ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2017

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 5, 2017, стр. 3–24.

POWER SERIES: LOCALIZATION OF SINGULARITIES ON THE BOUNDARY OF THE DISK OF CONVERGENCE

N. H. ARAKELIAN

Institute of Mathematics NAS of Armenia
E-mail: *arakelian@instmath.sci.am*

Abstract. The paper contains results on localization of singularities for the power series (in terms of their coefficients) on boundary arcs of the disk of convergence.

MSC2010 numbers: 30B10, 30B40.
Keywords: power series; analytic continuation; singularities of power series.

1. Introduction

1.1. **Notation.** The following standard notation are used throughout this paper. The letters $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ will denote the sets of natural, integer, real and complex numbers, respectively, with known algebraic structure and topology. For $E \subset \mathbb{C}$ the sets $\overline{E}$, E^o and ∂E will denote correspondingly the closure, the interior and the boundary of E. Also, we set:

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$;

$I_{a,b} := [a, b]$, $|I_{a,b}| = b - a \geq 0$; $I^o_{a,b} := (a, b)$, $\left|I^o_{a,b}\right| = b - a > 0$;

$D_{r,c} := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$ - an open disk of radius $r > 0$ and center at $c \in \mathbb{C}$;

$D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ - the *unit* disk; $\partial D_1 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ - the *unit* circle;

$l_\theta := \{z = re^{i\theta} : r \in \mathbb{R}_+ \geq 0\}$ - a ray in direction $e^{i\theta}$ for $\theta \in \mathbb{R}$.

For $\alpha \in (0, 2\pi]$, $\beta \in [0, 2\pi)$ and $\mu \in \partial D_1$ denote:

$\Delta_\beta := \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \beta/2\}$ - an angle of opening $\beta \in [0, 2\pi)$ and bisector $\mathbb{R}_+$.

$\gamma_{\beta,\mu} := \{\zeta \in \partial D_1 : |\arg(\zeta/\mu)| \leq \beta/2\}$ - an arc on ∂D_1 of length β centered at μ;

$\gamma^o_{\alpha,\mu} := \{\zeta \in \partial D_1 : |\arg(\zeta/\mu)| < \alpha/2\}$ - an arc on ∂D_1 of length α centered at μ.

For a closed set $E \subset \mathbb{C}$ and a domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ denote:

$C(E)$ - the class of continuous functions $f : E \to \mathbb{C}$;

$H(\Omega)$ - the class of holomorphic functions in Ω.

1.2. **The problem 1°.** The notions of an *analytic element* (*element*, for short) and its *analytic continuation* are fundamental in the version of the analytic functions theory, proposed by Karl Weierstrass (see [1], §2). An *element*, centered at $c \in \mathbb{C}$, is a power series with coefficients $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, converging in a disk $D_{r,c}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-c)^n \text{ for } z \in D_{r,c} \tag{1.1}$$

and presenting a holomorphic function $f \in H(D_{r,c})$; conversely, any $f \in H(D_{r,c})$ has a unique expansion of form (1.1).

The main aim of the Weierstrass approach was to investigate the *global* properties of an analytic function f, using the terms of its *local* presentation by an element of form (1.1). This includes, in particular, the problems: on *possibility* of analytic continuation of an element (1.1) to a domain, containing $D_{r,c}$, on *restoration* of that continuation (if is known its *possibility*), on *localization* of possible singularities of (1.1) out of $D_{r,c}$.

Recall that a point $\mu \in \partial D_{r,c}$ is said to be a *regular* point of element (1.1) if there is a *direct* analytic continuation of (1.1) from $D_{r,c}$ to some neighborhood $D_{\rho,\mu}$ of μ; otherwise μ is called a *singular* point of (1.1). Thus, the set of regular points of (1.1) on $\partial D_{r,c}$ is its open subset or is empty. An element (1.1) has a singular point on $\partial D_{r,c}$ if and only if it is a *canonical element*, that is, if r is *the radius* of its convergence, and $\partial D_{r,c}$ is the *natural boundary* of (1.1) if all $z \in \partial D_{r,c}$ are the singular points of (1.1).

The main subject of this paper is the problem on *localization* the singularities of a *canonical* element (1.1) along $\partial D_{r,c}$. Note that it suffice to consider this problem for the *normalized* elements f with the *unit disk* D_1 *of convergence*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \text{ for } |z| < 1, \qquad \limsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n} = 1. \tag{1.2}$$

The mentioned problem for an element (1.2) was a subject for a number of classical investigations, due to K. Weierstrass, J. Hadamard, E. Fabry, G. Polya and other authors (see [1], §2). The first results, concerning conditions guaranteeing that ∂D_1 is the *natural boundary* for (1.2), were obtained by K. Weierstrass and J. Hadamard in terms of the *gap* or *lacuna* set of (1.2):

$$\mathbb{L}_f := \{n \in \mathbb{N}_0 : f_n = 0\}. \tag{1.3}$$

E. Fabry has exploited a new approach for investigating the next general problem: find conditions on coefficients f_n of (1.2) (using the terms of their *modulus* and *arguments*), guaranteeing for (1.2) the existence of a *singular* point on a given arc $\gamma \subset \partial D_1$. The solution of this problem was the aim of E. Fabry's known *General Theorem* (see [2] and [1], Theorem 2.1.1). More perfect and strongly proved version of this result has been obtained later by G. Pólya (see [3] and [1], Theorem 2.1.3), using the introduced notions of *minimal* and *maximal* densities for the subsets of

$\mathbb{N}_0$ (see [3] and [4], VI E, Section 3). The obtained solution was satisfactory in case of using the terms of the gap sets (1.3) (see Fabry-Polya theorem on gaps in [1]). Its exactness has been discussed in a number of papers (see [3] and [5], IX B), and was proved in [6]. Mention also the extension of the noted theorem, obtained in [7].

Other principal result of the Fabry's approach was the theorem on *arguments* (see [8] and [1], Theorem 2.3.1), obtained in the special case, when the boundary arc γ actually is reduced to a point. Mention also the papers [9]-[10] on this subject, extending the General Theorem and the noted concepts in different directions.

The aim of this paper is the description of some *necessary* conditions on coefficients of an element (1.2) (expressed in terms of their modulus and arguments), in order a given open arc $\gamma^o \subset \partial D_1$ be an arc of regularity for (1.2). This will allow to find some *sufficient* conditions, guaranteeing the existence on γ^o (and also on γ) of some *singular* points of (1.2), extending the results on singularities, obtained in [9] and [7]. A necessary instrument to solve the above stated problems is the so-called "Coefficient function" method, based on the idea of *interpolation* the coefficients $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ of (1.2) on the set $\mathbb{N}_0$ by entire functions φ of exponential type with some special properties.

2°. Returning to the normalized element (1.2), we present some preliminary notation and terms. Associate with the coefficients $\{f_n\}_0^{\infty} \subset \mathbb{C}$ of (1.2) a definite sequence of their *arguments* $\{\omega_n\}_0^{\infty}$:

$$f_n = |f_n| e^{i\omega_n} \text{ for } n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.4}$$

selected by setting $\Delta\omega_n := \omega_n - \omega_{n-1}$ for $n \in \mathbb{N}_0$ with $\omega_{-1} = 0$ and defining each argument ω_n for $n \in \mathbb{N}_0$ *uniquely* by induction via minimizing $|\Delta\omega_n|$ condition:

$$\begin{cases} \Delta\omega_n = 0 \text{ for } n \in \mathbb{L}_f, \\ \Delta\omega_n \in (-\pi, \pi] \text{ for } n \notin \mathbb{L}_f. \end{cases} \tag{1.5}$$

Setting now $\mathbb{N}_0 \backslash \mathbb{L}_f := \{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ with $f_{n_k} \neq 0$ for $k \in \mathbb{N}_0$, one can present element (1.2) in the form:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k} z^{n_k} \text{ for } |z| < 1, \qquad \limsup_{k \to \infty} |f_{n_k}|^{1/n_k} = 1. \tag{1.2'}$$

Then it follows from (1.2') and (1.5) that

$$\Delta\omega_{n_k} = \arg(f_{n_k}/f_{n_{k-1}}) \in (-\pi, \pi] \text{ for } k \geq 1, \tag{1.5'}$$

with $\Delta\omega_{n_0} = \omega_{n_0} = \arg f_{n_0} \in (-\pi, \pi]$.

3°. Consider now the related with (1.2) normalized element

$$f^*(z) := f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^* z^n \text{ for } |z| < 1 \tag{1.6}$$

with coefficients

$$f_n^* := (-1)^n f_n = |f_n| e^{i\omega_n^*} \text{ for } n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.7}$$

where the *arguments* ω_n^* of f_n^* are defined uniquely by induction. Set for this $\Delta\omega_n^* := \omega_n^* - \omega_{n-1}^*$ for $n \in \mathbb{N}_0$ with $\omega_{-1}^* = 0$. assuming as in (1.5). that $\Delta\omega_n^* = 0$ for $n \in \mathbb{L}_f$ with $\Delta\omega_{n_0}^* = \omega_{n_0}^* = \arg f_{n_0}^* \in (-\pi, \pi]$. Then it follows by (1.5') and (1.7). that $\Delta\omega_{n_k}^*$ can be defined via $\Delta\omega_{n_k}$ uniquely, since either $\Delta\omega_{n_k}^* = \Delta\omega_{n_k}$. or $\Delta\omega_{n_k}^* = (-1)\Delta\omega_{n_k}$ (correspondingly if $n_k - n_{k-1}$ is an even or odd number). In the second case one can choose the sign of $\arg(-1) = \pm\pi$. by setting:

$$\Delta\omega_{n_k}^* = \begin{cases} \Delta\omega_{n_k} + \pi. & \text{if } \Delta\omega_{n_k} \in (-\pi, 0], \\ \Delta\omega_{n_k} - \pi. & \text{if } \Delta\omega_{n_k} \in (0, \pi]. \end{cases} \tag{1.8}$$

Then with the condition $\Delta\omega_n^* = 0$ for $n \in \mathbb{L}_f$ we obtain as in (1.5). that

$$\Delta\omega_n^* \in (-\pi, \pi] \text{ for } n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.9}$$

4°. Consider now for the element f in (1.2)-(1.2') and for any interval $I_{p,q} := [p, q]$ with $p, q \in \mathbb{N}_0$ the quantity:

$$V_f(I_{p,q}) := \sum_{n \in (p,q]} |\Delta\omega_n| = \sum_{n_k \in (p,q]} |\Delta\omega_{n_k}|, \tag{1.10}$$

the variation of the coefficient arguments of f *on* $I_{p,q}$. This quantity can be defined also for any interval $I_{a,b} \subset \mathbb{R}_+$ by formula:

$$V_f(I_{a,b}) = \max\{V_f(I_{p,q}) : I_{p,q} \subset I_{a,b}\}, \tag{1.11}$$

assuming $V_f(I_{a,b}) = 0$, if there is no any $I_{p,q} \subset I_{a,b}$ with $p, q \in \mathbb{N}_0$. $p < q$. Then by (1.5) and (1.10)-(1.11), we have

$$V_f(I_{a,b}) \le \pi\,|I_{a,b}|\,. \tag{1.12}$$

Introduce also the quantity:

$$\nu_f(a, b) = V_f(I_{a,b}) / |I_{a,b}| \in [0, \pi], \tag{1.13}$$

the mean variation of the coefficient arguments of f in (1.2) on $I_{a,b}$.

Definition 1.1. *The introduced in (1.10)-(1.13) quantities $V_f(I_{a,b})$ with $\nu_f(a,b)$ for the element f in (1.2) can be defined also for the element $z \to f(-z) = f^*(z)$ in (1.6)-(1.7), replacing there the arguments $\{\omega_n\}_0^\infty$ by $\{\omega_n^*\}_0^\infty$. defined in (1.7)-(1.9) for f^*, and correspondingly replacing in (1.10)-(1.13), $V_f(I_{a,b})$ by $V_f^*(I_{a,b})$ and $\nu_f(a,b)$ by $\nu_f^*(a,b)$.*

The rest of the paper is organized as follows: Sections 2 and 3 contain the descriptions of some necessary auxiliary notions and results, including the above noted "Coefficient function"method with some new necessary constructions. The statements and proofs of the main results are presented in Section 4.

2. Auxiliary results

2.1. Entire functions of exponential type. *The class $\mathcal{E}$ of entire functions φ of exponential type* (see [11]-[13]) is defined by condition:

$$\sigma_\varphi := \limsup_{|z|\to\infty}\{|z|^{-1}\log^+|\varphi(z)|\} < +\infty,$$

where σ_φ is the *exponential type* of φ. Then $\varphi,\psi\in\mathcal{E}$ implies $\varphi+\psi\in\mathcal{E}$ and $\varphi\psi\in\mathcal{E}$.

