

$$\langle Wf, f \rangle = \int_a^b \int_a^b W(x, t) f(x) f(t) dx dt \geq 0, \quad \forall f \in L_2(a, b).$$

Положительный оператор обязательно является симметричным (вещественно самосопряженным).

Пусть оператор $A \in B(L_2)$ допускает представление

$$(4.1) \quad A = \hat{G}\hat{G}^T,$$

где $G \in B(L_2)$. Тогда A положительный.

Спектр $\sigma(A)$ положительного оператора A содержится в положительной полуоси: $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. Для спектрального радиуса $r(A)$ симметричного оператора $A \in B(L_2)$ имеет место следующее равенство (см. [3, теорему 2 гл. 11.8]):

$$(4.2) \quad r(A) = \max(r^+, -r^-).$$

где

$$r^+(A) \equiv \sup \sigma(A) = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Ax, x \rangle, \quad r^-(A) \equiv \inf \sigma(A) = \inf_{\|x\| \leq 1} \langle Ax, x \rangle.$$

Рассмотрим представление (1.3) при $E(a, b) = L_2(a, b)$. От класса Ω дополнительно потребуем замкнутость относительно операции транспонирования. Оператор K будем считать симметричным: $K^T = K$. Тогда из (1.4), (3.1) и (3.3) будем иметь:

$$(4.3) \quad \hat{K}_- = \hat{K}_+^T, \quad \hat{\Gamma}_- = \hat{\Gamma}_+^T, \quad \hat{U}^T = \hat{U}.$$

Операторы $\hat{\Gamma}_\pm$ имеют вид (2.3).

Теорема 4.1. Пусть в $L_2(a, b)$ оператор $K \in \Omega$ с симметричным ядром K , удовлетворяет условию нормальной обратимости (2.2). Тогда имеет место представление (1.3) с положительным оператором $\hat{U} \in \Omega$ тогда (3.1), причем:

а) Если $r^+(K) < 1$, то имеет место неравенство

$$(4.4) \quad r(\hat{U}) \leq 1 - \left(1 - r^+(K)\right) \left(\|I - \hat{K}_+\|\right)^{-2} < 1.$$

б) Если

$$(4.5) \quad r^+(K) = 1, \quad \text{то} \quad r(\hat{U}) = 1.$$

Доказательство. Положительность оператора $\hat{U}$ следует из (3.1), (4.3) и условия положительности (4.1). Отсюда, согласно (4.2) следует равенство $r(\hat{U}) =$

$r^+(U)$. Пусть $f \in L_2(a, b)$ и $\|f\| = 1$. Обозначим $\varphi = (I + \hat{U}_+)f \in L_2$. Из (1.3) имеем $\langle \varphi, (I - \hat{K})\varphi \rangle = \langle f, (I - \hat{U})f \rangle = 1 - \langle f, \hat{U}f \rangle$. Отсюда получаем:

$$(4.6) \quad 1 - \langle f, \hat{U}f \rangle = \|\varphi\|^2 - \langle \varphi, \hat{K}\varphi \rangle \geq \|\varphi\|^2 (1 - r^+(\hat{K})).$$

Из равенства $f = (I - \hat{K}_+)\varphi$ имеем $\|\varphi\| \geq (\|I - \hat{K}_+\|)^{-1}$. Отсюда и из (4.6) получаем следующую оценку:

$$(4.7) \quad \langle f, \hat{U}f \rangle \leq 1 - (1 - r^+(\hat{K})) (\|I - \hat{K}_+\|)^{-2}, \quad \|f\| = 1.$$

При $r^+(\hat{K}) < 1$ из (4.6) следует оценка (4.4). В случае $r^+(\hat{K}) = 1$ из (4.6) имеем $r(U) \leq 1$. Необратимость оператора $I - \hat{K}$ исключает неравенство $r(U) < 1$, поэтому $r(U) = 1$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.1 содержит следующие важные свойства оператора $\hat{U}$. Одним из них является тот факт, что при $r^+(\hat{K}) \leq 1$ выполняются неравенство (4.3) и равенство (4.4), независимо от значения $r^-(\hat{K})$. Второе свойство заключается в том, что оператор $\hat{U}$ положительный при симметричном $\hat{K}$.

Сведение (1.1) к уравнению (3.4) раскрывает возможности применения богатого арсенала методов решения интегральных уравнений с оператором сжатия.

Важный класс уравнений (1.1), удовлетворяющих условию $r^+(\hat{K}) < 1$, составляют уравнения с отрицательным оператором (то есть когда $(-\hat{K})$ положительный). Тогда спектр оператора $\hat{K}$ сосредоточен на отрицательной полуоси, $r^+(\hat{K}) = 0$. Поэтому для применимости теоремы 4.1 остается выполнение условий нормальной обратимости (2.2).

Уравнение (1.1) с отрицательным оператором возникает в теории оптимальной фильтрации случайных процессов (см. [4]-[6]), при решении обратных задач теории переноса излучения (см. [7]) в случае применения регуляризационных методов решения интегральных уравнений первого рода и др.

4.2. О выполнении условий (2.2). В случае конечного промежутка (a, b) , при достаточно общих предположениях относительно классов треугольных операторов $\Omega^\pm$, операторы $V_\pm \in \Omega^\pm$ вольтерровы в строгом смысле (их спектр состоит только из точки 0). Тогда условия (3.1) автоматически выполняются. Так обстоит дело в случае операторов Гильберта-Шмидта, который будет рассмотрен в следующем пункте и в случае ядерных (по Гротендику) операторов.

В ряде случаев выполнение неравенства $r^+(\hat{K}) \leq 1$ обеспечивает нормальную обратимость $I - \hat{K}_\pm$. В этом вопросе может быть использована следующая лемма.

Лемма 4.1. Пусть $\hat{V} \in B(L_2(a, b))$ и $\hat{A} = \hat{V} + \hat{V}^T$. Тогда

а) Если $r^+(\hat{A}) \leq 1$, то имеет место неравенство

$$(4.8) \quad \langle \hat{V}\varphi, \varphi \rangle \leq \frac{1}{2} \|\varphi\|^2, \quad \varphi \in L_2(a, b).$$

б) Если $\hat{V}$ вполне непрерывный, то операторы $I - \hat{V}$ и $I - \hat{V}^T$ обратимы.

Доказательство. Пусть $\varphi \in L_2(a, b)$. Из $r^+(\hat{A}) \leq 1$ и (4.1) получаем $(V\varphi, \varphi) + (V^T\varphi, \varphi) \leq \|\varphi\|^2$. С учетом равенства $(V\varphi, \varphi) = (V^T\varphi, \varphi)$ приходим к (4.6). Докажем утверждение б) от противного. Пусть, например, $I - V$ необратим. Подставим в неравенство (4.6) в качестве φ неподвижный элемент вполне непрерывного оператора V приходим к противоречию. Лемма доказана. $\square$

Пусть регулярный оператор K обладает вполне непрерывной мажорантой: $|K(x, t)| \leq K_0(x, t)$, где оператор с ядром $K_0(x, t)$ вполне непрерывный в $L_2(a, b)$. Из теоремы о мажоранте (см. [8, теорему 5.10]) следует, что тогда вполне непрерывны как K , так и все треугольные части $K_{\pm}$. Согласно лемме 4.1, при $r^+(K) \leq 1$ операторы $I - K_{\pm}$ будут обратимы и соответствующие условия теоремы 4.1 выполняются.

4.3. Случай операторов Гильберта-Шмидта. Пусть Ω совпадает с алгеброй интегральных операторов Гильберта-Шмидта, ядра которых интегрируемы с квадратом:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt < +\infty.$$

Класс операторов Гильберта Шмидта замкнут относительно умножения и является В. алгеброй. Алгебрами являются также $\Omega^{\pm}$. Треугольные операторы $V_{\pm} \in \Omega^{\pm}$ вольтерровы (см. [9]), операторы $I - V_{\pm}$ нормально обратимы.

В рассматриваемом случае теорему 4.1 можно перефразировать следующим образом:

Теорема 4.2. Пусть K интегральный оператор с симметричным ядром Гильберта-Шмидта и выполняется неравенство $r^+(K) \leq 1$. Тогда имеет место представление (1.3), где $\hat{U}$ положительный интегральный оператор с ядром Гильберта-Шмидта. При $r^+(K) < 1$ имеет место неравенство (4.7). Если же $r^+(K) = 1$, то $r(\hat{U}) = 1$.

4.4. Формула для обратного оператора $(I - \hat{K})^{-1}$. Пусть класс Ω является банаховой алгеброй с операторной нормой. Ниже будет приведена формула для обратного оператора $(I - \hat{K})^{-1}$, непосредственно вытекающая из теоремы 4.1. Согласно известной формуле Берлинга - Гельфанда (см. [3]), для оператора $\hat{U}$, фигурирующего в (1.3), имеем:

$$(4.9) \quad r(\hat{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\hat{U}^n\|}.$$

Из (4.9) следует, что в случае $r(\hat{U}) < 1$ оператор $(I - \hat{U})^{-1}$ разлагается в ряд Неймана: $(I - \hat{U})^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{U}^m$, который сходится быстрее любой геометрической прогрессии со знаменателем $q = r(\hat{U}) + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1 - r(\hat{U})$.

Пусть выполнены условия утверждения а) теоремы 4.1. Тогда выполняется неравенство $r(\hat{U}) < 1$, что приводит к формуле

$$(4.10) \quad (I - \hat{K})^{-1} = (I + \hat{\Gamma}_+) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \hat{U}^m \right) (I + \hat{\Gamma}_-).$$

5. УРАВНЕНИЕ (1.1) С СУВСТОХАСТИЧЕСКИМ ЯДРОМ

В настоящем пункте в качестве функционального пространства E будет рассмотрено пространство $L_1(a, b)$. Класс Ω состоит из операторов, ядра которых удовлетворяют условию

$$(5.1) \quad \mu(K) = \sup_t \int_a^b |K(x, t)| dx < +\infty.$$

Имеет место неравенство

$$(5.2) \quad \|\hat{K}\|_{L_1} \leq \mu(K).$$

Ядро K является стохастическим, если

$$(5.3) \quad K(x, t) \geq 0, \quad \int_a^b K(x, t) dx = 1.$$

Пусть

$$K(x, t) > 0 \quad \text{и} \quad \mu(K) < 1.$$

В теории переноса такой (равномерно субстохастический) случай может соответствовать диссипативному рассеянию. Тогда роль числа $\mu(K)$ может играть альbedo рассеяния.

В диссипативном случае, согласно (5.2), оператор $\hat{K}$ сжимающий в $L_1(a, b)$ с коэффициентом сжатия μ . Сжимающими являются также операторы $\hat{K}_{\pm}$ поэтому выполняются условия (3.1) нормальной обратимости. Согласно лемме 3.1, существует представление (1.3). Можно показать, что тогда $\Gamma_{\pm}(x, t) > 0$, $U(x, t) > 0$, $\mu(U) < \mu(K)$. При значениях $\mu(K) < 1$, близких к 1, ядро K называется почти консервативным. Решение уравнения (1.1) в таком случае обычно сопряжено с большими трудностями. Тогда даже небольшое уменьшение $\mu(U)$ по сравнению с $\mu(K)$ может оказаться существенным. В случае симметричного почти консервативного ядра K можно ожидать до четырехкратного увеличения числа $1 - \mu(U)$ по сравнению с $1 - \mu(K)$, что приводит к такому же увеличению скорости сходимости ряда Неймана для $(I - \hat{U})^{-1}$ по сравнению с $(I - \hat{K})^{-1}$. Так обстоит дело в случае уравнения Винера-Хопфа с симметричным диссипативным ядром (см. [1]).

6. Одно уравнение Винера-Хопфа с отрицательным ядром

Пусть теперь класс Ω состоит из интегральных операторов Винера-Хопфа

$$(6.1) \quad \hat{K}f(x) = \int_0^{\infty} T(x-t)f(t)dt$$

с ядерными функциями $T \in L_1(-\infty, \infty)$. Предполагается, что E совпадает с одним из функциональных пространств $L_p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$. Имеет место оценка:

$$\|\hat{K}\|_E \leq \mu = \int_{-\infty}^{\infty} |T(x)| dx.$$

Оператор (6.1) компактен в пространствах E , треугольные операторы $K_{\pm}$ невольтерровы. Класс Ω не замкнут относительно умножения, однако выполнены все требования из пункта 2.

В [1] было изучено представление (1.3) для случая уравнения Винера-Хопфа

$$(6.2) \quad f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} T(x-t)f(t)dt,$$

с положительным ядром. Ниже будет рассмотрено уравнение (6.2) с четной отрицательной ядерной функцией $K \in L_1(-\infty, \infty)$ представленной через экспоненты в виде интеграла Стильтьеса:

$$(6.3) \quad K(x) = -\lambda \int_0^{\beta} e^{-|x|s} d\sigma(s), \quad (\alpha, \beta) \subset (0, \infty), \quad \lambda > 0.$$

Здесь σ - неубывающая функция, удовлетворяющая условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 2 \int_0^{\beta} \frac{1}{s} d\sigma(s) = 1.$$

Уравнение (6.2) с ядром (6.3) и соответствующее уравнение на конечном промежутке возникают в теории линейной оптимальной фильтрации случайных процессов (см. [4]-[6]). В работе [10] изложен один способ его решения, основанный на прямом применении метода уравнения В. Амбарцумяна. Уравнение (6.2), (6.3) возникает также при регуляризации уравнения Винера-Хопфа первого рода.

Из результатов работы [11] следует, что в случае ядра (6.3) операторы $I - K_{\pm}$ нормально обратимы и резольвентная функция Γ имеет вид:

$$\Gamma(x, t) = \Gamma_0(x - t), \quad \Gamma_0(x) = - \int_0^{\infty} e^{-xp} d\omega(p),$$

где ω неубывающая функция,

$$- \int_0^{\infty} \Gamma_0(x) dx = \int_0^{\beta} \frac{1}{p} d\omega(p) = \frac{\lambda}{1 + \lambda} < 1.$$

В рассматриваемом случае положительный оператор $\bar{U}$, фигурирующий в (1.3) определяется по следующей формуле:

$$U(x) = \int_0^{\infty} e^{-|x|s} \left[\int_0^{\infty} \frac{d\omega(p)}{s + p} \right] d\omega(s) > 0.$$

Имеет место равенство $\|\tilde{U}\| = \left(\frac{\lambda}{2+\lambda}\right)^2 < 1$. Сказанное означает, что соответствующее уравнение (3.4) является уравнением Винера-Хопфа с диссипативным ядром. Оно может быть решено с применением уравнения Амбарцумяна (см. [12]) или методом усреднения ядра работы [13].

Авторы выражают благодарность А. Г. Варсегян за полезные обсуждения.

Abstract. Let $E = E(a, b)$ be some Banach space of measurable functions on (a, b) , I be the identity operator, and let $\tilde{K}$ be a Fredholm-type regular integral operator acting on E and $\tilde{K}_{\pm}$ be its triangular parts. We consider the representation $I - \tilde{K} = (I - \tilde{K}_-)(I - U)(I - \tilde{K}_+)$, for some known classes of integral operators. In particular, we show that under certain conditions the operator $\tilde{U}$ is positive and its spectral radius satisfies the condition $r(\tilde{U}) < 1$. Also, we give some possible applications of the representation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Енгсбарян, "О многократной факторизации интегральных операторов типа свертки", Ж. Вычисл. Матем. и Мат. физики, 37, no. 4, 447 – 458 (1997).
- [2] В. С. Владимиров, Уравнения Математической Физики, М., Наука (1981).
- [3] К. Иосада, Функциональный Анализ, М, Мир (1967).
- [4] К. Врэммер, Г. Зиффлинг, Фильтр Калмана-Бьюси, М., Наука (1982).
- [5] М. В. Колос, И. Я. Колос, Методы Линейной Оптимальной Фильтрации, Изд. МГУ (2000).
- [6] Дж. Кастн, Р. Калаба, Методы Погружения в Прикладной Математике, М., Мир (1976).
- [7] Н. В. Енгсбарян, М. Г. Мурадян, Р. С. Вардалян, Некоторые Задачи Дистанционного Зондирования, Труды XII научных чтений по космонавтике, М., НИИТ АН СССР (1989).
- [8] М. А. Краснопольский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, Интегральные Операторы в Врозрамствах Суммируемых Функций, М., Наука (1986).
- [9] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория Вольтерровых Операторов в Гильбертовом Пространстве и ее Приложение, М., Наука (1967).
- [10] Н. В. Енгсбарян, А. Г. Варсегян, "Об одном уравнении свертки теории фильтрации случайных процессов", Укр. мат. журн., 66, no. 8, 1092 – 1105 (2014).
- [11] А. Г. Варсегян, "Уравнения типа восстановления с вполне монотонным ядром", Известия НАН РА, Математика, Ер., 39, no. 3, 13 – 20 (2004).
- [12] Л. Г. Арабаджян, Н. В. Енгсбарян, Уравнения в Свертках и Нелинейные Функциональные Уравнения, Итоги науки и техн., Сер. Мат. анал., 22, ВИНИТИ, М., 175 – 244 (1984).
- [13] А. Г. Варсегян, Н. В. Енгсбарян, "Приближенное решение интегральных и дискретных уравнений Винера-Хопфа", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55, no. 5, 836 – 845 (2015).

Поступила 20 октября 2016

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ ДЛЯ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Г. А. КАРАПЕТЯН

Российско-Армянский университет¹
E-mail: garyik_karapetyan@yahoo.com

Аннотация. Работа является продолжением работы [1], где с помощью специального интегрального представления функций доказываются теоремы вложения для мультианизотропных функциональных пространств. В отличие от предыдущей работы здесь изучается случай, когда вполне правильная многоугольная имеет произвольное количество вершин анизотропности.

MSC2010 number: 32Q40.

Ключевые слова: теорема вложения; мультианизотропное пространство; вполне правильный многоугольник; интегральное представление.

Введение

В данной работе интегральные представления и теоремы вложения, которые в работе [1] были доказаны для функций, принадлежащих мультианизотропному функциональному пространству с одной вершиной анизотропности, обобщаются для случая, когда вполне правильный многоугольник имеет произвольное количество вершин анизотропности. Теоремы вложения впервые изучал С. Л. Соболев в [2]. В дальнейшем эти результаты были обобщены другими математиками по разным направлениям. Отметим из них работы [3] – [6] и монографию [7].

1. ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Пусть $\mathbb{R}^2$ – двумерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+^2$ – множество двумерных мультииндексов, т.е. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, если α_1, α_2 целые неотрицательные числа. Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ и $l > 0$ введем следующие обозначения: $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}$, $l^\eta = (l^{\eta_1}, l^{\eta_2})$, $D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ ($k = 1, 2$); $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$ есть обобщенная производная по С.Л.Соболеву. Для некоторого набора мультииндексов обозначим через $\mathcal{M}$ наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все

¹Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОП РФ и при поддержке тематического финансирования комитета науки при министерстве образования и науки РА (код проекта SCS e15T-1A197).

точки данного набора. Многоугольник $\mathfrak{M}$ называется вполне правильным, если имеет вершину в начале координат и на всех координатных осях, а внешние нормали всех некоординатных сторон имеют положительные компоненты. Пусть $\alpha^0 = (l_1, 0), \alpha^1, \dots, \alpha^M = (0, l_2)$ есть перпендикулярные внешние нормали многоугольника $\mathfrak{M}$. Соответствующую некоординатную внешнюю нормаль стороны, проходящей через точки α^i, α^{i+1} , обозначим μ^{i+1} ($i = 0, 1, \dots, M-1$), где уравнение соответствующей стороны дается формулой $(\mu^{i+1}, \alpha) = 1$ ($i = 0, 1, \dots, M-1$). Как и в работе [1], с помощью вершин многоугольника $\mathfrak{M}$ введем следующий многочлен: $P(\nu, \xi) = (\nu \cdot \xi^{\alpha^0})^{2k} + (\nu \cdot \xi^{\alpha^1})^{2k} + \dots + (\nu \cdot \xi^{\alpha^M})^{2k}$, где $\nu > 0$ произвольный параметр и обозначим

$$\begin{aligned}
 G_0(\xi, \nu) &= e^{-P(\nu, \xi)}, \\
 G_{1,j}(\xi, \nu) &= 2k (\nu \cdot \xi^{\alpha^j})^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)}, \quad (j = 0, 1, \dots, M).
 \end{aligned}
 \quad (1.1)$$

Пусть $G_0(t, \nu), G_{1,j}(t, \nu)$ ($j = 0, 1, \dots, M$) есть преобразования Фурье соответствующих функций G_0 и $G_{1,j}$ ($j = 0, 1, \dots, M$). Очевидно, что $G_0, G_{1,j}$ ($j = 0, 1, \dots, M$) и их преобразования Фурье принадлежат классу $S = S(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим через $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ точку пересечения линий $(\alpha, \mu^1) = 1$ и $(\alpha, \mu^M) = 1$. Пусть $(\theta, 0)$ и $(0, \sigma)$ такие точки, что $\theta \mu_1^M = 1$ и $\sigma \mu_2^1 = 1$, а N такое четное число, что $N\gamma_1, N\gamma_2, N\theta, N\sigma$ — четные числа. Тогда для ядер $\tilde{G}_0, \tilde{G}_{1,j}$ ($j = 0, 1, \dots, M$) имеет место следующая лемма (аналог леммы 1.1 работы [1]).

Лемма 1.1. Для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ существуют постоянные числа a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2$) такие, что для любого $\nu : 0 < \nu < 1$ имеют место неравенства

$$|D^m \tilde{G}_{1,j}(t, \nu)| \leq \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + \langle m, \mu^i \rangle)} \cdot \frac{a_1 |\ln \nu| + a_2}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} + t_1^{N\theta})} \quad \text{при } \gamma_1 < \gamma_2, \quad (1.2)$$

$$|D^m \tilde{G}_{1,j}(t, \nu)| \leq \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + \langle m, \mu^i \rangle)} \cdot \frac{b_1 |\ln \nu| + b_2}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} + t_2^{N\sigma})} \quad \text{при } \gamma_1 > \gamma_2, \quad (1.3)$$

$$|D^m \tilde{G}_{1,j}(t, \nu)| \leq \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + \langle m, \mu^i \rangle)} \cdot \frac{c_1 |\ln \nu| + c_2}{(1 + \nu^{-N} ((t_1 t_2)^{N\gamma} + t_1^{N\theta})) (1 + \nu^{-N} ((t_1 t_2)^{N\gamma} + t_2^{N\sigma}))} \quad \text{при } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma. \quad (1.4)$$

Аналогичные неравенства имеют место и для $\tilde{G}_0(t, \nu)$.

Доказательство. Для доказательства сначала изучим поведение интеграла

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} e^{-P(\nu \xi)} d\xi_1 d\xi_2$$

в зависимости от $\nu: 0 < \nu < 1$.

Рассмотрим точку α^1 . Если $\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$, получим

$$I \leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m, \mu^1))}.$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2\mu_1} - \eta_1^{2\mu_1} \eta_2^{2\mu_2} - \nu^{2\mu_1} (1 - (\nu^2, \mu^1)) \eta_1^{2\mu_1} \eta_2^{2\mu_2} - \dots - \nu^{2\mu_1} (1 - (\nu^2, \mu^1)) \eta_2^{2\mu_2}} d\eta_1 d\eta_2 \\ & \leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m, \mu^1))} \\ & \cdot \int_0^\infty d\eta_1 \int_0^\infty \eta_1^{m_1 - \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} - m_2 \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1}} e^{-\eta_1^{2\mu_1}} e^{-\left(\frac{\alpha_1^1}{\eta_1^{\frac{1}{\alpha_2^1}}}\right)^{2\mu_2}} \left(\frac{\alpha_1^1}{\eta_1^{\frac{1}{\alpha_2^1}}}\right)^{m_2} d\left(\frac{\alpha_1^1}{\eta_1^{\frac{1}{\alpha_2^1}}}\right) \eta_2 \\ & \leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m, \mu^1))} \int_0^\infty t^{m_2} e^{-t^{2\mu_2}} dt \int_0^\infty \eta_1^{m_1 - \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} - m_2 \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1}} e^{-\eta_1^{2\mu_1}} d\eta_1 \leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m, \mu^1))}, \end{aligned}$$

так как $m_1 - \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} - m_2 \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} > -1$.

Если же $\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то рассмотрим последнюю некоординатную сторону. При $\frac{\alpha_1^{M+1}}{\alpha_2^{M+1}} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^{M+1}} \eta$, получим аналогично предыдущему случаю, что $I \leq C \nu^{-(|\mu^{M+1}| + (m, \mu^{M+1}))}$.

Пусть теперь $\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$ (случай равенства изучим отдельно), тогда рассмотрим следующую точку α^2 . Если $\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то возьмем сторону, проходящую через точки α^1 и α^2 (т.е. рассмотрим внешнюю нормаль μ^2), а если $\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то рассмотрим следующую точку α^3 . Так как по предположению $\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то обязательно найдутся точки α^i и α^{i+1} ($i = 0, 1, \dots, M-1$) из вершин многоугольника Π такие, что

$$(1.5) \quad \frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} > \frac{m_1+1}{m_2+1}, \quad \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1+1}{m_2+1}.$$

Докажем, что $I \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))}$, где μ^{i+1} — нормаль стороны, проходящей через точки α^i и α^{i+1} . Для этого в интеграле I сделаем замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}} \eta$, получим

$$I \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2\mu_1} \eta_2^{2\mu_2} - \eta_1^{2\mu_1} \eta_2^{2\mu_2} - \dots} d\eta_1 d\eta_2.$$

Докажем, что существуют такие числа K и L ($K, L > -1$), что

$$\eta_1^{-m_1 - \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}} \eta_2^{-m_2 - \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}} = \left(\eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}} \right)^K \left(\eta_2 \eta_1^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}} \right)^L.$$

Относительно K и L имеем систему

$$\begin{cases} m_1 - \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} = K + \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} L, \\ m_2 - \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} = \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} K + L \end{cases}$$

откуда, согласно (1.5)

$$\begin{aligned} K &= \frac{m_1 - (1 + m_2) \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} + \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}{1 - \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}} > -1, \\ L &= \frac{m_2 - (1 + m_1) \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} + \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}{1 - \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}} > -1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Исходя из этого, в интеграле I сделав замену переменных $t = m_1 \eta_1^{\alpha_1^{i+1}/\alpha_2^{i+1}}$, $\tau = m_2 \eta_2^{\alpha_2^i/\alpha_1^i}$, получим

$$I \leq C\nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))} \int_0^\infty \int_0^\infty t^K e^{-t^{\mu^i}} \tau^L e^{-\tau^{\mu^{i+1}}} dt d\tau \leq C\nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))}.$$

Так как $K, L > -1$, то интегралы сходятся.

Теперь изучим случай равенства. Пусть

$$(1.7) \quad \frac{\alpha_1^{i-1}}{\alpha_2^{i-1}} > \frac{m_1 + 1}{m_2 + 1}, \quad \frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} = \frac{m_1 + 1}{m_2 + 1}, \quad \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1 + 1}{m_2 + 1}, \quad (i = 1, \dots, M-1).$$

При $i = 1$ для $\alpha^0 = (l_1, 0) = (\alpha_1^0, \alpha_2^0)$ имеем, что $\frac{\alpha_1^0}{\alpha_2^0} < \frac{m_1 + 1}{m_2 + 1}$, поэтому будем считать, что $\frac{\alpha_1^0}{\alpha_2^0} > \frac{m_1 + 1}{m_2 + 1}$. Аналогично, для точки $\alpha^M = (0, l_2) = (\alpha_1^M, \alpha_2^M)$ имеем $\frac{\alpha_1^M}{\alpha_2^M} < \frac{m_1 + 1}{m_2 + 1}$.

Разделим I на следующие интегралы:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$= \int_0^{\nu^{-\mu^1}} d\xi_1 \int_0^{\nu^{-\mu^1}} d\xi_2 + \int_0^{\nu^{-\mu^1}} d\xi_1 \int_{\nu^{-\mu^1}}^\infty d\xi_2 + \int_{\nu^{-\mu^1}}^\infty d\xi_1 \int_0^{\nu^{-\mu^1}} d\xi_2 + \int_{\nu^{-\mu^1}}^\infty d\xi_1 \int_{\nu^{-\mu^1}}^\infty d\xi_2.$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. В I_1 сделав замену переменных $\xi = \nu^{-\mu'} \eta$, получим

$$I_1 = \nu^{-(|\mu'| + (m, \mu'))} \int_0^1 \int_0^1 \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\nu(\nu^{-\mu'} \eta)} d\eta_1 d\eta_2 \leq C \nu^{-(|\mu'| + (m, \mu'))},$$

а в I_2 сделав замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}} \eta$, получим

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))} \int_0^{\nu^{\mu_1^{i+1} - \mu_1^i}} \int_{\nu^{\mu_2^{i+1} - \mu_2^i}}^{\infty} \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{\frac{2k\alpha_1}{\alpha_1}} \eta_2^{\frac{2k\alpha_1}{\alpha_2}}} e^{-\eta_1^{\frac{2k\alpha_1}{\alpha_1} + 1} \eta_2^{\frac{2k\alpha_1}{\alpha_2} + 1}} d\eta_1 d\eta_2 \\ &= C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))}. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\nu^{\mu_1^{i+1} - \mu_1^i}} \int_{\nu^{\mu_2^{i+1} - \mu_2^i}}^{\infty} \left(\eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right)^K e^{-\left(\eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right)^{\frac{2k\alpha_1}{\alpha_1}}} \eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{1}{\eta_2} e^{-\left(\eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right)^{\frac{2k\alpha_1}{\alpha_2} + 1}} d\eta_1 d\eta_2,$$

где K определяется формулой (1.6). После замены переменных $t = \eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$, $\tau = \eta_1^{\frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1}} \eta_2$, получим

$$I_2 \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))} \int_0^{\infty} e^{-t^{2k\alpha_1}} t^K dt \int_{\nu^{\left(\mu_2^{i+1} - \mu_2^i\right) \left(1 - \frac{\alpha_2^{i+1}}{\alpha_2^{i+1} + 1}\right) \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_1^{i+1} + 1}}}^{\infty} \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_1 + 1}}}{\tau} d\tau,$$

так как $\eta_1 = t \eta_2^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$, то $\tau = t^{\frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1}} \eta_2^{1 - \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_2 + 1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$. Пусть $\mu_2^{i+1} \leq \mu_2^i$, тогда имеем

$$\tau \geq t^{\frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1}} \nu^{(\mu_2^{i+1} - \mu_2^i) \left(1 - \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_2 + 1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} \geq t^{\frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1}}.$$

Последнее неравенство следует из того, что $\nu < 1$, $\mu_2^{i+1} \leq \mu_2^i$, $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1} + 1} \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} < 1$ (т.к. $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1} + 1} < \frac{m_1 + 1}{m_2 + 1}$, $\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} = \frac{m_2 + 1}{m_1 + 1}$, то $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1} + 1} \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} < 1$). В итоге получим, что

$$I_2 \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))} \int_0^{\infty} e^{-t^{2k\alpha_1}} t^K dt \int_{t^{\frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1}}}^{\infty} \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_1 + 1}}}{\tau} d\tau \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))},$$

так как $K > -1$, а интеграл $\int_0^{\infty} e^{-t^{2k\alpha_1}} t^K \ln t dt$ сходится при $K > -1$.