The main characteristic for the behavior of any $\varphi\in\mathcal{E}$ along a ray l_θ for $\theta\in\mathbb{R}$ is the *exponential indicator* (*indicator*, for short) function h_φ of φ (see [11]-[13]), defined by formula (excluding the case $\varphi\equiv 0$):

$$h_\varphi(\theta) = \limsup_{r\to\infty}\left\{r^{-1}\log\left|\varphi(re^{i\theta})\right|\right\} \quad \text{for } \theta\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$

In this terms the growth and decrease on $\mathbb{C}$ of any $\varphi\in\mathcal{E}$ is restricted by the inequality:

$$\left|\varphi(re^{i\theta})\right| < \exp\{r[h_\varphi(\theta)+\varepsilon(r)]\} \quad \text{for } re^{i\theta}\in\mathbb{C}, \tag{2.2}$$

where $\varepsilon(r)\to 0$ as $r\to+\infty$, uniformly for $\theta\in\mathbb{R}$. Below some properties of the exponential indicator $h = h_\varphi$ are presented.

(a) h_φ is a real valued, 2π - periodic and bounded by σ_φ function:$-\sigma_\varphi < h_\varphi(\theta) < \sigma_\varphi$ for $\theta\in\mathbb{R}$.

(b) For $\varphi,\psi\in\mathcal{E}$ and any $\theta\in\mathbb{R}$ the following inequalities are satisfied:

$$h_{\varphi\psi}(\theta)\le h_\varphi(\theta)+h_\psi(\theta) \text{ and } h_{\varphi+\psi}(\theta)\le\max\{h_\varphi(\theta),h_\psi(\theta)\}. \tag{2.3}$$

(c) h_φ has the property of *trigonometric convexity*, (see [13]): *for any triple $\theta_1<\theta<\theta_2$ with $\theta_2-\theta_1<\pi$ the following inequality is satisfied:*

$$h_\varphi(\theta)\sin(\theta_2-\theta_1)\le h_\varphi(\theta_1)\sin(\theta_2-\theta)+h_\varphi(\theta_2)\sin(\theta-\theta_1). \tag{2.4}$$

This property implies the continuity of the indicator $h_\varphi:\mathbb{R}\to[-\sigma_\varphi,\sigma_\varphi]$ and, in addition, the following property:

(d) at each point $\theta\in\mathbb{R}$, h_φ has *one sided derivatives* $h'_\varphi(\theta_-)$ (from the left) and $h'_\varphi(\theta_+)$ (from the right), satisfying:

$$h'_\varphi(\theta_-)\le h'_\varphi(\theta_+) \text{ for } \theta\in\mathbb{R}, \tag{2.5}$$

where the equality holds, that is, actually the derivative $h'_\varphi(\theta)$ exists, except may be only a *countable* set of points $\theta\in\mathbb{R}$.

Definition 2.1. *Denote by $\mathcal{E}_0$ the subclass of the functions $\varphi\in\mathcal{E}$ with the exponential indicator h_φ, satisfying the condition $h_\varphi(0)=0$.*

(e) For any $\varphi \in \mathcal{E}_0$ and $\delta \in (0, \pi)$ the following inequality is satisfied (see [7]):

$$h_\varphi(\theta) \le c_\varphi(\delta)\,|\sin\theta| \text{ for } |\theta| \le \delta, \tag{2.6}$$

where for $\delta \in (0, \pi/2)$

$$c_\varphi(\delta) := \frac{\max\{h_\varphi(-\delta), h_\varphi(\delta)\}}{\sin\delta} \ge 0.$$

Actually, (2.6) follows from property (c) with (2.4) for the triples $0 < \theta < \delta$ and $-\delta < \theta < 0$, while (2.5) for the triple $-\delta < 0 < \delta$ with $\delta \in (0, \pi/2)$ states that $h_\varphi(\delta) + h_\varphi(-\delta) \ge 0$, implying $c_\varphi(\delta) \ge 0$.

(f) For any $\varphi \in \mathcal{E}_0$ and $\delta \in (0, \pi)$ from (2.2) and (2.6) we obtain the asymptotic inequality

$$|\varphi(z)| < \exp\{c_\varphi(\delta)\,|\mathrm{Im}\, z| + |z|\,\varepsilon(|z|)\} \text{ for } z \in \Delta_{2\delta}, \tag{2.7}$$

where $\varepsilon(|z|) \to 0$ as $|z| \to +\infty$.

(g) It follows from properties (d)-(e) that $c_\varphi(\delta)$ in (2.6) with $\varphi \in \mathcal{E}_0$ has the limit, as $\delta \to 0$:

$$\lim_{\delta\to 0} c_\varphi(\delta) = \limsup_{\theta\to 0}\,\{h_\varphi(\theta)/\,|\theta|\} := m_\varphi \ge 0, \tag{2.8}$$

where

$$m_\varphi := \max\{-h'_\varphi(0_-), h'_\varphi(0_+)\}. \tag{2.9}$$

Remark 2.1. *It follows from (2.9) and (2.5) that*

$$-m_\varphi \le h'_\varphi(0_-) \le h'_\varphi(0_+) \le m_\varphi, \tag{2.10}$$

so that $m_\varphi \ge 0$. Here $m_\varphi = 0 \iff h'_\varphi(0_-) = h'_\varphi(0_+) = 0$, that is, if there exists the derivative $h'_\varphi(0) = 0$. Also, (2.12) implies the following, more stronger than (2.11), relation for m_φ :

$$m_\varphi = \max\{|h'_\varphi(0_-)|, |h'_\varphi(0_+)|\}, \tag{2.9'}$$

with the equivalent to (2.8) equality $\lim_{\delta\to 0} c_\varphi(\delta) = m_\varphi = \limsup_{\theta\to 0} |h_\varphi(\theta)/\theta|$.

2.2. **The "Coefficient function" method.** 1°. This method is the main tool for analyzing the behavior of a normalized element (1.2) via *interpolation* the coefficients $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ of (1.2) on the set $\mathbb{N}_0$ by a function $\varphi \in \mathcal{E}$ or $\varphi \in H(\Delta_\beta)$ of exponential growth:

$$\varphi(n) = f_n \text{ for } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.11}$$

The method was used mainly to establish a criterion on possibility of the *analytic continuation* of (1.2) outside the unit disk D_1 in terms of φ (see [1], §7, [14], Chapter X and [15]-[18]). In particular, there is such a criterion for the element

(1.2) on *regularity* of some open arcs of the unit circle ∂D_1, which can be applied in problems on localization of *singularities* of (1.2) on ∂D_1 (see [10] and [7]).

Next, as a "Coefficient function" for (1.2) and for the related series we will use the functions from $\mathcal{E}_0$. The following criterion (see [14] and [7], Theorem 2) on regularity for (1.2) of an *open* proper subarc of ∂D_1 is essential for us.

Criterion 2.1. *The open arc $\partial D_1 \setminus \Delta_\beta$ on ∂D_1 for $\beta \in [0, 2\pi)$ is an arc of regularity for the normalized element (1.2) if and only if there is a function $\varphi \in \mathcal{E}_0$, satisfying the interpolation conditions (2.11) and the condition*

$$\limsup_{\theta \to 0} \{h_\varphi(\theta)/|\theta|\} := m_\varphi \leq \beta/2. \tag{2.12}$$

Note that by Remark 2.1, $m_\varphi \geq 0$ and m_φ can be defined also by formula (2.9).

2°. Let now $\beta := 2\pi - \alpha \in [0, 2\pi)$ in (1.15) with $\alpha \in (0, 2\pi]$, so that actually $\partial D_1 \setminus \Delta_\beta := \gamma^o_{\alpha,-1}$ is an *open* arc of ∂D_1 of length α and center -1. Then the open arc $\gamma^o_{\alpha,1} \subset \partial D_1$ of length α and center 1 will be an arc of regularity for the element f in (1.2) if and only if $\partial D_1 \setminus \Delta_\beta$ is an arc of regularity for the element $z \to f(-z)$ with coefficients $(-1)^n f_n$ for $n \in \mathbb{N}_0$, and in view of Criterion 2.1 and Remark 2.1 we get the following result.

Corollary 2.1. *The open arc $\gamma^o_{\alpha,1} \subset \partial D_1$ of length $\alpha \in (0, 2\pi]$ and center 1 is an arc of regularity for the normalized element f in (1.2) if and only if there is a function $\varphi \in \mathcal{E}_0$, satisfying the interpolation conditions:*

$$(-1)^n \varphi(n) = f_n \text{ for } n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.13}$$

and the condition (2.12) with $\beta = 2\pi - \alpha$, where m_φ can be defined also by formulas (2.11) or (2.9'). If $\alpha = 2\pi$, that is, $\beta = 0$, implying $m_\varphi = 0$, then there exists the derivative $h'_\varphi(0) = 0$.

Note that the interpolation conditions (2.13) are more adapted for the applications of Lemma 3.1 in Subsection 3.1. The next Remark 2.2 is adapting for this also the interpolation conditions (2.11) in Criterion 1.

Remark 2.2. *The interpolation conditions (2.11) can also be written as follows:*

$$(-1)^n \varphi(n) = f_n^* \quad \text{for } n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.11'}$$

with $f_n^* := (-1)^n f_n = |f_n| e^{i\omega_n^*}$, allowing to use the selected in (1.7)-(1.9) arguments ω_n^* of f_n^*.

3°. Consider now the open arc $\gamma^o_{\alpha,\mu} \subset \partial D_1$ of length $\alpha \in (0, 2\pi]$ and center $\mu = e^{i\lambda}$ with $\lambda \in (-\pi, \pi)$, so that $\mu \neq -1$. Then obviously $\gamma^o_{\alpha,\mu}$ will be an open arc of regularity for the element f in (1.2) if and only if $\gamma_{\alpha,1}$ is an arc of regularity for the normalized element $z \to f(\mu z)$ with coefficients $\{e^{i\lambda n} f_n\}_{n=0}^{+\infty}$. By Corollary 2.1, the necessary and sufficient condition for this is the existence of a function $\varphi_\lambda \in \mathcal{E}_0$ with $m_{\varphi_\lambda} \leq \pi - \alpha/2$, satisfying by (2.16) the interpolation conditions:

$$(-1)^n \varphi_\lambda(n) = e^{i\lambda n} f_n \quad \text{for } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.13'}$$

Next, consider the function $\varphi \in \mathcal{E}_0$, defined by formula

$$\varphi(z) = \varphi_\lambda(z) \exp(-i\lambda z) \text{ for } z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \tag{2.14}$$

satisfying the interpolation conditions (2.13). In addition, by (2.14), we have

$$h_\varphi(\theta) = h_{\varphi_\lambda}(\theta) + \lambda \sin\theta \quad \text{for } \theta \in \mathbb{R},$$

so that $\varphi \in \mathcal{E}$ with $h_\varphi(0) = h_{\varphi_\lambda}(0) = 0$, that is, $\varphi \in \mathcal{E}_0$. Since $h'_{\varphi_\lambda}(0_\pm) = h'_\varphi(0_\pm) - \lambda$, it follows from (2.9) and Remark 2.1 for φ_λ that

$$m_{\varphi_\lambda} = \max\{\lambda - h'_\varphi(0_-), h'_\varphi(0_+) - \lambda\}. \tag{2.15}$$

Then by (2.15), either $-h'_\varphi(0_-) = m_{\varphi_\lambda} - \lambda$ with $h'_\varphi(0_+) \leq m_{\varphi_\lambda} + \lambda$, or alternatively $-h'_\varphi(0_-) \leq m_{\varphi_\lambda} - \lambda$ with $h'_\varphi(0_+) = m_{\varphi_\lambda} + \lambda$, so that

$$m_\varphi = \max\{m_{\varphi_\lambda} - \lambda, m_{\varphi_\lambda} + \lambda\} = m_{\varphi_\lambda} + |\lambda|. \tag{2.16}$$

Now, by Corollary 2.1 and (2.16), the above condition (2.12) for φ_λ is equivalent to the next condition for φ :

$$m_\varphi \leq \pi - \alpha/2 + |\lambda|. \tag{2.17}$$

In addition, if $\alpha = 2\pi$, that is, $\beta = 0$, then by (2.12) it follows that $m_{\varphi_\lambda} = 0$, implying by Corollary 2.1 the existence of the derivative $h'_{\varphi_\lambda}(0) = 0$, that is, the existence of the derivative $h'_\varphi(0) = \lambda$, and by (2.16) the equation $m_\varphi = |\lambda|$.

From the above discussion we come to the following criterion.

Criterion 2.2. *The open arc $\gamma^o_{\alpha,\mu} \subset \partial D_1$ or the symmetric open arc $\gamma^o_{\alpha,-\mu} \subset \partial D_1$ of length $\alpha \in (0, 2\pi]$ and center μ or $-\mu$ with $\mu = e^{i\lambda}$ for $\lambda \in (-\pi, \pi)$ will be an arc of regularity for the element (1.2) if and only if there is a function $\varphi \in \mathcal{E}_0$, satisfying the condition (2.17) with (2.9) and the interpolation conditions: (2.13) for the center μ and (2.11) for $-\mu$. In both cases it follows for $\alpha = 2\pi$ the existence of $h'_\varphi(0) = \lambda$ with $m_\varphi = |\lambda|$.*

Actually, the Criterion 2 for the center μ follows from Corollary 1 with (2.15)-(2.17). The case with center $-\mu$ follows from the case for μ, applied to the related with (1.2) element $z \to f(-z)$ in (1.16)-(1.17) (see also Remark 2.2).