Если же $\mu_2^{i+1} > \mu_2^i$, то обозначим через $u = (\mu_2^{i+1} - \mu_2^i) \left(1 - \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}\right)$, тогда из формулы (1.8) получим

$$I_2 \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))} \int_0^\infty e^{-t^{2k\alpha_1^i}} t^K dt \left(\int_{\frac{\mu_1^{i+1}}{\alpha_1^{i+1}}}^1 \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_1^{i+1}}}}{\tau} d\tau + \int_1^\infty \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_1^{i+1}}}}{\tau} d\tau \right) \\ \leq (c_1 |\ln \nu| + c_2) \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))}.$$

В I_2 после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^i} \eta$, имеем

$$I_3 \leq C \nu^{-(|\mu^i| + (m, \mu^i))} \int_0^1 d\eta_2 \int_1^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^{i-1}}} \eta_2^{2k\alpha_2^{i-1}} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^i}} \eta_2^{2k\alpha_2^i} d\eta_1 \\ = \nu^{-(|\mu^i| + (m, \mu^i))}.$$

$$\int_1^\infty \int_0^1 \exp \left\{ - \left(\eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_1^{i-1}}{\alpha_1^{i-1}}} \right)^{2k\alpha_1^{i-1}} \right\} \eta_1^{-1} d\eta_1 \left(\eta_1^{\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i}} \eta_2 \right)^L \exp \left\{ - \left(\eta_1^{\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i}} \eta_2 \right)^{2k\alpha_2^i} \right\} \eta_1^{\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i}} d\eta_2.$$

Обозначив $t = \eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_1^{i-1}}{\alpha_1^{i-1}}}$, $\tau = \eta_1^{\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i}} \eta_2$, переходим к интегралу

$$I_3 \leq C \nu^{-(|\mu^i| + (m, \mu^i))} \int_0^\infty e^{-\tau^{2k\alpha_1^i}} \tau^L d\tau \int_{\frac{\alpha_1^{i-1}}{\alpha_1^{i-1}}}^\infty \frac{e^{-t^{2k\alpha_1^{i-1}}}}{t} dt \leq C \nu^{-(|\mu^i| + (m, \mu^i))},$$

так как $L > -1$. Наконец, для оценки I_4 сделав замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}} \eta$, получим

$$I_4 \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))} \int_{\nu^{\mu_1^{i+1} - \mu_1^i}}^\infty d\eta_1 \int_{\nu^{\mu_2^{i+1} - \mu_2^i}}^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^i}} \eta_2^{2k\alpha_2^i} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^{i+1}}} \eta_2^{2k\alpha_2^{i+1}} d\eta_2 \\ \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))} \int_0^\infty e^{-t^{2k\alpha_1^i}} t^K dt \int_{\frac{c}{\nu}}^\infty \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_1^{i+1}}}}{\tau} d\tau,$$

где $c = (\nu^{\mu_2^{i+1} - \mu_2^i}) \left(1 - \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}\right) t^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}$, то есть I_4 оценивается как I_2 (см. неравенство (1.8)). Следовательно, для I_4 имеем

$$I_4 \leq (c_1 |\ln \nu| + c_2) \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))}.$$

В итоге получим, что для некоторых постоянных $c_1, c_2 > 0$ имеет место неравенство

$$(1.9) \quad I \leq (c_1 |\ln \nu| + c_2) \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i))}.$$

Замечание 1.1. Множитель $|\ln \nu|$ появляется только в том случае, когда для некоторых i ($i = 1, \dots, M-1$) имеет место соотношение (1.7).

Перейдем теперь к доказательству неравенства (1.2). Пусть $\gamma_1 < \gamma_2$. Для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ имеем

$$D^m \hat{G}_{1,r}(t, \nu) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} e^{-i(t, \xi)} (\nu \cdot \xi^{n^*})^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} d\xi_1 d\xi_2, \quad (r = 0, 1, \dots, M).$$

Пусть для некоторого номера i ($i = 0, 1, \dots, M-1$) имеет место неравенство

$$(1.10) \quad \frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} > \frac{m_1 + (2k-1)\alpha_1^r + 1}{m_2 + (2k-1)\alpha_2^r + 1}, \quad \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1 + (2k-1)\alpha_1^r + 1}{m_2 + (2k-1)\alpha_2^r + 1}.$$

Тогда после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}} \eta$, получим

$$\begin{aligned} |D^m \hat{G}_{1,r}(t, \nu)| &\leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1})) + (2k-1)(1 - (\alpha^r, \mu^{i+1}))} \\ &\cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1 + (2k-1)\alpha_1^r} \eta_2^{m_2 + (2k-1)\alpha_2^r} e^{-\eta_1^{2k-1} \eta_2^{2k-1}} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^{i+1}} \eta_2^{2k\alpha_2^{i+1}}} d\eta_1 d\eta_2. \end{aligned}$$

Из условия (1.10), как аналог условия (1.5), следует, что последний интеграл можно представить в виде

$$\begin{aligned} |D^m \hat{G}_{1,r}(t, \nu)| &\leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1})) + (2k-1)(1 - (\alpha^r, \mu^{i+1}))} \\ &\cdot \int_0^\infty t^K e^{-t^{2k\alpha}} dt \int_0^\infty \tau^L e^{-\tau^{2k\alpha_2^{i+1}}} d\tau, \end{aligned}$$

где $K, L > -1$ некоторые числа. Так как $\nu < 1$, а $1 - (\alpha^r, \mu^{i+1}) \geq 0$, то имеем

$$|D^m \hat{G}_{1,r}(t, \nu)| \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))}.$$

В случае, когда для некоторого i ($i = 0, 1, \dots, M-1$)

$$\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} = \frac{m_1 + (2k-1)\alpha_1^r + 1}{m_2 + (2k-1)\alpha_2^r + 1}, \quad \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1 + (2k-1)\alpha_1^r + 1}{m_2 + (2k-1)\alpha_2^r + 1}$$

появляется множитель $|\ln \nu|$, как и при оценке интеграла I .

В итоге получим, что для некоторых постоянных c_1 и c_2 имеет место неравенство

$$|D^m \hat{G}_{1,r}(t, \nu)| \leq \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i))} (c_1 |\ln \nu| + c_2).$$

Оценим теперь выражение $\nu^{-N} t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} D^m \tilde{G}_{1,r}(t, \nu)$. По свойству преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned} & \nu^{-N} t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} D^m \tilde{G}_{1,r}(t, \nu) \\ &= \frac{1}{2\pi} \nu^{-N} \iint_{R^2} D_{\xi_1}^{N\gamma_1} D_{\xi_2}^{N\gamma_2} e^{-i(t, \xi)} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} 2k \left(\nu \xi^{\alpha^r} \right)^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

которое после интегрирования по частям переходит в интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \nu^{-N} \iint_{R^2} e^{-i(t, \xi)} D_{\xi_1}^{N\gamma_1} D_{\xi_2}^{N\gamma_2} \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} 2k \left(\nu \xi^{\alpha^r} \right)^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} \right) d\xi_1 d\xi_2.$$

Из формулы (1.8) работы [1], для производной функции $\Phi(\xi) e^{P(\nu, \xi)}$ имеем, что нужно оценить следующие интегралы

$$\begin{aligned} & \nu^{-N+2k-1} \sum_{\beta+\delta=N\gamma} C_{|\beta|}^{|\beta|} \int_0^\infty \int_0^\infty D_\xi^\delta \left(\xi_1^{m_1+(2k-1)\alpha_1^r} \xi_2^{m_2+(2k-1)\alpha_2^r} \right) \\ & \cdot \sum_{\sigma^1+\dots+\sigma^M=|\beta|} e^{-P(\nu, \xi)} \prod_{j=0}^{|\beta|} D_\xi^{\sigma^j} (P(\nu, \xi)) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

где произведение берется для тех j , для которых $|\sigma^j| > 0$.

Рассмотрим один из интегралов в данной сумме и в нем степень ξ_1 обозначим ρ_1 , а степень ξ_2 — ρ_2 . Если

а) $\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} < \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$ для степени ν , получим

$$\nu^{-(|\mu^1|+(m, \mu^1))} \nu^{-N} \nu^{(N\gamma, \mu^1)} \nu^{1-(\mu^1, \alpha^r)} \prod_{j=1}^{|\beta|} \nu^{1-(\mu^j, \alpha^j)},$$

где количество множителей $|\beta|$, а индексы j ($j = 0, 1, \dots, M$) могут повторяться. Так как $(N\gamma, \mu^1) = N$, $(\alpha^r, \mu^1) \leq 1$ ($r = 0, 1, \dots, M$), то степень при ν будет больше или равна, чем $-(|\mu^1| + (m, \mu^1))$. То есть получим

$$\left| \nu^{-N} t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} D^m \tilde{G}_{1,r}(t, \nu) \right| \leq C \nu^{-(|\mu^1|+(m, \mu^1))}.$$

б) если $\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} \geq \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то рассмотрим последнюю некоординатную сторону. Если $\frac{\alpha_1^{M-1}}{\alpha_2^{M-1}} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^M} \eta$, так как $(N\gamma, \mu^M) = N$ для степени ν получим то же самое, только везде μ^1 заменится на μ^M .

в) как и при оценке I , в случае

$$\frac{\alpha_1^{M-1}}{\alpha_2^{M-1}} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$$

рассмотрим те мультииндексы α^1 и α^{1+1} , для которых

$$\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}, \quad \frac{\alpha_1^{1+1}}{\alpha_2^{1+1}} < \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}.$$

Тогда после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}} \eta$ для степени ν , получим

$$\nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))} \nu^{-N} \nu^{(N\gamma, \mu^{i+1})} \nu^{1-(\mu^{i+1}, \alpha^r)} \prod_{j=1}^{|\mu|} \nu^{1-(\mu^{i+1}, \alpha^j)}.$$

Так как $(N\gamma, \mu^{i+1}) \geq N$, $(\alpha^r, \mu^{i+1}) \leq 1$ ($r = 0, 1, \dots, M$), то как и в предыдущем случае степень ν будет больше или равна, чем $-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))$, то есть

$$\left| \nu^{-N} t_1^{N\gamma} t_2^{N\gamma} D^m \tilde{G}_{1,r}(t, \nu) \right| \leq C \nu^{-(|\mu^{i+1}| + (m, \mu^{i+1}))}.$$

г) В случае, когда для некоторого i ($i = 1, \dots, M-1$) $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} > \frac{\alpha_1 i + 1}{\alpha_2 i + 1}$, $\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} = \frac{\alpha_1 i + 1}{\alpha_2 i + 1}$, $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{\alpha_1 i + 1}{\alpha_2 i + 1}$, то, как и при оценке интеграла I , имеем

$$(1.11) \quad \left| \nu^{-N} t_1^{N\gamma} t_2^{N\gamma} D^m \tilde{G}_{1,r}(t, \nu) \right| \leq \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i))} (a_1 |\ln \nu| + a_2)$$

при некоторых постоянных a_1 и a_2 . Так как $(N\theta, \mu^k) \geq N$ ($k = 1, \dots, M$), то аналогичная оценка справедлива и для $t_1^{N\theta} \tilde{G}_{1,r}(t, \nu)$, то есть

$$\left| \nu^{-N} t_1^{N\theta} \tilde{G}_{1,r}(t, \nu) \right| \leq \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i))} (a_1 |\ln \nu| + a_2),$$

и неравенство (1.2) доказано.

Аналогично доказываются неравенства (1.3) и (1.4). $\square$

Замечание 1.2. В неравенствах (1.2)–(1.4) множитель $|\ln \nu|$ появляется только в том случае, когда для некоторого i имеет место соотношение (1.7).

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

Как и в работе [1], для любой функции f рассмотрим усреднение с ядром усреднения $\tilde{G}_0(t, \nu)$

$$(2.1) \quad f_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(t) \tilde{G}_0(t-x, \nu) dt.$$

Справедливы следующие свойства усреднения $f_\nu(x)$.

Лемма 2.1. Если $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, то $f_\nu \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $\|f_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$, $1 < p < \infty$, а при $1 \leq p < \infty$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f_\nu - f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Доказательство не отличается от доказательства леммы 2.1 работы [1].

Имеет место следующая теорема об интегральном представлении.

Теорема 2.1. Пусть для функции f существуют обобщенные производные $D^{\alpha^i} f$ ($i = 0, 1, \dots, M$), где α^i — вершины выпятого правильного многоугольника Ω и $D^{\alpha^i} f \in L_p(\mathbb{R}^2)$ ($i = 0, 1, \dots, M$), тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^2$ имеет место представление

$$(2.2) \quad f(x) = f_h(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^M \int_{\varepsilon}^h d\nu \int_{\mathbb{R}^2} D^{\alpha^i} f(t) \tilde{G}_{1,i}(t-x, \nu) dt.$$

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 3.1 работы [1].

Наконец, применяя лемму 1.1 и теорему 2.1, как и в работе [1], можно доказать теорему вложения.

Теорема 2.2. Пусть $f \in W_p^{\Omega}(\mathbb{R}^2) = \{f; f \in L_p(\mathbb{R}^2), D^{\alpha^i} f \in L_p(\mathbb{R}^2), 1 \leq p < \infty, i = 0, 1, \dots, M\}$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ — точка пересечения прямых $(\mu^1, \alpha) = 1$ и $(\mu^M, \alpha) = 1$. Тогда, если

$$\chi = \max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i)) - |\mu^M| \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) < 1 \text{ при } \gamma_1 < \gamma_2,$$

$$\chi = \max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i)) - |\mu^1| \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) < 1 \text{ при } \gamma_1 \geq \gamma_2,$$

то $D^m W_p^{\Omega}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^2)$, то есть любая функция $f \in W_p^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ имеет обобщенную производную $D^m f$, принадлежащую пространству $L_q(\mathbb{R}^2)$, и при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ имеет место неравенство

$$(2.3) \quad \|D^m f\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \leq h^{1-\chi} (a_1 |\ln h| + a_2) \sum_{i=0}^M \|D^{\alpha^i} f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} + h^{-\chi} (b_1 |\ln h| + b_2) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},$$

где постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 не зависят от f и h , а b_1, b_2 также не зависят от q , $h > 0$ — произвольный параметр. При $\gamma_1 = \gamma_2$ имеет место аналогичное неравенство неравенству (2.3), где многочлены относительно $|\ln h|$ имеют второй порядок.

Доказательство. Случай $\gamma_1 < \gamma_2$ и $\gamma_1 > \gamma_2$ доказываются аналогично как и в доказательстве теоремы 4.1 работы [1]. Докажем случай $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Из интегрального представления (2.2) имеем, что для любых параметров ε и h ($0 < \varepsilon < h$)

$$D^m f_h(x) - D^m f_{\varepsilon}(x) = \sum_{j=0}^M \int_{\varepsilon}^h d\nu \int_{\mathbb{R}^2} D^{\alpha^j} f(t) D^m \tilde{G}_{1,j}(t-x, \nu) dt.$$

Применяя неравенство Юнга, получим
(2.4)

$$\|D^m f_h(x) - D^m f_c(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \leq \sum_{j=0}^M \int_{\varepsilon}^h d\nu \int_{\mathbb{R}^2} \|D^{\alpha^j} f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \|D^m \hat{G}_{1,j}(\cdot, \nu)\|_{L_r(\mathbb{R}^2)},$$

где $1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Оценим $\|D^m \hat{G}_{1,j}(\cdot, \nu)\|_{L_r(\mathbb{R}^2)}$. Из неравенства (1.4) имеем

$$\|D^m \hat{G}_{1,j}(\cdot, \nu)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^2)} \leq \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i))} (c_1 |\ln \nu| + c_2)$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dt_1 dt_2}{\left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\gamma} + t_1^{N\theta}\right)\right)^r \left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\gamma} + t_2^{N\sigma}\right)\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Оценим последний интеграл. Так как $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то $|\mu^1| = |\mu^M|$, $\mu_1^1 > \mu_1^M$, следовательно, $\mu_2^1 < \mu_2^M$. Разделим интеграл на следующие слагаемые (показатель r пропустим, потому что при $n = 2$ он не влияет на сходимость интеграла):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dt_1 dt_2}{\left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\gamma} + t_1^{N\theta}\right)\right) \left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\gamma} + t_2^{N\sigma}\right)\right)} \\ &= \int_0^{\mu_1^1} dt_1 \int_0^{\mu_2^1} dt_2 + \int_{\mu_1^1}^\infty dt_1 \int_0^{\mu_2^1} dt_2 + \int_0^{\mu_1^1} dt_1 \int_{\mu_2^1}^\infty dt_2 + \int_{\mu_1^1}^\infty dt_1 \int_{\mu_2^1}^\infty dt_2 \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

В I_1 произведя замену переменных $t = \nu^{\mu^1} \eta$, получим

$$I_1 \leq C\nu^{|\mu^1|} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1 + (\eta_1 \eta_2)^{N\gamma} + \eta_2^{N\sigma}} \leq C\nu^{|\mu^1|},$$

а в I_2 произведя замену переменных $t = \nu^{\mu^1} \eta$, получим

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C\nu^{|\mu^M|} \int_{\nu^{\mu_1^1 - \mu_1^M}}^\infty d\eta_1 \int_0^{\nu^{\mu_2^1 - \mu_2^M}} \frac{d\eta_2}{1 + (\eta_1 \eta_2)^{N\gamma} + \eta_2^{N\sigma}} \\ &\leq C\nu^{|\mu^M|} \left(\int_{\nu^{\mu_1^1 - \mu_1^M}}^1 \frac{d\eta_1}{\eta_1} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^{N\gamma}} + \int_1^\infty \frac{d\eta_1}{\eta_1} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^{N\gamma} + \eta_1^{N\theta}} \right) \leq \nu^{|\mu^M|} (d_1 |\ln \nu| + d_2) \end{aligned}$$

для некоторых постоянных d_1 и d_2 . В I_3 после преобразования $t = \nu^{\mu^1} \eta$, получим

$$I_3 \leq C\nu^{|\mu^1|} \int_1^\infty d\eta_2 \int_0^1 \frac{d\eta_1}{1 + (\eta_1 \eta_2)^{N\gamma} + \eta_2^{N\sigma}} \leq C\nu^{|\mu^1|} \int_1^\infty \frac{d\eta_2}{1 + \eta_2^{N\sigma}} \int_0^1 d\eta_1 \leq C\nu^{|\mu^1|}.$$

После преобразования $\xi = \nu^{\mu^1} \eta$ для I_4 , получим

$$I_4 \leq \nu^{|\mu^1|} \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1 + \eta_2^{N\gamma} + \eta_1^{N\sigma}} \leq C\nu^{|\mu^1|}.$$

В итоге имеем, что

$$\begin{aligned} \|D^m \hat{G}_{1,j}(\cdot, \nu)\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} &\leq \nu^{-\max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i)) + \frac{|\mu^1|}{r}} (e_0 |\ln \nu|^2 + e_1 |\ln \nu| + e_2) \\ &= (e_0 |\ln \nu|^2 + e_1 |\ln \nu| + e_2) \nu^{-x} \end{aligned}$$

для некоторых постоянных e_0, e_1, e_2 .

Подставляя полученную оценку в (2.4) и интегрируем по ν (с учетом того, что $\chi < 1$), получим

$$\|D^m f_h(x) - D^m f_\varepsilon(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \leq h^{1-x} (c_0 |\ln h|^2 + c_1 |\ln h| + c_2) \sum_{i=0}^M \|D^{\alpha^i} f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Отсюда, как и в работе [1], следует, что $f_h \rightarrow f$ в $L_p(\mathbb{R}^2)$ при $h \rightarrow 0$, и для f существует обобщенная производная $D^m f$, принадлежащая пространству L_q , для которой выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|D^m f\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} &\leq h^{1-x} (c_0 |\ln h|^2 + c_1 |\ln h| + c_2) \sum_{i=0}^M \|D^{\alpha^i} f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \\ &+ h^{-x} (e_0 |\ln h|^2 + e_1 |\ln h| + e_2) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Теорема 2.2 доказана. $\square$

Замечание 2.1. В неравенстве (2.9) множитель $|\ln h|$ появляется только в том случае, когда для некоторого i ($i = 0, 1, \dots, M$) имеет место соотношение (1.7). В противном случае коэффициенты a_1 и b_1 можно взять нулевыми, и неравенство (2.9) превратится в обычное интерполяционное неравенство. Необходимость появления логарифмического множителя в случае (1.7) обоснована в работе [1].

Из теоремы 2.2 для вложения $D^\alpha W_p^{\beta 1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^2)$ имеем:

Теорема 2.3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $m = (m_1, m_2)$ - мультииндекс. Обозначим

$$\chi = \max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i)) - |\mu^M| \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{при } \gamma_1 < \gamma_2,$$

$$\chi = \max_{i=1, \dots, M} (|\mu^i| + (m, \mu^i)) - |\mu^1| \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{при } \gamma_1 \geq \gamma_2.$$

Тогда, если $\chi < 1$, то $D^m W_p^m(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^2)$, то есть для любого $f \in W_p^m(\mathbb{R}^2)$ производная $D^m f$ почти всюду непрерывна в $\mathbb{R}^2$, и имеет место неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D^m f(x)| \leq h^{1-\chi} (a_1 |\ln h| + a_2) \sum_{i=0}^M \|D^{\alpha^i} f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} + h^{-\chi} (b_1 |\ln h| + b_2) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Abstract. The present paper is a continuation of the author's paper [1], where by means of a special integral representation of functions we prove embedding theorems for multianisotropic functional spaces. In contrast to [1], here we consider the case where the corresponding completely regular polyhedron has many anisotropy vertices.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. А. Карапетян, "Интегральное представление и теоремы вложения для мультианизотропных пространств в плоскости с одной вершиной анизотропии", Изв. НАН Армении, **61**, no. 6, 23 – 42 (2016).
- [2] С. Л. Соболев, "Об одной теореме функционального анализа", Мат. ст. 4 [36]:3, 471 – 497 (1938).
- [3] С. М. Никольский, "Об одной задаче С. Л. Соболева", Сиб. Мат. Ж., 3, no. 6, 845 – 857 (1962).
- [4] K. T. Smith, "Inequalities for formally positive integro-differential forms", Bull. Amer. Math., 368 – 370 (1961).
- [5] В. П. Ильин, "Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^l(G)$ ", Сиб. Мат. Журн., 8, no. 3, 573 – 586 (1967).
- [6] О. В. Бесов, "О коэрцитивности в изотропном пространстве С. Л. Соболева", Мат. ст., **73** (115), no. 4, 585 – 599 (1967).
- [7] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, М., Наука, (1975).

Поступила 10 марта 2016

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR DISCRETE FRACTIONAL DIFFERENCE INCLUSIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS

W. LV

Longdong University, Qingyang, Gansu, China
E-mail: lwweidong2004@163.com

Abstract. This paper is mainly concerned with the existence of solutions for a certain class of discrete fractional difference inclusions with boundary conditions. Under certain suitable conditions, the existence results are established by using fixed point theory for multi-valued upper semi-continuous maps. Also, an example is presented to illustrate the possible applications of the obtained results.¹

MSC2010 numbers: 26A33, 39A10, 39A12.

Keywords: Discrete fractional difference inclusion; boundary condition; existence; upper semi-continuity; fixed point theory.

1. INTRODUCTION

For $a, b \in \mathbb{R}$, such that $b - a$ is a nonnegative integer, we denote $N_a = \{a, a + 1, a + 2, \dots\}$ and $N_a^b = \{a, a + 1, \dots, b\}$. In what follows, for any function $u: N_a \rightarrow \mathbb{R}$ we assume that $\sum_{s=a}^{k_1+k_2-1} u(s) = 0$, where $k_1, k_2 \in N_a$ with $k_1 > k_2$.

In this paper, we study the existence of solutions for the following discrete fractional difference inclusion with boundary conditions:

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta^\alpha u(t) \in F(t + \alpha - 1, u(t + \alpha - 1)), & t \in N_0^b, \\ u(\alpha - 2) = \Delta^{\alpha-1} u(b + 1) = 0, \end{cases}$$

where $\alpha \in (1, 2]$, $b \in N_1$, Δ^α denotes the discrete Riemann-Liouville fractional difference of order α , $F: N_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ is a multi-valued function, and $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ stands for the family of all subsets of $\mathbb{R}$.

It is well known that the discrete analogues of differential equations can be very useful in applications, in particular, for using computer to simulate the behavior of solutions for certain dynamic equations (see [1, 2]). Although, compared to the continuous case, significantly less is known about the discrete fractional calculus, in recent several years, there has been an increase interest in developing the theory of discrete fractional difference equations (see [3-9], and reference therein). On the other hand, many real problems arising in applications, for instance, in economics, in optimal control, etc., can be modeled as differential inclusions. So, differential

¹This work was supported by the Longdong University Grant XYZK-1402 and the Science Research Project of Gansu University 2016B-103.

inclusions were in the focus of many authors (see [10-12]). The study of fractional differential inclusions was initiated by Sayed and Ibrahim [13].

Although, the solvability of discrete boundary value problems for fractional difference equations has been studied extensively, there are only few papers dealing with discrete difference inclusions (see [14, 15]). Moreover, to the best of our knowledge, the question of existence of solutions for discrete fractional difference inclusions with boundary conditions has not been studied. So, in this paper, we discuss this problem and provide some sufficient conditions for the existence of solutions for problem (1.1).

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we present some preliminaries: necessary basic definitions and some results from discrete fractional calculus and multi-valued analysis. In Section 3, the existence results for the solution of the problem (1.1) are established with the help of the fixed point theory for multi-valued upper semi-continuous maps. Finally, in Section 4, an example is provided to illustrate the possible applications of the obtained analytical results.

2. PRELIMINARIES

In this section, we first present some necessary basic definitions and lemmas about discrete fractional calculus, which can be found in [3, 7].

Definition 2.1. For any t and ν , the falling factorial function is defined as follows:

$$t^{\underline{\nu}} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\nu)},$$

provided that the right-hand side is well defined. We appeal to the convention that if $t+1-\nu$ is a pole of the Gamma function and $t+1$ is not a pole, then $t^{\underline{\nu}} = 0$.

Definition 2.2. For a given $\nu > 0$, the ν -th discrete fractional sum of a function $f: \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$\Delta_a^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} (t-s-1)^{\underline{\nu-1}} f(s), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\nu}.$$

Also, we define the trivial sum $\Delta_a^0 f(t) = f(t)$, $t \in \mathbb{N}_a$.

Definition 2.3. For a given $\nu > 0$, the ν -th discrete Riemann-Liouville fractional difference of a function $f: \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$\Delta_a^{\nu} f(t) = \Delta^n \Delta_a^{-(n-\nu)} f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+n-\nu},$$

where n is the smallest integer greater than or equal to ν and Δ^n is the n -th order forward difference operator. If $\nu = n \in \mathbb{N}_1$, then $\Delta_a^{\nu} f(t) = \Delta^n f(t)$.

Lemma 2.1. Let $\nu > 0$. Then

$$\Delta^{-\nu} \Delta^{\nu} f(t) = f(t) + c_1 t^{\underline{-1}} + c_2 t^{\underline{-2}} + \cdots + c_n t^{\underline{-n}},$$

where $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, and n is the smallest integer greater than or equal to ν .

Lemma 2.2. *Let $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ and $\nu, \mu > 0$. Then*

$$\Delta_{a+\mu}^{-\nu} \Delta_a^{-\mu} f(t) = \Delta_a^{-\nu-\mu} f(t) = \Delta_{a+\mu}^{-\mu} \Delta_a^{-\nu} f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}.$$

Lemma 2.3. *Let $a \in \mathbb{R}$ and $\mu > 0$ be given. Then, for $v \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}_1$,*

$$\Delta_{a+\mu}^{\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} = \mu^{\underline{\mu}}(t-a)^{\underline{\mu-\nu}}, \quad t \in \mathbb{N}_{a+\mu+n-\nu}.$$

Next, we briefly recall some basic definitions from the theory of multi-valued functions. For more details on multi-valued maps, we refer the reader to [11].

For a normed space $(X, \|\cdot\|)$, let $P_b(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ is bounded}\}$, where $\mathcal{P}(X)$ denotes the family of all subsets of X . Then a multi-valued map $G : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ is convex (closed, compact) valued if $G(x)$ is convex (closed, compact) for all $x \in X$. G is bounded on bounded sets if $G(B) = \bigcup_{x \in B} G(x)$ is bounded in X for all $B \in P_b(X)$, that is, $\sup_{x \in B} \{\sup\{\|y\| : y \in G(x)\}\} < \infty$. G is called upper semi-continuous (u.s.c., for short) on X if for each $x_0 \in X$ the set $G(x_0)$ is a nonempty, closed subset of X , and for each open set $\mathcal{N}$ of X containing $G(x_0)$, there exists an open neighborhood $\mathcal{N}_0$ of x_0 such that $G(\mathcal{N}_0) \subset \mathcal{N}$. G is said to be completely continuous if $G(B)$ is relatively compact for every $B \in P_b(X)$. If a multi-valued map G is completely continuous with nonempty compact values, then G is u.s.c. if and only if G has a closed graph, that is, $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$, $y_n \in G(x_n)$ imply $y_0 \in G(x_0)$. Finally, we state two fixed point theorems for multi-valued maps, which will be used in the proofs of our main results.

Lemma 2.4. (see [16]). *Let D be a nonempty closed convex subset of a Banach space E , and let $G : D \rightarrow \mathcal{P}(D)$ be an u.s.c. compact map with nonempty, closed and convex values. Then G has a fixed point in D .*

Lemma 2.5. (see [16]). *Let E be a Banach space, U be an open subset of E and $\theta \in U$. Suppose $G : \bar{U} \rightarrow \mathcal{P}(E)$ is an u.s.c. compact map with nonempty, closed and convex values. Then either*

- (i) G has a fixed point in $\bar{U}$, or
- (ii) there are $u \in \partial U$ and $\lambda \in (0, 1)$ such that $u \in \lambda G(u)$.

3. THE MAIN RESULTS

In this section, we establish the existence of solutions for the problem (1.1). To accomplish this, we first give the definition of solutions for the problem (1.1), and prove a basic lemma which is crucial in the proofs of our main results.

Definition 3.1. *A function $u : \mathbb{N}_{a-2}^{b+a} \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be a solution for problem (1.1) if there exists a function $v : \mathbb{N}_{a-1}^{b+a-1} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $v(t) \in F(t, u(t))$ on $\mathbb{N}_{a-1}^{b+a-1}$, and*

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta^\alpha u(t) = v(t + \alpha - 1), & t \in \mathbb{N}_0^b, \\ u(\alpha - 2) = \Delta^{\alpha-1} u(b+1) = 0, \end{cases}$$

Lemma 3.1. Let $v : \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \rightarrow \mathbb{R}$ be given. The unique solution of (3.1) is given by

$$u(t) = \sum_{s=0}^b G(t, s) v(s + \alpha - 1), \quad t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha},$$

where

$$(3.2) \quad G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1} - (t-s-1)^{\alpha-1}, & s \in \mathbb{N}_0^{b-\alpha}, \\ t^{\alpha-1}, & s \in \mathbb{N}_{t-\alpha+1}^b. \end{cases}$$

Proof. Suppose that $u : \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the equation in problem (3.1). Then we can apply Lemma 2.1 to conclude that

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{\alpha-1} v(s + \alpha - 1) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2},$$

for some $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha}$. By $u(\alpha-2) = 0$, we get $c_2 = 0$. Therefore,

$$(3.3) \quad u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{\alpha-1} v(s + \alpha - 1) + c_1 t^{\alpha-1}, \quad t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha}.$$

Next, by virtue of Lemmas 2.2 and 2.3, and the fact that the equality $\Delta^{\alpha} \Delta^{-\alpha} g(t) = g(t)$ holds for any function g with $t \in (0, +\infty)$, we have

$$(3.4) \quad \Delta^{\alpha-1} u(t) = -\sum_{s=0}^{t-1} v(s + \alpha - 1) + c_1 \Gamma(\alpha), \quad t \in \mathbb{N}_0^{b+1}.$$

Using the condition $\Delta^{\alpha-1} u(b+1) = 0$, from (3.4) we obtain

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^b v(s + \alpha - 1).$$

Now, substituting the obtained relation of c_1 into (3.3), we get

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{\alpha-1} v(s + \alpha - 1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^b t^{\alpha-1} v(s + \alpha - 1) \\ &= \sum_{s=0}^b G(t, s) v(s + \alpha - 1), \quad t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha}, \end{aligned}$$

where $G(t, s)$ is defined by (3.2), and the result follows. $\square$

Remark 3.1. From the expression of $G(t, s)$, given in (3.2), we can easily infer that

$$0 \leq G(t, s) \leq (b + \alpha - 1)^{\alpha-1} \quad \text{for } (t, s) \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha} \times \mathbb{N}_0^b.$$

Next, we denote $X = \{x : \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha} \rightarrow \mathbb{R}\}$ and $Y = \{y : \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \rightarrow \mathbb{R}\}$, and observe that X and Y become Banach spaces when equipped with the usual maximum norm, that is, for any $x \in X$ and $y \in Y$, $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha}\}$ and $\|y\| = \max\{|y(t)| : t \in \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1}\}$.

Define an operator $N : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ by

$$(3.5) \quad N(u) = \left\{ h \in X : h(t) = \sum_{s=0}^b G(t, s) v(s + \alpha - 1), v \in S_{F, u} \right\},$$

where $S_{F, u} = \{v \in Y : v(t) \in F(t, u(t)), t \in \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1}\}$.

Now we list a number of assumptions to be used in the statements of the main results.

(H₁) $F : \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ is a nonempty, compact and convex multi-valued map;

(H₂) $x \mapsto F(t, x)$ is u.s.c. for each $t \in \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1}$;

(H₃) For each $r > 0$, there exists a function $\varphi_r : \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \rightarrow [0, +\infty)$ such that

$$(3.6) \quad \|F(t, x)\|_{\mathcal{P}} = \sup\{|y| : y \in F(t, x)\} \leq \varphi_r(t)$$

for each $(t, x) \in \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \times [-r, r]$, and $\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \sum_{t=\alpha-1}^{b+\alpha-1} \varphi_r(s) = \beta$;

(H₃') there exist nonnegative functions $a, b \in Y$, and $\theta \in (0, 1)$ such that

$$\|F(t, x)\| \leq a(t) + b(t)|x|^{\theta}, \quad (t, x) \in \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \times \mathbb{R}.$$

(H₄) there exist a nondecreasing function $\psi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, a function $p : \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \rightarrow [0, \infty)$ satisfying $\sum_{t=\alpha-1}^{b+\alpha-1} p(t) \neq 0$, and a positive number M , such that

$$\|F(t, x)\|_{\mathcal{P}} = \sup\{|y| : y \in F(t, x)\} \leq p(t)\psi(|x|)$$

for $(t, x) \in \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \times \mathbb{R}$, and $M > (b + \alpha - 1)^{\alpha-1} \psi(M) \sum_{t=\alpha-1}^{b+\alpha-1} p(t) > 1$.

Now we are in a position to state the main results of the paper.

Theorem 3.1. *If assumptions (H1)-(H3) are fulfilled, and*

$$(3.7) \quad \beta(b + \alpha - 1)^{\alpha-1} < 1,$$

then problem (1.1) has at least one solution in X .

Proof. We divide the proof into three steps, to show that the operator N , defined by (3.5), satisfies all the assumptions of Lemma 2.4.

Step 1. We show that the operator $N(u)$ is convex for any $u \in X$.

Indeed, if $h_1, h_2 \in N(u)$, then there exist $v_1, v_2 \in S_{F, u}$ such that for each $t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha}$, we have

$$h_i(t) = \sum_{s=0}^b G(t, s) v_i(s + \alpha - 1), \quad i = 1, 2.$$

Let $\omega \in [0, 1]$, then for each $t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha}$, we have

$$[\omega h_1 + (1 - \omega) h_2](t) = \sum_{s=0}^b G(t, s) [\omega v_1(s + \alpha - 1) + (1 - \omega) v_2(s + \alpha - 1)].$$

Since $S_{F, u}$ is convex (because F assumes convex values), we have $\omega h_1 + (1 - \omega) h_2 \in N(u)$, implying that $N(u)$ is convex for any $u \in X$.

Step 2. We show that there exists a number $r' > 0$ such that $N : B_{r'} \rightarrow \mathcal{P}(B_{r'})$ is a completely continuous map with compact values, where $B_{r'} = \{u \in X, \|u\| \leq r'\}$. Indeed, if the claimed assertion is not true, then for each positive number r , a function $u_r \in B_r$ can be found such that $h_r \in N(u_r)$ and $\|h_r\| > r$ with

$$h_r(t) = \sum_{s=0}^b G(t, s) v_r(s + \alpha - 1),$$

for some $v_r \in S_{F, u_r}$. On the other hand, from (3.6) in (H_3) and Remark 3.1, we have

$$\begin{aligned} r < \|h_r\| &= \max_{t \in J_{b+\alpha-1}} \left| \sum_{s=0}^b G(t, s) v_r(s + \alpha - 1) \right| \\ &\leq (b + \alpha - 1)^{\alpha-1} \sum_{s=0}^b |v_r(s + \alpha - 1)| \leq (b + \alpha - 1)^{\alpha-1} \sum_{s=0}^b \varphi_r(s + \alpha - 1). \end{aligned}$$

Dividing both sides by r and taking the lower limit as $r \rightarrow \infty$, we conclude that $\beta(b + \alpha - 1)^{\alpha-1} \geq 1$, which contradicts (3.7). Hence, the existence of a positive number r' is proved. Furthermore, since X is a finite dimension space, the operator $N : B_{r'} \rightarrow \mathcal{P}(B_{r'})$ is completely continuous with compact values.

Step 3. We show that N is a u.s.c. map.

For this purpose, we first define the linear continuous operator $\Theta : Y \rightarrow X$, by

$$v \mapsto (\Theta v)(t) = \sum_{s=0}^b G(t, s) v(s + \alpha - 1) \quad t \in \mathbb{N}_{b+\alpha}^{b+\alpha-1}.$$

Let $u_n \rightarrow u_0$, $h_n \in N(u_n)$ and $h_n \rightarrow h_0$ as $n \rightarrow \infty$. It is easy to see that we only have to show that $h_0 \in N(u_0)$. To this end, observe first that the relation $h_n \in N(u_n)$ means that there exists $v_n \in S_{F, u_n}$ such that $h_n = \Theta v_n$. Since $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ is bounded, from its convergence and the condition (3.6) in (H_3) it follows that there exists a compact set Ω of Y with $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \Omega$ (see [17, p. 262]). Therefore there exists a convergent subsequence $\{v_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ of $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ such that $v_{n_k} \rightarrow v_0$ as $k \rightarrow \infty$.

Now, let $v_{n_k} \rightarrow v_0$ as $k \rightarrow \infty$ and $v_{n_k}(t) \in F(t, u_{n_k}(t))$ for all $t \in \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1}$. Then, since $F(t, \cdot)$ is u.s.c. for all $t \in \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1}$, we can conclude that $v_0(t) \in F(t, v_0(t))$, implying that $v_0 \in S_{F, u_0}$. Next, since $v_{n_k} \rightarrow v_0$ as $k \rightarrow \infty$ and Θ is continuous, we see that $h_{n_k} = \Theta v_{n_k} \rightarrow \Theta v_0$ as $k \rightarrow \infty$, and hence $h_0 = \Theta v_0 \in \Theta(S_{F, u_0}) = N(u_0)$. As a result, N is a u.s.c. map.

Thus, $N : B_{r'} \rightarrow \mathcal{P}(B_{r'})$ is a compact multi-valued map, and is a u.s.c. with convex closed values. Hence we can apply Lemma 2.4 to conclude that N has at least one fixed point $u \in B_{r'} \subset X$, which is a solution of the problem (1.1). $\square$ As an immediate consequence of Theorem 3.1, we can obtain the following result.

Corollary 3.1. *If assumptions (H_1) , (H_2) and (H_3) are fulfilled, then problem (1.1) has at least one solution.*

Theorem 3.2. *If assumptions (H_1) , (H_2) and (H_4) are fulfilled, then problem (1.1) has at least one solution.*

Proof. In order to use Lemma 2.5, we first show that the set

$$S = \{u \in X : u \in \lambda N(u) \text{ for some } \lambda \in (0, 1)\}$$

is bounded, where N is defined by (3.5).

Let $u \in S$, then there exists a function $v \in S_{F,u}$ such that for each $t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{\alpha+b}$, we have $u(t) = \lambda \sum_{s=0}^b G(t, s)v(s + \alpha - 1)$ for some $\lambda \in (0, 1)$. Hence, in view of assumption (H_4) , for any $t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{\alpha+b}$, we can write

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \lambda \sum_{s=0}^b G(t, s)v(s + \alpha - 1) \right| \leq \max_{t \in \mathbb{N}_{\alpha-2}^{\alpha+b}} \sum_{s=0}^b G(t, s)|v(s + \alpha - 1)| \\ &\leq (b + \alpha - 1)^{\alpha-1} \sum_{s=0}^b p(s + \alpha - 1)\psi(|u(s + \alpha - 1)|) \\ &\leq (b + \alpha - 1)^{\alpha-1}\psi(\|u\|) \sum_{s=0}^b p(s + \alpha - 1). \end{aligned}$$

This shows that the set S is bounded, and the inequality

$$\|u\| \leq (b + \alpha - 1)^{\alpha-1}\psi(\|u\|) \sum_{s=0}^b p(s + \alpha - 1)$$

holds for each $u \in S$. Then by (H_4) , there exists M such that $\|u\| \neq M$.

Define $U = \{u \in X : \|u\| < M\}$. Just as in the proof of Theorem 3.1, we can show that the operator $N : U \rightarrow \mathcal{P}(X)$ is a compact multi-valued map, and is u.s.c. with convex closed values. From the choice of U , we can easily find that the second possibility given in Lemma 2.5 is ruled out. So, the first possibility of Lemma 2.5 holds and we can conclude that N has at least one fixed point $u \in \bar{U} \subset X$, which is a solution of problem (1.1). $\square$

4. AN EXAMPLE

In this section, we discuss an example to illustrate the possible applications of the above established analytical results.

Example 4.1. Consider the following problem

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\Delta^\alpha u(t) \in F(t + \alpha - 1, u(t + \alpha - 1)), & t \in \mathbb{N}_0^b, \\ u(\alpha - 2) = \Delta^{\alpha-1} u(b + 1) = 0, \end{cases}$$

where $\alpha \in (1, 2]$, $b \in \mathbb{N}_1$ and $F : \mathbb{N}_{\alpha-1}^{\alpha+b-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ is a multi-valued map defined by

$$(t, x) \mapsto F(t, x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 2} + t, \frac{x^2}{x^2 + 1} + t + 1 \right].$$

It is clear that F satisfies assumptions (Π_1) and (Π_2) . Then, for any $v \in [\frac{x^2}{x^2+2} + t, \frac{x^2}{x^2+1} + t + 1]$, we have

$$|v| \leq \max \left\{ \frac{x^2}{x^2+2} + t, \frac{x^2}{x^2+1} + t + 1 \right\} \leq 1 + b + \alpha$$

for each $(t, x) \in \mathbb{N}_{\alpha-1}^{b+\alpha-1} \times \mathbb{R}$. Therefore, $\|F(t, x)\|_p \leq 1 + b + \alpha$, showing that the assumption (H_3) is satisfied. So, in view of Corollary 3.1, we can conclude that problem (4.1) has at least one solution on $\mathbb{N}_{\alpha-2}^{b+\alpha}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Hilacher, V. Zeidan, "Nonnegativity and positivity of quadratic functionals in discrete calculus of variations: survey", *J. Difference Equ. Appl.*, **11** (9), 857 – 875 (2005).
- [2] W. Kelley, A. Peterson, *Difference Equations: An Introduction with Applications*, Academic Press, New York, USA (1991).
- [3] F. Atici, P. Eloe, "A transform method in discrete fractional calculus", *Int. J. Difference Equ.*, **2** (2), 165 – 176 (2007).
- [4] C. Goodrich, "On a fractional boundary value problem with fractional boundary conditions", *Appl. Math. Lett.*, **25** (8), 1101 – 1104 (2012).
- [5] N. Dastos, R. Ferrelra, D. Torres, "Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **29** (2), 417 – 437 (2011).
- [6] T. Abdeljawad, "On Riemann and Caputo fractional differences", *Comput. Math. Appl.*, **62** (3), 1002 – 1011 (2011).
- [7] M. Holm, "Sum and difference compositions in discrete fractional calculus", *CUBO*, **13** (3), 153 – 184 (2011).
- [8] W. Lv, "Existence of solutions for discrete fractional boundary value problems with a p -Laplacian operator", *Adv. Differ. Equ.*, **2012**, 2012:163.
- [9] W. Lv, J. Feng, "Nonlinear discrete fractional mixed type sum-difference equation boundary value problems in Banach spaces", *Adv. Differ. Equ.*, **2014**, 2014:184.
- [10] B. Paden, S. Sastry, "A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **34** (1), 73 – 82 (1987).
- [11] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, Walter De Gruyter, Berlin, Germany (1992).
- [12] Y. Chang, W. Li, J. Nieto, "Controllability of evolution differential inclusions in Banach spaces", *Nonlinear Anal.*, **67** (2), 623 – 632 (2007).
- [13] A. El-Sayed, A. Ibrahim, "Multivalued fractional differential equations", *Appl. Math. Comput.*, **68** (1), 15 – 26 (1995).
- [14] R. Agarwal, D. O'Regan, V. Lakshmikantham, "Discrete second order inclusions", *J. Difference Equ. Appl.*, **9** (10), 879 – 885 (2003).
- [15] N. Apreutesei, G. Apreutesei, "A Trotter-Kato type result for a second order difference inclusion in a Hilbert space", *J. Math. Anal. Appl.*, **361** (1), 195 – 204 (2010).
- [16] R. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [17] R. Agarwal, D. O'Regan, P. Wong, *Positive Solutions of Differential, Difference and Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999).

Поступила 28 июля 2015

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОЕКТОРЫ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, ГАРМОНИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

А. И. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: apetrosyan@ysu.am

Аннотация. В статье вводится банахово пространство гармонических функций $h_\infty(\varphi)$, $h_0(\varphi)$, и $h^1(\eta)$, заданных в единичном шаре в $\mathbb{R}^n$. Эти пространства зависят от весовой функции φ и весовой меры η . Для заданной функции φ из достаточно широкого класса решается задача двойственности, т.е. строятся меры η такие, что $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$ и $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$.

MSC2010 number: 30H05, 46E15.

Ключевые слова: банахово пространство; гармоническая функция; весовая функция; весовая мера; ограниченный проектор; двойственность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Положительная, непрерывная и убывающая на $[0, 1]$ функция φ называется весовой функцией, если $\lim_{r \rightarrow 1} \varphi(r) = 0$ при $r \rightarrow 1$. Конечная, положительная борелевская мера η на $[0, 1]$ называется весовой мерой, если ее носитель не сосредоточен ни на каком подинтервале $[0, \rho]$, $0 < \rho < 1$.

Пусть $h_\infty(\varphi)$ — банахово пространство комплекснозначных функций u , гармонических в единичном круге, с нормой $\|u\|_\varphi = \sup\{u(z)\varphi(|z|) : |z| < 1\}$ и $h_0(\varphi)$ — замкнутое подпространство функций u , для которых $|u(z)| = o(1/\varphi(|z|))$ при $|z| \rightarrow 1$.

В работе [1] показано, что $h_\infty(\varphi)$ изометрически изоморфно второму сопряженному пространству к $h_0(\varphi)$. В [2] была поставлена и решена задача двойственности: найти весовую меру η на $[0, 1]$ такую, что

$$h^1(\eta) = \{v \in L^1(d\eta(r) d\theta) : v \text{ гармонично в } |z| < 1\}$$

является промежуточным сопряженным, т.е. $h^1(\eta) \sim h_0(\varphi)^*$ и $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$. В указанной работе [2] рассмотрен случай $n = 2$. Как известно, всякая гармоническая в единичном круге $|z| < 1$ функция h разлагается в ряд по степеням z и $\bar{z}$, так как вещественнозначная гармоническая функция является вещественной

частью голоморфной функции. Это позволяет применять методы комплексного анализа.

Настоящая статья посвящена решению задачи двойственности для многомерного случая, а именно, для функций, гармонических в единичном шаре в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Многомерный случай имеет специфику в том смысле, что не приходится говорить о связи между гармоническими и голоморфными функциями, и вместо степеней z и $\bar{z}$ мы имеем дело со сферическими гармониками.

Ниже применяются следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство;

$B = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < 1\}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$;

S — его граница, являющаяся единичной сферой;

σ — борелевская мера на S , инвариантная относительно вращений и нормированная условием $\sigma(S) = 1$;

$h(B)$ — линейное пространство всех комплекснозначных, гармонических в B функций.

Символы C , с всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно, различные в разных местах.

2. ПРОСТРАНСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\varphi(r)$ — весовая функция и η — весовая мера. Продолжим φ в B , положив $\varphi(x) = \varphi(|x|)$. Для $u \in h(B)$ положим

$$\|u\|_\varphi = \sup \{ |u(x)| \varphi(x) : x \in B \} = \sup \{ M_\infty(u, r) \varphi(r) : r < 1 \},$$

$$\|u\|_\eta = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) = \int_0^1 M_1(u, r) d\eta(r),$$

где $M_\infty(u, r) = \sup \{ |u(x)| : |x| = r \}$, $M_1(u, r) = \int_S |u(r\zeta)| d\sigma(\zeta)$

Определим пространства гармонических функций:

$$h_\infty(\varphi) = \{ u \in h(B) : \|u\|_\varphi < \infty \},$$

$$h_0(\varphi) = \{ u \in h(B) : \lim_{r \rightarrow 0} M_\infty(u, r) \varphi(r) = 0 \},$$

$$h^1(\eta) = \{ u \in h(B) : \|u\|_\eta < \infty \}.$$

Очевидно, $h_0(\varphi) \subset h_\infty(\varphi)$, так что можно использовать норму $\|u\|_\varphi$ для $h_0(\varphi)$.

Следующие два предложения посвящены основным свойствам этих пространств.

Предложение 2.1. Пусть h означает любое из трех введенных выше пространств. Тогда:

- (i) если b — ограниченное подмножество h , то функции из b равномерно ограничены на каждом компактном подмножестве B ;
- (ii) сходящаяся в h последовательность сходится равномерно на компактных подмножествах B ;
- (iii) для любой точки $x \in B$ значение в x является ограниченным линейным функционалом на h ;
- (iv) h — базисово пространство;
- (v) $h_0(\varphi)$ является замкнутым подпространством $h_{\infty}(\varphi)$.

Доказательство. В [3, Предложение 2] для $u \in h^1(\eta)$ получено неравенство, имеющее в наших обозначениях вид

$$|u(x)| \leq \frac{2^n}{(1-|x|)^{n-1}} \left(\int_{(1+|x|)/2}^1 |d\eta(t)| \right)^{-1} \|u\|_{\eta}, \quad x \in B.$$

Отсюда для $u \in h^1(\eta)$ следуют (i) и (iii). Для $h_{\infty}(\varphi)$ и $h_0(\varphi)$ эти утверждения очевидны. Легко видеть, что (ii) следует из (i).

Докажем (iv). Очевидно, пространства h являются липсовыми нормированными, поэтому достаточно доказать их полноту. Докажем полноту $h^1(\eta)$. Пусть последовательность u_j фундаментальна в $h^1(\eta)$ и пусть K — компактное подмножество B . Из (ii) следует, что существует константа $C = C(K)$ такая, что

$$\max_{x \in K} |u(x)| \leq C \|u\|_{\eta}$$

для всех $u \in h^1(\eta)$. Следовательно,

$$|u_j(x) - u_k(x)| \leq C \|u_j - u_k\|_{\eta}$$

для любых $x \in K$ и j, k . Поскольку u_j фундаментальна в $h^1(\eta)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность u_j равномерно сходится к некоторой функции u , гармонической в B . Из фундаментальности u_j следует, что

$$\int_S \int_0^1 |u_j(r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) = \|u_j\|_{\eta} \leq \|u_j - u_k\|_{\eta} + \|u_k\|_{\eta} \leq C.$$

Из теоремы Фату следует, что

$$\|u\|_{\eta} = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \leq C,$$

т. е. $u \in h^1(\eta)$.

Случай $h_{\infty}(\varphi)$ проще. Пусть $u_j \in h_{\infty}(\varphi)$. На компактном подмножестве K шара функция $\varphi(x)$ отграничена от нуля, поэтому

$$|u_j(x) - u_k(x)| \leq C\varphi(x)|u_j(x) - u_k(x)| = C\|u_j - u_k\|_{\varphi}, \quad x \in K.$$

Если u_j фундаментальна в $h_\infty(\varphi)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность u_j равномерно сходится к некоторой функции u , гармонической в B . Нетрудно видеть, что u_j сходится к u и в норме $h_\infty(\varphi)$. (v) следует из (iv). $\square$

Предложение 2.2. Пусть $u_\varrho(x) = u(\varrho x)$, $0 \leq \varrho \leq 1$.

- (i) Если $u \in h^1(\eta)$ или $u \in h_0(\varphi)$, то $u_\varrho \rightarrow u$ по норме, при $\varrho \rightarrow 1$;
- (ii) если $u \in h_\infty(\varphi)$, то $\|u_\varrho\|_\varphi \leq \|u\|_\varphi$ и $u_\varrho \rightarrow u$ поточечно в B ;
- (iii) гармонические полиномы плотны в $h^1(\eta)$ и в $h_0(\varphi)$;
- (iv) каждая функция $u \in h_\infty(\varphi)$ является поточечным пределом некоторой ограниченной по норме последовательности гармонических полиномов.

Доказательство. (i) Для $h_0(\varphi)$ это очевидно. Рассмотрим случай $h^1(\eta)$. Для любого числа $\delta \in (0, 1)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|u_\varrho - u\|_\eta &= \int_0^1 \int_S |u(\varrho r\zeta) - u(r\zeta)| d\sigma(\zeta) d\eta(r) \leq \\ &\leq \int_0^\delta \int_S |u(\varrho r\zeta) - u(r\zeta)| d\sigma(\zeta) d\eta(r) + \\ (2.1) \quad &+ \int_\delta^1 \int_S (|u(\varrho r\zeta)| + |u(r\zeta)|) d\sigma(\zeta) d\eta(r). \end{aligned}$$

Ввиду того, что функция $|u|$ субгармонична, ее среднее по единичной сфере

$$m(\varrho) = \int_S |u(\varrho r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

является неубывающей величиной от ϱ : $m(\varrho) \leq m(1)$. Отсюда и из (2.1)

$$\|u_\varrho - u\|_\eta \leq \int_0^\delta \int_S |u(\varrho r\zeta) - u(r\zeta)| d\sigma(\zeta) d\eta(r) + 2 \int_\delta^1 \int_S |u(r\zeta)| d\sigma(\zeta) d\eta(r),$$

откуда видно, что выбрав число δ , а затем ϱ достаточно близкими к 1, правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой.

(ii) следует из принципа максимума и непрерывности. Как известно, функция u_ϱ , гармоническая в окрестности B , равномерно на $\bar{B}$ приближается гармоническими полиномами. Используя этот факт, получаем (iii) и (iv). $\square$

Отметим еще, что в [4] даны соответствующие свойства пространств голоморфных функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.

3. Воспроизводящее ядро

Рассмотрим сперва случай плоскости (т. е. $n = 2$). Если функция u гармонична в единичном круге B_2 , то, как известно, она является вещественной частью

голоморфной в B_2 функции f . Так как $u = (f + \bar{f})/2$, то из разложения в ряд Тейлора получаем разложение для u , имеющее вид

$$(3.1) \quad u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta},$$

где $0 \leq r < 1$. В многомерном случае (т. е. $n > 2$) такой связи между гармоническими и голоморфными функциями нет, но существует аналог разложения (3.1), в котором роль экспонент $e^{ik\theta}$ играют сферические гармоники. В связи с этим напомним некоторые факты из теории гармонических функций (см., например, [5]).

Через $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех комплекснозначных однородных гармонических полиномов степени k в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Сужение полинома из $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ на сферу S называется сферической гармоникой степени k . Множество всех сферических гармоник степени k обозначается через $\mathcal{H}_k(S)$.

Всякая сферическая гармоника $p \in \mathcal{H}_k(S)$ единственным образом продолжается до однородного гармонического полинома, который мы будем обозначать той же буквой p .

$\mathcal{H}_k(S)$ является конечномерным замкнутым подпространством гильбертова пространства $L^2(S)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_S u(\zeta) \overline{v(\zeta)} d\sigma(\zeta).$$

Пусть точка $\xi \in S$ фиксирована. Функционал $\Lambda: \mathcal{H}_k(S) \rightarrow \mathbb{C}$, определяемый как значение в точке ξ : $\Lambda(p) = p(\xi)$, очевидно, линейен. Из общей теории гильбертовых пространств следует, что существует элемент $Z_k(\cdot, \xi) \in \mathcal{H}_k(S)$ такой, что для всех $p \in \mathcal{H}_k(S)$

$$p(\xi) = \int_S p(\zeta) Z_k(\zeta, \xi) d\sigma(\zeta).$$

Функция Z_k называется зональной гармоникой порядка k с полюсом в точке ξ . Она вещественна и удовлетворяет условию $Z_k(\zeta, \xi) = \overline{Z_k(\xi, \zeta)}$.

Пусть φ — весовая функция и η — весовая мера. Введем меру $d\mu = \varphi d\eta$ и меру $d\mu'$, определенную равенством

$$(3.2) \quad \int_0^1 f(r) d\mu'(r) = \int_0^1 f(r^2) d\mu(r), \quad f \in C[0, 1].$$

Очевидно, обе эти меры борелевские, конечные, положительные и их носители не сосредоточены ни на каком подинтервале $[0, \rho)$, $0 < \rho < 1$.

Ниже используется полярная форма точек $x, y \in \mathbb{R}^n$, т. е. $x = \rho\xi$, $y = r\zeta$, где $\xi, \zeta \in S$, $\rho > 0$, $r > 0$. Рассмотрим функцию

$$(3.3) \quad R_\mu(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \rho^k r^k Z_k(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} Z_k(x, y),$$

где $t_k = \int_0^1 r^k d\mu'(r) = \int_0^1 r^{2k} d\mu(r)$. Во втором равенстве в (3.3) через $Z_k(x, y)$ обозначено продолжение $Z_k(\xi, \zeta)$ по каждой переменной со сферы на все пространство $\mathbb{R}^n$ как однородного гармонического полинома степени k , поэтому $\rho^k r^k Z_k(\xi, \zeta) = Z_k(x, y)$.

Мы будем пользоваться соотношением двойственности между $h_\infty(\varphi)$ и $h^1(\eta)$, которое задается билинейной формой:

$$(3.4) \quad (u, v) = \int_S \int_0^1 u(r\zeta) \overline{v(r\zeta)} \varphi(r) d\eta(r) d\sigma(\zeta), \quad u \in h_\infty(\varphi), \quad v \in h^1(\eta).$$

Следующее предложение утверждает, что $(u(\cdot), R_\mu(x, \cdot)) = u(x)$ для всех $u \in h_\infty(\varphi) \cup h^1(\eta)$. В этом случае говорят, что функция $R_\mu(x, y)$ является воспроизводящим ядром для билинейной формы (3.4).

Предложение 3.1. а) При фиксированной точке $x \in B$ функция $R_\mu(x, y)$ гармонична в шаре $\{y: |y| < |x|^{-1}\}$.

б) Функция $R_\mu(x, y)$ является воспроизводящим ядром для билинейной формы (3.4), т. е. для всех $u \in h_\infty(\varphi) \cup h^1(\eta)$

$$(3.5) \quad (u(\cdot), R_\mu(x, \cdot)) = u(x).$$

Доказательство. Как известно (см. [5, Theorem 5.33]),

$$(3.6) \quad |Z_k(\xi, \zeta)| \leq d_k \leq Ck^{n-2}, \quad \text{для всех } \xi, \zeta \in S,$$

где d_k — размерность пространства $\mathcal{H}_k(S)$, C — абсолютная константа. Так как мера μ' не равна нулю ни в какой окрестности 1, то

$$t_k \geq \int_s^1 r^k d\mu'(r) \geq s^k \int_s^1 d\mu'(r), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что $t_k^{-1} = O(s^{-k})$, $k \rightarrow \infty$, для каждого $0 < s < 1$. Отсюда и из (3.6) следует, что ряд в правой части (3.3) сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}: |x||y| \leq q, 0 < q < 1\}$, откуда и следует утверждение а).