3. Two auxiliary analytic functions

3.1. The auxiliary function φ_η for a "Coefficient function" φ. A function $\psi : I_{a,b} \to \mathbb{R}$ is called *real analytic* if ψ has a locally convergent power series expansion around any center $c \in I_{a,b}$, guaranteeing for ψ a unique real analytic continuation on some *open* interval, containing $I_{a,b}$. If, in addition, $\psi(c) = 0$ for some $c \in I_{a,b}$, then it follows (excluding the case $\psi \equiv 0$ on $I_{a,b}$) the existence of some $m \in \mathbb{N}$ and a real analytic on $I_{a,b}$ function ψ_c with $\psi_c(c) \neq 0$, such that

$$\psi(x) = (x-c)^m \psi_c(x) \quad \text{for} \quad x \in I_{a,b},$$

that is, c is a *zero* of the function ψ *of multiplicity* m. Denote by $\mathbf{n}_\psi(I_{a,b})$ the *total* number of zeros of ψ on $I_{a,b}$, taking also into account their multiplicity. The next lemma on estimation of $\mathbf{n}_\psi(I_{a,b})$ will be useful for us (see Lemma 3 in [9]).

Lemma 3.1. *Let ψ be a real analytic function on the interval $I_{p,q}$ with $p, q \in \mathbb{Z}$, and let $\mathbf{w}_\psi(I_{p,q})$ be the number of the sign changes in the finite sequence $(-1)^n \psi(n)$ for $n \in I_{p,q} \cap \mathbb{Z}$. Then $\mathbf{n}_\psi(I_{p,q}) > |I_{p,q}| - \mathbf{w}_\psi(I)$ with $|I_{p,q}| = q - p$.*

Now our aim is to use the above Criterion 2.2 to describe the conditions on *regularity* for normalized element (1.2) the open arc $\gamma^\alpha_\mu \subset \partial D_1$ of length $\alpha \in (0, 2\pi]$ and center $\mu = e^{i\lambda}$ for $\lambda \in (-\pi, \pi)$ in terms of the function $\varphi \in \mathcal{E}_0$, satisfying the necessary and sufficient conditions (2.13) and (2.17). Present for this the condition (2.13) in terms (1.4)-(1.5) of the modulus and arguments of the coefficients of (1.2):

$$(-1)^n \varphi(n) = f_n = |f_n| e^{i\omega_n} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.1}$$

Since in general φ is not real valued on any interval $I_{a,b} \subset \mathbb{R}_+$, then to apply Lemma 3.1, we need to replace φ by another function with this property and closely related to φ.

Associate with $\varphi \in \mathcal{E}_0$ from Criterion 2 the function $\varphi_\eta \in \mathcal{E}$ with the parameter $\eta \in (0, \pi)$:

$$\varphi_\eta(z) = [\varphi(z)e^{i\eta} + \tilde{\varphi}(z)e^{-i\eta}]/2 \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.2}$$

where

$$\tilde{\varphi}(z) := \overline{\varphi(\bar{z})} \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C},$$

so that $\tilde{\varphi} \in \mathcal{E}_0$ with $h_{\tilde{\varphi}}(\theta) = h_\varphi(-\theta)$ for $\theta \in \mathbb{R}$. Then φ_η is *real valued* on $\mathbb{R}$ for any $\eta \in (0, \pi)$:

$$\varphi_\eta(x) = \mathrm{Re}[\varphi(x)e^{i\eta}] \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

satisfying by (3.1) and (3.3) the interpolation conditions:

$$(3.4) \qquad (-1)^n \varphi_\eta(n) = \mathrm{Re}(f_n e^{i\eta}) = |f_n| \cos(\omega_n + \eta) \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

To estimate the growth of φ_η on $\mathbb{C}$, note that by (3.2),

$$|\varphi_\eta(z)| \le \max\{|\varphi(z)|, |\varphi(\bar{z})|\} \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C},$$

and from (2.7) with $c_\varphi(\delta)$ in (2.6) it follows for $\delta \in (0, \pi)$ the asymptotic inequality

$$(3.5) \qquad |\varphi_\eta(z)| < \exp\{c_\varphi(\delta)\,|\mathrm{Im}\, z| + |z|\,\varepsilon(|z|)\} \text{ for } z \in \Delta_{2\delta},$$

where $\varepsilon(|z|) \to 0$ as $|z| \to +\infty$, uniformly for $\eta \in (0, \pi)$.

3.2. **Estimation of the number of zeros of φ_η on $I_{p,q} \subset \mathbb{R}_+$.** Apply now Lemma 3.1 to the real analytic function $\psi := \varphi_\eta \mid \mathbb{R}$ in (3.3) on any interval $I_{p,q}$ with $p, q \in \mathbb{N}_0$, noting that the quantity $\mathbf{w}_\psi(I_{p,q})$ for the function (3.3) is equal by (3.1) to the number of the *sign changes* $\mathbf{s}_f(\eta, I_{p,q})$ in the finite sequence $\{\mathrm{Re}(f_n e^{i\eta})\}$ for $n \in I_{p,q} \cap \mathbb{N}_0$ with any fixed $\eta \in (0, \pi)$, where $\{f_n\}_0^\infty$ are the coefficients of the element f in (1.2). Then for the number $\mathbf{n}_{\varphi_\eta}(I_{p,q})$ of zeros of φ_η on $I_{p,q}$, it follows with $|I_{p,q}| = q - p$ the inequality:

$$(3.6) \qquad \mathbf{n}_{\varphi_\eta}(I_{p,q}) \ge |I_{p,q}| - \mathbf{s}_f(\eta, I_{p,q}) \quad \text{for} \quad \eta \in (0, \pi).$$

To use this estimate, we need some additional information on the character of dependence of $\mathbf{s}_f(\eta, I_{p,q})$ on the parameter $\eta \in (0, \pi)$. Consider for this with the coefficients $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ of (1.2) also the subsequence $\{f_{n_k}\}_{k=0}^\infty$ for $\{n_k\}_{k=0}^\infty = \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{L}_f$ of the *nonzero* coefficients of (1.2) as in (1.2'), with the subsequence $\{\omega_{n_k}\}_{k=0}^\infty$ of their arguments, satisfying the condition (1.5'). Then, we have

$$(3.7) \qquad \mathbf{s}_\eta(f, I_{p,q}) = \sum_{n_k \in (p,q]} \mathbf{s}_f(\eta, I_{n_k}) \quad \text{for} \quad \eta \in (0, \pi),$$

where $I_{n_k} = [n_{k-1}, n_k]$ for $k \in \mathbb{N}$, and setting

$$(3.8) \qquad e_{n_k} = \{\eta \in (0, \pi) : \mathbf{s}_f(\eta, I_{n_k}) = 1\},$$

with $\mathbf{s}_f(\eta, I_{n_k}) = 0$ for $\eta \in (0, \pi) \setminus e_{n_k}$, we have by (3.4) that $\eta \in e_{n_k} \subset (0, \pi)$ if and only if

$$(3.9) \qquad \cos(\omega_{n_{k-1}} + \eta)\cos(\omega_{n_k} + \eta) < 0.$$

2°. Our next aim is *to calculate* the length $|e_{n_k}|$ of the set e_{n_k} in (3.8). Note for this that by (3.9), the condition $\Delta\omega_{n_k} = 0$ (that is, $\omega_{n_k} = \omega_{n_{k-1}}$) implies $e_{n_k} = \varnothing$ with $|e_{n_k}| = 0$. Let us show that conversely the condition $\Delta\omega_{n_k} \ne 0$ implies that $|e_{n_k}| = |\Delta\omega_{n_k}| \in (0, \pi]$.

To this end, first note that if $\Delta\omega_{n_k} = \pi$, that is, $\omega_{n_k} = \omega_{n_{k-1}} + \pi$, then (3.9) is equivalent to the condition $\cos^2(\omega_{n_k} + \eta) > 0$, so that either $e_{n_k} = (0, \pi)$, or $e_{n_k} = (0, \pi)\setminus\{\eta_0\}$ for some $\eta_0 \in (0, \pi)$ with $\cos(\omega_{n_k} + \eta_0) = 0$, implying $|e_{n_k}| = \pi = \Delta\omega_{n_k}$ in both cases.

Consider now the case $\Delta\omega_{n_k} \neq 0$ with $\Delta\omega_{n_k} \neq \pi$, that is, if $|\Delta\omega_{n_k}| \in (0, \pi)$ by (1.5), and let us see that then always we have $|e_{n_k}| = |\Delta\omega_{n_k}|$. Setting for this $\omega'_{n_k} = \min\{\omega_{n_{k-1}}, \omega_{n_k}\}$ and $\omega''_{n_k} = \max\{\omega_{n_{k-1}}, \omega_{n_k}\}$, consider the open interval $(\omega'_{n_k}, \omega''_{n_k})$ with $|\Delta\omega_{n_k}| = \omega''_{n_k} - \omega'_{n_k} \in (0, \pi)$. Denote by X the set of zeros of cosine function, that is, $X = \{x_m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ with $x_m = \pi/2 + \pi m$ and $m \in \mathbb{Z}$.

Remark 3.1. *Let $|\Delta\omega_{n_k}| \in (0, \pi)$. The condition (3.9) will be satisfied for some $\eta \in (0, \pi)$ if and only if there is (a unique) $x_p \in X$ for some $p \in \mathbb{Z}$, satisfying $x_p \in I_\eta^o := (\omega'_{n_k} + \eta, \omega''_{n_k} + \eta)$ with $\left|I_\eta^o\right| = |\Delta\omega_{n_k}| < \pi$.*

The existence of x_p and its uniqueness follows from (3.9) by the mean value property of $\cos x$ for $x \in I_\eta^o$ and by condition $\left|I_\eta^o\right| < \pi$. Conversely, for any such $x_p \in X \cap I_\eta^o$ with $\left|I_\eta^o\right| < \pi$ the condition (3.9) will be satisfied.

3". Now to calculate $|e_{n_k}|$ in case $|\Delta\omega_{n_k}| \in (0, \pi)$, there are two alternative cases: a) $(\omega'_{n_k}, \omega''_{n_k}) \cap X \neq \varnothing$ and b) $(\omega'_{n_k}, \omega''_{n_k}) \cap X = \varnothing$. For both cases there is $x_m \in X$ with $m \in \mathbb{Z}$, such that the following inequalities are satisfied:

$$x_{m-1} \leq \omega'_{n_k} < x_m < \omega''_{n_k} < x_{m+1} \tag{3.10}$$

in the case a), and

$$x_{m-1} \leq \omega'_{n_k} < \omega''_{n_k} \leq x_m. \tag{3.11}$$

in the case b).

By Remark 3.1, the condition (3.9) will be satisfied in both cases a) and b) for some $\eta \in (0, \pi)$ if there is a unique $x_p \in I_\eta^o$, satisfying the inequality:

$$x_{p-1} < \omega'_{n_k} + \eta < x_p < \omega''_{n_k} + \eta < x_{p+1}. \tag{3.12}$$

Namely, (3.12) will be satisfied in the case a) with (3.10) if and only if

$$\eta \in \begin{cases} e'_{n_k} = (0, x_m - \omega'_{n_k}) \text{ for } p = m, \\ e''_{n_k} = (x_{m+1} - \omega''_{n_k}, \pi) \text{ for } p = m + 1, \end{cases}$$

so that $e_{n_k} = e'_{n_k} \cup e''_{n_k}$ with $e'_{n_k} \cap e''_{n_k} = \varnothing$ and $\left|e'_{n_k}\right| = x_m - \omega'_{n_k}$, $\left|e''_{n_k}\right| = \omega''_{n_k} - x_m$, implying $|e_{n_k}| = |\Delta\omega_{n_k}|$. In the case b) with (3.11), the inequality (3.12) will be satisfied for $p = m$ and $\eta \in e_{n_k} := (x_m - \omega''_{n_k}, x_m - \omega'_{n_k})$ with $|e_{n_k}| = |\Delta\omega_{n_k}|$.