С учетом того, что $\varphi d\eta = d\mu$, из (3.4) следует, что (3.5) является интегральным представлением: для всякой функции $u \in h_\infty(\varphi)$ или $u \in h^1(\eta)$

$$(3.7) \quad u(x) = \int_S \int_0^1 u(r\zeta) R_\mu(x, r\zeta) d\mu(r) d\sigma(\zeta).$$

Имеем

$$\|u\|_\nu = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| d\mu(r) d\sigma(\zeta) = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| \varphi(r) d\eta(r) d\sigma(\zeta),$$

откуда

$$(3.8) \quad \|u\|_\mu \leq \|u\|_\varphi \int_0^1 d\eta(r) \leq C \|u\|_\varphi$$

и

$$(3.9) \quad \|u\|_\mu \leq \max \varphi(r) \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \leq C \|u\|_\eta.$$

Отсюда следует, что если $u \in h_\infty(\varphi) \cup h^1(\eta)$, то $u \in h^1(\mu)$. Для функций же из $h^1(\mu)$ (в несколько иных обозначениях) формула (3.7) доказана в [3, Theorem 1], откуда и следует утверждение б). $\square$

Предложение 3.2. Пусть $\mathfrak{L}(R_\mu(x, \cdot))$ — линейная оболочка множества функций $\{R_\mu(x, \cdot), x \in B\}$. Тогда $\mathfrak{L}(R_\mu(x, \cdot))$ плотна в $h^1(\eta)$ и в $h_0(\varphi)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $h^1(\eta)$, для $h_0(\varphi)$ доказательство аналогично. Согласно теореме Хана–Банаха, достаточно показать, что если $\Phi \in h^1(\eta)^*$ и $\Phi(R_\mu(x, \cdot)) = 0$ для всех $x \in B$, то Φ аннулирует все $h^1(\eta)$.

Так как $R_\mu(x, y)$ гармонична и $|y| < |x|^{-1}$, ряд (3.3) этой функции сходится в B равномерно и, следовательно, также и по норме $h^1(\eta)$. Поэтому

$$(3.10) \quad \Phi(R_\mu(x, \cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \Phi(Z_k(x, \cdot))$$

для всякой точки $x \in B$.

Пусть $\{e_1^{(k)}, \dots, e_{d_k}^{(k)}\}$ ортонормальный базис в $\mathcal{H}_k(S)$. Тогда $Z_k(x, y) = \sum_{j=1}^{d_k} \bar{e}_j^{(k)}(x) e_j^{(k)}(y)$. Имеем

$$(3.11) \quad \Phi(Z_k(x, \cdot)) = \sum_{j=1}^{d_k} c_j^{(k)} \bar{e}_j^{(k)}(x),$$

где $c_j^{(k)} = \Phi(e_j^{(k)})$. Таким образом, $\Phi(Z_k(x, \cdot)) \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ и (3.10) является однородным разложением функции $\Phi(R_\mu(x, \cdot))$ на однородные полиномы. Покажем, что из равенства $\Phi(R_\mu(x, \cdot)) = 0$ следует $\Phi(Z_k(x, \cdot)) = 0$, $k = 0, 1, \dots$. Зафиксируем $\zeta \in S$ и рассмотрим сужение функции $\Phi(R_\mu(x, \cdot))$ на прямую $x = r\zeta$, $0 \leq r < 1$. Имеем

$$\Phi(R_\mu(r\zeta, \cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \Phi(Z_k(r\zeta, \cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \Phi(Z_k(\zeta, \cdot)) r^k \equiv 0$$

для всех $0 \leq r < 1$. По теореме единственности для коэффициентов степенного ряда одной переменной, $\Phi(Z_k(\zeta, \cdot)) = 0$ (т. к. $\zeta_k^{-1} \neq 0$), $k = 0, 1, \dots$. Отсюда и из (3.11)

$$\Phi(Z_k(\zeta, \cdot)) = \sum_{j=1}^{d_k} c_j^{(k)} \bar{e}_j^{(k)}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in S, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда в силу линейной независимости системы $\{\bar{e}_j^{(k)}\}_{j=1}^{d_k}$ следует, что $c_j^{(k)} = 0$ $j = 1, \dots, d_k$ и для всех $k = 0, 1, \dots$. Значит, Φ аннулирует все гармонические полиномы, так как всякий гармонический полином является конечной линейной комбинацией $e_j^{(k)}$. Согласно пункту (iii) Предложения 2.2, Φ аннулирует все пространство $h^1(\eta)$. $\square$

Для весовой меры η обозначим через $L^1(d\eta d\sigma)$ и $L^\infty(d\eta d\sigma)$ банаховы пространства комплексзначных функций в B , которые интегрируемы и, соответственно, существенно ограничены и измеримы относительно меры $d\eta d\sigma$. Норму в этих пространствах обозначим, соответственно, через $\|\cdot\|_\eta$ и $\|\cdot\|_\infty$. Пусть, далее, $C_0(B)$ — банахово пространство комплексзначных непрерывных на $\bar{B}$ функций, обращающихся в нуль на S , с суп-нормой. Как известно, двойственным (сопряженным) к $C_0(B)$ является $M(B)$ — пространство комплексных конечных борелевских мер в B , с нормой полной вариации. Мы отождествляем $L^1(d\eta d\sigma)$ с абсолютно непрерывными относительно $d\eta d\sigma$ мерами.

Следующая теорема является основной.

Теорема 3.1. Пусть φ — весовая функция, η — весовая мера и R_μ — соответствующее воспроизводящее ядро (3.3). Рассмотрим линейные интегральные операторы

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= \int_S \int_0^1 R_\mu(x, r\zeta) f(r\zeta) d\eta(r) d\sigma(\zeta) & f \in L^\infty(d\eta d\sigma), \\ (S\nu)(x) &= \int_B R_\mu(x, y) \varphi(y) d\nu(y) & \nu \in M(B). \end{aligned}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $\|R_\mu(x, \cdot)\|_\eta \leq \frac{c}{\varphi(x)}, \quad x \in B$.
- (ii) T является ограниченным оператором из $L^\infty(d\eta d\sigma)$ в $h_\infty(\varphi)$.
- (iii) S является ограниченным оператором из $M(B)$ в $h^1(\eta)$.
- (iv) $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$.
- (v) $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$.

Доказательство. Непосредственно из определения оператора T следует, что из (i) вытекает (ii). В самом деле,

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &\leq \|f\|_{\infty} \int_S \int_0^1 |R_{\mu}(x, r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \\ &= \|f\|_{\infty} \|R_{\mu}(x, \cdot)\|_{\eta} \leq \|f\|_{\infty} \frac{c}{\varphi(x)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\|Tf\|_{\varphi} \leq c\|f\|_{\infty}$.

Из теоремы Фубини следует, что из (i) вытекает также (iii). В самом деле,

$$\begin{aligned} \|S\nu\|_{\eta} &= \int_B \left| \int_B R_{\mu}(r\zeta, y) \varphi(y) d\nu(y) \right| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \\ &\leq \int_B \left(\int_B |R_{\mu}(r\zeta, y)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \right) \varphi(y) d|\nu|(y) \\ &\leq \int_B \frac{c}{\varphi(y)} \varphi(y) d|\nu|(y) = c\|\nu\|. \end{aligned}$$

Докажем, что из (iii) следует (v). Условие (v) означает, что каждый элемент из $h^1(\eta)$ может быть отождествлен с линейным функционалом на $h_0(\varphi)$ посредством двойственного соотношения (3.4), а точнее, если для заданной функции $v \in h^1(\eta)$ определить функционал $l_v(u) = \langle u, v \rangle$, $u \in h_0(\varphi)$, то $l_v \in h_0(\varphi)^*$. Обратно, для каждого функционала $l \in h_0(\varphi)^*$ должна существовать единственная функция $v \in h^1(\eta)$ такая, что $l = l_v$. Кроме того, нормы $\|l_v\|$ и $\|v\|_{\eta}$ эквивалентны.

В самом деле, согласно неравенству Гельдера,

$$|l_v(u)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|v\|_{\eta} \|u\|_{\varphi}.$$

Таким образом, $l_v \in h_0(\varphi)^*$ и $\|l_v\| \leq \|v\|_{\eta}$. Осталось доказать, что существует константа c такая, что всякий функционал $l \in h_0(\varphi)^*$ представляется в виде $l = l_v$, где $v \in h^1(\eta)$ и $\|v\|_{\eta} \leq c\|l\|$.

Отождествляя $u \in h_0(\varphi)$ с функцией $u\varphi \in C_0(B)$, мы можем рассматривать $h_0(\varphi)$ как подпространство $C_0(B)$. Из теоремы Хана-Банаха следует, что существует мер $\nu \in M(B)$ такая, что $\|l\| = \|\nu\|$ и $l(u) = \int_B u(y)\varphi(y) d\nu(y)$. Таким образом,

$$l(R_{\mu}(x, \cdot)) = \int_B R_{\mu}(x, y) \varphi(y) d\nu(y) = (S\nu)(x).$$

Пусть $v = S\nu$. Согласно (iii), $v \in h^1(\eta)$ и $\|v\| \leq \|S\| \|\nu\| = \|S\| \|l\|$. Далее, по Предложению 3.1, $l_v(R_{\mu}(x, \cdot)) = \langle R_{\mu}(x, \cdot), v \rangle = v(x) = (S\nu)(x) = l(R_{\mu}(x, \cdot))$. Таким образом, функционалы l и l_v совпадают на линейной оболочке $\mathcal{L}(R_{\mu}(x, \cdot))$ множества функций $\{R_{\mu}(x, \cdot), x \in B\}$. По Предложению 3.2, $l = l_v$. Единственность следует также из Предложения 3.2, так как v определяется воспроизводящим ядром.

Аналогично доказывается, что из (ii) следует (iv). Только на этот раз нужно использовать двойственность пространств $L^1(d\eta d\sigma)$ и $L^\infty(d\eta d\sigma)$ вместо двойственности $C_b(B)$ и $M(B)$.

Пусть, далее, выполнено (iv). Применив теорему Хана-Банаха, будем иметь

$$\begin{aligned} \|R_\mu(x, \cdot)\|_\eta &\leq c \sup \{ | \langle u, R_\mu(x, \cdot) \rangle | : u \in h_\infty(\varphi), \|u\|_\varphi \leq 1 \} \\ &= c \sup \{ |u(x)| : u \in h_\infty(\varphi), \|u\|_\varphi \leq 1 \} \leq \frac{c}{\varphi(x)}, \quad x \in B. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что из (v) следует (i). $\square$

Непосредственно из определения воспроизводящего ядра следует, что если S ограничен, то он является ограниченным проектором из $M(B)$ на подпространство $h^1(\eta)$.

Рассмотрим оператор T . Если $u \in h_\infty(\varphi)$, то $T(u\varphi) = u$. Это следует из того, что ядро R_μ воспроизводящее. Предположим, что T ограничен. Тогда $\|u\|_\varphi \leq \|T\| \|u\varphi\|_\infty$. Следовательно, $\varphi h_\infty(\varphi)$ можно рассматривать как замкнутое подпространство $L^\infty(d\eta d\sigma)$. Таким образом, если T ограничен, то оператор φT осуществляет ограниченное проектирование из $L^\infty(d\eta d\sigma)$ на подпространство $\varphi h_\infty(\varphi)$.

4. Двойственность

В этом разделе мы рассматриваем задачу двойственности для широкого класса песовых функций φ . Теорема 3.1, по существу, сводит задачу двойственности к оценке (i) воспроизводящего ядра, проверить которую легче, чем соотношения (iv) и (v).

Пусть функция $\psi(t)$ положительна, непрерывно дифференцируема, монотонно возрастает к $+\infty$ на $[0, \infty)$ и удовлетворяет следующим трем условиям:

- I. $\Delta^p \left[\frac{1}{\psi(k)} \right] \geq 0, k, p = 0, 1, 2, \dots$
- II. Существуют $a > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что $\psi(t)/t^a \searrow 0$ для $t > t_0$, при $t \rightarrow \infty$.
- III. Существует константа $c > 0$ такая, что

$$|\Delta^2 \psi(k)| \leq -c \frac{\Delta^1 \psi(k)}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь использовано стандартное обозначение разности порядка p

$$\Delta^p f(k) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} f(k+j).$$

Лемма 4.1. [2, Лемма 1] Пусть функция $\psi(t)$ положительна, непрерывна, монотонно возрастает на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условию II. Тогда существуют константы c, C такие, что для $0 \leq r < 1$

$$\frac{c}{1-r} \psi\left(\frac{1}{1-r}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) r^k \leq \frac{C}{1-r} \psi\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

Лемма 4.2. Пусть функция $\psi(t)$ положительна, непрерывна, монотонно возрастает на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условиям II и III. Пусть

$$R(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) Z_k(x, y).$$

Тогда

$$\int_S R(\rho\xi, r\zeta) d\sigma(\zeta) \leq C \psi\left(\frac{1}{1-\rho r}\right).$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} R(\xi, r\zeta) &= \sum_{k=0}^q \psi(k) Z_k(\xi, r\zeta) = \sum_{k=0}^q \psi(k) r^k Z_k(\xi, \zeta) \\ (4.1) \quad &= \sum_{k=0}^{q-1} (\Delta^1 \psi(k) r^k) D_k(\xi, \zeta) + \psi(q) r^q D_q(\xi, \zeta), \end{aligned}$$

где $D_k(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^k Z_m(\xi, \zeta)$.

Из (3.6) следует, что $|D_q(\xi, \zeta)| \leq C(q+1)q^{n-2}$. С учетом этого неравенства и условия II, будем иметь

$$|\psi(q) r^q D_q(\xi, \zeta)| \leq C r^q (q+1) q^{n-2}.$$

Отсюда следует, что при $q \rightarrow \infty$ последний член в правой части (4.1) стремится к нулю и мы получаем

$$R(\xi, r\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^1 \psi(k) r^k) D_k(\xi, \zeta).$$

Еще раз применяя преобразование Абеля, получим

$$R(\xi, r\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^2 \psi(k) r^k) (k+1) F_k(\xi, \zeta),$$

где $F_k(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^k D_m(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^k (k+1-m) Z_m(\xi, \zeta)$. Используя тождество

$$\Delta^2(\psi(k) r^k) = [(1-r)^2 \psi(k) + 2r(1-r) \Delta^1 \psi(k) + r^2 \Delta^2 \psi(k)] r^k,$$

получаем оценку

$$|R(\xi, r\zeta)| \leq (1-r)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \psi(k) r^k F_k(\xi, \zeta) + \\ + 2(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (-\Delta^1 \psi(k)) r^{k+1} F_k(\xi, \zeta) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \psi(k) r^{k+2}| F_k(\xi, \zeta).$$

Далее, поскольку $Z_m(\xi, \cdot)$ является однородным гармоническим полиномом степени m , то имеем

$$(4.2) \quad \int_S Z_m(\xi, \zeta) d\sigma(\zeta) = Z_m(\xi, 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \geq 1. \end{cases}$$

Учитывая, что $F_k(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^k (k+1-m) Z_m(\xi, \zeta)$, из (4.2) получим

$$\int_S F_k(\xi, \zeta) d\sigma(\zeta) = k+1.$$

Поэтому

$$(4.3) \quad \int_S |R(\xi, r\zeta)| d\sigma(\zeta) \leq (1-r)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \psi(k) r^k + \\ + 2(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (-\Delta^1 \psi(k)) r^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \psi(k) r^{k+2}|.$$

Применяя Лемму 4.1 к функции $(x+1)\psi(x)$, имеем

$$(4.4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \psi(k) r^k \leq \frac{c}{(1-r)^2} \psi\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Для $n > x_0$ из II следует

$$\frac{\psi(n+\varepsilon) - \psi(n)}{(n+1)^a} - \frac{\psi(n)}{n^a} + \frac{\psi(n)}{(n+1)^a} \leq 0.$$

Далее, $\psi(n+1) - \psi(n) \leq \psi(n)[(1+1/n)^a - 1] \leq c\psi(n)/n$, т. е.

$$-\Delta^1 \psi(n) \leq c \frac{\psi(n)}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда и из Леммы 4.1

$$(4.5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (-\Delta^1 \psi(k)) r^{k+1} \leq \frac{c}{1-r} \psi\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Применяя условие II, затем суммируя по частям и еще раз применяя Лемму 4.1, будем иметь

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \psi(k) r^{k+2}| &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} ((-\Delta^1 \psi(k)) r^{k+2}) \\ &\leq cr(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) r^k - c\psi(0)r^2 \leq c\psi\left(\frac{1}{1-r}\right). \end{aligned}$$

Из (4.3)–(4.6) следует

$$\int_S R(\xi, r\zeta) d\sigma(\zeta) \leq C\psi\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Учитывая, что $R(\rho\xi, r\zeta) = R(\xi, \rho r\zeta)$, отсюда получаем утверждение леммы. $\square$

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему о двойственности.

Теорема 4.1. Пусть φ — весовая функция вида $\varphi(r) = \frac{1}{\psi(1/(1-r))}$, где $\psi(t)$ положительна, непрерывно дифференцируема, монотонно возрастает к ∞ на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условиям I, II и III. Тогда существует весовая мера такая, что $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$ и $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$ относительно двойственного соотношения (3.4).

Доказательство. Для каждого целого числа $m > 1$ построим весовую меру η_m , которая удовлетворяет заключению теоремы. Зафиксируем m и заметим, что вместе с ψ условиями I, II и III удовлетворяет также и ψ^m . Проверяется это элементарно. Из условия I следует, что существует положительная конечная борелевская мера μ'_m на $[0, 1)$ такая, что

$$\psi(k)^{-m} = \int_0^1 r^k d\mu'_m(r), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для этого достаточно применить известный критерий разрешимости проблемы моментов Хаусдорфа для последовательности $f(k)$, а именно: $\Delta^p f(k) \geq 0$, $k, p = 0, 1, 2, \dots$ (см. [6, стр. 97, Теорема 2.6.4]). Заметим, что носитель μ'_m не сосредоточен ни на каком подинтервале $[0, \rho)$, $0 < \rho < 1$, так как в противном случае $\psi(k)^m$ имел бы экспоненциальный рост, что противоречило бы условию II. Определим μ_m согласно (3.2), т.е.

$$\int_0^1 f(r) d\mu'_m(r) = \int_0^1 f(r^2) d\mu_m(r), \quad f \in C[0, 1],$$

и положим $d\eta_m(r) = \psi(1/(1-r)) d\mu_m(r)$. Для того, чтобы η_m была бы весовой мерой, остается показать, что она конечна. Из Предложения 3.1 следует, что

воспроизводящее ядро, ассоциированное с φ и η_m , имеет вид

$$R_m(x, y) = \sum_{k=0}^m \psi(k)^m Z_k(x, y).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать оценку (i) Теоремы 3.1 для R_m , т. е.

$$(4.7) \quad \int_S \int_0^1 |R_m(x, r\zeta)| d\eta_m(r) d\sigma(\zeta) \leq \frac{c}{\varphi(x)}, \quad x \in B.$$

Более того, из (4.7) при $x = 0$ следует, что мера $d\eta_m$ конечна.

Применение Леммы 4.2 для ψ^m сводит (4.7) к неравенству

$$(4.8) \quad \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{1-\rho r}\right)^m d\eta_m(r) \leq c\psi\left(\frac{1}{1-\rho}\right), \quad 0 \leq \rho < 1,$$

доказательство которого приведено в [2, Theorem 4]. □

В заключение приведем примеры функций $\psi(x)$, удовлетворяющих условиям Теоремы 4.1:

$$\psi(x) = (x+1)^\alpha, \quad \psi(x) = [\ln(x+2)]^\alpha, \quad \psi(x) = [\ln \ln(x+4)]^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Заметим, что весовые функции $\varphi(x)$, которым здесь соответствуют $\psi(x) = [\ln(x+2)]^\alpha$ и $\psi(x) = [\ln \ln(x+4)]^\alpha$, не являются нормальными.

Abstract. The paper studies the Banach spaces $h_\infty(\varphi)$, $h_0(\varphi)$, and $h^1(\eta)$ of harmonic functions over the unit ball in $\mathbb{R}^n$. These spaces depend on a weight function φ and a weight measure η . For a given function φ from a sufficiently broad class of functions, we solve the duality problem. that is, we construct measures η such that $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$ and $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. A. Rubel and A. L. Shields, "The second duals of certain spaces of analytic functions", J. Austral. Math. Soc., **11**, 275 – 280 (1970).
- [2] A. L. Shields, D. L. Williams, "Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions", J. Reine Angew. Math., **299** – **300**, 255 – 279 (1978).
- [3] A. I. Petrosyan, "On weighted classes of harmonic functions in the unit ball of $\mathbb{R}^n$ ", Complex Variables, **50**, no. 12, 953 – 966 (2005).
- [4] А. И. Петросян, "Ограниченные проекторы в пространствах функций, голоморфных в единичном шаре", Известия НАН Армении, Математика, **46**, no. 5, 53 – 64 (2011).
- [5] Shklover Axler, Paul Bourdon, Wade Ramey, Harmonic Function Theory, Springer-Verlag, New York, Inc. (2001).
- [6] Н. И. Ахизер, Классическая Проблема Моментов и Некоторые Вопросы Анализа, Связанные с Нею, Москва (1961).

Поступила 27 мая 2016

EXTENDED SRIVASTAVA'S TRIPLE HYPERGEOMETRIC $H_{A,p,q}$
FUNCTION AND RELATED BOUNDING INEQUALITIES

R. K. PARMAR, T. K. POGÁNY

Government College of Engineering and Technology, Bikaner, India

University of Rijeka, Croatia

Óbuda University, Budapest, Hungary

E-mail: rakeshparmar27@gmail.com; poganj@pfri.hr

Dedicated to the 75th birthday anniversary of Professor Hari M. Srivastava

Abstract. In this paper, motivated by certain recent extensions of the Euler's beta, Gauss' hypergeometric and confluent hypergeometric functions (see [4]), we extend the Srivastava's triple hypergeometric function H_A by making use of two additional parameters in the integrand. Systematic investigation of its properties including, among others, various integral representations of Euler and Laplace type, Mellin transforms, Laguerre polynomial representation, transformation formulas and a recurrence relation, is presented. Also, by virtue of Luke's bounds for hypergeometric functions and various bounds upon the Bessel functions appearing in the kernels of the newly established integral representations, we deduce a set of bounding inequalities for the extended Srivastava's triple hypergeometric function $H_{A,p,q}$.¹

MSC2010 numbers: Primary 33B20, 33C20, 33B15, 33C05.

Keywords: (p, q) -extended Beta function; (p, q) -extended hypergeometric function; extended Appell function; Mellin transform; Laguerre polynomial; bounding inequality.

1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Throughout the paper, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}^-$ and $\mathbf{C}$ will denote the sets of positive integers, negative integers and complex numbers, respectively. Also, we denote $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ and $\mathbf{Z}_0^- = \mathbf{Z}^- \cup \{0\}$.

The definition of the *generalized hypergeometric function* with r numerator and s denominator parameters, as a series, reads as follows:

$${}_rF_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; z) = {}_rF_s(a_r; b_s; z) := \sum_{m \geq 0} \frac{(a_1)_m \cdots (a_r)_m}{(b_1)_m \cdots (b_s)_m} \frac{z^m}{m!},$$

where $b_j \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_0^-$, $j = \overline{1, s}$. The series converges for all $z \in \mathbf{C}$ if $r \leq s$. It is divergent for all $z \neq 0$ when $r > s + 1$, unless at least one numerator parameter is a negative integer, in which case it becomes a polynomial. Finally, if $r = s + 1$, the series converges on the unit circle $|z| = 1$ when $\Re(\sum b_j - \sum a_j) > 0$. The celebrated Gauss' hypergeometric function is ${}_2F_1$, and the confluent Kummer's function is

¹The research of Tibor K. Pogány has been supported in part by Croatian Science Foundation under the project No. 3435.

$\Phi = {}_1F_1$. Extensions, generalizations and unifications of Euler's Beta function together with related higher transcendent hypergeometric type special functions were investigated recently by a number of authors (see [2, 3], and references therein). In particular, Chaudhry *et al.* [2, p. 20, Equation (1.7)] presented the following extension of the Beta function:

$$(1.1) \quad B(x, y; p) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} e^{-pt/(1-t)} dt, \quad \Re(p) > 0;$$

where for $p = 0$, $\min\{\Re(x), \Re(y)\} > 0$. They also obtained related connections of $B(x, y; p)$ with Macdonald (or modified Bessel function of the second kind), error and Whittaker functions. Further, Chaudhry *et al.* [3] used $B(x, y; p)$ to extend the Gauss' hypergeometric and the confluent (Kummer's) hypergeometric functions in the following manner:

$$(1.2) \quad F_p(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{B(b+n, c-b; p)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!}, \quad p \geq 0, |z| < 1; \Re(c) > \Re(b) > 0,$$

$$(1.3) \quad \Phi_p(b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(b+n, c-b; p)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!}, \quad p \geq 0; \Re(c) > \Re(b) > 0,$$

respectively. More recently, Ozarslan and Ozergin [14] defined the *extended* first Appell function in the form:

$$(1.4) \quad F_1(a, b, b'; c; x, y; p) = \sum_{m, n=0}^{\infty} (b)_m (b')_n \frac{B(a+m+n, c-a; p)}{B(a, c-a)} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}, \quad \Re(p) \geq 0,$$

provided that $\max\{|x|, |y|\} < 1$. They obtained the following integral representation (see [14, p. 1826, Eq. (2.1)]):

$$(1.5) \quad F_1(a, b, b'; c; x, y; p) = \int_0^1 \frac{t^{a-1} (1-t)^{c-a-1}}{B(a, c-a)} (1-xt)^{-b} (1-yt)^{-b'} e^{-pt/(1-t)} dt,$$

for all $\Re(p) > 0$ and $\max\{|\arg(1-x)|, |\arg(1-y)|\} < \pi$; $\Re(c) > \Re(a) > 0$.

It is clear that the special cases of (1.1) – (1.4) when $p = 0$ reduce to the classical Euler's Beta, Gauss' hypergeometric, confluent hypergeometric and the first Appell functions, respectively.

Recently, Choi *et al.* [4] have introduced further extensions for functions $B(x, y; p)$, $F_p(a, b; c; z)$ and $\Phi_p(b; c; z)$ in the following manner:

$$(1.6) \quad B(x, y; p, q) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} e^{-\frac{pt}{1-t} - \frac{qt}{t}} dt,$$

when $\min\{\Re(x), \Re(y)\} > 0$; $\min\{\Re(p), \Re(q)\} \geq 0$, and by means of (1.6):

$$(1.7) \quad F_{p,q}(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{B(b+n, c-b; p, q)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1; \Re(c) > \Re(b) > 0,$$

$$(1.8) \quad \Phi_{p,q}(b; c; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{B(b+n, c-b; p, q)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!}, \quad \Re(c) > \Re(b) > 0.$$

Related properties, various integral representations, Mellin transform are also given in [4].

A further extension of extended Appell function (1.5), in terms of the extended beta function $B(x, y; p, q)$ (1.6), we introduce as the series:

$$(1.9) \quad F_1(a, b, b'; c; x, y; p, q) = \sum_{m, n \geq 0} (b)_m (b')_n \frac{B(a+m+n, c-a; p, q)}{B(a, c-a)} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!},$$

which turns out to be a special case of the double series $\mathfrak{F}_1^{(\kappa_\ell)} \in \mathbb{N}_0$ when $\kappa_\ell \equiv 1$ (see [20, p. 256, Eq. (6.3)]). It should be noted that the thorough study of these functions is still an interesting open question. Note that series (1.9) plays one of the central roles in the present paper. Also, it is clear that when $p = q$ (resp. $p = q = 0$), the functions in (1.6) – (1.9) reduce to (1.1) – (1.4) (resp., to the classical Euler Beta, Gauss hypergeometric, confluent hypergeometric and Appell functions), respectively.

In terms of the extended beta function $B(x, y; p, q)$ defined by (1.6), we now introduce the *extended Srivastava's triple hypergeometric function* for all $\alpha, \beta, \beta' \in \mathbb{C}$ and $\gamma, \gamma' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ in the form:

$$(1.10) \quad H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] = \sum_{k, m, n \geq 0} \frac{(\alpha)_{k+n} (\beta)_{k+m}}{(\gamma)_k} \frac{B(\beta' + m + n, \gamma' - \beta'; p, q)}{B(\beta', \gamma' - \beta')} \frac{x^k}{k!} \frac{y^m}{m!} \frac{z^n}{n!},$$

when $\min\{p, q\} \geq 0$; $|x| < r$, $|y| < s$, $|z| < t$, while $r = (1-s)(1-t)$ when $p = q = 0$. The special case of (1.10), $H_{A,0,0} \equiv H_A$ reduces to the Srivastava's triple hypergeometric function H_A , introduced in [16] (see also [17]):

$$(1.11) \quad \begin{aligned} H_A[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] &= \sum_{k, m, n \geq 0} \frac{(\alpha)_{k+n} (\beta)_{k+m}}{(\gamma)_k} \frac{B(\beta' + m + n, \gamma' - \beta')}{B(\beta', \gamma' - \beta')} \frac{x^k}{k!} \frac{y^m}{m!} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{k, m, n \geq 0} \frac{(\alpha)_{k+n} (\beta)_{k+m} (\beta')_{m+n}}{(\gamma)_k (\gamma')_{m+n}} \frac{x^k}{k!} \frac{y^m}{m!} \frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

where $|x| < r$, $|y| < s$, $|z| < t$; $r = (1-s)(1-t)$ (compare also [18, p. 43, Eq. (11)], and references therein).

Motivated essentially by the potential applications of functions $B(x, y; p, q)$, $F_{p,q}(a, b; c; z)$, $\Phi_{p,q}(b; c; z)$ and the extended Appell's function $F_1(a, b, b'; c; x, y; p, q)$ in diverse areas of mathematical, physical, engineering and statistical sciences (see [4], and references therein), our aim is to introduce and investigate, in a rather systematic manner, the extended Srivastava's triple hypergeometric functions $H_{A,p,q}$, by presenting:

(i) various Euler and Laplace type integral representations, as well as, further

integral representations involving the Bessel and modified Bessel functions in the kernel;

(ii) Mellin transform, Laguerre polynomial representations and certain recurrence relations;

(iii) a set of bounding inequalities, using the underlying new integral expressions, where the main tool is the Luke's rational and exponential bounds for the generalized hypergeometric functions ${}_rF_r$, and as a counterpart, diverse bounds upon the Bessel functions appearing in the kernels of integral representations.

2. ON THE EXTENDED SRIVASTAVA'S TRIPLE HYPERGEOMETRIC FUNCTION

In this section we study three different categories of results concerning the newly defined special function $H_{A,p,q}$ that are: integral representations, recurrence and transformations formulas.

2.1. Integral representations. In this subsection, we establish a set of Euler and Laplace type integral representations for function $H_{A,p,q}$. We also obtain certain integral representations for $H_{A,p,q}$ involving the Bessel and modified Bessel functions. We begin with a simple auxiliary integral representation result, which, to the best of our knowledge, is new, and is of interest by itself.