Conclusion 3.1. *The equivalence of (3.8) and (3.9), and the above cases a) and b) imply that always $|e_{n_k}| = |\Delta\omega_{n_k}|$, so that $e_{n_k} \neq \varnothing \Leftrightarrow |\Delta\omega_{n_k}| \in (0, \pi]$ and $e_{n_k} = \varnothing \Leftrightarrow \Delta\omega_{n_k} = 0$ by openness of e_{n_k}.*

Using now (3.7)-(3.9) and Conclusion 3.1, one can calculate for an interval $I_{p,q}$ with $p, q \in \mathbb{N}_0$ the integral

$$\mathfrak{I}_f(I_{p,q}) := \int_0^{\pi} \mathfrak{s}_f(\eta, I_{p,q})d\eta - \sum_{n_k \in (p,q]} \int_{e_{n_k}} \mathfrak{s}_f(\eta, I_{n_k})d\eta$$

so that

$$\mathfrak{I}_f(I_{p,q}) = \sum_{n_k \in (p,q]} |e_{n_k}| = \sum_{n_k \in (p,q]} |\Delta\omega_{n_k}|. \tag{3.13}$$

Then, by (1.10) it follows that

$$V_f(I_{p,q}) := \sum_{n \in (p,q]} |\Delta\omega_n| = \sum_{n_k \in (p,q]} |\Delta\omega_{n_k}| = \mathfrak{I}_f(I_{p,q}). \tag{3.14}$$

Finally, integrating the inequality (3.6) by $\eta \in (0, \pi)$ and taking into account (3.7) with (3.13)-(3.14), we obtain the inequality:

$$\int_0^{\pi} \mathbf{n}_{\varphi_\eta}(I_{p,q})d\eta \geq \pi[|I_{p,q}| - V_f(I_{p,q})]. \tag{3.15}$$

Corollary 3.1. *It follows from (3.15) that for any $I_{a,b} \subset \mathbb{R}_+$ with $a \in \mathbb{N}$ or $b \in \mathbb{N}$ the following inequality is satisfied:*

$$\int_0^{\pi} \mathbf{n}_{\varphi_\eta}(I_{a,b})d\eta \geq \max\{0, [\pi(|I_{a,b}| - 1) - V_f(I_{a,b})]\}, \tag{3.16}$$

where $V_f(I_{a,b})$ is the variation on $I_{a,b}$ of the arguments $\{\omega_n\}_0^\infty$ of coefficients $\{f_n\}_0^\infty$ of (1.2), defined in (1.11)-(1.12).

Actually, if $|I_{a,b}| > 1$ with $a \in \mathbb{N}$ or $b \in \mathbb{N}$, then there is $I_{p,q} \subset I_{a,b}$ with $p, q \in \mathbb{N}_0$ and $p < q$, so that $V_f(I_{p,q}) \leq V_f(I_{a,b})$ and $|I_{p,q}| \geq |I_{a,b}| - 1 \geq 0$.

Remark 3.2. *Applying Corollary 2 for the normalized element (1.6) with coefficients $\{f_n^*\}_0^\infty$ in (1.7) and their arguments $\{\omega_n^*\}_0^\infty$, defined in (1.7)-(1.9), then using the function φ_η from (3.2) for corresponding $\varphi \in \mathcal{E}_0$ in Criterion 2.2, in Corollary 3.1 instead of (3.16), we obtain the inequality:*

$$\mathbf{n}_{\varphi_\eta}(I_{a,b})d\eta \geq \max\{0, [\pi(|I_{a,b}| - 1) - V_f^*(I_{a,b})]\}, \tag{3.16'}$$

where $V_f^*(I_{a,b})$ is the variation on $I_{a,b}$ of the arguments $\{\omega_n^*\}_0^\infty$ in (1.6)-(1.9) (see Definition 1).

3.3. **An auxiliary Blaschke product. 1°**. Consider the closed disk $\overline{D}_{r,1}$ of the radius $r \in (0,1)$ and center 1 with the diameter $I(r) := I_{1-r,1+r}$. Below are presented some notation, related with $\overline{D}_{r,1}$.

We first introduce the family of closed subintervals $\{I_\tau^r\}$ of $I(r)$ for $\tau \in I^o(r)\backslash\{1\}$, by setting

$$I_\tau^r = \begin{cases} I_{\tau,1+r} & \text{if } \tau < 1, \\ I_{1-r,\tau} & \text{if } \tau > 1, \end{cases} \tag{3.17}$$

so that $1 \in (I^r_\tau)^o$ and $|I^r_\tau| = r + |1-\tau|$. Next, for any $\tau \in I^o(r)\backslash\{1\}$ denote by $\mathbb{D}^r_\tau$ the closed disk with diameter I^r_τ:

$$\mathbb{D}^r_\tau := \overline{D}_{r_\tau, c_\tau} \subset \overline{D}_{r,1}, \tag{3.18}$$

where the radius $r_\tau < r$ and the center $c_\tau \in (I^r_\tau)^o\backslash\{1\}$ of $\mathbb{D}^r_\tau$ can be presented with $s_\tau = sgn(1-\tau)$ by formulas:

$$r_\tau := (r + |1-\tau|)/2 \text{ and } c_\tau := 1 + s_\tau(r - r_\tau). \tag{3.19}$$

Also, let g_τ for $\tau \in (I^r_\tau)^o\backslash\{1\}$ be the *Green's function* of $\mathbb{D}_\tau$ in (3.18)-(3.19):

$$g_\tau(z,\zeta) = -\log|b_\tau(z,\zeta)| \text{ for } z,\zeta \in \mathbb{D}_\tau,\ z \neq \zeta, \tag{3.20}$$

where $b_\tau(z,\zeta)$ is the following *Blaschke factor* for $\mathbb{D}_\tau$:

$$b_\tau(z,\zeta) := r_\tau(z-\zeta)/l_\tau(z,\bar{\zeta}) \tag{3.21}$$

with $l_\tau(z,\zeta) = r_\tau^2 - (\zeta - c_\tau)(z - c_\tau)$, satisfying

$$|b_\tau(z,\zeta)| \equiv 1 \text{ for } z \in \partial\mathbb{D}^r_\tau \text{ and } \zeta \in (\mathbb{D}^r_\tau)^o. \tag{3.22}$$

2°. We use mainly the special case $g_\tau(z) := g_\tau(z,1)$ of g_τ for $z \in \mathbb{D}_\tau\backslash\{1\}$:

$$g_\tau(z) = \log\frac{|l_\tau(z)|}{r_\tau|z-1|} \text{ for } z \in \mathbb{D}^r_\tau\backslash\{1\}, \tag{3.23}$$

where $l_\tau(z) := l_\tau(z,1)$ is a non-constant linear function of z, with real valued restriction $l_\tau(t)$ for $t \in I^r_\tau$:

$$l_\tau(t) = r_\tau^2 + (c_\tau - 1)(t - c_\tau) = l_\tau(1) + l'_\tau(1)(t-1), \tag{3.24}$$

increasing on I^r_τ for $\tau < 1$ and *decreasing* for $\tau > 1$ by (3.19), since $l'_\tau(t) = c_\tau - 1$. Thus, we have

$$l_\tau(\tau) \leq l_\tau(t) \leq l_\tau(\nu_\tau) \text{ for } t \in I^r_\tau, \tag{3.25}$$

where $\nu_\tau = 1 + rs_\tau$ is the opposite to τ endpoint of I^r_τ. Using (3.18)-(3.19), we find from (3.25)

$$l_\tau(\tau) = r_\tau|1-\tau|,\ l_\tau(\nu_\tau) = rr_\tau,\quad l_\tau(1) = r|1-\tau|,\ |l'_\tau(1)| = r - r_\tau. \tag{3.26}$$

It follows from (3.25)-(3.26) that $l_\tau(t) > 0$ for $t \in I_\tau(r)$. Then from (3.23)-(3.24) we have for $t \in I^r_\tau\backslash\{1\}$ that $p_\tau(t) := (1-t)g'_\tau(t) = l_\tau(1)/l_\tau(t) > 0$, implying $g'_\tau(t) > 0$ for $t < 1$ and $g'_\tau(t) < 0$ for $t > 1$. This with $g_\tau(t) = 0$ for $t = \tau$, $t = \nu_\tau$ gives us after integration by parts the equality

$$\mathfrak{I}_\tau := \int_{I^r_\tau} g_\tau(t)dt = \int_{I^r_\tau} p_\tau(t)dt, \tag{3.27}$$

and setting $k_\tau := l_\tau(1)/|l'_\tau(1)| > 0$, we obtain

$$\mathfrak{I}_\tau = k_\tau s_\tau \int_{I^r_\tau} d\log l_\tau(t) = k_\tau \log\frac{r}{|1-\tau|}. \tag{3.28}$$

Now let I_τ for $\tau \in (I_\tau^r)^o \setminus \{1\}$ be the interval with endpoints τ and 1 independently from r. Then using (3.25)-(3.26), similar to (3.28), we obtain

$$\mathfrak{I}_\tau' := \int_{I_\tau} \mu_\tau(t)dt = k_\tau s_\tau \int_{I_\tau} d\log l_\tau(t) = k_\tau \log \frac{\tau}{r_\tau} < k_\tau. \tag{3.29}$$

3°. The solution of the *Dirichlet problem* for $\mathbb{D}_\tau'$ with boundary data $\varphi \in C(L_\tau)$ for $L_\tau = \partial\mathbb{D}_\tau$ can be presented by the *Poisson integral*:

$$\mathcal{P}_\tau[\phi](z) := (2\pi)^{-1} \int_{L_\tau} \phi(\zeta)\partial_\nu g_\tau(z,\zeta)\,|d\zeta| \quad \text{for} \quad z \in (\mathbb{D}_\tau^r)^o, \tag{3.30}$$

where $\partial_\nu g_\tau$ is the derivative of $g_\tau(\cdot,\zeta)$, given by (3.20)-(3.21), in direction of the *inner* normal vector ν on L_τ.

Next, if u is a *subharmonic* function on $\mathbb{D}_\tau^o$ with continuous extension on L_τ, then by the maximum principle, we have

$$u(z) \leq \mathcal{P}_\tau[u](z) \text{ for } z \in \mathbb{D}_\tau^r, \tag{3.31}$$

with equality sign for all $z \in \mathbb{D}_\tau^o$, if u is *harmonic* on $\mathbb{D}_\tau^o$.

Example 3.1. *Consider the subharmonic on $\mathbb{D}_\tau$ function u_0 :*

$$u_0(z) = |\mathrm{Im}\, z| \quad \textit{for} \quad z \in \mathbb{D}_\tau. \tag{3.32}$$

Then the Poisson integral (3.30) with boundary data $\phi = u_0 \mid L_\tau$ satisfies for $z = 1$ the relation:

$$\mathcal{P}_\tau[u_0](1) = \pi^{-1}\mathfrak{I}_\tau. \tag{3.33}$$

where $\mathfrak{I}_\tau$ is as in (3.27)-(3.28).

Actually, the function $u_0 \in C(\mathbb{D}_\tau)$ in (3.32) is *harmonic* in both half-disks:

$$\mathbb{D}_\tau^{\pm} = \{z \in \mathbb{D}_\tau' : \pm \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$$

and $u_0 = 0$ with $\partial_\nu u_0 = 1$ on $I_\tau(r)$ (from both sides of I_τ^r). Also, by (3.23), the function $z \to g_\tau(z)$ is harmonic on $\mathbb{D}_\tau'$, except the integrable singularity at $z = 1 \in \mathbb{I}_\tau$, so that

$$\iint_{\mathbb{D}_\tau^+ \cup \mathbb{D}_\tau^-} [u_0\Delta g_\tau - g_\tau \Delta u_0]dV = 0. \tag{3.34}$$

Apply now to the pair of functions u_0, g_τ and to both closed half-disks $\mathbb{D}_\tau^{\pm}$ the Green's identity (see [19]) with Laplace operator Δ, by noting that $g_\tau = 0$ on $\partial\mathbb{D}_\tau$. Since $\partial\mathbb{D}_\tau^{\pm} = I_\tau^r \cup L_\tau^{\pm}$ with $L_\tau^{\pm} = L_\tau \cap \mathbb{D}_\tau^{\pm}$, by (3.34), (3.27) and (3.30) for $\phi = u_0 \mid L_\tau$ with $z = 1$, we have

$$0 = \int_{L_\tau} u_0(\zeta)\partial_\nu g_\tau(1,\zeta)\,|d\zeta| - 2\int_{I_\tau^r} g_\tau(t)dt = 2\pi\mathcal{P}_\tau[u_0](1) - 2\mathfrak{I}_\tau.$$

implying (3.33).

4°. Consider the *Blaschke product* with the finite number of zeros $\{z_j\}_1^m \subset \mathbb{D}_r^o$:

$$B_r(z) = \prod_{j=1}^{m} b_r(z, z_j) \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{D}_r', \tag{3.35}$$

where $b_r(z, \zeta)$ is the Blaschke factor for $\mathbb{D}_r'$, given by (3.21) and satisfying (3.22), so that

$$|B_r(z)| \equiv 1 \text{ for } z \in L_r. \tag{3.36}$$

In terms of the Green's function $g_r(z, \zeta)$ (see (3.20)-(3.21)), it follows from (3.36) that

$$-\log|B_r(z)| = \sum_{j=1}^{m} g_r(z, z_j) \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{D}_r',$$

and, in particular,

$$-\log|B_r(1)| = \sum_{j=1}^{m} g_r(z_j). \tag{3.37}$$

4. Power series: localization of singularities

4.1 Application of the auxiliary function φ_η. 1°. We start with the following definition.

Definition 4.1. *Any sequence $Q = \{q_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}_0$ will be called radial for the normalized element f in (1.2) if*

$$\lim_{k\to\infty} |f_{q_k}|^{1/q_k} = 1, \tag{4.1}$$

and the (non-empty) set of all such sequences Q will be denoted by $\mathcal{R}_f$ (see [7], Definition 3).

Obviously, any radial sequence $Q \in \mathcal{R}_f$ will be simultaneously a radial sequence also for the element f^* in (1.6)-(1.7), since $|f_n^*| = |f_n|$ for $n \in \mathbb{N}_0$.