Lemma 2.1. For all $\min\{\Re(p), \Re(q)\} > 0$ and $\max\{|\arg(1-x)|, |\arg(1-y)|\} < \pi$; $\Re(c) > \Re(a) > 0$, we have

$$(2.1) \quad F_1(a, b, b'; c; x, y; p, q) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}}{B(a, c-a)} (1-xt)^{-b} (1-yt)^{-b'} e^{-\frac{t}{x} - \frac{t^2}{y}} dt.$$

Proof. Applying the integral expression (1.6) to the extended Beta-function kernel, we can write

$$\begin{aligned} F_1(a, b, b'; c; x, y; p, q) &= \sum_{m,n \geq 0} (b)_m (b')_n \frac{B(a+m+n, c-a; p, q)}{B(a, c-a)} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{m,n \geq 0} \frac{(b)_m (b')_n}{B(a, c-a)} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \int_0^1 t^{a+m+n-1} (1-t)^{c-a-1} e^{-\frac{t}{x} - \frac{t^2}{y}} dt \\ &= \sum_{m,n \geq 0} \binom{-b}{m} \binom{-b'}{n} \frac{(-x)^m (-y)^n}{B(a, c-a)} \int_0^1 t^{a+m+n-1} (1-t)^{c-a-1} e^{-\frac{t}{x} - \frac{t^2}{y}} dt. \end{aligned}$$

Taking into account the binomial series expansion $(1+u)^{-\alpha} = \sum_{k \geq 0} \binom{-\alpha}{k} u^k$; $|u| < 1$, by legitimate exchange of the order of integration and summation, we obtain (2.1). $\square$

Now, we are in position to state our first main integral representation result for function $H_{A,p,q}$.

Theorem 2.1. For all $\min\{\Re(p), \Re(q)\} > 0$ and for all $\Re(\gamma') > \Re(\beta') > 0$ when $p = q = 0$, we have

$$(2.2) \quad H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] = \int_0^1 \frac{v^{\beta'-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1}}{B(\beta', \gamma' - \beta') (1-vy)^\beta (1-vz)^\alpha} \\ \times {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{(1-vy)(1-vz)}\right) e^{-\frac{p}{v} - \frac{q}{1-v}} dv.$$

Proof. Observe first that the extended Srivastava's triple hypergeometric function $H_{A,p,q}$, defined by (1.10), can be expressed as a single series by the extended Appell functions (1.9) as follows:

$$(2.3) \quad H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] = \sum_{k \geq 0} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} F_1[\beta', \beta + k, \alpha + k; \gamma'; y, z; p, q] \frac{x^k}{k!}.$$

Next, substituting the integral in (2.1) into (2.3), we obtain

$$(2.4) \quad H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] = \frac{1}{B(\beta', \gamma' - \beta')} \sum_{k \geq 0} \int_0^1 v^{\beta'-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-vy)^{-\beta} \\ \times (1-vz)^{-\alpha} \exp\left(-\frac{p}{v} - \frac{q}{1-v}\right) \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} \left\{ \frac{x}{(1-vy)(1-vz)} \right\}^k dv.$$

Finally, changing the order of summation and integration in (2.4), we arrive at (2.2). Theorem 2.1 is proved. $\square$

In the next theorem, we state two equivalent double integral expressions for function $H_{A,p,q}$.

Theorem 2.2. Let the assumptions of Theorem 2.1 be fulfilled. Then

$$(2.5) \quad H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] = \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1}}{B(\beta, \gamma - \beta) B(\beta', \gamma' - \beta')} \\ \times \frac{(1-u)^{\gamma'-\beta'-1} (1-vy)^{\alpha-\beta}}{(1-ux-vy-vz+u^2yz)^\alpha} e^{-\frac{p}{u} - \frac{q}{1-v}} du dv,$$

and for all $\min\{\Re(p), \Re(q)\} > 0$ we have

$$(2.6) \quad H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta) B(\beta', \gamma' - \beta')} \\ \times \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^{\gamma-2} v^{\gamma'-2} (1-vy)^{\alpha-\beta}}{(1-zu - (y+z)v + yzuv)^\alpha} e^{-\frac{p}{u} - \frac{q}{1-v}} du dv.$$

If $p = q = 0$, then (2.6) holds when $\Re(\gamma) > \Re(\beta) > 0$ and $\Re(\gamma') > \Re(\beta') > 0$.

Proof. Using the well-known integral formula

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

for all $\Re(c) > \Re(b) > 0$; $|\arg(1-z)| \leq \pi - \epsilon$, $0 < \epsilon < \pi$, from (2.2) we obtain (2.5). Next, the representation (2.6) can easily be deduced from (2.5) after some simple algebraic manipulations. Theorem 2.2 is proved. $\square$

Theorem 2.3. Let $\min\{\Re(p), \Re(q)\} > 0$ and $x > 0$, $\max\{\Re(y), \Re(z)\} < 1$, and $\min\{\Re(\alpha), \Re(\beta)\} > 0$ when $p = q = 0$. Then we have

$$(2.7) \quad H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] = \frac{\Gamma(\gamma) x^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} t^{\alpha-\frac{\gamma-1}{2}-1} s^{\beta-\frac{\beta-1}{2}-1} \\ \times \left\{ \frac{J_{\gamma-1}(2\sqrt{xst})}{I_{\gamma-1}(2\sqrt{xst})} \right\} \Phi_{p,q}(\beta'; \gamma'; ys + zt) ds dt.$$

Proof. Using the integral form of the Pochhammer symbols $(\alpha)_{k+n}$ and $(\beta)_{k+m}$ and the elementary series identity (see [18, p. 52, Eq. 1.6(2)]):

$$\sum_{m_1, m_2 \geq 0} \Omega(m_1 + m_2) \frac{x_1^{m_1} x_2^{m_2}}{m_1! m_2!} = \sum_{m \geq 0} \Omega(m) \frac{(x_1 + x_2)^m}{m!},$$

in (1.10), and afterward applying the definition of extended confluent hypergeometric function (1.8), we obtain

$$(2.8) \quad H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} t^{\alpha-1} s^{\beta-1} \\ \times {}_0F_1(-; \gamma; xst) \Phi_{p,q}(\beta'; \gamma'; ys + zt) ds dt.$$

Next, observe that the Bessel function $J_\nu(z)$ and the modified Bessel function $I_\nu(z)$ can be expressed in terms of hypergeometric functions as follows (see [21]):

$$(2.9) \quad J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1\left(-; \nu+1; -\frac{1}{4}z^2\right); I_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1\left(-; \nu+1; \frac{1}{4}z^2\right),$$

being $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ in both cases. Finally, combining (2.8) and (2.9), we obtain (2.7). Theorem 2.3 is proved. $\square$

2.2. Mellin transforms and representations via Laguerre polynomials.

The double Mellin transforms of suitable classes of integrable functions $f(x, y)$ with indices r and s are usually defined by (see [15, p. 203, Eq. (7.1.6)]):

$$\mathcal{M}\{f(x, y)\}(r, s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{r-1} y^{s-1} f(x, y) dx dy,$$

provided that the improper integral exists.

Theorem 2.4. For all $\min\{\Re(r), \Re(s)\} > 0$ and $\Re(\beta' + r) > 0$, $\Re(\gamma' + s - \beta') > 0$ the Mellin transform of $H_{A,p,q}$ with respect to $p, q \geq 0$ is given by formula:

$$(2.10) \quad \mathcal{M}\{H_{A,p,q}\}(r, s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)\mathcal{B}(\beta' + r, \gamma' + s - \beta')}{\mathcal{B}(\beta', \gamma' - \beta')} H_A[\alpha, \beta, \beta' + r; \gamma, \gamma' + r + s; x, y, z].$$

Proof. Using the definition of Mellin transform, we find from (1.10) that

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{H_{A,p,q}\}(r,s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty p^{r-1} q^{s-1} H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] dp dq \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty p^{r-1} q^{s-1} \left(\sum_{k,m,n \geq 0} \frac{(\alpha)_{k+n}(\beta)_{k+m}}{(\gamma)_k} \frac{B(\beta' + m + n, \gamma' - \beta'; p, q)}{B(\beta', \gamma' - \beta')} \frac{x^k y^m z^n}{k! m! n!} \right) dp dq \\ &= \frac{1}{B(\beta', \gamma' - \beta')} \sum_{k,m,n \geq 0} \frac{(\alpha)_{k+n}(\beta)_{k+m}}{(\gamma)_k} \frac{x^k y^m z^n}{k! m! n!} \\ &\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty p^{r-1} q^{s-1} B(\beta' + m + n, \gamma' - \beta'; p, q) dp dq.\end{aligned}$$

Next, applying the formula (see [4, p.342, Eq. (2.1)])

$$\int_0^\infty \int_0^\infty p^{r-1} q^{s-1} B(x, y; p, q) dp dq = \Gamma(r)\Gamma(s)B(x+r, y+s) \quad (\Re(r) > 0, \Re(s) > 0)$$

to the double integral, we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{H_{A,p,q}\}(r,s) &= \Gamma(r)\Gamma(s) \times \\ &\quad \sum_{k,m,n \geq 0} \frac{(\alpha)_{k+n}(\beta)_{k+m}}{(\gamma)_k} \frac{B(\beta' + m + n + r, \gamma' - \beta' + s)}{B(\beta', \gamma' - \beta')} \frac{x^k y^m z^n}{k! m! n!},\end{aligned}$$

which, in view of (1.11), gives (2.10). Theorem 2.4 is proved. $\square$

The special case of (2.10) when $r = s = 1$ yields the following relation between the function $H_{A,p,q}$ and the Srivastava's triple hypergeometric function H_A :

$$\int_0^\infty H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] dp dq = \frac{\beta'(\gamma' - \beta')}{\gamma'(\gamma' + 1)} H_A[\alpha, \beta, \beta' + 1; \gamma, \gamma' + 2; x, y, z],$$

provided that $\Re(\gamma') > \Re(\beta') > 0$.

Theorem 2.5. *The following Laguerre polynomial representation holds for $\Re(p) > 0$, $\Re(q) > 0$:*

$$\begin{aligned}H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] &= \frac{e^{-p-q}}{B(\beta', \gamma' - \beta')} \sum_{m,n \geq 0} B(\beta' + n + 1, \gamma' - \beta' + m + 1) \\ &\quad \times H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta' + n + 1; \gamma, \gamma' + m + n + 2; x, y, z] L_m(p) L_n(q).\end{aligned}$$

Proof. We start by recalling the following identity, in a slightly corrected form, due to Choi *et al.* [4, p. 350, Eq. (5.5)]:

$$\exp\left(-\frac{p}{t} - \frac{q}{1-t}\right) = e^{-p-q} \left\{ \sum_{m,n=0}^{\infty} L_m(p) L_n(q) t^{n+1} (1-t)^{m+1} \right\}$$

Using this identity, from (2.2) we obtain

$$H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] = \frac{e^{-x-y}}{\Omega(\beta', \gamma' - \beta')} \int_0^1 v^{\beta'-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-vy)^{-\beta} (1-vz)^{-\alpha} \quad (2.11)$$

$$\times {}_2F_1 \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{xyz}{(1-vy)(1-vz)} \right] \left\{ \sum_{m,n=0}^{\infty} L_m(p) L_n(q) v^{n+1} (1-v)^{m+1} \right\} dv.$$

Now, changing integration and summation order in the representation (2.11) and using (2.2), we obtain the desired result. Theorem 2.5 is proved. $\square$

2.3. Transformations and recurrence relations. In this subsection, we first derive a transformation formula and then obtain a recurrence relation for function $H_{A,p,q}$.

Theorem 2.6. *The following transformation formula for $H_{A,p,q}$ holds:*

$$\begin{aligned} H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] \\ (2.12) \quad = (1-y)^{-\beta} (1-z)^{-\alpha} H_{A,q,p} \left[\alpha, \beta, \gamma' - \beta'; \gamma, \gamma'; \frac{x}{(1-y)(1-z)}, \frac{y}{y-1}, \frac{z}{z-1} \right] \end{aligned}$$

Proof. Applying to (2.8) the extended Kummer's transformation (see [4, p. 361, Eq. (11.4)]): $\Phi_{p,q}(\beta; \gamma; z) = e^z \Phi_{q,p}(\gamma - \beta; \gamma; -z)$, we find that

$$\begin{aligned} H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(1-y)-t(1-z)} t^{\alpha-1} s^{\beta-1} \\ &\times {}_0F_1(-; \gamma; xst) \Phi_{q,p}(\gamma' - \beta'; \gamma'; -ys - zt) dt ds. \end{aligned}$$

The substitution $t(1-z) = u$, $s(1-y) = v$ leads to

$$\begin{aligned} H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] &= \frac{(1-y)^{-\beta} (1-z)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v} u^{\alpha-1} v^{\beta-1} \\ &\times {}_0F_1 \left(-; \gamma; \frac{xuv}{(1-y)(1-z)} \right) \Phi_{q,p} \left(\gamma' - \beta'; \gamma'; \frac{yv}{(y-1)} + \frac{zu}{(z-1)} \right) du dv, \end{aligned}$$

which is exactly the same as (2.12). Theorem 2.6 is proved. $\square$

Theorem 2.7. *The following recurrence relation for $H_{A,p,q}$ holds:*

$$\begin{aligned} H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] &= H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma - 1, \gamma'; x, y, z] \\ &+ \frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma-1)} H_{A,p,q}[\alpha + 1, \beta + 1, \beta'; \gamma + 1, \gamma'; x, y, z]. \end{aligned}$$

Proof. Using in the integral representation (2.8) and the contiguous relation

$${}_0F_1(-; \gamma - 1; x) - {}_0F_1(-; \gamma; x) - \frac{x}{\gamma(\gamma-1)} {}_0F_1(-; \gamma + 1; x) = 0,$$

we obtain the desired result. Theorem 2.7 is proved. $\square$

3. BOUNDING INEQUALITIES

In this section, we find bounding inequalities for the extended Srivastava's triple hypergeometric function $H_{A,p,q}$. We begin with a simple auxiliary lemma that gives a functional bound for function $B(x, y; p, q)$, defined by (1.6).

Lemma 3.1. *For all $\min\{p, q\} \geq 0$ and $\min\{\Re(x), \Re(y)\} > 0$ we have*

$$(3.1) \quad B(x, y; p, q) \leq e^{-(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} B(x, y).$$

Indeed, using the sharp estimate

$$\sup_{0 < t < 1} \exp \left\{ -\frac{p}{t} - \frac{q}{1-t} \right\} = e^{-(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}, \quad \min\{p, q\} \geq 0,$$

from (1.6) we obtain (3.1).

3.1. Bounds obtained via series representations. Applying the functional bound (3.1) to all series representations of newly extended special functions involving the function $B(x, y; p, q)$, such as the extended Gauss' hypergeometric $F_{p,q}$, the extended Kummer's confluent hypergeometric $\Phi_{p,q}$, the extended Appell's F_1 and the extended Srivastava's triple hypergeometric $H_{A,p,q}$ functions, given by (1.7) – (1.10), respectively, we obtain the following functional bounds.

Theorem 3.1. *For all $\min\{p, q\} \geq 0$; $\Re(c) > \Re(b) > 0$ and for all $|z| < 1$ we have*

$$(3.2) \quad F_{p,q}(a, b; c; z) \leq e^{-(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} {}_2F_1(a, b; c; z)$$

$$(3.3) \quad \Phi_{p,q}(b; c; z) \leq e^{-(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \Phi(b; c; z).$$

Moreover, for $\max\{|\arg(1-x)|, |\arg(1-y)|\} < \pi$; $\Re(c) > \Re(a) > 0$, we have

$$F_1(a, b, b'; c; x, y; p, q) \leq e^{-(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} F_1(a, b, b'; c; x, y);$$

while for $|x| < r$, $|y| < s$, $|z| < t$ and $t = (1-r)(1-s)$ when $p = q = 0$, we have

$$H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z] \leq e^{-(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} H_A[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z].$$

Proof. To prove the inequality (3.2), observe that all parameters and expressions in (3.2) are positive, and hence we can use the series representation of the extended Gauss' hypergeometric function (1.7) and Lemma 2 to conclude that:

$$\begin{aligned} F_{p,q}(a, b; c; z) &\leq \frac{e^{-(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}}{B(b, c-b)} \sum_{n \geq 0} (a)_n B(b+n, c-b) \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} = e^{-(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

From the last relation we easily obtain (3.2). The other three inequalities can be proved similarly, and so we omit the details. Theorem 3.1 is proved. $\square$

3.2. Bounds obtained via integral representations. In this subsection, we establish another type bounding inequalities for function $H_{A,p,q}$, combining its newly derived integral expressions and the bound (3.1) stated in Lemma 2. Since the integrands consist of either the exponential $\exp\{-p/t - q/(1-t)\}$ or rational functions (Theorems 2.1 and 2.2) and extended Kummer's $\Phi_{p,q}$ together with the modified Bessel functions (Theorem 3), we need auxiliary tools to bound the involved special functions.

In [11], Y. Luke, has studied, among others, the problem of two-sided inequalities for ${}_rF_r$ -type generalized hypergeometric function, where the bounds consist of polynomials and/or exponential expressions. We recall some results from [11], which are usable for Kummer's function Φ . If $b_j \geq a_j > 0$, $j = \overline{1, r}$, then for all $x > 0$ we have (see [11, p. 57, Theorem 16, Eq. (5.6)]):

$$(3.4) \quad e^{\theta x} < {}_rF_r(a_r; b_r; x) < 1 - \theta(1 - e^x),$$

where

$$(3.5) \quad \theta = \frac{\max_{1 \leq j \leq r} a_j}{\min_{1 \leq j \leq r} b_j}.$$

For all $c \geq b > 0$, the bilateral inequality (3.4), applied to the Kummer's confluent function $\Phi(x) = {}_1F_1(b; c; x)$, reduces to the following:

$$(3.6) \quad e^{bx} \leq \Phi(b; c; x) \leq 1 - \frac{b}{c}(1 - e^x),$$

where the equality holds for $b = c$. Also, we point out some other estimates for ${}_2F_1$ from [11, p. 55, Theorem 13, Eqs. (4.21), (4.23)], which are too complicated to be used here.

For another estimation purposes we recall certain bounding inequalities for function $J_\nu(t)$ on the positive real half-axis. We first mention von Lommel's results (see [9], [10, pp. 548–549], and also [21, p. 406]):

$$(3.7) \quad |J_\nu(t)| \leq 1, \quad |J_{\nu+1}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \nu > 0, t \in \mathbb{R},$$

and the bound obtained by Minakakisundaram and Szász (see [12, p. 37]):

$$(3.8) \quad |J_\nu(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{|t|}{2} \right)^\nu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Another bounds were derived by Landau [8], who gave in a sense the best possible bounds for $J_\nu(t)$ with respect to ν and t . These bounds read as follows:

$$(3.9) \quad |J_\nu(t)| \leq b_L \nu^{-1/3}, \quad b_L = \sqrt[3]{2} \sup_{t \geq 0} \text{Ai}(t),$$

$$(3.10) \quad |J_\nu(t)| \leq c_L |t|^{-1/3}, \quad c_L = \sup_{t \geq 0} t^{1/3} J_0(t),$$

where $\text{Ai}(\cdot)$ stands for the Airy function.

Krasikov [5] established uniform bounds for $|J_\nu(t)|$. Let $\nu > -1/2$, then

$$J_\nu^2(t) \leq \frac{4(4t^2 - (2\nu + 1)(2\nu + 5))}{\pi((4t^2 - \lambda)^{3/2} - \lambda)} =: \mathfrak{H}_\nu(t),$$

for all $t > \frac{1}{2}\sqrt{\lambda + \lambda^{2/3}}$, $\lambda := (2\nu + 1)(2\nu + 3)$. This estimate is sharp in a certain sense (see [5, Theorem 2]). In turn, Krasikov recently has obtained a set of more precise and simpler bounds for $|J_\nu(t)|$ (see [6, 7]). More precisely, for all $\nu \geq 1/2$ and for all $t \geq 0$ the following inequality holds (see [6, p. 210, Theorem 3]):

$$(3.11) \quad \left| t^2 - \left| \nu^2 - \frac{1}{4} \right| \right|^{1/4} |J_\nu(t)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

where the constant on the right-hand side is sharp. Next, Theorem 4 from [6, p. 210] implies the following inequality:

$$(3.12) \quad |J_\nu(t)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \rho c \left| \nu^2 - \frac{1}{4} \right| t^{-3/2}, \quad t > 0, |\rho| < 1,$$

where

$$c = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}, & x \geq 0, |\nu| \leq 1/2 \\ \frac{4}{5}, & 0 < x < \sqrt{|\nu^2 - 1/4|}, \nu > 1/2 \\ \frac{2}{\pi}, & x \geq \sqrt{|\nu^2 - 1/4|}, \nu > 1/2. \end{cases}$$

Here the constant c cannot be less than $1/\sqrt{2\pi}$. For another kind of bounds for function $J_\nu(t)$ consult [6, Theorems 2, 5, 6] and [7, Theorems 2, 4].

It is worth to mention that Olenko [13, Theorem 1] established the following upper bound:

$$(3.13) \quad \sup_{t \geq 0} \sqrt{t} |J_\nu(t)| \leq b_L \sqrt{\nu^{1/3} + \frac{\alpha_1}{\nu^{1/3}} + \frac{3\alpha_1^2}{10\nu}} =: d_\nu, \quad \nu > 0,$$

where α_1 is the smallest positive zero of the Airy-function Ai and b_L is the Landau's constant from above. In this respect we also point out Krasikov's result [6, p. 211, Eq. (7)].

Further considerable upper bounds are listed, for instance, in [1, 19].

Finally, a different approach to estimate the function $|J_\mu(t)|$ was used by Srivastava and Pogány in [19]. Let us denote by $\chi_S(x)$ the characteristic (or indicator) function of a set S , that is, $\chi_S(x) = 1$ for $x \in S$ and $\chi_S(x) = 0$ elsewhere. In this approach, the integration interval is the positive real half-axis, therefore we need an efficient bound for $|J_\mu(t)|$ on $(0, A]$, $A > \sqrt{\lambda + \lambda^{2/3}}/2$. So, we use the bounding function

$$(3.14) \quad |J_\mu(t)| \leq \mathcal{Y}_\mu(t) := \frac{d_\mathcal{O}}{\sqrt{t}} \chi_{(0, A_\lambda]}(t) + \sqrt{\mathfrak{H}_\mu(t)} (1 - \chi_{(0, A_\lambda]}(t)),$$

where, by simplicity reasons, we choose

$$A_\lambda = \frac{1}{2} (\lambda + (\lambda + 1)^{2/3}),$$

because $\mathfrak{H}_\mu(t)$ is positive and monotone decreasing for $t \in \frac{1}{2}((\lambda + \lambda^{2/3}), \infty)$ (cf. [19, §3]). Notice that as A_λ can be taken any function of the form $\frac{1}{2}(\lambda + (\lambda + \eta)^{2/3})$

with $\eta > 0$. (The interested reader is referred to [1], too). Obviously, combining (3.11), (3.12) in $\mathcal{V}_\mu(t)$ replacing Olenko's result and/or $\mathcal{R}_\nu(t)$ in (3.14), we can define further bounding functions for $|J_\nu(t)|$.

Since the integral representation (2.7) can also be expressed in terms of modified Bessel function I_μ , we can apply the Luke's estimate to bound $H_{A,p,q}$. This inequality reads as follows (see [11]):

$$(3.15) \quad I_\mu(t) < \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \cosh t, \quad t > 0, \mu+1 > 0.$$

Now we are ready to state and prove our second set of bounding inequality results.

Theorem 3.2. *Let $\min\{\Re(p), \Re(q)\} > 0$ and for all $\max\{\Re(y), \Re(z)\} < 1$, $\min\{\Re(\alpha), \Re(\beta)\} > 0$ when $p = q = 0$. Then under $2\min\{\alpha, \beta\} + 1 > \gamma > 0$ we have*

$$(3.16) \quad |H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; -x, y, z]| \leq \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \frac{\gamma-1}{2}) \Gamma(\beta - \frac{\gamma-1}{2}) |x|^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{2} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) e^{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2}} \times \left\{ 1 - \frac{\beta'}{\gamma'} \left(1 - (1-y)^{-\beta + \frac{\gamma-1}{2}} (1-z)^{-\alpha + \frac{\gamma-1}{2}} \right) \right\}.$$

In the same parameter range for all $x > 0$ we have

$$(3.17) \quad |H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; -x, y, z]| \leq \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \frac{\gamma-1}{2}) \Gamma(\beta - \frac{\gamma-1}{2}) b_L |x|^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{2} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) e^{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2}} \times \left\{ 1 - \frac{\beta'}{\gamma'} \left(1 - (1-y)^{-\beta + \frac{\gamma-1}{2}} (1-z)^{-\alpha + \frac{\gamma-1}{2}} \right) \right\}.$$

For all $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} > 0$ and for $x > 0$; $y, z < 1$, we have

$$(3.18) \quad |H_{A,p,q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; -x, y, z]| \leq e^{-(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2} \left\{ 1 - \frac{\beta'}{\gamma'} \left(1 - (1-y)^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} \right) \right\}.$$

For $\min\{\alpha, \beta\} > 0$; $\gamma > 1$ and for $x > 0$; $y, z < 1$, we have

$$\begin{aligned} |H_{A,p,q}(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; -x, y, z)| &\leq \frac{\Gamma(\gamma) e^{-(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \\ &\times \left\{ \frac{e^{x-\frac{\gamma+1}{2}}}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\alpha - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\beta - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta'}{\gamma'} + \frac{\frac{\beta'}{\gamma'}}{(1-y)^{\alpha-\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}} (1-z)^{\beta-\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{x-\frac{\gamma+1}{2}}}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\alpha - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\beta - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta'}{\gamma'} + \frac{\frac{\beta'}{\gamma'}}{(1-y)^{\alpha-\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}} (1-z)^{\beta-\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}}}\right) \right\} \end{aligned}$$

here the bound above holds if $6\alpha - 3\gamma + 2 > 0$, while the expression below appears for $4\alpha - 2\gamma + 1 > 0$. Moreover, for all $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} > 0$ and for all $y, z \in (0, 1 - \sqrt{x})$, $x >$

0, we have

$$(3.19) \quad |H_{A,P,Q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y, z]| \leq e^{-(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \left\{ \frac{1 - \frac{\beta'}{\gamma'}}{(1 - \sqrt{x})^{\alpha + \beta}} + \frac{\frac{\beta'}{\gamma'}}{(1 - \sqrt{x - y})^\beta (1 - \sqrt{x - z})^\alpha} \right\}.$$

Proof. From the double integral representation (2.7) and the estimate (3.3), we obtain

$$(3.20) \quad |H_{A,P,Q}[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; -x, y, z]| \leq \frac{\Gamma(\gamma) e^{-(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) |x|^{\frac{\alpha-1}{2}}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} t^{\alpha - \frac{\alpha-1}{2} - 1} s^{\beta - \frac{\beta-1}{2} - 1} \\ \times \left\{ \frac{|J_{\gamma-1}(2\sqrt{xst})|}{I_{\gamma-1}(2\sqrt{xst})} \right\} \Phi(\beta'; \gamma'; yz + xt) ds dt =: \frac{\Gamma(\gamma) e^{-(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) |x|^{\frac{\alpha-1}{2}}} H_1.$$

Next, using the second inequality in (3.6), we get

$$(3.21) \quad R_1 \leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} t^{\alpha - \frac{\alpha-1}{2} - 1} s^{\beta - \frac{\beta-1}{2} - 1} \left\{ \frac{|J_{\gamma-1}(2\sqrt{xst})|}{I_{\gamma-1}(2\sqrt{xst})} \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{\beta'}{\gamma'} (1 - e^{yz+xt}) \right\} ds dt =: R_2.$$

Now, we bound the modulus of the Bessel functions in the integrand of R_2 for each of the cases of the theorem. First, using the von Lommel's uniform bound (3.7), valid for all $\gamma > 0$, from (3.20) and (3.21) we obtain (3.16). In similar manner, (3.17) follows from the Landau's first inequality (3.9) and (3.20), (3.21).

The bound (3.8) due to Minakshisundaram and Szász is of magnitude $|J_{\gamma-1}(t)| \leq C_\gamma t^\kappa$, and so do the second Landau's (3.10) and Olenko's (3.13) inequalities, where $C_\gamma > 0$, $\kappa \in \{\nu, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}$, respectively. Thus, by these three inequalities, we get

$$R_2 \leq C_\gamma |x|^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} t^{\alpha + \frac{\kappa - \frac{\alpha-1}{2} + 1}{2} - 1} s^{\beta + \frac{\kappa - \frac{\beta-1}{2} + 1}{2} - 1} \left\{ 1 - \frac{\beta'}{\gamma'} (1 - e^{yz+xt}) \right\} ds dt \\ = C_\gamma |x|^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ \left(1 - \frac{\beta'}{\gamma'} \right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} t^{\alpha + \frac{\kappa - \frac{\alpha-1}{2} + 1}{2} - 1} s^{\beta + \frac{\kappa - \frac{\beta-1}{2} + 1}{2} - 1} ds dt \right. \\ \left. + \frac{\beta'}{\gamma'} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(1-y)s - (1-x)t} t^{\alpha + \frac{\kappa - \frac{\alpha-1}{2} + 1}{2} - 1} s^{\beta + \frac{\kappa - \frac{\beta-1}{2} + 1}{2} - 1} ds dt \right\} \\ = C_\gamma |x|^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\alpha + \frac{\kappa - \gamma + 1}{2}\right) \Gamma\left(\beta + \frac{\kappa - \gamma + 1}{2}\right) \\ \times \left\{ 1 - \frac{\beta'}{\gamma'} + \frac{\beta'}{\gamma'} \frac{1}{(1-y)^{\beta + \frac{\kappa - \frac{\beta-1}{2} + 1}{2}} (1-z)^{\alpha + \frac{\kappa - \frac{\alpha-1}{2} + 1}{2}}} \right\}.$$

Now, choosing $\kappa = \gamma - 1$ we arrive at (3.18), then for $\kappa = -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ we realize the bounds affiliated to the second Landau's and Olenko's estimates, respectively.

As to the use of the bound (3.15) to estimate R_2 , we remark that $\cosh u \leq e^u$, $u > 0$, and hence by the arithmetic mean-geometric mean inequality, we get

$$\begin{aligned} R_2 &\leq \frac{|x|^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t+2\sqrt{sst}} t^{\alpha-1} s^{\beta-1} \left\{ 1 - \frac{\beta'}{\gamma} (1 - e^{y\alpha+zt}) \right\} ds dt \\ &\leq \frac{|x|^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(1-\sqrt{x})s-(1-\sqrt{x})t} t^{\alpha-1} s^{\beta-1} \left\{ 1 - \frac{\beta'}{\gamma} (1 - e^{y\alpha+zt}) \right\} ds dt =: R_3. \end{aligned}$$

Thus, we have

$$R_3 = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)|x|^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\Gamma(\gamma)} \left\{ \frac{1 - \frac{\beta'}{\gamma}}{(1-\sqrt{x})^{\alpha+\beta}} + \frac{\frac{\beta'}{\gamma}}{(1-\sqrt{x}-y)^{\beta}(1-\sqrt{x}-z)^{\alpha}} \right\},$$

which proves the upper bound in (3.19). Theorem 3.2 is proved. $\square$

4. CONCLUDING REMARKS AND OBSERVATIONS

In the present paper, we have introduced the extended Srivastava triple hypergeometric functions $H_{A,p,q}$ with the help of the extended Beta function $B(x, y; p, q)$. The special cases of (2.2) – (2.8) and (2.12) for $p = q = 0$, reduce to the already known results for the triple hypergeometric function H_A (see [16, 17, 18]).

To refine the bounds presented above, we can also apply Luke's companion estimate to (3.4) (see [11, p. 57, Theorem 16, Eq. (5.8)])

$$(4.1) \quad 1 + \theta x^{\frac{\theta}{2}} z < {}_rP_r(a_r; b_r; x) < 1 + \theta x \left(1 - \frac{\psi}{2} + \frac{\psi}{2} e^x \right),$$

where θ is given by (3.5), and

$$\psi = \frac{1 + \max_{1 \leq j \leq r} a_j}{1 + \min_{1 \leq j \leq r} b_j}.$$

These notations simplify (4.1) to

$$1 + \frac{b}{c} x \exp \left\{ \frac{1+b}{2(1+c)} x \right\} < {}_2\Phi_1(b; c; x) < 1 + \frac{b}{c} x \left(1 - \frac{1+b}{2(1+c)} (1 - e^x) \right).$$

Now, following the procedure, used in the proof of Theorem 3.2 with this upper bound and/or replacing some of bounds for the Bessel J_ν used there either by Krasikov's results (3.11), (3.12) or another kind bounds exposed in [6, 7], we can obtain a new set of bounding inequalities for function $H_{A,p,q}$. However, this approach will be exploited in some future work.

Acknowledgements. The authors are indebted to the anonymous referee for constructive comments and suggestions, which substantially encompassed the present paper. We are also thankful for drawing our attention to important publications [6, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Á. Baricz, P. L. Butzer, T. K. Pogány, Alternating Mathieu series, Hilbert - Eisenstein series and their generalized Omega functions, in T. Rassias, G. V. Milovanović (Eds.), *Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions - In Honor of Hari M. Srivastava*, Springer, New York, 775 – 808 (2014).
- [2] M. A. Chaudhry, A. Qadir, M. Rafique and S. M. Zubair, "Extension of Euler's Beta function", *J. Comput. Appl. Math.*, **78**, 19 – 32 (1997).
- [3] M. A. Chaudhry, A. Qadir, H. M. Srivastava and R. B. Paris, "Extended hypergeometric and confluent hypergeometric functions", *Appl. Math. Comput.*, **169**, 589 – 602 (2004).
- [4] J. Choi, A. K. Rathie and R. K. Parmar, "Extension of extended beta, hypergeometric and confluent hypergeometric functions", *Honam Math. J.*, **30**, no. 2, 357 – 385 (2011).
- [5] I. Krasikov, "Uniform bounds for Bessel functions", *J. Appl. Anal.*, **12**, no. 1, 83 – 91 (2006).
- [6] I. Krasikov, "Approximations for the Bessel and Airy functions with an explicit error term", *LMS J. Comput. Math.*, **17**, no. 1, 209 – 225 (2014).
- [7] I. Krasikov, "On the Bessel function $J_\nu(x)$ in the transition region", *LMS J. Comput. Math.*, **17**, no. 1, 273 – 281 (2014).
- [8] L. Landau, Monotonicity and Bounds on Bessel Functions, *Proceedings of the Symposium on Mathematical Physics and Quantum Field Theory (Berkeley, CA, 1999)*, 147 – 154, *Electron. J. Differ. Equ. Conf.*, **4**, Southwest Texas State Univ., San Marcos, TX (2000).
- [9] E. C. J. von Lommel, "Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung und eines kreisrunden Schirmchens theoretisch und experimentell bearbeitet", *Abb. der math. phys. Classe der k. b. Akad. der Wiss. (München)*, **16**, 229 – 328 (1884-1886).
- [10] E. C. J. von Lommel, "Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme", *Abb. der math. phys. Classe der k. b. Akad. der Wiss. (München)*, **16**, 529 – 664 (1884-1886).
- [11] Y. L. Luke, "Inequalities for generalized hypergeometric functions", *J. Approx. Theory*, **5**, 41 – 65 (1974).
- [12] S. Minakshisundaram and O. Szász, "On absolute convergence of multiple Fourier series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61**, no. 1, 38 – 53 (1947).
- [13] A. Ya. Olenko, "Upper bound on $\sqrt{x}J_\nu(x)$ and its applications", *Integral Transforms Spec. Functions*, **17**, no. 6, 455 – 467 (2006).
- [14] M. A. Ozarslan and E. Ozergin, "Some generating relations for extended hypergeometric function via generalized fractional derivative operator", *Math. Comput. Modelling*, **52**, 1825 – 1833 (2010).
- [15] R. B. Paris and D. Kaminski, *Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [16] H. M. Srivastava, "Hypergeometric functions of three variables", *Ganita*, **16**, 97 – 108 (1964).
- [17] H. M. Srivastava, "Some integrals representing triple hypergeometric functions", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **16**, no. 2, 99 – 115 (1967).
- [18] H. M. Srivastava and P. W. Karlsson, *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*, Halsted Press, (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto (1985).
- [19] H. M. Srivastava and T. K. Pogány, "Inequalities for a unified Voigt functions in several variables", *Russian J. Math. Phys.*, **14**, no. 2, 194 – 200 (2007).
- [20] H. M. Srivastava, R. K. Parmar and P. Chopra, "A class of extended fractional derivative operators and associated generating relations involving hypergeometric functions", *Axioms*, **1**, no. 3, 238 – 258 (2012).
- [21] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, London and New York (1944).

Поступила 28 сентября 2015

MEAN COVARIOGRAM OF CYLINDERS AND APPLICATIONS TO BOOLEAN RANDOM SETS

F. WILLOT

Mines ParisTech, PSL Research University, Paris, France

E-mail: francois.willot@ensmp.fr

Abstract. This work focuses on the variance properties of isotropic Boolean random sets containing randomly-oriented cylinders with circular cross-section. Emphasis is put on cylinders with large aspect ratios, of the oblate and prolate types. A link is established between the power law decay of the covariance function and the variance of the estimates of the volume fraction of cylinders. The covariance and integral range of the Boolean mixtures are expressed in terms of the orientation-averaged covariogram of cylinders, for which exact analytical formulas and approximate expressions are provided.

MSC2010 numbers: 60D05, 52A22, 53C65.

Keywords: Stochastic geometry; geometrical covariogram; Boolean model; cylinder.

1. INTRODUCTION

The covariogram, originally introduced by G. Matheron [13], gives the volume of the intersection of a (convex) body with a translation of itself. This function is closely related to the distribution of the length of the chords of a body, and also is a key ingredient in the theory of Boolean stochastic models based on Poisson point processes (see [14, 16, 17, 22, 2], and references therein). A key theorem relates the covariance function of stationary Boolean sets in the Euclidean space to the Poisson intensity of the point process and to the covariogram of the primary grain. In turn, the covariance function itself governs basic features of the model, such as the specific surface area and the integral range. The integral range is linked to the estimates on finite-size volumes of the random set volume fraction.

Another property of interest concerns the probability that a segment is entirely contained in the complementary set of a Boolean model. This probability takes a simple form for convex primary grains, which depends on the derivative of the covariogram at 0 (see [22]). Linear erosion allows one to compute this probability numerically which is especially useful for model identification (see [18, 11]).

An important subclass of Boolean models, commonly used in material science for modeling heterogeneous materials, concern isotropic random sets. In dimension 3, this model requires one to average the covariogram over all directions uniformly on the sphere. In the rest of this article, the orientation-averaged covariogram, also denoted “isotropized covariogram” in the literature, will be referred to as “mean

covariogram". The mean covariogram is a special case of the so-called "kinematic" integrals (see [21], Chapter 5) of the form (in dimension d):

$$(1.1) \quad \int_{G^d} V_d(M \cap gA) \mu(dg),$$

where a convex body A is moved into gA and the volume of the intersection of gA with a convex set M is averaged with respect to the measure μ over all transformations g in the motion group G^d . The measure μ is invariant in G^d . The mean covariogram, required for describing isotropic Boolean models, is obtained by taking translations at a fixed distance uniformly distributed on the sphere for G^d and μ and $M = A$. Unfortunately, such a kinematic covariogram is usually not known explicitly, especially in dimension 3 (3D). Some notable exceptions include the sphere, parallelepiped, cylinder (see [6, 8]) and the Poisson polyhedra ([15]). The mean covariogram for cylinders is useful for identifying stochastic fibrous models from experimental 2D (e.g., SEM) or 3D (e.g., tomography) images of fibrous materials (see [18–20]). More generally, heterogeneous microstructures, studied for various industrial applications, can be approached by random models of cylinders. Examples include flakes in optics [4] or platelets in mesoporous materials [24].

This work focuses on the mean covariogram of 3D cylinders with a circular cross-section and its applications to Boolean models, and is organized as follows. The covariogram of a cylinder is recalled in Section 2. The mean covariogram is derived in Section 3. Boolean models of cylinders are considered in Section 4. The integral range is given in Section 4.1. Variance properties are discussed in Sections 4.2 and 4.3. Section 5 concludes the paper.

2. COVARIOGRAM OF A CYLINDER

Consider a cylinder C of height h and circular cross-section of radius r , and a Cartesian coordinate system with origin O and axes e_x , e_y and e_z . We assume that O is at the center of one of the bases of C and that e_z is parallel to the cylinder main axis. Consider now the translation C' of the cylinder C by a vector v . We parameterize v by its norm $t = |v|$ and two angles $\phi \in [0; 2\pi]$ and $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$ in spherical coordinates. The azimuthal angle ϕ is the angle between e_x and the projection of v onto the plane $(0; e_x, e_y)$. The variable θ denotes the angle between v and the plane $(0; e_x, e_y)$ so that $\theta = \pi/2$ when v is parallel to e_z and $\theta = 0$ when v is contained in the plane $(0; e_x, e_y)$. Note that, using this convention, θ is the complementary of the polar angle.

The (oriented) covariogram of a cylinder $K(\theta, t)$ is defined as the volume of the intersection of C with C' :

$$(2.1) \quad K(\theta, t) = L_3(C \cap C'),$$

where L_3 denotes the Lebesgue measure in $\mathbb{R}^3$. The covariogram K depends on r , h , t and θ , but not on ϕ . For conciseness, the dependance on r and h is omitted in the notation for K and in the notation for other variables hereafter. Let us introduce the ratios:

$$(2.2) \quad x = \frac{t}{2r}, \quad y = \frac{h}{t}.$$

The two variables x and y , not to be confounded with Cartesian coordinates, will be used preferentially to t , h and r . Furthermore, the variable t as argument of a function will be replaced indifferently by x or y . For instance, $K(\theta, t)$ is also denoted $K(\theta, x)$.

The expression for the covariogram K is derived from the formula of covariogram of a disk in the plane and reads as follows (see [9]):

$$(2.3a) \quad K(\theta, t) = \bar{K}(\theta, x)H(\theta, t),$$

$$(2.3b) \quad \bar{K}(\theta, x) = 4r^3 \left(\frac{1}{2} - x \sin \theta \right) \left[\cos^{-1}(x \cos \theta) - x \cos \theta \sqrt{1 - x^2 \cos^2 \theta} \right],$$

where $H(\theta, t) = 1$ when θ and t are such that the two cylinders C and C' intersect, and 0 otherwise. More precisely:

$$(2.4) \quad H(\theta, t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq t_{\max}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad t_{\max} = \begin{cases} \frac{2r}{\sin \theta} & \text{if } \theta \in [0; \tan^{-1} \frac{h}{2r}], \\ \frac{h}{\sin \theta} & \text{if } \theta \in [\tan^{-1} \frac{h}{2r}; \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

The term $\cos^{-1}$ in Eq. (2.3a) refers to the inverse cosine function, also denoted arccos, and $\tan^{-1}$ in (2.4) denotes the inverse tangent function. Likewise, $\sin^{-1}$ hereafter is used to denote the inverse sine function.

The next section is concerned with the normalized mean covariogram:

$$(2.5) \quad k(t) := k_h(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{K(\theta, t)}{h\pi r^2} \cos \theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{K(\theta, t)}{h\pi r^2} \cos \theta,$$

where the mean is taken over all directions on the sphere, assuming the distribution of orientations is uniform on the latter. Here, the covariogram K is normalized by the cylinder volume and surface area of the unit sphere so that the $k(t) = 1$ when $t = 0$ and $k(t) = 0$ when $t = \infty$. Similar to K , the function k depends on $r \geq 0$ and $h \geq 0$.

3. MEAN COVARIOGRAM OF A CYLINDER

In this section, the isotropized covariogram of a cylinder with circular cross-section is given. We refer to [6 - 8, 23], where this problem has been studied in details.

3.1. Prolate cylinders. In this subsection, we compute the limit $k_{\infty}(t)$ of $k_h(t)$ as $h \rightarrow \infty$ with r and t being fixed. The condition $t \leq t_{\max}$ (see Eq. (2.4)) reduces to $x \cos \theta \leq 1$, which is satisfied for all θ when $x < 1$, and for $\theta > \cos^{-1}(1/x)$ when $x > 1$. Therefore in (2.5), the term K can be replaced by $\bar{K}$ provided the

integration is carried out over the intervals $[0; \pi/2]$ ($x < 1$) and $[\cos^{-1}(1/x); \pi/2]$ ($x > 1$). Thus, we have

$$(3.1) \quad k_{\infty}(x) = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \tilde{K}(\theta, x) \cos \theta, & \text{if } x < 1, \\ \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h\pi^2} \int_{\cos^{-1}(1/x)}^{\pi/2} d\theta \tilde{K}(\theta, x) \cos \theta, & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

Observe however that, when $x > 1$, $\tilde{K}(\theta, t)$ is purely imaginary in the domain $0 < \theta < \cos^{-1}(1/x)$. Accordingly, it is sufficient to integrate over the interval $[0; \pi/2]$ instead of $[\cos^{-1}(1/x); \pi/2]$, provided the imaginary part of the integral is discarded:

$$(3.2) \quad k_{\infty}(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h\pi^2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\theta \tilde{K}(\theta, x) \cos \theta \right\},$$

where $\operatorname{Re}\{z\}$ stands for the real part of a complex number z . Replacing K by its expression given in (2.3a) and expanding the integrand at first order in $1/h$, we get

$$(3.3) \quad k_{\infty}(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \left[\cos^{-1}(x \cos \theta) - x \cos \theta \sqrt{1 - x^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}.$$

As it was seen above, k_{∞} depends on t and r only through $x = t/(2r)$. The integral in (3.3) is readily computed in the complex domain using a symbolic calculator (see [26]). The expression depends on the complete elliptic integrals of the first and second kind, denoted by F and E , respectively, and defined by the following formulas:

$$(3.4) \quad F(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - z \sin^2 u}}, \quad E(z) = \int_0^{\pi/2} du \sqrt{1 - z \sin^2 u}.$$

The above functions F and E are real-valued when $z \leq 1$, and are complex-valued with non-zero real and imaginary parts when $z > 1$. We refer to the online resources ([25, 7] and references therein) for an overview of their properties. Note that the elliptic functions are usually defined by $z \rightarrow F(\sqrt{z})$, $z \rightarrow E(\sqrt{z})$. In this work we follow the notation used in [26].

The elliptic functions F and E appear in the integration of both the square root and inverse cosine terms in (3.3). For instance, when $x < 1$, the $\cos^{-1}$ term is integrated by parts as follows:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^{-1}(x \cos \theta) \cos \theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 \theta}} = \left(x - \frac{1}{x}\right) F(x^2) + \frac{E(x^2)}{x} \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \operatorname{Im} \left\{ E \left(\frac{1}{1 - x^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

where $\text{Im}\{z\}$ denotes the imaginary part of a complex number z . The final formula for $k_{\infty}(x)$, after simplification in the regions $x < 1$ and $x > 1$, reads as follows:

$$(3.6) \quad k_{\infty}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^2} \left\{ \text{Im} \left[E \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \right] + \frac{2x^2-1}{3} E \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right) + \frac{1}{3} F \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right) \right\}, & \text{if } x < 1, \\ 1 - \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2} \left\{ E \left(\frac{1}{1-x^2} \right) + \text{Im} \left[\frac{2x^2-1}{3} E \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right) + \frac{1}{3} F \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right) \right] \right\}, & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

The function k_{∞} is represented in Fig. 1(a) (top curve).

3.2. Cylinders of arbitrary aspect ratio. This subsection is devoted to the general case, that is, for finite h and r . The intervals of integration for θ are required for computing (2.5). Take first $h < 2r$ and examine the condition $t \leq t_{\max}$ in (2.4). The quantity K in (2.3a) is non-zero in the following intervals for θ (recall that $y = h/t$):

$$(3.7) \quad \theta \in \begin{cases} [0; \pi/2] & \text{if } t < h, \\ [0, \sin^{-1}(y)] & \text{if } h < t < 2r, \\ [\cos^{-1}(1/x), \sin^{-1}(y)] & \text{if } 2r < t. \end{cases}$$

Whereas, when $h > 2r$, K is non-zero if:

$$(3.8) \quad \theta \in \begin{cases} [0; \pi/2] & \text{if } t < 2r, \\ [\cos^{-1}(1/x), \pi/2] & \text{if } 2r < t < h, \\ [\cos^{-1}(1/x), \sin^{-1}(y)] & \text{if } h < t. \end{cases}$$

As in Subsection 3.1, $\bar{K}$ is purely-imaginary when $\theta \in [0; \cos^{-1}(1/x)]$, so one may carry out the integration in (2.5) along the intervals $[0; a]$ with $a = \pi/2$ or $a = \sin^{-1}(y)$, depending on conditions specified in (3.7) and (3.8), respectively. We are left with the evaluation of the following integral:

$$(3.9) \quad k(x, y) = \text{Re} \left\{ \int_0^a \frac{\bar{K}(\theta, x) \cos \theta}{h\pi r^2} d\theta \right\}.$$

Now, according to (3.7) and (3.8), $a = \pi/2$ when $y > 1$ ($t < h$) and $a = \sin^{-1} y$ when $y < 1$ ($t > h$). We first examine the case $a = \pi/2$, that is, $y > 1$. In this case, equation (3.9) takes the form:

$$(3.10) \quad k(x, y) = k_{y>1}(x, y) = k_{\infty}(x) - \frac{3}{8\pi} \text{Re} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\theta \cos(\theta) \sin(\theta) [\cos^{-1}(x \cos \theta) - x \cos \theta \sqrt{1 - x^2 \cos^2 \theta}] \right\},$$

where we have identified $k_{\infty}(x)$, the covariogram for $h = \infty$ given in (3.6). The integral in (3.10) is computed using a software for symbolic computations, and, after rearranging the terms, we get

$$(3.11) \quad k_{y>1}(x, y) = k_{\infty}(x) - \frac{1}{8x^3 y} + \frac{H'(x)}{2y\pi} \left[\left(\frac{1}{2x} + x \right) \sqrt{1 - x^2} + \left(\frac{1}{2x^2} - 2 \right) \cos^{-1} x \right],$$

where H' is a step function given by:

$$(3.12) \quad H'(x) = 1_{[1;+\infty)} = \begin{cases} 1, & \text{if } x < 1, \\ 0, & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$

As expected, the quantity between square brackets in (3.11) is real when $x < 1$ and so is $k(x, y)$ for all x .

We now consider the case $y < 1$ ($t > h$) and the integral in (3.9) with $\alpha = \sin^{-1} y$. The symbolic calculator (see [26]) provides a lengthy formula for the solution. After simplification, the expression takes different forms for $x < 1$ and $x > 1$. For $x > 1$ and $y < 1$, the covariogram k reads:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} k_{y < 1}(x, y) &= \frac{4\sqrt{x^2-1}}{3\pi x} \operatorname{Im} \left[F \left(\sin^{-1} y \middle| \frac{x^2}{x^2-1} \right) - (1+x^2) E \left(\sin^{-1} y \middle| \frac{x^2}{x^2-1} \right) \right] \\ &+ \left(\frac{y}{\pi} + \frac{4x^2-1}{4\pi y x^2} \right) \cos^{-1} \left(x\sqrt{1-y^2} \right) \\ &- \frac{1}{2\pi} \left(\frac{xy}{3} + \frac{1}{2xy} + \frac{x}{y} \right) \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-x^2(1-y^2)}. \end{aligned}$$

The functions of two variables $F(\phi|z)$ and $E(\phi|z)$ are the *incomplete* elliptic integrals of the first and second kind, respectively, defined by the following formulas (see [25]):

$$(3.14) \quad E(\phi|z) = \int_0^\phi \sqrt{1-z\sin^2 u} \, du, \quad F(\phi|z) = \int_0^\phi \frac{du}{\sqrt{1-z\sin^2 u}}.$$

Notice that the complete elliptic integrals in (3.4) are special cases of $F(\phi|z)$ and $E(\phi|z)$:

$$(3.15) \quad E(z) = E\left(\frac{\pi}{2} \middle| z\right), \quad F(z) = F\left(\frac{\pi}{2} \middle| z\right).$$

The incomplete elliptic integrals are real-valued if $z\sin^2 \phi < 1$. Note that this is never the case for the arguments of E and F in (3.13), so that the two functions have complex values. Note also that, owing to $t \leq \sqrt{h^2 + 4r^2}$:

$$(3.16) \quad x\sqrt{1-y^2} < 1, \quad 1-x^2(1-y^2) < 1,$$

and so $k_{y < 1}(x, y)$ in (3.13) is real. Now, when $x, y < 1$, one finds for $k(x, y)$:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} k_{x < 1}(x, y) &= \frac{4\sqrt{1-x^2}}{3\pi x} \left[F \left(\sin^{-1} y \middle| \frac{x^2}{x^2-1} \right) - (1+x^2) E \left(\sin^{-1} y \middle| \frac{x^2}{x^2-1} \right) \right] \\ &+ \left(\frac{y}{\pi} + \frac{5x^2-2}{4\pi y x^2} \right) \cos^{-1} \left(x\sqrt{1-y^2} \right) + \frac{2-5x^2}{4\pi y x^2} \cos^{-1} x \\ &- \frac{1}{2\pi} \left(\frac{xy}{3} + \frac{1}{2xy} + \frac{x}{y} \right) \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-x^2(1-y^2)} + \frac{1+2x^2}{4\pi y x} \sqrt{1-x^2} \\ &+ \frac{1-x^2}{4\pi y x^2} \cos^{-1} \left(x^2\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2(1-y^2)} \right). \end{aligned}$$

Note the similarities with the formula for $x > 1$ in (3.13). Also, all three expressions inside $\cos^{-1}$ in the above are comprised between 0 and 1 and so $k(x, y)$ is real.

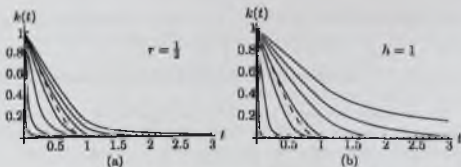


Рис. 1. Normalized mean covariogram $k(t)$ as a function of t : (a) with $r = 1/2$ fixed and increasing height $h = 0.01, 0.05, 0.2, 0.5, 1, 2, +\infty$ (bottom to top, solid lines); (b) with $h = 1$ fixed and increasing radius $r = 0.02, 0.1, 0.3, 0.5, 1, 2, +\infty$ (bottom to top, solid lines). Dashed lines: covariogram of a sphere of diameter 1.

To summarize, the exact expression for $k(x, y)$ is given by (3.11) and (3.6) when $y > 1$, by (3.13) when $y < 1 < x$, and by (3.17) when $x < 1$ and $y < 1$. The covariogram is plotted as a function of t in Fig. 1(a) and 2(b) for various values of r and h (solid lines), and compared with that of a sphere (dotted lines).

An asymptotic expansion of $k(t)$ when $t \rightarrow 0$ is now carried out. Use the expansion (as $m \rightarrow 0$):

$$(3.18) \quad F(\phi|m) = \phi + \frac{\sin(2\psi) - 2\psi}{6}m + O(m^2), \quad E(\phi|m) = \phi + \frac{\sin(2\psi) - 2\psi}{6}m + O(m^2),$$

we find

$$(3.19) \quad k_{\infty}(t) = 1 - \frac{t}{2r} + O(t^3), \quad k(t) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h} \right) t + \frac{2}{3\pi hr} t^2 + O(t^3), \quad t \rightarrow 0.$$

As expected, the derivative of $k(t)$ at $t = 0$ is equal (up to the sign) to the surface/volume ratio of the cylinder.

The second-order derivative of $k(t)$ becomes infinite at the point $t = h$ (see [6]). Connections between the second-order derivative of the covariogram of a compact set and its singular points have been previously noticed in the plane [5].

3.3. Oblate cylinders. Consider now the limit $r \rightarrow \infty$ with h fixed so that $x \rightarrow 0$ and y remains finite. We take the limit in the formula (3.17) when $y < 1$ and (3.11) when $y > 1$. The covariogram k depends of y only and reads:

$$(3.20) \quad k_0(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2y}, & \text{if } y > 1, \\ \frac{y}{2}, & \text{if } y < 1. \end{cases}$$

Note that, in the limit $r \rightarrow \infty$ the cylinders amount to infinite layers enclosed between two planes. The same asymptotic limit would accordingly be recovered when considering cylinders with other non-circular cross-section. This is in contrast

to the prolate case (Section 3.1), where the covariogram depends on the shape of the cylinders cross-section.

3.4. Approximate formulas. We now give approximate expressions of the exact solutions which do not involve elliptic functions. Such simpler expressions are useful for material applications, in particular, for identifying random models, when a high accuracy is not required.

We first consider the domain $r \gg h$. The exact solution is given by (3.20) when $r = \infty$ and by (3.11) and (3.17) when $r < \infty$. We first let $r \rightarrow \infty$ and $t \rightarrow \infty$ with h and the ratio t/r fixed, and expand (3.17) to order $O(r^{-3})$. In the region $t < h$, that is, $y > 1$, we let $t \rightarrow 0$ and compute an expansion to $O(t^3)$ with r, h fixed. In the region $t > 2r$, we set $k \approx 0$. One obtains:

(3.21)

$$k(t) \approx k_{r \gg h}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{r} \right) t + \frac{2t^2}{3\pi r h} + \frac{t^3}{64r^3}, & \text{if } t < h, \\ \frac{h}{\pi t} \cos^{-1} \left(\frac{t}{2r} \right) + \left(\frac{h^2}{6t^2} - 1 \right) \frac{h}{2\pi r} \sqrt{1 - \frac{t^2}{4r^2}}, & \text{if } h < t < 2r, \\ 0 & \text{if } t > 2r. \end{cases}$$

Note that the above expansion is continuous except at point $t = h$, and is exact in the limit $r = \infty$ only. It turns out, however, that formula (3.21) is a very good approximation of the exact covariogram for $r > h$. The maximal error $\sup_t |k(t) - k_{r \gg h}(t)|$ between (3.21) and the exact result is attained when $t \approx h$ whenever $r > h$. As expected, this error decreases and tends to 0 when $r/h \rightarrow \infty$. It is about 0.5% for $r = h$ and 0.1% for $r = 4h$ (Fig. 2). The error is much smaller at points $t \neq h$: for instance, the mean error $\langle |k(t) - k_{r \gg h}(t)| \rangle_t$ is 0.1% and 0.004% when $r = h$ and $r = 4h$, respectively. The approximation (3.21) is good in the region $h/2 < r < h$. The errors are about $\sup_t |k - k_{r \gg h}| = 2.6\%$ and $\langle |k - k_{r \gg h}| \rangle_t = 0.6\%$ when $r = h/2$.

We now consider the domain $h \gg r$ and compute an approximation of $k(t)$ valid in the region $h \gg r$. This task is more difficult than in the oblate case $h \ll r$ because the exact result for $h = \infty$ involves elliptic functions. In the domain $2r < t < h$, we let $h \rightarrow \infty$ and $t \rightarrow \infty$ with r and the ratio h/t fixed and expand (3.11) to $O(h^{-4})$. We use the same expression in the domain $t > h$, as long as the latter is positive and 0 otherwise. In the domain $t < 2r$, we expand (3.13) when $h, t \rightarrow \infty$ with r and the ratio h/t fixed, to $O(h^{-4})$. One finds:

(3.22)

$$k(t) \approx k_{r \ll h}(t) =$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{t}{2r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{4r} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{t}{4r} \right)^4 \right] - \frac{t}{2h} + \frac{2t^2}{3\pi h r} \left(1 - \frac{t^2}{40r^2} \right), & t < 2r, \\ \max \left\{ 0; \frac{r^2}{2t^2} \left(1 - \frac{t}{h} + \frac{r^2}{2t^2} \right) \right\}, & t > 2r. \end{cases}$$

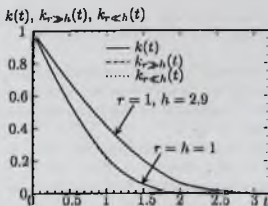


Рис. 2. Mean normalized covariogram k of a cylinder: comparison between the exact result (solid line) and approximations (3.21) and (3.22) (dotted lines) when $r = h = 1$ and $r = 1, h = 2.9$, respectively.

We emphasize that, contrary to (3.21), the expressions above are not asymptotically correct in the limit $h \rightarrow \infty$. Also, approximation $k_{r \ll h}(t)$ is discontinuous at $t = 2r$. The maximal error $\sup_t |k(t) - k_{r \ll h}(t)|$ is attained at $t \geq 2r$, is constant and equal to about 1.1% for $h > 2r$. In the domain $1.6r < h < 2r$, the maximal error is less than 1.4% (Fig. 2).

To summarize, a good approximation of the covariogram is given by (3.21) when $h < 1.6r$ and by (3.22) when $h > 1.6r$ with a maximal absolute error of 1.8%.

4. BOOLEAN MODEL OF CYLINDERS

In this section, we consider a Boolean model of cylinders with radius r and height h (see [17]). The Boolean model is defined by an homogeneous Poisson point process of intensity ψ (the average number of points per unit area). A cylinder C oriented in a random direction, uniformly distributed on the sphere, is implanted on each Poisson point. The cylinder volume fraction, denoted by p , is linked to the Poisson intensity through the following formula (see [16]):

$$(4.1) \quad \log(p) = -\psi \pi h r^2.$$

Hereafter, we examine the integral range of Boolean random sets made of cylinders. The Boolean model, denoted by B is the union of all cylinders C , implanted at Poisson points so that the cylinders may interpenetrate. Its characteristic function is denoted by χ_B .

4.1. Integral range. The covariance $C(t)$ of the Boolean model of cylinders B reads

$$(4.2) \quad C(t) = \{z \in B, z+t \in B, |t|=t\} = 2p - 1 + (1-p)^{2-k(t)}.$$

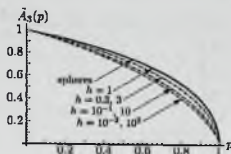


Рис. 3. Normalized integral range $\bar{A}_3(p)$ in a Boolean model of cylinders with radius $r = 1/2$ as a function of the volume fraction p of cylinders, with varying cylinder heights $h = 3, 10, 10^2$ (solid grey lines, top to bottom), $1/3, 10^{-1}, 10^{-2}$, (dotted black lines, top to bottom) and $h = 1$ (solid black line). Dark-grey solid line on top: normalized integral range for a Boolean model of spheres of diameter 1.