Consider now the auxiliary function φ_η defined by (3.2). Then by (1.4), (3.3)-(3.4) and (4.1) with any $Q = \{q_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{R}_f$ the following condition is satisfied:

$$q_k^{-1} \log|\varphi_\eta(q_k)| := q_k^{-1} \log|\cos(\omega_{q_k} + \eta)| + \varepsilon_k, \tag{4.2}$$

where $\varepsilon_k \to 0$ as $k \to \infty$.

Returning to the closed disk $\overline{D}_{r,1}$ from Subsection 3.2 with the fixed radius $r \in (0, 1)$ and the diameter $I(r) := [1 - r, 1 + r]$, we will assume further that $r \in (0, r_\delta)$ with $r_\delta = \sin\delta$ for $\delta \in (0, \pi/2)$, implying $\overline{D}_{r,1} \subset \Delta_{2\delta}$. Then it follows for $z \in \overline{D}_{r,1}$ and $k \in \mathbb{N}$ that $q_k z \in \overline{D}_{r_k,c_k} \subset \Delta_{2\delta}$ with $r_k = q_k r$, $c_k = q_k$, that is, $\overline{D}_{r_k,c_k} = q_k \overline{D}_{r,1}$, implying by (3.5) the inequality:

$$(4.3) \qquad q_k^{-1} \log |\varphi_\eta(q_k z)| < c_\varphi(\delta)\, |\operatorname{Im} z| + \varepsilon_k,$$

with $\varepsilon_k \to 0$ as $k \to +\infty$, uniformly for $z \in \overline{D}_{r,1}$ and $\eta \in (0, \pi)$.

Consider the family of closed disks $\mathbb{D}_\tau \subset \overline{D}_{r,1}$ in (3.17)-(3.19) with diameter I_τ^r for $\tau \in (I_\tau^r)^o \backslash \{1\}$. For a fixed $q_k \in Q$ denote by $t_j = t_{j,k}(\tau, \eta)$, $j = 1, 2, ..., m_k$ possible finite number solutions of the equation:

$$(4.4) \qquad \varphi_\eta(q_k t) = 0 \text{ for } t \in I^o(r), \ \eta \in (0, \pi),$$

the zeros of $\varphi_\eta(q_k t)$ on $I^o(r)$, taking also into account their multiplicity. Denote by $B_{\tau,\eta}$ the finite Blaschke product for the closed disk $\mathbb{D}_\tau$ (see (3.35)) with the zeros $t_{j,k} \in (I_\tau^r)^o$, satisfying by (3.36) the condition $|B_{\tau,\eta}(z)| = 1$ for $z \in L_\tau := \partial\mathbb{D}_\tau$. Otherwise we will set $B_{\tau,\eta}(z) \equiv 1$ for $z \in \mathbb{D}_\tau$, if $\varphi_\eta(q_k t)$ has no zeros on $(I_\tau^r)^o$. So that in both cases we have $|B_{\tau,\eta}(z)| = 1$ for $z \in L_\tau$.

Next, for a fixed $k \in \mathbb{N}$, consider the function $\psi_{\tau,\eta} \in H(\mathbb{D}_\tau)$:

$$(4.5) \qquad \psi_{\tau,\eta}(z) := \varphi_\eta(q_k z)/B_{\tau,\eta}(z) \quad \text{for } z \in \mathbb{D}_\tau \subset \overline{D}_{r,1},$$

and introduce the subharmonic function

$$(4.6) \qquad u_\tau(z) := q_k^{-1} \log |\psi_{\tau,\eta}(z)| \quad \text{for } z \in \mathbb{D}_\tau^r,$$

which is continuous on L_τ and, by (4.3) and (4.5)-(4.6), satisfies the inequality

$$(4.7) \qquad u_\tau(\zeta) < c_\varphi(\delta)\, |\operatorname{Im} \zeta| + \varepsilon_k \text{ for } \zeta \in L_\tau.$$

Then from the maximum principle (3.31), applied to u_τ in (4.6) at the point $z = 1$, and from Example 1 with (3.32)-(3.33), it follows that

$$(4.8) \qquad u_\tau(1) \le \mathcal{P}_\tau[u_\tau](1) \le \pi^{-1} c_\varphi(\delta) \mathfrak{I}_\tau + \varepsilon_k,$$

where $\varepsilon_k \to 0$ as $k \to +\infty$. In addition, by (4.4)-(4.5) and (3.37), we have

$$(4.9) \qquad u_\tau(1) = q_k^{-1} \log |\varphi_\eta(q_k)| + \Lambda, \quad \text{with} \quad \Lambda = q_k^{-1} \sum_{t_j \in (I_\tau^r)^o} g_\tau(t_j),$$

setting $\Lambda = 0$, if the equation (4.3) has no zeros on $I^o(r)$.

2°. Next, for any $t \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$, denote by I_t the closed interval of the length $|I_t| = |t-1|$ with the endpoints t and 1. Also, for any $q \in \mathbb{N}$, denote by qI_t the closed interval of the length $q\,|I_t| = q\,|t-1|$ with the endpoints qt and q. In this terms let us present the sum in (4.9) by an integral, if $\Lambda \neq 0$. Then the number $\mathbf{n}_{\varphi_\eta}(q_k I_t)$, the solutions $t_j \in q_k I_t$ of equation (4.4) on I_t according their multiplicity, is a function of $t \in I(r) \backslash \{1\}$, decreasing for $t < 1$ and increasing for $t > 1$. Also, taking into account that, in contrary to $\mathbf{n}_{\varphi_\eta}(q_k I_t)$, the function $g_\tau(t)$ is *increasing* for $t < 1$ and *decreasing* for $t > 1$, and, in addition, is vanishing at the endpoints of I_τ (useful for integration by parts), we obtain for any $\tau \in I^o(r)\setminus\{1\}$:

$$q_k\Lambda = \int_{I_\tau^r} g_\tau(t)\,|d\mathbf{n}_{\varphi_\eta}(q_k I_t)| = \int_{I_\tau^r} \mathbf{n}_{\varphi_\eta}(q_k I_t)\,|g'_\tau(t)|\,dt.$$

Using the notation $p_\tau(t) := (1-t)g'_\tau(t) > 0$ for $t \in I_\tau^r$ with $p_\tau(1) = 1$, we obtain the equality

$$\Lambda = \int_{I_\tau^r} [\mathbf{n}_{\varphi_\eta}(q_k I_t)/(q_k\,|I_t|)]p_\tau(t)dt,$$

which is preserving also in the case $\Lambda = 0$ with $\mathbf{n}_{\varphi_\eta}(q_k I_t) = 0$ for $t \in (I_\tau^r)^o$. This equality together with (3.2), (4.8), (4.9) gives us the asymptotic inequality:

$$\int_{I_\tau^r} [\mathbf{n}_{\varphi_\eta}(q_k I_t)/(q_k\,|I_t|) - \pi^{-1}c_\varphi(\delta)]p_\tau(t)dt \le \varepsilon'_k, \tag{4.10}$$

where $\varepsilon'_k = \varepsilon_k - q_k^{-1}l_k(\eta)$ with $l_k(\eta) = \log|\cos(\omega_{q_k} + \eta)|$ and $\varepsilon_k \to 0$ as $k \to +\infty$. Integrating both sides of (4.11) by $\eta \in (0,\pi)$ and setting

$$\mathfrak{I}_\varphi(q_k I_t) := \int_0^\pi \mathbf{n}_{\varphi_\eta}(q_k I_t)d\eta, \tag{4.11}$$

we come from (4.11) with $\tau \in (I_\tau^r)^o\setminus\{1\}$ to the inequality

$$\int_{I_\tau^r} [\mathfrak{I}_\varphi(q_k I_t)/(q_k\,|I_t|) - c_\varphi(\delta)]\,p_\tau(t)dt \le \varepsilon''_k, \tag{4.12}$$

where $\varepsilon''_k := \pi\varepsilon_k - q_k^{-1}\mathfrak{I}(\omega_{q_k})$ and $\mathfrak{I}(\omega_{q_k}) = \int_0^\pi l_k(\eta)d\eta$. Now since $\mathfrak{I}(\omega_{q_k}) = \mathfrak{I}(0)$, by π - periodicity of the function $\eta \to l_k(\eta)$, it follows that $\varepsilon''_k \to 0$ as $k \to \infty$.

4.2. **Necessary metric conditions on regularity arcs of (1.2).** After the above preparation, we can formulate the main results of this paper, using some additional notation. For a *radial* sequence $Q = \{q_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{R}_f$ of the element f in (1.2) consider the *variation* $V_f(q_k I_t)$ *of the arguments* $\{\omega_n\}_0^\infty$ of the coefficients $\{f_n\}_0^\infty$ of (1.2) on the interval $q_k I_t$ for $t \in \mathbb{R}_+\setminus\{1\}$, so that $V_f(q_k I_t) = 0$, if $q_k\,|I_t| < 1$. Now for $r \in (0, r_\delta)$ we set:

$$v_f(t, Q) = \limsup_{k\to\infty} \nu_f(q_k I_t) \in [0,\pi] \text{ for } t \in I(r)\setminus\{1\}, \tag{4.13}$$

where $\nu_f(q_k I_t) = V_f(q_k I_t)/(q_k\,|I_t|)$ is the *mean variation* of the arguments $\{\omega_n\}_0^\infty$ on the interval $q_k I_t$ (see (1.13). Next, denote

$$v_f^-(r, Q) = \sup_{t\in[1-r,1]} v_f(t, Q) \text{ and } v_f^-(r, Q) = \sup_{t\in[1,1+r]} v_f(t, Q), \tag{4.14}$$

so that both $v_f^\pm(r, Q)$ are *non-decreasing* functions of r, having the limits as $r \to 0$:

$$v_f^\pm(Q) = \lim_{r\to 0} v_f^\pm(r, Q) \in [0,\pi]. \tag{4.15}$$

Finally, introduce the quantity:

$$v_f(Q) := \min\{v_f^-(Q), v_f^+(Q)\} \in [0,\pi], \tag{4.16}$$

the *mean density* the variation of $\{\Delta\omega_n\}_0^\infty$ along Q.

Analogously, using Definition 2.2 and replacing in (4.13)-(4.15) the element f by the normalized element $z \to f(-z) = f^*(z)$ in (1.6) with coefficient arguments $\{\omega_n^*\}_0^\infty$ in (1.7)-(1.9), we obtain for the element (1.2) also the quantity:

$$v_f^*(Q) := \min\{v_{f^*}^-(Q), v_{f^*}^+(Q)\} \in [0,\pi], \tag{4.17}$$

the mean density the variation of the arguments $\{\Delta\omega_n^*\}_0^\infty$ along Q

Now we are in position to state the main results of this paper.

Theorem 4.1. *Let for $\alpha \in (0,2\pi]$ and $\mu = e^{i\lambda}$ with $\lambda \in (-\pi,\pi)$ the open arc $\gamma_{\alpha,\mu}^o \subset \partial D_1$ or the symmetric open arc $\gamma_{\alpha,-\mu}^o \subset \partial D_1$ be an arc of regularity for the element f in (1.2). Then for any radial sequence $Q \in \mathcal{R}_f$ the following inequality is satisfied:*

$$\alpha/2 \le \begin{cases} v_f(Q) - |\lambda| & \text{for } \gamma_{\alpha,\mu}^o, \\ v_f^*(Q) + |\lambda| & \text{for } \gamma_{\alpha,-\mu}^o. \end{cases} \tag{4.18}$$

Proof. From Corollary 2.2 for the interval $I_{a,b} = q_k I_t$ with $t \in I(r)\backslash\{1\}$ we have the next estimate from below for the integral $\mathfrak{I}_\varphi(q_k I_t)$, defined in (4.11):

$$\mathfrak{I}_\varphi(q_k I_t) \ge \max\{0, [\pi(q_k |I_t| - 1) - V_f(q_k I_t)]\}. \tag{4.19}$$

For $t \in I(r)\backslash\{1\}$, define the function

$$\sigma_k(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } |I_t| \le q_k^{1/2}, \\ 1 & \text{if } |I_t| > q_k^{1/2}, \end{cases} \tag{4.20}$$

satisfying the condition: $\sigma_k(t) \to 1$ as $k \to \infty$ for $t \in I(r)\backslash\{1\}$, where $r \in (0, r_\delta)$ for $r_\delta = \sin\delta$ with $\delta \in (0,\pi/2)$. Then from (4.12) and (1.19)-(4.20) for any $\tau \in I^o(r)\backslash\{1\}$ we obtain the inequality:

$$[\pi - c_\varphi(\delta)] \int_{I_\tau} \sigma_k(t) p_\tau(t)dt \le \int_{I} [\nu_f(q_k I_t) + \pi q_k^{1/2}] p_\tau(t)dt + \varepsilon_k'', \tag{4.21}$$

where $\varepsilon_k'' \to 0$ as $k \to \infty$. Applying to (4.21) the Fatou's lemma (see [20]), we come with $k \to \infty$ to the inequality:

$$[\pi - c_\varphi(\delta)]\mathfrak{I}_\tau \le \int_{I_\tau} v_f(t, Q) p_\tau(t)dt, \tag{4.22}$$

where

$$\mathfrak{I}_\tau = \int_I p_\tau(t)dt.$$

Then from (4.22) and (4.14), for $s_\tau = sgn(1-\tau)$ with $\tau \in I^o(r)\backslash\{1\}$, it follows that $[\pi - c_\varphi(\delta)]\mathfrak{I}_\tau \le \mathfrak{I}_\tau' + v_f^{s_\tau}(r, Q)\mathfrak{I}_\tau$, where $\mathfrak{I}_\tau'$ is the next integral on the interval I_τ with the endpoints τ and 1 :

$$\mathfrak{I}_\tau' = \int_{I_\tau} p_\tau(t)dt.$$

Using the relations for $\mathfrak{J}_\tau$ and $\mathfrak{J}'_\tau$ from (3.28)-(3.29), we obtain $[\pi - c_\varphi(\delta)]l_r(\tau) \leq 1 + v_f^-(r, Q)l_r(\tau)$, where

$$l_r(\tau) := \log \frac{r}{|1-\tau|}.$$

Dividing both sides by $l_r(\tau)$ and letting $\tau \to 1$ with $\tau < 1$ and $\tau > 1$, in view of (4.13)-(4.14), we obtain

$$\pi - c_\varphi(\delta) \leq \min\{v_f^-(r, Q), v_f^+(r, Q)\} \quad \text{for } r \in (0,1). \tag{4.23}$$

Now letting here $r \to 0$, and using (4.15)-(4.16), we obtain $\pi - c_\varphi(\delta) \leq v_f(Q)$. Finally, by (2.8), $c_\varphi(\delta) \to m_\varphi$ as $\delta \to 0$, implying

$$\pi \leq v_f(Q) + m_\varphi. \tag{4.24}$$

Then by Criterion 2, $m_\varphi \leq \pi - \alpha/2 + |\lambda|$, which together with (4.24) implies (4.18) for $\gamma^o_{\alpha,\mu}$. Applying the above arguments for the normalized element $z \to f^*(z) = f(-z)$ in (1.6) with coefficients $\{f^*_n\}_0^\infty$ in (1.7), we obtain (4.19) for $\gamma^o_{\alpha,-\mu}$. □

4.3. Some consequences from Theorem 4.1. From the *necessary* condition (4.18) of Theorem 4.1 on regularity of the element (1.2) on the open arcs of ∂D_1 we infer the following result.

Corollary 4.1. *For any $\alpha \in (0, 2\pi]$ and $\mu = e^{i\lambda}$ with $\lambda \in (-\pi, \pi)$ the element f in (1.2) has a singular point on the open arc $\gamma^o_{\alpha,\mu} \subset \partial D_1$ or on the symmetric open arc $\gamma^o_{\alpha,-\mu} \subset \partial D_1$, if for some radial sequence $Q \in \mathcal{R}_f$, or correspondingly for $Q' \in \mathcal{R}_f$, the following inequality is satisfied:*

$$\alpha/2 > \begin{cases} v_f(Q) + |\lambda| & \textit{for } \gamma^o_{\alpha,\mu}, \\ v_f^*(Q') + |\lambda| & \textit{for } \gamma^o_{\alpha,-\mu}. \end{cases} \tag{4.25}$$

Concerning the singularities of the element (1.2) on *closed* arcs of ∂D_1, from Corollary 4.1 we obtain the next result.

Corollary 4.2. *For any $\beta \in [0, 2\pi)$ and $\mu = e^{i\lambda}$ with $\lambda \in (-\pi, \pi)$ the element f in (1.2) has a singular point on the arc $\gamma_{\beta,\mu} \subset \partial D_1$ or on the symmetric arc $\gamma_{\beta,-\mu} \subset \partial D_1$, if for some radial sequence $Q \in \mathcal{R}_f$, or correspondingly for $Q' \in \mathcal{R}_f$, the following inequality is satisfied:*

$$\beta/2 > \begin{cases} v_f(Q) + |\lambda| & \textit{for } \gamma_{\beta,\mu}, \\ v_f^*(Q') + |\lambda| & \textit{for } \gamma_{\beta,-\mu}. \end{cases} \tag{4.26}$$

Actually, if $\gamma_{\beta,\mu}$ contains only *regular* points of f, then the *open* arc $\gamma^o_{\alpha,\mu}$ for $\alpha = \beta + \varepsilon$ with sufficiently small $\varepsilon > 0$ will be an arc of regularity for f, which will contradict Corollary 4.1 for $\gamma^o_{\alpha,\mu}$. Of course, Corollary 4.2 is satisfied also for $\beta = 2\pi$, since the normalized element (1.2) always has a singular point on ∂D_1.

Remark 4.1. *If the inequalities in (4.25) are satisfied simultaneously for $\gamma^o_{\alpha,\mu}$ and $\gamma^o_{\alpha,-\mu}$, then the singular points on these arcs will be different for $\alpha \in (0,\pi)$, since $\gamma^o_{\alpha,\mu} \cap \gamma_{\alpha,-\mu} = \varnothing$. A similar remark with $\beta \in [0,\pi)$ is true also for the inequalities in (4.26) of Corollary 4.2.*

The next corollary contains some more concrete cases of the Corollaries 3-4.

Corollary 4.3. *For the element f in (1.2) with a radial sequence $Q \in \mathcal{R}_f$ the following assertions hold:*

1) If $\lambda = 0$ and $v_f(Q) < \pi$ for some $Q \in \mathcal{R}_f$, then for $\beta = 2v_f(Q) \in [0,2\pi)$, it follows from Corollary 4.2 that f has a singular point on the arc $\gamma_{\beta,1}$, implying for $v_f(Q) = 0$ with $\beta = 0$, that the point 1 is a singular point of f. If $\lambda = 0$ and $v^*_f(Q') < \pi$ for some $Q' \in \mathcal{R}_f$, then f has a singular point on the arc $\gamma_{\beta,-1}$ with $\beta = 2v^*_f(Q')$ and center -1, implying for $v^*_f(Q') = 0$, that the point -1 is a singular point of f.

2) Let $\mu = e^{i\lambda}$ with $\lambda \in (-\pi,\pi)\backslash\{0\}$, and $2|\lambda| < \alpha \leq 2\pi$. Then for $\delta = \alpha - 2|\lambda|$, from Corollary 4.1 with (4.25) it follows that $\gamma^o_{\delta,1} \subset \gamma^o_{\alpha,\mu}$ and $\gamma^o_{\delta,-1} \subset \gamma^o_{\alpha,-\mu}$ implying by 1) for $\gamma^o_{\delta,\pm 1}$, that: a) the point 1 is a singular point of $\gamma^o_{\alpha,\mu}$ if $v_f(Q) = 0$; b) the point -1 is a singular point of $\gamma^o_{\alpha,-\mu}$ if $v^*_f(Q') = 0$.

3) Let for element f in (1.2) with radial sequences $Q \in \mathcal{R}_f$ and $Q' \in \mathcal{R}_f$, and for $\alpha \in (0,2\pi]$ and $\mu = e^{i\lambda}$ with $\lambda \in (-\pi,\pi)$ the following inequalities be satisfied:

$$\alpha/2 > v_f(Q) + |\lambda| \ \text{ and } \ \beta/2 \geq v^*_f(Q') + |\lambda|, \tag{4.27}$$

where $\beta = 2\pi - \alpha \in [0,2\pi)$. Then by Corollaries 4.1-4.2 and (4.27), the element f has (different) singular points on both complementary arcs $\gamma^o_{\alpha,\mu}$ and $\gamma_{\beta,-\mu}$ on ∂D_1 with $\gamma_{\beta,-\mu} = \partial D_1 \backslash \gamma^o_{\alpha,\mu}$.

Note that in Theorem 1.1 and in Corollaries 4.1-4.2 instead of $v_f(Q)$ one can use also some other quantities of the element f in (1.2), related with any radial sequence $Q = \{q_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{R}_f$, using in (4.13)-(4.17) directly the quantities $\{\Delta\omega_n\}_0^\infty$ and $\{\Delta\omega^*_n\}_0^\infty$, defined in (1.4)-(1.5) and (1.7)-(1.9).

For $r \in (0, r_\delta)$ and $q_k \in Q$ we set:

$$w^-_f(r,q_k) = \max_{n \in q_k I^-_r} |\Delta\omega_n| \ \text{ and } \ w^+_f(r,q_k) = \max_{n \in q_k I^+_r} |\Delta\omega_n|,$$

where $I^-_r = [1-r,1]$ and $I^+_r = [1,1+r]$. Then for $r \in (0,r_\delta)$ the functions $w^\pm_f(r,Q) = \limsup_{k\to\infty} w^\pm_f(r,q_k) \in [0,\pi]$ are both monotonic having the limits $\lim_{r\to 0} w^\pm_f(r,Q) = w^\pm_f(Q) \in [0,\pi]$, and we define

$$w_f(Q) := \min\{w^-_f(Q), w^+_f(Q)\}. \tag{4.28}$$

Replacing in this definition f in (1.2) by the related with f element f^* in (1.6)-(1.7) with the coefficient arguments $\{\omega_n^*\}_0^\infty$, we come for f to the second quantity

$$w_f^*(Q) := w_{f^*}(Q) = \min\{w_{f^*}^-(Q), w_{f^*}^+(Q)\} \in [0, \pi]. \tag{4.29}$$

The comparison of (4.28)-(4.29) and (4.16)-(4.17) shows that

$$0 \le v_f(Q) \le w_f(Q) \le \pi \quad \text{and} \quad 0 \le v_f^*(Q) \le w_f^*(Q) \le \pi.$$

Thus, replacing in Theorem 1 and in Corollaries 3-4 the quantity $v_f(Q)$ by $w_f(Q)$ and correspondingly $v_f^*(Q)$ by $w_f^*(Q)$, we will obtain some new, and perhaps intuitively more clear corollaries, including the influence of the gaps in coefficients of the element f, taking into account that if $f_n = 0$ for some $n \in \mathbb{N}_0$, then also $\Delta\omega_n = 0$ or $\Delta\omega_n^* = 0$. The converse is not true, since if $f_n/f_{n-1} > 0$, then again $\Delta\omega_n = 0$ by (1.4)-(1.5), but $f_n^*/f_{n-1}^* < 0$ with $\Delta\omega_n^* = \pi$ by (1.8).

Assuming now that the condition $\lim_{n\to\infty} |\Delta\omega_n| = 0$ or $\lim_{n\to\infty} |\Delta\omega_n^*| = 0$ is satisfied, it will follow from (4.28)-(4.29) that correspondingly $w_f(Q) = 0$ or $w_f^*(Q) = 0$ for *arbitrary* radial subsequence $Q \in \mathcal{R}_f$. This will imply in Corollary 4.3, item 1) the singularity of the points 1 or correspondingly -1 for any $Q \in \mathcal{R}$

Список литературы

[1] L. Bieberbach, Analytische Forsetzung, Springer, Berlin (1955).

[2] E. Fabry, "Sur les séries de Taylor qui ont une infinité points singulières", Acta Math., **22**, 65 – 87 (1898).

[3] G. Pólya, "Untersuchungen über Lücken und Singullaritaten von Potenzreihen", Math. Zeitschrift, **29**, 549 – 640 (1929).

[4] P. Koosis, The Logarithmic Integral, vol. I, Cambridge studies in advanced mathematics 12, Cambridge Univ. Press, NY (1988)

[5] P. Koosis, The Logarithmic Integral, vol. II, Cambridge studies in advanced mathematics 21, Cambridge Univ. Press, NY (1992).

[6] V. A. Martirosian, "The converse of the Fabry-Polya theorem on singularities of lacunary power series", Analysis, **25**, 123 – 130 (2005).

[7] N. Arakelian, W. Luh, J. Muller, "On the localization of singularities of Lacunar power series", Complex Variables and Elliptic Equations, **52**, no. 7, 561 – 573 (2007).

[8] E. Fabry, "Sur les points singulières d'une fonction donée par son developpement de Taylor", Ann. ec. norm. sup. Paris (3) **13**, 367 – 399 (1896).

[9] N. U. Arakelian and V. A. Martirosian, "The localization of singularities of power series on the boundary of the circle of convergence", Izvestiya AN Arm. SSR, ser. Math., **22**, no. 3, 3 – 21 (1987) [in Russian]; Engl. transl.: Soviet Journal of Contemp. Math. Analysis, **22**, no. 3 (1987).

[10] N. U. Arakelian and V. A. Martirosian, "The localization of singularities of power series on the boundary of the circle of convergence II", Izv. AN Arm. SSR, ser. Math., **23**, no. 3, 17 – 35 (1988) [in Russian]; Engl. transl.: Soviet Journal of Contemp. Math. Anal., **23**, no.3 (1988).

[11] E. Phragmén and E. Lindelof, "Sur une extension d'un princip classique de l'analyse et sur quelques propriètes des fonctions monogénes dans le voisinage d'un point singulier", Acta Math. **31**, 381 – 406 (1908).

[12] R. P. Boas, Entire Functions, Academic Press, New York, San Francisco, London (1954).