Its integral range is defined by (see [17]):

$$(4.3) \quad A_3 = \frac{1}{p(1-p)} \int_0^\infty dt 4\pi t^2 [C(t) - p^2] = \frac{4\pi(1-p)}{p} \int_0^\infty dt t^2 [e^{-h(t) \log(1-p)} - 1],$$

where the integrand $C(t) - p^2$ is the centered covariance. For cylinders the centered covariance is identically zero for $t \geq t_c$ where $t_c = \sqrt{4r^2 + h^2}$ is the maximum length of a chord in the cylinder. The integral range is useful to quantify the representative volume element for the set B . Using the exact expression derived in Section 3.2, we compute the normalized covariogram:

$$(4.4) \quad \bar{A}_3 = \frac{A_3}{\pi h r^2},$$

for $r = 1/2$ (Fig. 3). The latter is equal to 1 when $p = 0$. Note that the integral range is very close, but not equal, to that of a Boolean model of sphere of diameter 1:

$$(4.5) \quad \bar{A}_3^{\text{sphere}} = \frac{6}{\pi p} \int_0^1 dt [(1-p)^{3t/2 - t^2/2} - 1 + p].$$

When $p = 1/2$, the maximum value of A_3 is found to occur for h slightly smaller than 1 (Fig. 4). This value is still smaller than $\bar{A}_3^{\text{sphere}}$. Furthermore, numerical computations show that the normalized integral range A_3 is almost unchanged when h is replaced by $1/h$ (Fig. 3).

4.2. Variances and representative volume element: prolate and oblate cylinders. Let p_W be the measure of the volume fraction of cylinders over a domain W of volume V :

$$(4.6) \quad p_W = \frac{L_3(B \cap V)}{V} = \int_W du \chi_B(u).$$

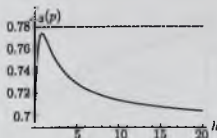


FIG. 4. Normalized integral range $\bar{A}_3(p)$ in a Boolean model of cylinders with radius $r = 1/2$ and volume fraction $p = 1/2$ as a function of the cylinders height h (solid line). Dashed line: normalized integral range for a Boolean model of spheres of diameter 1.

Denote by $\bar{p}_W$ the mean of the estimates p_{W_i} taken over N independent realizations $W = W_1, \dots, W_N$ of volume V . The variance $D_B^2(V)$ of the estimates p_{W_i} is given by:

$$(4.7) \quad D_B^2(V) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{V} \int_{W_i} du \chi_B(u) - \bar{p}_W \right]^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{1}{V} \int_{W_i} du \chi_B(u) \right)^2 - \bar{p}_W^2 \right].$$

Taking N large and $\bar{p}_W \approx p$ in (4.7), we get

$$(4.8) \quad D_B^2(V) = \frac{1}{NV^2} \sum_{i=1}^N \iint_{u,v \in W_i} [\chi_B(u)\chi_B(v) - p^2] du dv.$$

Take $W_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ and use the change of variable $t = v - u$. The double integral amounts to an integral of the centered covariance function, and so we get

$$(4.9) \quad D_B^2(V) = \frac{1}{V} \int_{\mathbb{R}^3} [C(t) - p^2] dt = p(1-p) \frac{A_3}{V},$$

a result first derived by Matheron in [17]. The asymptotic expansion (4.9) is actually valid for volumes V much larger than A_3 , and so requires that A_3 (and t_c) is finite. The latter shows that, when $V \gg A_3$, the volume W acts as n independent domains of volume A_3 with $n = W/A_3$. Thus, the volume A_3 is said to be "representative" of the Boolean model B . Note, however, that the variance $D_B^2(V)$ also depends on the point variance $p(1-p)$.

When A_3 is infinite, a scaling law different from (4.9) is expected [12]. For prolate and oblate cylinders, the theory respectively predicts [10]:

$$(4.10) \quad D_B^2(W) \sim \frac{\alpha}{V^{2/3}}, \quad D_B^2(W) \sim \frac{\alpha'}{V^{1/3}}, \quad V \gg A_3,$$

where α, α' are prefactors. The scaling laws above indicate a slower decrease of the variance with respect to the volume than in (4.9), due to *infinite* correlation lengths.

For prolate and oblate cylinders, the behavior of $D_B^2(W)$ should be linked to that of the integral of the covariance $C(t)$ as $t \rightarrow \infty$. Consider first the asymptotic behavior of $k(t)$ as $t \rightarrow \infty$ in the cases $h = \infty$ and $r = \infty$. Making use of the expansions for $\phi \rightarrow 0$:

$$(4.11a) \quad F(\phi|m) = \phi + \frac{m\phi^3}{6} + \frac{m(9m-4)\phi^5}{120} + O(\phi^7),$$

$$(4.11b) \quad E(\phi|m) = \phi - \frac{m\phi^3}{6} + \frac{m(4-3m)\phi^5}{120} + O(\phi^7),$$

one finds, as $t \rightarrow \infty$:

$$(4.12) \quad k_{\infty}(t) = \frac{r^2}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right), \quad (\text{if } h = +\infty), \quad k_0(t) = \frac{h}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad (\text{if } r = +\infty).$$

For prolate and oblate cylinders, the integral of the centered covariance on a spherical domain of radius ℓ diverges as:

$$(4.13) \quad A_3(\ell) = \int_{t \leq \ell} (4\pi t^2) [C(t) - p^2] dt \sim \begin{cases} -\frac{2\pi(1-p)}{p} r^2 \log(1-p)\ell, & \text{if } h \rightarrow \infty, \\ -\frac{\pi(1-p)}{p} h \log(1-p)\ell^2, & \text{if } r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

We remark that $A_3(\ell)/\ell^3$ behave as $\sim V^{-2/3}$ and $\sim V^{-1/3}$, respectively, for prolate and oblate cylinders, where V is the sphere of radius ℓ . This qualitatively explains the expansions (4.10).

However, the variable change $t = v - u$ leading to (4.9) can not be directly carried out for finite domains W_i and infinite integral range. We derive it here for spherical domains W_i of radius ℓ . One needs to compute the probability $dP(t, \ell)$ that two points A and B in a sphere are separated from a distance in the interval $[t; t + dt]$. We first fix A , a point at a distance $0 < a < \ell$ of the sphere center. The volume of points at a distance in the interval $[t; t + dt]$ from A is given by:

$$(4.14) \quad dV_t = \begin{cases} 4\pi t^2 dt, & \text{if } t < \ell - a, \\ 2\pi t dt \left(t - \frac{a}{2} + \frac{r^2 - t^2}{2a} \right), & \text{if } \ell - a < t < \ell + a. \end{cases}$$

Integrating over a , one finds the required probability:

$$(4.15) \quad dP(t, \ell) = \frac{3dt}{\ell} \frac{t^2}{\ell^2} \left(1 - \frac{t}{2\ell} \right)^2 \left(1 + \frac{t}{4\ell} \right), \quad 0 \leq t \leq 2\ell.$$

Replace now the term $\chi_B(u)\chi_B(v)$ in (4.8) by $C(t)$ and integrate over t :

$$(4.16) \quad D_B^2(V) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{V^2} \iint_{u, v \in W_i} [\chi_B(u)\chi_B(v) - p^2] dudv \approx \int_{t \leq 2\ell} [C(t) - p^2] dP(t, \ell).$$

The above integral is analytically solvable as a closed-form expression, for oblate cylinders ($r = \infty$). When $2\ell > h$, the solution involves the exponential integral function $E_4(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s} / s ds$. The exact solution is a lengthy expression, which, for conciseness, is not given here. It is provided by the software *Mathematica* [26].

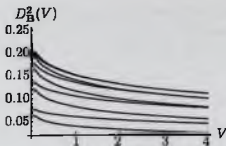


Рис. 5. Variance $D_B^2(V)$ of the estimate of the volume fraction measured in a spherical domain W vs. volume size V of the domain for oblate cylinders ($r = +\infty$). The cylinders height is fixed to $h = 1$. Top to bottom: volume fraction of cylinders $p = 0.5, 0.4, 0.6, 0.3, 0.7, 0.2, 0.8, 0.1, 0.9$.

The variance $D_B^2(V)$ is plotted as a function of V for various volume fraction of cylinders in Fig. 5.

Taking the limit $\ell \rightarrow \infty$ and using the expansion (4.12) yields:

$$(4.17a) \quad D_B^2(V) \sim \frac{-9(1-p)^2 r^2 \log(1-p)}{8\ell^2} + O(1/\ell^3), \quad (h = +\infty),$$

$$(4.17b) \quad D_B^2(V) \sim \frac{-3h(1-p)^2 \log(1-p)}{5\ell} + \frac{9h^2(1-p)^2 [\log(1-p)]^2}{32\ell^2} + O(1/\ell^3), \quad (r = +\infty).$$

as $\ell \rightarrow \infty$, with $V = (4/3)\pi\ell^3$. Note that the above results are identical up to a constant factor to those obtained by replacing A_3 in (4.9) by $A_3(\ell)$ from (4.13).

4.3. Variances and representative volume element: cylinders with finite height and radius. This section is concerned with the behavior of the variance $D_B^2(V)$ for r or h large but not infinite. We first examine the case where h is large. The integral in Eq. (4.16) is computed numerically for increasing values of $h = 10, 10^2, \dots, 10^4$ with $r = 1/2$ fixed (Fig. 6a). The data is compared to $h = \infty$ (solid line, top) and to the expansion (4.17) (dashed line, top). The variance $D_B^2(V)$ asymptotically scales as $\sim 1/V$ for very large V , as long as h is finite. However, for $h \geq 10$, an intermediate regime appears where $D_B^2(V) \sim 1/V^{2/3}$. This scaling law occurs for $V \ll h^3$, that is, $\ell \ll h$. It is very close to the asymptotic limit (4.17). The change between the two regimes takes place, as expected, when ℓ is of the same order as h . Numerical data indicates $\ell \approx 3h$. A similar behavior happens for $r \gg h$ with $h = 1$ fixed (Fig. 6b): when $\ell \gg r$, the scaling law $D_B^2(V) \sim 1/V$ holds, whereas $D_B^2(V) \sim 1/V^{1/3}$ when $\ell \ll r$. The change between the two regimes occurs

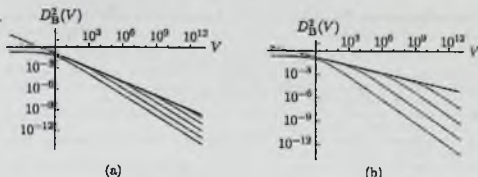


FIG. 6. Variance $D_B^2(V)$ of the estimate of the volume fraction measured in a spherical domain W vs. volume size V of the domain, in log-log plot. The cylinders volume fraction is fixed to $p = 1/2$. Grey solid lines, bottom to top : (a) cylinders height $h = 1, 10, 100, 10^3, 10^4, \infty$ with radius fixed to $r = 1/2$; (b) cylinders radius $r = 1, 10, 100, 10^3, \infty$ with height fixed to $h = 1$. Dotted lines in black: expansions (4.17).

when $r \approx \ell$. Plugging $\ell = 3h$ and $\ell = r$ into (4.17) yields:

$$(4.18a) \quad D_B^2(V) \sim \frac{-27(1-p)^2 \log(1-p) h r^2}{8\ell^3}, \quad (\ell \gg h \gg r),$$

$$(4.18b) \quad D_B^2(V) \sim \frac{-3(1-p)^2 \log(1-p) h r^2}{5\ell^3}, \quad (\ell \gg r \gg h).$$

The above two expansions are in good agreement with the numerical data shown in Fig. 6.

5. CONCLUSION

In this work, the covariance and integral range of the Boolean model of cylinders have been computed using the geometrical covariogram of cylinders. As expected, the integral range takes the form of a divergent integral for flat (oblate) or highly-elongated (prolate) cylinders. This results in peculiar scaling laws of the variance of the measurement of the volume fraction of cylinders over subdomains of volume V . The latter variance scales as $\sim V^{-1/3}$ for the oblate and $\sim V^{-2/3}$ for the prolate type when $V \rightarrow \infty$. The lowest-order correction in the asymptotic expansion for the variance has been derived for domains of volume $V \rightarrow \infty$ with a spherical shape. For cylinders with finite (but large) aspect ratio, the scaling law $\sim V^{-1/3}$ or $\sim V^{-2/3}$ occurs in an intermediate region where $L = V^{1/3}$ is comprised between the lowest and highest dimensions of the cylinders. The classical scaling law $\sim 1/V$ is recovered when L is much larger than both cylinders dimensions. These results have implications regarding the effective thermal and elastic properties of cylinder models where similar power laws have been observed (see [3, 1]).

Acknowledgments: The author thanks C. Lantuéjoul for useful discussions and references.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Altendorf, D. Jeulin, and F. Willot, "Influence of the fiber geometry on the macroscopic elastic and thermal properties", *Int. J. Sol. Struct.*, **51**, 3807 – 3822 (2014).
- [2] S. N. Chiu, D. Stoyan, W. S. Kendall and J. Mecke, *Stochastic Geometry and its Applications*, Third edition, Wiley, Chichester (2013).
- [3] J. Dirnreburger, S. Forest, D. Jeulin, "Towards gigantic RVE sizes for 3D stochastic fibrous networks", *Int. J. Sol. Struct.*, **61**, 359 – 376 (2014).
- [4] E. Coucka, F. Willot, and D. Jeulin, *Im. An. Ster.*, "A mixed Boolean and deposit model for the modeling of metal pigments in paint layers", **34**, 125 – 134 (2015).
- [5] X. Emery and C. Lantuéjoul, *Math. Geosci.*, "Geometric covariograms, indicator variograms and boundaries of planar closed sets", **43**, 905–927 (2011).
- [6] W. Gille, "The intercept length distribution density of a cylinder of revolution", *Experimentelle Technik der Physik*, **35**, 63 – 68 (1987).
- [7] W. Gille, *Comp. Mat. Sci.*, "The chord length distributions of selected infinitely long geometric figures – connections to the field of small-angle scattering", **22**, 318 – 332 (2001).
- [8] W. Gille, *Particle and Particle Systems Characterisation*, CRC Press, Boca Raton (2014).
- [9] H. Ilarutunyan and V. Ohanyan, "Covariogram of a cylinder", *J. Contemporary Math. An.*, **49**, 366 – 375 (2014).
- [10] D. Jeulin, "Power laws variance scaling of Boolean random varieties", *Method. Comput. Appl. Prob.*, **18**, 1065–1079 (2016).
- [11] D. Jeulin, P. Monnaie and F. Péronnet, "Gypsum morphological analysis and modeling", *Cem. Conc. Comp.*, **23**, 299 – 311 (2001).
- [12] C. Lantuéjoul, "Ergodicity and integral range", *J. Microscopy* **101**, 387 – 403 (1991).
- [13] G. Matheron, *Les variables régionalisées et leur estimation: une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature*, Masson, Paris (1965).
- [14] G. Matheron, *Éléments pour une théorie des milieux poreux*, Masson, Paris (1967).
- [15] G. Matheron, "Ensembles fermes aléatoires, ensembles semi-markoviens et polyèdres poissonniens", *Adv. Appl. Prob.*, **4**, 508 – 541 (1971).
- [16] G. Matheron, "Random sets theory and its applications to stereology", *J. Microscopy* **95**, 15 – 23 (1972).
- [17] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, New-York (1975).
- [18] C. Peyrega, D. Jeulin, C. Delisée, and J. Malvestio, "3D morphological modelling of a random fibrous network", *Im. Anal. Ster.*, **28**, 129 – 141 (2009).
- [19] C. Radenbach, and I. Vecchio, "Statistical analysis and stochastic modelling of fibre composites", *Composites Sci. Tech.*, **71**, 107 – 112 (2011).
- [20] K. Robb, O. Wirjadi, and K. Schladits, "Fiber orientation estimation from 3D image data: Practical algorithms, visualisation, and interpretation", In *7th International Conference on Hybrid Intelligent Systems (HIS)*, IEEE, 320 – 325 (2007).
- [21] R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2008).
- [22] J. Serra, "The Boolean model and random sets", *Comp. Graph. Im. Proc.*, **12**, 69 – 126 (1980).
- [23] H.S. Sukiasian, and W. Gille, "Relation between the chord length distribution of an infinitely long cylinder and that of its base", *Journal of Math. Physics*, **48**, 53305–53312, 2007.
- [24] H. Wang, A. Pietrasanta, D. Jeulin, F. Willot, M. Paessel, L. Sorbier and M. Moreaud, "Modelling mesoporous alumina microstructure with 3D random models of platelets", *J. Microscopy* **260**, 287–301 (2015).
- [25] E. Weinstein, *MathWorld*, <http://mathworld.wolfram.com>, accessed August 4, 2015.
- [26] *Mathematica software version 10.2*, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2015.

Поступила 11 сентября 2015

СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ И АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А. А. ПАХЛЕВАНИ

Институт математики НАН Армении¹

E-mail: apahlevanyan@instmath.sci.am

Аннотация. Доказывается равномерная сходимость разложения абсолютно непрерывной функции по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля $-y'' + q(x)y = \mu y$, $y(0) = 0$, $y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0$, $\beta \in (0, \pi)$ с суммируемым потенциалом $q \in L^1_{\text{сум}}[0, \pi]$. Этот результат используется для получения новых, более точных асимптотических формул для собственных значений и нормировочных постоянных этой задачи.

MSC2010 number: 34B24, 34L05, 34L10, 34L20

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля; разложение по собственным функциям; асимптотика собственных значений и нормировочных постоянных.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через $L(q, \alpha, \beta)$ следующую красную задачу Штурма-Лиувилля

$$(1.1) \quad -y'' + q(x)y = \mu y = \lambda^2 y, \quad x \in (0, \pi), \quad \mu \in \mathbb{C},$$

$$(1.2) \quad y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in [0, \pi],$$

$$(1.3) \quad y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, \quad \beta \in [0, \pi],$$

где q вещественная, суммируемая на $[0, \pi]$ функция (мы пишем $q \in L^1_{\text{сум}}[0, \pi]$). Через $L(q, \alpha, \beta)$ будем обозначать также самосопряженный оператор, порожденный задачей (1.1)–(1.3) в гильбертовом пространстве $L^2[0, \pi]$ (см. [1, 2]). Хорошо известно, что спектр оператора $L(q, \alpha, \beta)$ чисто дискретен и состоит из простых, действительных собственных значений (см. [1]–[3]), которые мы обозначаем через $\mu_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, подчеркивая зависимость от q , α и β . Предполагается, что собственные значения μ_n пронумерованы в порядке возрастания:

$$\mu_0(q, \alpha, \beta) < \mu_1(q, \alpha, \beta) < \dots < \mu_n(q, \alpha, \beta) < \dots$$

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта No. 16YR-1A017.

Обозначим через $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\psi(x, \mu, \beta)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0, \mu, \alpha) = \sin \alpha, \quad \varphi'(0, \mu, \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\psi(\pi, \mu, \beta) = \sin \beta, \quad \psi'(\pi, \mu, \beta) = -\cos \beta.$$

Хорошо известно ([1, 2, 4]), что для фиксированного x , φ , φ' , ψ , ψ' являются целыми функциями от μ . Обозначим через $W_{\alpha, \beta}(x, \mu)$ вронскиан решений $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\psi(x, \mu, \beta)$:

$$(1.4) \quad W_{\alpha, \beta}(x, \mu) := \varphi(x, \mu, \alpha) \psi'(x, \mu, \beta) - \varphi'(x, \mu, \alpha) \psi(x, \mu, \beta).$$

Из формулы Лиувилля для вронскиана следует (см. например, [5]) что $W_{\alpha, \beta}(x, \mu)$ не зависит от x . Легко видеть, что функции $\varphi_n(x) := \varphi(x, \mu_n, \alpha)$ и $\psi_n(x) := \psi(x, \mu_n, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, являются собственными функциями, соответствующими собственному значению μ_n . Так как собственные значения простые, то существуют числа $\beta_n = \beta_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, такие что

$$(1.5) \quad \psi_n(x) = \beta_n \varphi_n(x), \quad \beta_n \neq 0.$$

Квадраты L^2 -норм этих собственных функций:

$$(1.6) \quad a_n = a_n(q, \alpha, \beta) = \int_0^{\pi} \varphi_n^2(x) dx, \quad b_n = b_n(q, \alpha, \beta) = \int_0^{\pi} \psi_n^2(x) dx,$$

называются нормировочными постоянными.

Одна из основных теорем спектральной теории дифференциальных операторов (см. [1]) гласит:

Теорема 1.1. ([1, стр. 90]) *Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в равномерно сходящийся обобщенный ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.*

Этот результат не может быть применен для функций, не принадлежащих области определения самосопряженного дифференциального оператора. В случае оператора Штурма-Лиувилля доказано (см. например, [6]), что при условии $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ (т.е. $\alpha, \beta \in (0, \pi)$) равномерная сходимость разложения имеет место для любой абсолютно непрерывной функции, а именно имеет место (см. также [5, 2, 7])

Теорема 1.2. ([6]) *Пусть $q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ и f абсолютно непрерывная функция на $[0, \pi]$. Тогда*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(x) \right| = 0, \quad c_n = \frac{1}{a_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi_n(t) dt,$$

где $\varphi_n(x) = \varphi(x, \mu_n(q, \alpha, \beta), n)$.

Первой целью данной работы является доказательство того, что аналогичные результаты имеют место также для задач $L(q, \pi, \beta)$, $\beta \in (0, \pi)$ и $L(q, \alpha, 0)$, $\alpha \in (0, \pi)$, причем при более общем условии $q \in L_{\mu}^1[0, \pi]$:

Теорема 1.3. Пусть $q \in L_{\mu}^1[0, \pi]$, $\alpha = \pi$, $\beta \in (0, \pi)$ и f абсолютно непрерывная функция на $[0, \pi]$. Тогда для любого $a \in (0, \pi)$

$$(1.7) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, \pi]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(x) \right| = 0, \quad c_n = \frac{1}{a_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi_n(t) dt,$$

где $\varphi_n(x) = \varphi(x, \mu_n(q, \pi, \beta), \pi) = \varphi(x, \mu_n, \pi)$.

Теорема 1.4. Пусть $q \in L_{\mu}^1[0, \pi]$, $\alpha \in (0, \pi)$, $\beta = 0$ и f абсолютно непрерывная функция на $[0, \pi]$. Тогда для любого $b \in (0, \pi)$

$$(1.8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, b]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(x) \right| = 0, \quad c_n = \frac{1}{a_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi_n(t) dt,$$

где $\varphi_n(x) = \varphi(x, \mu_n(q, \alpha, 0), \alpha)$.

Замечание 1.1. Легко видеть, что улучшить результаты Теорем 1.3 и 1.4 (получить равномерную сходимость рядов в (1.7) и (1.8) на всем отрезке $[0, \pi]$ без дополнительных условий) невозможно. Действительно, для абсолютно непрерывной функции $f \equiv \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$, имеет место тождество (см. например, [8, формула 37 на стр. 578])

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

т.е. Теорема 1.3 для нее верна, но если заменить $\max_{x \in [a, \pi]} |\dots|$ на $\max_{x \in [0, \pi]} |\dots|$, то теорема перестает быть верной. С другой стороны, если в Теореме 1.3 взять $f(0) = 0$, тогда ряд в (1.7) сходится равномерно на всем отрезке $[0, \pi]$. Аналогичное утверждение верно для Теоремы 1.4, если взять $f(\pi) = 0$.

Второй целью нашей работы является получение асимптотической формулы для собственных значений задачи $L(q, \pi, \beta)$ при $q \in L_{\mu}^1[0, \pi]$ и $\beta \in (0, \pi)$ (т.е. $\sin \beta \neq 0$). Прежде чем сформулировать результат, заметим, что в работе [9] Т. Н. Арутюнян ввел понятие функции $\delta_n(\alpha, \beta)$, которая определяется формулой

$$\delta_n(\alpha, \beta) := \sqrt{\mu_n(0, \alpha, \beta)} - n = \lambda_n(0, \alpha, \beta) - \lambda_n\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 2,$$

и доказал что $-1 \leq \delta_n(\alpha, \beta) \leq 1$ и $\delta_n(\alpha, \beta)$ является решением следующего трансцендентного уравнения:

$$(1.9) \quad \delta_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(n + \delta_n(\alpha, \beta))^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} - \\ - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\cos \beta}{\sqrt{(n + \delta_n(\alpha, \beta))^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta}}$$

Теорема 1.5. Пусть $q \in L_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$ и пусть $\lambda_n^2(q, \alpha, \beta) = \mu_n(q, \alpha, \beta)$. Тогда

(а) имеет место асимптотическое соотношение ($n \rightarrow \infty$)

$$(1.10) \quad \lambda_n(q, \alpha, \beta) = n + \delta_n(\alpha, \beta) + \frac{[q]}{2(n + \delta_n(\alpha, \beta))} + l_n(q, \alpha, \beta) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{где } [q] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt,$$

$$l_n(q, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi(n + \delta_n(\alpha, \beta))} \int_0^\pi q(x) \cos 2(n + \delta_n(\alpha, \beta)) x dx, \quad \alpha \in (0, \pi),$$

$$(1.11) \quad l_n = l_n(q, \pi, \beta) = -\frac{1}{2\pi(n + \delta_n(\pi, \beta))} \int_0^\pi q(x) \cos 2(n + \delta_n(\pi, \beta)) x dx.$$

Оценка остатка $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ в (1.10) равномерна по всем $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ и q из ограниченных подмножеств $L_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$ (мы будем писать $q \in BL_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$).

(б) Функция l , определенная формулой

$$(1.12) \quad l(x) = \sum_{n=2}^{\infty} l_n(q, \alpha, \beta) \sin(n + \delta_n(\alpha, \beta)) x,$$

абсолютно непрерывна на произвольном отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$, т.е. $l \in AC(0, 2\pi)$.

В работе [10] утверждение (б) теоремы 1.5 было доказано при условии $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ и в случае $\alpha = \pi, \beta = 0$. Мы докажем, что это утверждение верно также при $\alpha = \pi, \beta \in (0, \pi)$. Этому посвящен раздел 3. Третьей целью нашей работы является получение асимптотических формул для нормировочных постоянных a_n и b_n (см. (1.6)).

Теорема 1.6. Для нормировочных постоянных a_n и b_n

(а) имеют место следующие асимптотические соотношения ($n \rightarrow \infty$):

$$a_n(q, \alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{2s_n(q, \alpha, \beta)}{\pi(n + \delta(\alpha, \beta))} + r_n \right] \sin^2 \alpha +$$

$$+ \frac{\pi}{2 [n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2} \left[1 + \frac{2 s_n(q, \alpha, \beta)}{\pi [n + \delta(\alpha, \beta)]} + \bar{r}_n \right] \cos^2 \alpha,$$

$$b_n(q, \alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{2 s_n(q, \alpha, \beta)}{\pi [n + \delta(\alpha, \beta)]} + p_n \right] \sin^2 \beta + \\ + \frac{\pi}{2 [n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2} \left[1 + \frac{2 s_n(q, \alpha, \beta)}{\pi [n + \delta(\alpha, \beta)]} + \bar{p}_n \right] \cos^2 \beta,$$

где

$$s_n = s_n(q, \alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\pi - t) q(t) \sin 2 [n + \delta_n(\alpha, \beta)] t dt,$$

$r_n = r_n(q, \alpha, \beta) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и $\bar{r}_n = \bar{r}_n(q, \alpha, \beta) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (та же оценка верна для p_n и $\bar{p}_n$), когда $n \rightarrow \infty$, равномерно по всем $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ и $q \in BL_R^1[0, \pi]$.

(b) Функция s , определенная формулой

$$s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s_n}{n + \delta_n(\alpha, \beta)} \cos [n + \delta_n(\alpha, \beta)] x$$

абсолютно непрерывна на произвольном отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$, т.е. $s \in AC(0, 2\pi)$.

В работе [11] утверждение (b) теоремы 1.6 было доказано при условии $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ и в случае $\alpha = \pi, \beta = 0$. Методами, примененными при доказательстве теоремы 1.5 можно доказать, что утверждение верно также при $\alpha = \pi, \beta \in (0, \pi)$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1.3 И 1.4

Мы приведем доказательство для Теоремы 1.3. Теорема 1.4 может быть доказана аналогично.

Доказательство. Для $|\lambda| \rightarrow \infty$, имеют место следующие асимптотические формулы ([1, 4, 10])

$$(2.1) \quad \varphi(x, \mu, \pi) := \varphi_\pi(x, \mu) = \varphi_\pi(x, \lambda^2) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|^2}\right),$$

$$(2.2) \quad \varphi'(x, \mu, \pi) := \varphi'_\pi(x, \mu) = \varphi'_\pi(x, \lambda^2) = \cos \lambda x + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|}\right),$$

$$\psi(x, \mu, \beta) := \psi_\beta(x, \mu) = \psi_\beta(x, \lambda^2) = \cos \lambda (\pi - x) \sin \beta + \frac{\sin \lambda (\pi - x)}{\lambda} \cos \beta + \\ + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right) \sin \beta + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|^2}\right) \cos \beta,$$

$$\begin{aligned} \psi'(x, \mu, \beta) &:= \psi'_\beta(x, \mu) \equiv \psi'_\beta(x, \lambda^2) = \left(\lambda \sin \lambda(\pi - x) + O\left(e^{|Im \lambda|(\pi - x)}\right) \right) \sin \beta - \\ (2.4) \quad &- \left(\cos \lambda(\pi - x) + O\left(\frac{e^{|Im \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right) \right) \cos \beta. \end{aligned}$$

Из (1.4) и (2.3) следует, что для вронскиана $W_{\pi, \beta}(\mu)$ мы имеем следующую оценку

$$\begin{aligned} (2.5) \quad W_{\pi, \beta}(\mu) \equiv W_{\pi, \beta}(\lambda^2) &= -\psi_\beta(0, \mu) = -\cos \lambda \pi \sin \beta - \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} \cos \beta + \\ &+ O\left(\frac{e^{|Im \lambda| \pi}}{|\lambda|}\right) \sin \beta + O\left(\frac{e^{|Im \lambda| \pi}}{|\lambda|^2}\right) \cos \beta. \end{aligned}$$

Обозначим через $Z_{1/6}$ следующую область комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$Z_{1/6} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{1}{6}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Следующая лемма доказана в [12], методами которые использовались в [13].