[13] B. Ya. Levin, Distribution of Zeros of Entire Functions, GITTL, Moscow (1956); Engl. transl. AMS, Providence, R.I. (1964)

[14] P. Dienes, The Taylor Series: An Introduction to the Theory of Functions of Complex Variable, Clarendon press, Oxford (1931); reprint: Dover, New York (1957)
[15] N. U. Arakelian, "On efficient analytic continuation of power series", Math. USSR Sbornik, **52**, no. 1, 21 – 39 (1985).
[16] N. U. Arakelian, "Approximation by entire functions and analytic continuation", Progress in Approximation theory, Tampa, FL (1990), Computational Mathem. Series, 19, Springer, New York, 295 – 313 (1992).
[17] N. U. Arakelian, "Efficient analytic continuation of power series with vector-valued coefficients", Journ. Contemp. Math. Analysis, **30**, no. 4, 25 – 48 (1995)
[18] N. U. Arakelian and G. Schmieder, "Analytic continuation of power series on planar Riemann surfaces", Journ. Contemp. Math. Analysis **30**, no. 4, 2 – 23 (2002).
[19] S. Axler, P. Bourden, W. Ramey, Harmonic Function Theory, 2nd ed., Springer, N. Y. (2001).
[20] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGrow-Hill, Inc. (1974)

Поступила 1 декабря 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 5, 2017, стр. 25-35.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФРАНКЛИНА С "ХОРОШЕЙ" МАЖОРАНТОЙ ЧАСТИЧНЫХ СУММ

Г. Г. ГЕВОРКЯН, М. П. ПОГОСЯН

Ереванский государственный университет, Армения[1]
Американский университет Армении
E-mails: *ggg@ysu.am*, *michael@ysu.am*

Аннотация. Найдены формулы восстановления коэффициентов кратного ряда Франклина по его сумме, удовлетворяющего условиям: 1) квадратные частичные суммы с номерами 2^ν почти всюду сходятся, 2) мажоранта частичных сумм с номерами 2^ν удовлетворяет некоторому необходимому условию.

MSC2010 number: 42B05, 42C05, 42C10, 42C25.

Ключевые слова: кратные ряды Франклина; теорема единственности; теорема восстановления.

1. Введение

Ортонормированная система Франклина состоит из кусочно-линейных и непрерывных функций. Эта система построена Ф. Франклином [1] как первый пример полной ортонормированной системы, которая является базисом в пространстве непрерывных на $[0;1]$ функций. Для формулировки результатов напомним некоторые определения.

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $\mu \geq 0$, где $1 \leq \nu \leq 2^\mu$. Обозначим

$$s_{n,i} = \begin{cases} \dfrac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{для } 0 \leq i \leq 2\nu, \\ \dfrac{i-\nu}{2^\mu}, & \text{для } 2\nu < i \leq n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных и кусочно-линейных на $[0;1]$ с узлами $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$, т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0;1]$ и линейная на каждом отрезке $[s_{n,i-1}; s_{n,i}]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что $\dim S_n = n + 1$ и множество $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$ получается добавлением точки $s_{n,2\nu-1}$ к множеству $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Поэтому, существует единственная функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1},

[1]Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41

$f_n(s_{n,2\nu-1}) > 0$ и $\|f_n\|_2 = 1$. Полагая $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $x \in [0;1]$, получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином [1].

В настоящей работе рассматриваются кратные ряды по системе Франклина.

Пусть d некоторое натуральное число. Рассмотрим d-мерные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d$-вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in [0;1]^d$ и $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{m_d}(x_d)$.

Обозначим через $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ квадратные частичные суммы ряда (1.1) с номерами 2^ν, т.е.

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}:\, m_i \le 2^\nu,\, i=1,\dots,d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$. Положим

$$\sigma^*(\mathbf{x}) = \sup_\nu |\sigma_\nu(\mathbf{x})|.$$

В работе [2] анонсирована и в работе [3] доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если суммы (1.2) сходятся по мере к интегрируемой функции f и выполняется условие*

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \left(\lambda \cdot \operatorname{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda\right\}\right) = 0, \tag{1.3}$$

то ряд (1.1) является рядом Фурье-Франклина функции f.

В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть суммы (1.2) сходятся по мере к некоторой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_k \to +\infty$ выполняется*

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\lambda_k \cdot \operatorname{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\right\}\right) = 0. \tag{1.4}$$

Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ имеет место

$$a_{\mathbf{m}} = \lim_{k\to+\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{1.5}$$

где

$$[f(\mathbf{x})]_\lambda = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{если } |f(\mathbf{x})| \le \lambda, \\ 0, & \text{если } |f(\mathbf{x})| > \lambda. \end{cases} \tag{1.6}$$

Напомним, что функция f называется A-интегрируемой на $[0;1]^d$, если выполняется

$$(1.7) \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda\cdot \operatorname{mes}\left\{\mathbf{x}\in[0;1]^d : |f(\mathbf{x})|>\lambda\right\}\right)=0$$

и существует

$$(1.8) \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x} =: (A)\int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Поскольку для любого фиксированного $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$ функция $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ ограничена, то при выполнении (1.7) имеет место

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})]_\lambda f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x},$$

если хотя бы один из этих пределов существует.

Поэтому из теоремы 1.2 следует

Теорема 1.3. *Если суммы (1.2) по мере сходятся к некоторой функции f и выполняется условие (1.7), то функция f является A-интегрируемой и ряд (1.1) является рядом Фурье-Франклина в смысле A-интегрирования, т.е. для любого $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$ имеет место*

$$a_{\mathbf{m}} = (A)\int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x})f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Аналоги теорем 1.1–1.3 для простых (однократных) рядов Франклина доказаны в работах [4], [5]. В работе [6] аналогичная теорема доказана для простых рядов по общей системе Франклина, порожденной квазидиадической и сильно регулярной последовательностью. Поскольку в настоящей работе общая система Франклина не рассматривается, то определение этой системы приводится не будет. В работах [4]–[6] вместо мажоранты частичных сумм с номерами 2^ν фигурирует мажоранта всех частичных сумм. Поэтому, теоремы 1.1–1.3 новые также для простых рядов Франклина.

Аналогичные вопросы для систем Прайса, порожденной ограниченной последовательностью, рассмотрены В. В. Костиным [7], [8]. При доказательстве Теоремы 1.2 в основном применяем методы из работы первого автора [3]. И местами, ради полноты изложения, мы вынуждены повторяться.

2. Доказательство Теоремы 1.2

Введем некоторые обозначения. Положим $t_j^\nu = \frac{j}{2^\nu}$, при $0\le j\le 2^\nu$, а также $t_{-1}^\nu = t_0^\nu = 0$ и $t_{2^\nu+1}^\nu = t_{2^\nu}^\nu = 1$. Обозначим $\delta_j^\nu = (t_{j-1}^\nu; t_{j+1}^\nu)$.

Для любого $\nu > 1$ определим функции $B_i^\nu(x)$, $i = 0, \dots, 2^\nu$, следующим образом:

$$B_i^\nu(t_j^\nu) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}, \quad j = 0, \dots, 2^\nu, \quad \text{и } B_i^\nu(t) \text{ линейна на } [t_{j-1}^\nu; t_j^\nu], \quad j = 1, \dots, 2^\nu.$$

Положим $\mathbb{N}_\nu^d = \{0, 1, \dots, 2^\nu\}^d$. Тогда

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\nu^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$$

Для вектора $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}_\nu^d$ обозначим

$$\Delta_{\mathbf{j}}^\nu = \delta_{j_1}^\nu \times \dots \times \delta_{j_d}^\nu, \quad \mathbf{t}_{\mathbf{j}}^\nu = (t_{j_1}^\nu, \dots, t_{j_d}^\nu) \tag{2.1}$$

и

$$B_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{t}) = B_{\mathbf{j}}^\nu(t_1, \dots, t_d) = B_{j_1}^\nu(t_1) \cdot \ldots \cdot B_{j_d}^\nu(t_d).$$

Нетрудно заметить, что $\sum_{j=0}^{2^\nu} B_j^\nu(x) = 1$, когда $x \in [0; 1]$. Поэтому

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d} B_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{когда } \mathbf{x} \in [0; 1]^d, \quad \text{и } \operatorname{supp} B_{\mathbf{j}}^\nu = \overline{\Delta_{\mathbf{j}}^\nu}.$$

Нетрудно заметить также, что

$$\int_{[0;1]^d} B_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{j}}^\nu} B_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \prod_{s=1}^d \int_{\delta_{j_s}^\nu} B_{j_s}^\nu(x_s) dx_s = \prod_{s=1}^d \frac{\operatorname{mes}(\delta_{j_s}^\nu)}{2} = \frac{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^\nu)}{2^d}$$

Поэтому для

$$M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) = \frac{2^d}{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^\nu)} \cdot B_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

имеем

$$\int_{[0;1]^d} M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \tag{2.3}$$

Очевидно, что как система функций $\{B_{\mathbf{j}}^\nu\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d}$, так и система функций $\{M_{\mathbf{j}}^\nu\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d}$, образуют базис в линейном пространстве

$$\mathbf{S}_\nu := \left\{ \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\nu^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) : a_{\mathbf{m}} \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.4}$$

Поэтому верна следующая лемма.

Лемма 2.1. *Если $F \in \mathbf{S}_\nu$ и $F \neq 0$, то существует $\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d$, такое что*

$$(F, M_{\mathbf{j}}^\nu) := \int_{[0;1]^d} F(\mathbf{x}) M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \neq 0.$$

В работе [3] доказаны следующие леммы

Лемма 2.2. *Для любых $M_{\mathbf{j}}^{\nu_0}(\mathbf{x})$ и $\nu > \nu_0$ существуют числа $\alpha_{\mathbf{j}}$ такие что*

$$M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_\nu^d} \alpha_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}^{\nu}(\mathbf{x}),$$

причем

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_\nu^d} \alpha_{\mathbf{j}} = 1, \quad \alpha_{\mathbf{j}} > 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathbf{j}} = 0, \quad \text{если} \quad \Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \not\subset \Delta_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}.$$

Лемма 2.3. *Пусть функция F определена на $\Delta := [\alpha_1; \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_d; \beta_d]$, $d \in \mathbb{N}$, и является линейной функцией по каждой переменной. Тогда если $L = \max_{\mathbf{t}\in\Delta} |F(\mathbf{t})|$, то*

$$\operatorname{mes}\left\{\mathbf{t} \in \Delta : |F(\mathbf{t})| \geq \frac{L}{2^d}\right\} \geq \frac{\operatorname{mes}(\Delta)}{3^d}$$

Доказательство теоремы 1.2. Пусть суммы (1.2) по мере сходятся к функции f и ряд (1.1) удовлетворяет условию (1.4). Сначала докажем, что для произвольного ν_0 и $\mathbf{j}_0 \in \mathbb{N}_{\nu_0}^d$ имеет место

$$\int_{[0;1]^d} \sigma_{\nu_0}(\mathbf{x}) M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$E_k = \left\{\mathbf{x} \in \operatorname{supp} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} = \overline{\Delta_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}} : \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\right\}.$$

Пусть ε-произвольное положительное число. По условию теоремы, можно выбрать такое k_0, чтобы выполнялись

$$2^{10d} \cdot 2^{\nu_0 d} \cdot \lambda_k \cdot \operatorname{mes}(E_k) < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad k \geq k_0. \tag{2.6}$$

и

$$\operatorname{mes}(E_k) < 2^{-8d} \operatorname{mes}(\operatorname{supp} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}), \quad \text{когда} \quad k > k_0. \tag{2.7}$$

Для $\nu \geq \nu_0$ обозначим

$$\Omega_\nu = \left\{A : A = \left(\frac{j_1 - 1}{2^\nu}; \frac{j_1}{2^\nu}\right) \times \cdots \times \left(\frac{j_d - 1}{2^\nu}; \frac{j_d}{2^\nu}\right), A \subset \operatorname{supp} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}\right\}$$

Если для некоторого $A \in \Omega_\nu$ выполняется

$$\operatorname{mes}(E_k \cap A) < 2^{-2d} \operatorname{mes}(A), \tag{2.8}$$

то

$$|\sigma_\nu(\mathbf{x})| \leq 2^d \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in A. \tag{2.9}$$

Действительно, поскольку на A функция $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ линейная по каждой переменной x_j, $j = 1, ..., d$, то в силу леммы 2.3 получим, что если бы имело место $|\sigma_\nu(\mathbf{x}_0)| > 2^d \cdot \lambda_k$ для некоторого $\mathbf{x}_0 \in A$, тогда выполнялось бы

$$\mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in A : |\sigma_\nu(\mathbf{x})| > \lambda_k\} \geq 3^{-d}\mathrm{mes}(A),$$

которое противоречит (2.8).

Из (2.7) следует, что

$$\mathrm{mes}(E_k \cap A) < 2^{-7d}\mathrm{mes}(A), \quad \text{когда} \quad A \in \Omega_{\nu_0}. \tag{2.10}$$

Теперь для $\nu \geq \nu_0$ по индукции определим семейства Ω^1_ν и Ω^2_ν. Для $\nu = \nu_0$ положим

$$\Omega^1_{\nu_0} = \left\{A \in \Omega_{\nu_0} : \mathrm{mes}(A \cap E_k) > 2^{-6d} \cdot \mathrm{mes}(A)\right\}, \quad Q_{\nu_0} = \bigcup_{A \in \Omega^1_{\nu_0}} A.$$

и

$$\Omega^2_{\nu_0} = \{A \in \Omega_{\nu_0} : A \not\subset Q_{\nu_0}\}, \quad P_{\nu_0} = \bigcup_{A \in \Omega^2_{\nu_0}} A.$$

Из (2.10) следует, что $Q_{\nu_0} = \emptyset$ и $P_{\nu_0} = \mathrm{supp} M^{\nu_0}_{k_0}$.