Лемма 2.1. ([12]) Если $\lambda \in Z_{1/6}$, тогда

$$(2.6) \quad |\sin \pi \lambda| \geq \frac{1}{7} e^{|Im \lambda| \pi}, \quad |\cos \pi \lambda| \geq \frac{1}{7} e^{|Im \lambda| \pi}.$$

Из (2.5) и (2.6) следует что для достаточно большого $\lambda^* > 0$, существует константа $C_1 > 0$ такая что

$$(2.7) \quad |W_{\pi, \beta}(\lambda^2)| \geq C_1 e^{|Im \lambda| \pi} \sin \beta, \quad \text{при } \lambda \in Z_{1/6}, |\lambda| > \lambda^*.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$(2.8) \quad -y'' + q(x)y = \mu y - f(x), \quad x \in (0, \pi), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad f \in L^1[0, \pi],$$

$$(2.9) \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, \quad \beta \in (0, \pi).$$

Хорошо известно, что решение $y(x, \mu, f)$ краевой задачи (2.8)–(2.9) можно записать в следующей форме (см. например, [1, 7])

$$\begin{aligned} (2.10) \quad y(x, \mu, f) &= \frac{1}{W_{\pi, \beta}(\mu)} \psi_\beta(x, \mu) \int_0^\pi f(t) \varphi_\pi(t, \mu) dt + \\ &+ \frac{1}{W_{\pi, \beta}(\mu)} \varphi_\pi(x, \mu) \int_\pi^\pi f(t) \psi_\beta(t, \mu) dt. \end{aligned}$$

Так как φ , ψ и $W_{\pi, \beta}$ являются целыми функциями от μ , то $y(x, \mu, f)$ является мероморфной функцией от μ , с полюсами в нулях функции $W_{\pi, \beta}$ или, что то же самое, в собственных значениях $\mu_n, n = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку $W_{\pi, \beta}(\mu_n) \equiv \frac{d}{d\mu} W_{\pi, \beta}(\mu_n) = \beta_n a_n$ (см. [6, Лемма 1.1.1]), то используя (1.5), мы получаем вычисл

$$(2.11) \quad \operatorname{Res}_{\mu=\mu_n} y(x, \mu, f) = \frac{1}{a_n} \varphi_\pi(x, \mu_n) \int_0^\pi f(t) \varphi_\pi(t, \mu_n) dt.$$

Из (2.1), (2.3), (2.7) и (2.10) следует, что существуют положительные числа C , C_2 , C_3 , C_4 такие что при $\lambda \in Z_{1/8}$, $|\lambda| > \lambda^*$ имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad |y(x, \lambda^2, f)| &\leq \frac{|\psi_\beta(x, \lambda^2)| \max_{t \in [0, \pi]} |\varphi_\pi(t, \lambda^2)| \int_0^\pi |f(t)| dt}{C_1 e^{Im\lambda|\pi} \sin \beta} + \\
 &+ \frac{|\varphi_\pi(x, \lambda^2)| \max_{t \in [x, \pi]} |\psi_\beta(t, \lambda^2)| \int_x^\pi |f(t)| dt}{C_1 e^{Im\lambda|\pi} \sin \beta} \leq \\
 &\leq \frac{e^{Im\lambda(\pi-x)} \left(\sin \beta + \frac{|\cos \beta|}{|\lambda|} + C_3 \frac{\sin \beta}{|\lambda|} + C_4 \frac{|\cos \beta|}{|\lambda|^2} \right)}{C_1 e^{Im\lambda|\pi} \sin \beta} \times \\
 &\times e^{Im\lambda|x} \left(\frac{1}{|\lambda|} + C_2 \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \int_0^\pi |f(t)| dt \leq \\
 &\leq \frac{1}{C_1} \int_0^\pi |f(t)| dt \left(\frac{1}{|\lambda|} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \right) \leq \frac{C}{|\lambda|}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию $f \in AC[0, \pi]$. Используя тот факт, что $\varphi_\pi(x, \mu)$ и $\psi_\beta(x, \mu)$ являются решениями (1.1), мы можем переписать представление (2.10) для $y(x, \mu, f)$ в следующем виде (сравните с [6]):

$$(2.13) \quad y(x, \mu, f) = \frac{f(x)}{\mu} + f(0) \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} + \frac{Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f')}{\mu} + \frac{Z_2(x, \mu, \pi, \beta)}{\mu},$$

где

$$(2.14) \quad Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f') = \frac{\psi_\beta(x, \mu) \int_0^x f'(t) \varphi'_\pi(t, \mu) dt + \varphi_\pi(x, \mu) \int_x^\pi f'(t) \psi'_\beta(t, \mu) dt}{W_{\pi, \beta}(\mu)},$$

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad Z_2(x, \mu, \pi, \beta) &= -f(\pi) \psi'_\beta(\pi, \mu) \frac{\varphi_\pi(x, \mu)}{W_{\pi, \beta}(\mu)} + y(x, \mu, qf) = \\
 &= f(\pi) \cos \beta \frac{\varphi_\pi(x, \mu)}{W_{\pi, \beta}(\mu)} + y(x, \mu, qf).
 \end{aligned}$$

Покажем, что

$$(2.16) \quad \lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ \lambda \in Z_{1/8}}} \max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f')| = 0.$$

Сначала предположим, что f' абсолютно непрерывная функция на $[0, \pi]$. Тогда существует $f'' \in L^1[0, \pi]$ и (2.14) можно записать в следующем виде

$$Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f') = \frac{\varphi_\pi(x, \mu)}{W_{\pi, \beta}(\mu)} f'(\pi) \sin \beta - \\ - \frac{\psi_\beta(x, \mu) \int_0^\pi f''(t) \varphi_\pi(t, \mu) dt + \varphi_\pi(x, \mu) \int_x^\pi f''(t) \psi_\beta(t, \mu) dt}{W_{\pi, \beta}(\mu)}.$$

В силу (2.1)–(2.4) и (2.7) мы получаем, что существует число $C > 0$, такое что

$$\max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f')| \leq \frac{C}{|\lambda|}, \text{ при } \lambda \in \mathbf{Z}_{1/6}, |\lambda| > \lambda^*.$$

Отсюда следует (2.16) в случае $f' \in AC[0, \pi]$.

Теперь обратимся к общему случаю $g := f' \in L^1[0, \pi]$. Зафиксируем $\epsilon > 0$ и выберем абсолютно непрерывную функцию g_ϵ , так что

$$\int_0^\pi |g(t) - g_\epsilon(t)| dt < \frac{C_1 \sin \beta}{16} \epsilon.$$

Тогда, согласно (2.1)–(2.4), (2.7) и (2.14) для $\lambda \in \mathbf{Z}_{1/6}$, $|\lambda| > \lambda^*$, мы имеем

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, g)| &\leq \max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, g_\epsilon)| + \max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, g - g_\epsilon)| \leq \\ &\leq \frac{C(\epsilon)}{|\lambda|} + \frac{C_1 \sin \beta}{16} \epsilon \max_{x \in [0, \pi]} \left(\frac{|\psi_\beta(x, \mu)| \max_{t \in [0, x]} |\varphi_\pi^*(t, \mu)| + |\varphi_\pi(x, \mu)| \max_{t \in [0, x]} |\psi_\beta'(t, \mu)|}{C_1 e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \sin \beta} \right) \leq \\ &\leq \frac{C(\epsilon)}{|\lambda|} + \frac{C_1 \sin \beta}{16} \epsilon \max_{x \in [0, \pi]} \left(\frac{8e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{C_1 e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \sin \beta} \right) \leq \frac{C(\epsilon)}{|\lambda|} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что если мы выберем $\lambda_\epsilon^* = \frac{2C(\epsilon)}{\epsilon}$, тогда для $\lambda \in \mathbf{Z}_{1/6}$ и $|\lambda| > \lambda_\epsilon^*$ мы имеем $\max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta)| \leq \epsilon$. В силу произвольности $\epsilon > 0$, мы приходим к (2.16). Теперь оценим $Z_2(x, \mu, \pi, \beta)$ (см. (2.15)). Поскольку $qf \in L^1[0, \pi]$, то оценки в (2.12) верны также для $y(x, \mu, qf)$. Используя (2.1), (2.7), (2.12) и тот факт, что $\sin \beta \neq 0$ мы получаем следующие оценки (при $\lambda \in \mathbf{Z}_{1/6}$, $|\lambda| > \lambda^*$):

$$(2.17) \quad \max_{x \in [0, \pi]} |Z_2(x, \mu, \pi, \beta)| \leq \max_{x \in [0, \pi]} \left| f(\pi) \cos \beta \frac{\varphi_\pi(x, \mu)}{W_{\pi, \beta}(\mu)} \right| + \max_{x \in [0, \pi]} |y(x, \mu, qf)| \leq \\ \leq \left| f(\pi) \cos \beta \frac{C_6 e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda| C_1 e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \sin \beta} \right| + \frac{C_6}{|\lambda|} \leq \frac{C_6 |f(\pi) \cot \beta|}{C_1 |\lambda|} + \frac{C_6}{|\lambda|} \leq \frac{C_7}{|\lambda|},$$

где $C_6 - C_7$ положительные числа. Рассмотрим следующий контурный интеграл

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} y(x, \mu, f) d\mu,$$

где $\Gamma_N = \left\{ \mu : |\mu| = \left(N + \frac{3}{4} \right)^2 \right\}$ (с обходом против часовой стрелки). С одной стороны, используя теорему Коши о вычетах (см. [14]), из (2.11) мы получаем

$$(2.18) \quad I_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{a_n} \int_0^\pi f(t) \varphi_\pi(t, \mu_n) dt \varphi_\pi(x, \mu_n).$$

С другой стороны, из (2.13), (2.16) и (2.17) имеем, что

$$(2.19) \quad I_N(x) = f(x) + f(0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} d\mu + \epsilon_N(x),$$

где $\epsilon_N(x)$, согласно (2.16) и (2.17), равномерно сходится к 0:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} |\epsilon_N(x)| = 0.$$

Без потери общности, будем считать что $\mu = 0$ не является собственным значением задачи $L(q, \pi, \beta)$. В самом деле, из чистой дискретности спектра следует, что существует число c такое, что числа $\mu_n + c \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, являются собственными значениями задачи $L(q + c, \pi, \beta)$ с теми же собственными функциями φ_n и нормировочными постоянными a_n , что и у задачи $L(q, \pi, \beta)$. Тогда функция $\frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)}$ имеет полюсы только первого порядка и используя теорему Коши о вычетах мы можем легко вычислить, что

$$\begin{aligned} \phi_N(x) &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} d\mu = \operatorname{Res}_{\mu=0} \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} + \sum_{n=0}^N \operatorname{Res}_{\mu=\mu_n} \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} = \\ &= \frac{\psi_\beta(x, 0)}{W_{\pi, \beta}(0)} + \sum_{n=0}^N \frac{\psi_\beta(x, \mu_n)}{\mu_n W_{\pi, \beta}(\mu_n)} = \frac{\psi_\beta(x, 0)}{W_{\pi, \beta}(0)} + \sum_{n=0}^N \frac{\beta_n \varphi_\pi(x, \mu_n)}{\mu_n \beta_n a_n} = \\ (2.20) \quad &= \frac{\psi_\beta(x, 0)}{W_{\pi, \beta}(0)} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{\mu_n a_n} \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Теперь покажем, что последовательность $\phi_N(x)$ сходится к 0 (при $N \rightarrow \infty$) равномерно на сегменте $[a, \pi]$, для произвольного $a \in (0, \pi)$.

Так как $\varphi_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ равномерно на $[0, \pi]$ (см. (2.1)), $\mu_n = \mu_n(q, \pi, \beta) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + O(1)$ (см. [9, Теорема 1 на стр. 286 и асимптотические оценки для $\delta_n(\pi, \beta)$ на стр. 292]) и $a_n = a_n(q, \pi, \beta) = \frac{\pi}{2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (см. [11, Теорема 1.1], стр. 9-10), тогда $\phi_N(x)$ (см. (2.20)) можно записать в

следующем виде:

$$\phi_N(x) = \frac{\psi_\beta(x, 0)}{W_{\pi, \beta}(0)} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{n + \frac{1}{2}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} q_n(x),$$

где $q_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ равномерно на $[0, \pi]$.

Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{n + \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$, $0 < x < 2\pi$ (см. например, [8, формула (37) на стр. 578]), тогда последовательность $\phi_N(x)$ сходится к непрерывной функции $\phi(x)$ (при $N \rightarrow \infty$) равномерно на сегменте $[a, \pi]$, для произвольного $a \in (0, \pi)$.

Теперь, чтобы доказать, что $\phi(x) \equiv 0$, $x \in (0, \pi]$, достаточно показать, что $\phi = 0$ п.в.

Сделаем некоторые вычисления, получим:

$$(2.21) \quad \int_0^{\pi} \phi(x) \varphi_m(x) dx = \frac{1}{W_{\pi, \beta}(0)} \int_0^{\pi} \psi_\beta(x, 0) \varphi_m(x) dx + \frac{1}{\mu_m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \mu_m \int_0^{\pi} \psi_\beta(x, 0) \varphi_m(x) dx &= \int_0^{\pi} (\varphi_m(x) \psi_\beta''(x, 0) - \varphi_m''(x) \psi_\beta(x, 0)) dx = \\ &= (\varphi_m(x) \psi_\beta'(x, 0) - \varphi_m'(x) \psi_\beta(x, 0)) \Big|_0^{\pi} = \psi_\beta(0, 0) = -W_{\pi, \beta}(0). \end{aligned}$$

Из (2.21) и (2.22) следует

$$\int_0^{\pi} \phi(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку система собственных функций $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ краевой задачи $L(q, \pi, \beta)$ является полной и ортогональной в $L^2(0, \pi)$, то $\phi = 0$ п.в. Сравнивая этот результат с (2.18), (2.19) и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в (2.19), мы приходим к (1.7). Теорема 1.3 доказана. $\square$

Замечание 2.1. Хорошо известно, что одно из доказательств теоремы 1.2 основывается на так называемой теореме о равномерной равносходимости, которая утверждает, что разложение по собственным функциям задачи $L(q, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ эквивалентно разложению по собственным функциям задачи $L(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, т.е., $\{\cos nx\}_{n \geq 0}$ (см. [5, 2, 7]). Далее можно применить теорему Дирихле-Жордана (см. [15, стр. 121–122]) и Теорема 1.2 будет доказана. Тот же подход не может быть применен в нашем случае, а именно: нетрудно установить что разложение по собственным функциям задачи $L(q, \pi, \beta)$,

$\beta \in (0, \pi)$ будет эквивалентно разложению по $\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x$, $n = 0, 1, 2, \dots$, т.е., по собственным функциям задачи $L \left(0, \pi, \frac{\pi}{2} \right)$ (см. [5, замечание на стр. 304] и [2, замечание на стр. 71]). С другой стороны, насколько нам известно, нет аналога теоремы Диришле-Жордана для разложения по системе функций $\left\{ \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right\}_{n \geq 0}$ (по этому поводу см. [16, Теорема 2.6]).

3. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Стоит заметить что приведенное в работе [10] доказательство утверждения (b) теоремы 1.5 для случая $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ не проходит для случая $\alpha = \pi$, $\beta \in (0, \pi)$. Ниже, используя теоремы 1.3 и 1.4, мы разберем этот случай. Обозначим $\sigma(x) = \int_0^x q(t) dt$ и запишем $l_n(q, \pi, \beta)$ (см. (1.11)) в следующей форме:

$$l_n(q, \pi, \beta) = -\frac{\sigma(\pi) \cos 2\pi\delta_n(\pi, \beta)}{2\pi(n + \delta_n(\pi, \beta))} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_1(x) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x dx,$$

где $\sigma_1(x) = \sigma\left(\frac{x}{2}\right)$ абсолютно непрерывная функция на $[0, 2\pi]$.

Заметим что единственность решения $\delta_n(\alpha, \beta)$ уравнения (1.9) при $\alpha = \pi$ и $\beta \in [0, \pi)$ можно доказать исходя из того, что $\alpha \cos \alpha$ является убывающей функцией.

Из (1.9) легко видеть (подробности см. [9]), что для $\beta \in (0, \pi)$ мы имеем

$$(3.1) \quad \delta_n(\pi, \beta) = \frac{1}{2} + \frac{\cot \beta}{\pi(n + \frac{1}{2})} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \cot \beta = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и следовательно,

$$(3.2) \quad \cos 2\pi\delta_n(\pi, \beta) = -1 + d_n, \quad \sin 2\pi\delta_n(\pi, \beta) = e_n,$$

$$\text{где } d_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad e_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому, $l(x, \beta)$ (см. (1.12)) можно представить в виде суммы трех функций

$$l(x, \beta) = l_1(x, \beta) + l_2(x, \beta) + l_3(x, \beta),$$

где

$$l_1(x, \beta) = \frac{\sigma(\pi)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x}{(n + \delta_n(\pi, \beta))},$$

$$(3.3) \quad l_2(x, \beta) = -\frac{\sigma(\pi)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} d_n \frac{\sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x}{(n + \delta_n(\pi, \beta))},$$

$$(3.4) \quad l_3(x, \beta) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} f_n \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x,$$

$$\text{и } f_n = \int_0^{2\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt.$$

$$\text{Поскольку } f_n = \int_0^{\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt + \int_{-\pi}^{2\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{2\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt &= \int_{-2\pi}^{-\pi} -\sigma_1(-t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt = \\ &= \int_0^{\pi} -\sigma_1(2\pi - t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) (t - 2\pi) dt = \\ &= \int_0^{\pi} \sigma_1(2\pi - t) ((1 - d_n) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t + e_n \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} \sigma \left(\pi - \frac{t}{2} \right) ((1 - d_n) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t + e_n \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t) dt, \end{aligned}$$

то

$$(3.5) \quad f_n = \int_0^{\pi} \left(\sigma \left(\frac{t}{2} \right) + \sigma \left(\pi - \frac{t}{2} \right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt - \\ - d_n \int_0^{\pi} \sigma \left(\pi - \frac{t}{2} \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt + e_n \int_0^{\pi} \sigma \left(\pi - \frac{t}{2} \right) \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt.$$

Следует отметить, что $\delta_n(\alpha, \beta)$ определена только для $n \geq 2$, поэтому мы запишем $\lambda_0(0, \pi, \beta)$, $\lambda_1(0, \pi, \beta)$ и $\lambda_n(0, \pi, \beta) = n + \delta_n(\pi, \beta)$ для всех $n \geq 2$. Учитывая, что система функций

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{\sin \lambda_n(0, \pi, \beta) x}{\lambda_n(0, \pi, \beta)} \right\}_{n=0}^1 \cup \left\{ \frac{\sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x}{n + \delta_n(\pi, \beta)} \right\}_{n=2}^{\infty}$$

является системой собственных функций задачи $L(0, \pi, \beta)$ и применяя Теорему 1.3, получаем

$$(3.6) \quad \sigma \left(\frac{x}{2} \right) + \sigma \left(\pi - \frac{x}{2} \right) = \sigma_2(x) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\int_0^{\pi} \left(\sigma \left(\frac{t}{2} \right) + \sigma \left(\pi - \frac{t}{2} \right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt}{\int_0^{\pi} \sin^2(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt} \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x$$

где ряд сходится равномерно на произвольном отрезке $[a, \pi] \subset (0, \pi]$ и

$$\sigma_2(x) = \sum_{n=0}^1 \frac{\int_0^{\pi} \left(\sigma \left(\frac{t}{2} \right) + \sigma \left(\pi - \frac{t}{2} \right) \right) \sin \lambda_n(0, \pi, \beta) t dt}{\int_0^{\pi} \sin^2 \lambda_n(0, \pi, \beta) t dt} \sin \lambda_n(0, \pi, \beta) x$$

Используя (3.1) и (3.2), мы вычисляем

$$(3.7) \quad \int_0^{\pi} \sin^2(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt = \\ = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi(n + \delta_n(\pi, \beta))}{4(n + \delta_n(\pi, \beta))} = \frac{\pi}{2} - \frac{e_n}{4(n + \delta_n(\pi, \beta))}.$$

Из (3.7), легко видеть, что

$$\frac{1}{\int_0^{\pi} \sin^2(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt} = \frac{2}{\pi} + g_n, \quad \text{где} \quad g_n = \frac{2e_n}{\pi(2\pi(n + \delta_n(\pi, \beta)) - e_n)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теперь мы можем записать (3.6) в форме

$$(3.8) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x = \\ = - \sum_{n=2}^{\infty} g_n \int_0^{\pi} \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x + \\ + \sigma\left(\frac{x}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{x}{2}\right) - \sigma_2(x),$$

где ряды сходятся равномерно на произвольном отрезке $[a, \pi] \subset (0, \pi]$.

Из (3.4), (3.5), (3.8) следует что для произвольного $x \in (0, \pi]$

$$(3.9) \quad l_3(x, \beta) = \frac{1}{4} \left(-\sigma\left(\frac{x}{2}\right) - \sigma\left(\pi - \frac{x}{2}\right) + \sigma_2(x) \right) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n}{4} \int_0^{\pi} \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} d_n \int_0^{\pi} \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} e_n \int_0^{\pi} \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x.$$

Поскольку $d_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $e_n \int_0^{\pi} \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $g_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, тогда $l_3 \in AC(0, \pi]$. С другой стороны, так как (см. (3.4) и (3.2))

$$l_3(2\pi - x, \beta) = l_3(x, \beta) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} d_n f_n \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} e_n f_n \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) x,$$

то $l_3 \in AC[\pi, 2\pi]$ и следовательно $l_3 \in AC(0, 2\pi)$. Поскольку $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \delta_n(\pi, \beta))}{(n + \delta_n(\pi, \beta))}$ абсолютно непрерывная функция на $(0, 2\pi)$ (см. [12, 10]), тогда $l_1 \in AC(0, 2\pi)$. Поскольку $d_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, то ряд в (3.3) и его первая производная сходятся абсолютно и равномерно на $[0, 2\pi]$ и, следовательно $l_2 \in AC[0, 2\pi]$. Утверждение (b) теоремы 1.5 при $\alpha = \pi$, $\beta \in (0, \pi)$ доказано. $\square$

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору Т. Н. Арутюняну за постановку задачи и внимание к работе.

Abstract. Uniform convergence of the expansion of an absolutely continuous function for eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem $-y'' + q(x)y = \mu y$, $y(0) = 0$, $y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0$, $\beta \in (0, \pi)$ with summable potential $q \in L^1_b[0, \pi]$ is proved. This result is used to obtain more precise asymptotic formulae for eigenvalues and norming constants of this problem.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Паймарк, *Линейные Дифференциальные Операторы*, Наука, Москва (1969).
- [2] В. М. Левитан, И. С. Сегисин, *Введение в Спектральную Теорию*, Наука, Москва (1970).
- [3] В. А. Мартенко, *Операторы Штурма-Лиувилля и Их Приложения*, Наукова Думка, Киев (1977).
- [4] Т. Н. Арутюнян, М. С. Овсепян, "О решениях уравнения Штурма-Лиувилля", *Математика в Высшей Школе*, 1, no. 3, 59–74 (2005).
- [5] E. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw Hill Book Company, New York (1955).
- [6] В. А. Юрко, *Введение в Теорию Обратных Спектральных Задач*, Физматлит, Москва (2007).
- [7] В. М. Левитан, И. С. Сегисин, *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирихле*, Наука, Москва (1988).
- [8] I. N. Bronshtein, K. A. Semendyayev, *Handbook of Mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York (1998).
- [9] Т. Н. Арутюнян, "The dependence of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem on boundary conditions", *Matematicheskii Vestnik*, 60, no. 4, 285 – 294 (2008).
- [10] Т. Н. Арутюнян, "Асимптотика собственных значений задачи Штурма-Лиувилля", *Известия НАН Армении, Математика*, 61, no. 4, 3 – 16 (2016).
- [11] Т. Н. Арутюнян, А. А. Пахлеванян, "On the norming constants of the Sturm-Liouville problem", *Вестник Казанского государственного энергетического университета*, no. 3(31), 7 – 28 (2016).
- [12] Т. Н. Арутюнян, *Функция Собственных Значений Самосопряженного Оператора Штурма-Лиувилля и Дирихле*, Докторская диссертация, Ереван (2010).
- [13] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA (1987).
- [14] В. В. Шабат, *Введение в Комплексный Анализ*, Наука, Москва (1985).
- [15] Н. К. Бари, *Тригонометрические Ряды*, Физматлит, Москва (1961).
- [16] A. Iserles, S. P. Nørsett, "From high oscillation to rapid approximation 1: Modified Fourier expansions", *IMA Journal of Numerical analysis*, 28, no. 4, 862 – 887 (2008).

Поступила 10 сентября 2017

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 52

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

номер

Периодические произведения групп С. И. Адян, В. С. Атабекян	3
Свойство единственного следа n -периодических произведений групп В. С. Атабекян, А. Л. Геворгян, III. А. СТЕПАНЯН	4
Nonlocal semi-linear fractional-order boundary value problems with strip conditions B. AHMAD, A. ALSAEDI, A. ALSHRIEF	4
Power series: Localization of singularities on the boundary of the disk of convergence N. H. ARAKELIAN	5
The particle structure of the quantum mechanical Bose and Fermi gas A. BACH, H. ZEISSIN	1
Further results on uniqueness of derivatives of meromorphic functions sharing three sets A. BANERJEE, S. MAJUMDER, B. CHAKRABORTY	2
Нечеткая оценка наименьших квадратов по выпуклым сболичкам α -уровней В. Г. БАРДАХЧЯН, Р. А. ГЕВОРКЯН	2
Тонкие свойства функций из классов Хайлаша-Соболева M_p^r при $p > 0$, II. Аппроксимация Лузина С. А. ВОНДАРЕВ, В. Г. КРОТОВ	1
О локальной эквивалентности мажоранты частичных сумм и функции Палли для рядов Франклина Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. КЕРЯН	1
О рядах Хаара A -интегрируемых функций Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. НАВАСАРДЯН	3
О восстановлении коэффициентов ряда Франклина с "хорошей" мажорантой частичных сумм Г. Г. ГЕВОРКЯН, М. П. ПОГОСЯН	5
Pointwise convergence of Marcinkiewicz-Fejér means of double Vilenkin-Fourier series U. GOGINAVA	5
Weyl-type theorems for unbounded posinormal operators A. GUPTA, K. MAMTANI	4
Generalized (Jordan) left derivations on rings associated with an element of rings B. DAVVAZ, L. KAMALI ARDEKANI	4
Одно преобразование интегральных уравнений В. Н. ЕНГИВАРЯН, Н. В. ЕНГИВАРЯН	6
The radius of convexity of particular functions and applications to the study of a second order differential inequality O. ENGEL, AGNES O. PALL-SZABO	3

Интегральное представление и теоремы вложения в плоскости для мультианизотропных пространств Г. А. КАРАПЕТАН	6
Теорема единственности для рядов Франклина К. А. КЕРЯН	2
On L^p -integrability of a special double sine series formed by its blocks ХН. Z. KRASNIQI	1
Brück conjecture for a linear differential polynomial I. LAHIRI, B. PAL	1
An entire function that shares a small function with a homogeneous differential polynomial I. LAHIRI, B. PAL	3
Existence of solutions for discrete fractional difference inclusions with boundary conditions W. LV	6
Fixed points of mixed monotone operators for existence and uniqueness of nonlinear fractional differential equations Н. МАРАСИ, П. АФСНАРИ, М. ДАНИШБАСТАМ, С. ЗНАИ	1
Оценки снизу многочленов многих переменных В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН	5
Явление Гиббса для общей системы Франклина В. Г. МИКАЕЛЯН	4
On a general nonlinear problem with distributed delays NASSER-ELDINE TATAR	4
Extended Srivastava's triple hypergeometric $H_{A,p,q}$ function and related bounding inequalities R. K. PARMAR, T. K. POGANY	6
Сходимость разложений по собственным функциям и асимптотика спектральных данных задачи Штурма-Лиувилля А. А. ПАХЛЕВАНЯН	6
Ограниченные проекторы и двойственность в пространствах функций, гармонических в единичном шаре А. И. ПЕТРОСЯН	6
Priori estimates and asymptotic properties of solutions for some fractional order elliptic equations R. PEI, C. MA	5
Results on uniqueness of entire functions whose difference polynomials share a polynomial P. SAHOO AND H. KARMAKAR	2
Dirichlet and Neumann problems for Poisson equation in half lens N. TAGHIZADEH, V. S. MOHAMMADI	2
О регулярных касательных конусах Р. А. ХАЧАТРИАН	2
The Casazza-Tremain conjecture in the infinite dimensional Hilbert spaces M. A. HASANKHANI FARD	2
Hypersurfaces of a Finsler space with a special (α, β) -metric V. K. CHAUBEY, A. MISIURA	1
A note on solutions of some differential-difference equations X. QI, Y. LIU, L. YANG	3
Commutators of homogeneous fractional integrals on Herz-type Hardy spaces with variable exponent H. WANG	3
Mean covariogram of cylinders and applications to Boolean random sets F. WILLOT	6

1500/111.

Cover-to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

*JOURNAL OF
CONTEMPORARY
MATHEMATICAL
ANALYSIS*

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 52, No. 5, 2017

CONTENTS

V. N. MARGARYAN, H. G. GHAZARYAN, Lower bounds for polynomials of many variables.....	211
R. PEI, C. MA, Priori estimates and asymptotic properties of solutions for some fractional order elliptic equations.....	221
N. H. ARAKELIAN, Power series: Localization of singularities on the boundary of the disk of convergence	227
U. GOGINAVA, Pointwise convergence of Marcinkiewicz-Fejér means of double Vilenkin-Fourier series	242
G. G. GEVORKYAN, M. P. POGOSYAN, On restoration of coefficients of Franklin series with a "good" majorant of partial sums.....	254 - 260

ՀԱՅ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ



FL0459304

2017/52/1

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 52, номер 6, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Б. Н. ЕНГИВАРЯН, Н. Б. ЕНГИВАРЯН, Одно преобразование интегральных уравнений.....	3
Г. А. КАРАПЕТЯН, Интегральное представление и теоремы вложения в плоскости для мультианизотропных пространств	12
W. Lv, Existence of solutions for discrete fractional difference inclusions with boundary conditions.....	25
А. И. ПЕТРОСЯН, Ограниченные проекторы и двойственность в пространствах функций, гармонических в единичном шаре.....	33
R. K. PARMAR, T. K. POGANY, Extended Srivastava's triple hypergeometric $H_{A,p,q}$ function and related bounding inequalities.....	47
F. WILLOT, Mean covariogram of cylinders and applications to Boolean random sets.....	62
А. А. ПАХЛЯВЯНЯН, Сходимость разложений по собственным функциям и асимптотика спектральных данных задачи Штурма-Лиувилля.....	77
Содержание тома 52, номера 1 – 6, 2017	91 – 92

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 52, No. 6, 2017

CONTENTS

B. N. YENGIBARYAN, N. B. YENGIBARYAN, On a transformation of integral equations.....	3
G. A. KARAPETYAN, An integral representation and embedding theorems in the plane for multianisotropic spaces.....	12
W. Lv, Existence of solutions for discrete fractional difference inclusions with boundary conditions.....	25
A. I. PETROSYAN, Bounded projectors and duality in the spaces of functions holomorphic in the unit ball.....	33
R. K. PARMAR, T. K. POGANY, Extended Srivastava's triple hypergeometric $H_{A,p,q}$ function and related bounding inequalities.....	47
F. WILLOT, Mean covariogram of cylinders and applications to Boolean random sets.....	62
A. A. PAHLEVANYAN, Convergence of expansions for eigenfunctions and asymptotics of spectral data of the Sturm-Liouville problem.....	77
Author Index to Volume 52, numbers 1 – 6, 2017.....	91 – 92