Допуская, что определены $\Omega^1_{\nu'}$, $\Omega^2_{\nu'}$, $Q_{\nu'}$ и $P_{\nu'}$, для $\nu' < \nu$, определим семейства Ω^1_ν и Ω^2_ν следующим образом.

$$\Omega^1_\nu = \left\{A \in \Omega_\nu : \mathrm{mes}(A \cap E_k) > 2^{-6d}\mathrm{mes}(A) \quad \text{и} \quad A \not\subset \bigcup_{\nu' < \nu} Q_{\nu'}\right\}. \tag{2.11}$$

$$Q_\nu = \bigcup_{A \in \Omega^1_\nu} A.$$

$$\Omega^2_\nu = \left\{A \in \Omega_\nu : A \not\subset \bigcup_{\nu' \leq \nu} Q_{\nu'}\right\}.$$

Положим также

$$P_\nu = \bigcup_{A \in \Omega^2_\nu} A.$$

Таким образом определенные семейства Ω^1_ν, Ω^2_ν и множества Q_ν, P_ν обладают следующими свойствами: $\Omega^1_\nu \subset \Omega_\nu$, $\Omega^2_\nu \subset \Omega_\nu$,

$$\mathrm{supp} M^{\nu}_{k_0} = P_\nu \bigcup \left(\bigcup_{\nu' \leq \nu} Q_{\nu'}\right), \quad P_\nu \bigcap \left(\bigcup_{\nu' \leq \nu} Q_{\nu'}\right) = \emptyset \tag{2.12}$$

$$Q_{\nu'} \bigcap Q_{\nu''} = \emptyset, \quad \text{если} \quad \nu' \neq \nu''. \tag{2.13}$$

Из (2.11) и (2.13) следует, что

$$\text{(2.14)} \qquad \operatorname{mes}\left(\bigcup_{\nu'\le\nu} Q_{\nu'}\right) < 2^{6d}\operatorname{mes}(E_k) \quad \text{для любого} \quad \nu.$$

Обозначим

$$\text{(2.15)} \qquad \mathbf{J}_\nu = \left\{\mathbf{j} : \Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \cap Q_\nu \neq \emptyset \ \text{ и } \ \Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \subset P_{\nu-1}\right\}.$$

Если $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbf{J}_\nu$ и $\Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} = \left[\frac{j_1-1}{2^\nu}; \frac{j_1+1}{2^\nu}\right] \times \dots \times \left[\frac{j_d-1}{2^\nu}; \frac{j_d+1}{2^\nu}\right]$, то для любого множества

$$\text{(2.16)} \quad B := \left[\frac{i_1-1}{2^\nu}; \frac{i_1}{2^\nu}\right] \times \dots \times \left[\frac{i_d-1}{2^\nu}; \frac{i_d}{2^\nu}\right], \quad \text{где} \quad i_q = j_q \text{ или } j_q+1, \ q = 1, \dots, d,$$

имеет место

$$\text{(2.17)} \qquad \operatorname{mes}(B \cap E_k) < 2^{-5d}\operatorname{mes}(B).$$

Действительно, если для некоторого B не выполняется (2.17), тогда для куба $D \in \Omega_{\nu-1}$, с условием $B \subset D$, выполнится

$$\text{(2.18)} \qquad \operatorname{mes}(D \cap E_k) \ge 2^{-6d}\operatorname{mes}(D),$$

так как $\operatorname{mes}(D) = 2^d \cdot \operatorname{mes}(B)$. Из соотношения (2.18) следует, что $D \subset \bigcup_{\nu'<\nu} Q_{\nu'}$. Следовательно, $B \subset \bigcup_{\nu'<\nu} Q_{\nu'}$ и $\Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \bigcap \left(\bigcup_{\nu'<\nu} Q_{\nu'}\right) \neq \emptyset$, которое противоречит условию $\Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \subset P_{\nu-1}$ из (2.15) и соотношению (2.12).

В силу (2.8), (2.9), из (2.15)-(2.17) получим

$$\text{(2.19)} \qquad |\sigma_\nu(\mathbf{x})| < 2^d \cdot \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^{\nu}, \quad \mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu.$$

Очевидно, аналогично получим

$$\text{(2.20)} \qquad |\sigma_\nu(\mathbf{x})| < 2^d \cdot \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \subset P_\nu.$$

Теперь по индукции определим разложения ψ_n для $M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}$, удовлетворяющие условиям:

$$\text{(2.21)} \qquad M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} = \psi_n = \sum_{\nu<n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n} M_{\mathbf{j}}^{\nu} + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^{n} \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^{n} M_{\mathbf{j}}^{n}.$$

$$\text{(2.22)} \qquad \sum_{\nu<n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n} + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^{n} \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^{n} = 1, \quad \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n} \ge 0, \quad \alpha_{\mathbf{j}}^{n} \ge 0.$$

Положим $\psi_{\nu_0} = M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}$. Очевидно ψ_{ν_0} удовлетворяет условиям (2.21), (2.22). Допуская, что определено ψ_n, удовлетворяющее условиям (2.21), (2.22), определим

φ_{n+1}. Для $\mathbf{j}$, с условием $\Delta_\mathbf{j}^n \subset P_n$, в силу леммы 2.2, имеем

$$M_\mathbf{j}^n = \sum_{\mathbf{v}:\Delta_\mathbf{v}^{n+1}\subset \operatorname{supp} M_\mathbf{j}^n} \beta_\mathbf{v} M_\mathbf{v}^{n+1}, \quad \text{с} \quad \beta_\mathbf{v} \geq 0. \tag{2.23}$$

Заметим, что если $\Delta_\mathbf{j}^n \subset P_n$ и выполняется (2.23), то либо $\Delta_\mathbf{v}^{n+1} \cap Q_{n+1} \neq \emptyset$, и поэтому $\mathbf{v} \in \mathbf{J}_{n+1}$, либо $\Delta_\mathbf{v}^{n+1} \subset P_{n+1}$. Поэтому, подставляя (2.23) в (2.21), и группируя подобные члены (одно и тоже $\Delta_\mathbf{v}^{n+1}$ может входить в разные суммы (2.23)), получим

$$M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} = \varphi_{n+1} = \sum_{\nu\leq n+1}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1} M_\mathbf{j}^\nu + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_\mathbf{j}^{n+1}\subset P_{n+1}} \alpha_\mathbf{j}^{n+1} M_\mathbf{j}^{n+1}. \tag{2.24}$$

Неотрицательность коэффициентов $\alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1}$, $\alpha_\mathbf{j}^{n+1}$ в (2.24) следует из неотрицательности коэффициентов в (2.23) и (2.21). Учитывая, что интегралы всех функций $M_\mathbf{j}^\nu$ равны единице (см. (2.3)), из (2.24) получим

$$\sum_{\nu\leq n+1}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1} + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_\mathbf{j}^{n+1}\subset P_{n+1}} \alpha_\mathbf{j}^{n+1} = 1, \quad \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1} \geq 0, \quad \alpha_\mathbf{j}^{n+1} \geq 0.$$

Итак, мы доказали возможность представления (2.21), с коэффициентами (2.22). Отметим, что если $\nu_0 \leq \nu \leq n$ и для $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ выполняется $\max_i p_i > 2^\nu$, то $(f_\mathbf{p}, M_\mathbf{j}^\nu) = 0$, для $\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d$. Поэтому

$$(\sigma_n, M_\mathbf{j}^\nu) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{N}_n^d} a_\mathbf{p}(f_\mathbf{p}, M_\mathbf{j}^\nu) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{N}_\nu^d} a_\mathbf{p}(f_\mathbf{p}, M_\mathbf{j}^\nu) = (\sigma_\nu, M_\mathbf{j}^\nu).$$

Следовательно, с учетом (2.21), для $n > \nu_0$ имеем

$$\int_{[0;1]^d} \sigma_{\nu_0}(\mathbf{x}) M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}} \sigma_n(\mathbf{x}) M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \tag{2.25}$$

$$\sum_{\nu\leq n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n(\sigma_n, M_\mathbf{j}^\nu) + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_\mathbf{j}^n\subset P_n} \alpha_\mathbf{j}^n(\sigma_n, M_\mathbf{j}^n) =$$

$$\sum_{\nu\leq n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n(\sigma_\nu, M_\mathbf{j}^\nu) + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_\mathbf{j}^n\subset P_n} \alpha_\mathbf{j}^n(\sigma_n, M_\mathbf{j}^n) =: I_{n,1} + I_{n,2}.$$

Из (2.19) и (2.3) следует

$$|I_{n,1}| \leq \sum_{\nu\leq n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n|(\sigma_\nu, M_\mathbf{j}^\nu)| \leq 2^d \cdot \lambda_k \sum_{\nu\leq n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n \int_{\Delta_\mathbf{j}^\nu} M_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{2.26}$$

Из (2.22) и (2.21) имеем

$$\sum_{\nu\leq n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n \int_{\Delta_\mathbf{j}^\nu} M_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_{D_n} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{2.27}$$

где

$$D_n = \bigcup_{\nu \le n} \bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu} \Delta_{\mathbf{j}}^{\nu}. \tag{2.28}$$

Из определения множества $\mathbf{J}_\nu$ (см. (2.15)) следует, что

$$\frac{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \bigcap Q_\nu)}{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{\nu})} \ge 2^{-d}$$

Из последнего и (2.14), (2.13) получаем, что

$$\operatorname{mes}(D_n) \le 2^{7d} \cdot \operatorname{mes}(E_k). \tag{2.29}$$

Поэтому, из (2.26), (2.27) и (2.6) следует, что

$$|I_{n,1}| \le 2^{(\nu_0+1)d} \cdot 2^{7d} \cdot \lambda_k \cdot \operatorname{mes}(E_k) < 2^{-2d}\varepsilon. \tag{2.30}$$

Для $I_{n,2}$ имеем

$$I_{n,2} = \left(\sigma_n, \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^{n} \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^{n} M_{\mathbf{j}}^{n}\right) = \tag{2.31}$$

$$\left(\sigma_n - [f]_{\lambda_k}, \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^{n} \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^{n} M_{\mathbf{j}}^{n}\right) + \left([f]_{\lambda_k}, \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^{n} \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^{n} M_{\mathbf{j}}^{n}\right) =: I_{n,3} + I_{n,4}$$

Обозначим $H_n = \bigcup_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^{n} \subset P_n} \Delta_{\mathbf{j}}^{n}$ и $T_k = \{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} : |f(\mathbf{x})| > \lambda_k\}$. Ясно, что $T_k \subset E_k$, и поэтому $\operatorname{mes}(T_k) < \operatorname{mes}(E_k)$. Следовательно (см. (2.6))

$$\operatorname{mes}(T_k) < \varepsilon \cdot 2^{-10d-\nu_0 d} \cdot \lambda_k^{-1}. \tag{2.32}$$

Из (2.20) имеем, что

$$|\sigma_n(\mathbf{x})| < 2^d \cdot \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in H_n.$$

Следовательно

$$|\sigma_n(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}| < (2^d + 1) \cdot \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in H_n. \tag{2.33}$$

Очевидно

$$|I_{n,3}| \le 2^{\nu_0 d} \int_{H_n} |\sigma_n(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}| d\mathbf{x} = \tag{2.34}$$

$$2^{\nu_0 d} \left(\int_{H_n \setminus T_k} |\sigma_n(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}| d\mathbf{x} + \int_{H_n \bigcap T_k} |\sigma_n(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}| d\mathbf{x} \right).$$

Из (2.33) и (2.32) следует, что второй интеграл в (2.34) меньше $\varepsilon/3$ при всех n. А первый интеграл стремится к нулю когда $n \to \infty$, поскольку подинтегральная функция на H_n ограничена и по мере стремится к нулю вне T_k. Следовательно для $I_{n,3}$ имеем

$$|I_{n,3}| < \varepsilon/2, \quad \text{когда } n \text{ достаточно большое.} \tag{2.35}$$

Для $I_{n,4}$ из (2.21) имеем

$$I_{n,4} = ([f]_{\lambda_k}, M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}) - \left([f]_{\lambda_k}, \sum_{\nu\leq n}\sum_{\mathbf{j}\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n M_{\mathbf{j}}^{\nu}\right) =: ([f]_{\lambda_k}, M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}) + I_{n,5}. \tag{2.36}$$

Из (2.28), (2.29) и (2.6) следует, что

$$\operatorname{mes}\left(\operatorname{supp}\left(\sum_{\mathbf{j}\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n M_{\mathbf{j}}^{\nu}\right)\right) < 2^{7d}\cdot \operatorname{mes}(E_k) < 2^{[illegible]}\cdot\varepsilon\cdot\lambda_k^{-1}.$$

Кроме того (см. (2.21), (2.22)) имеем

$$\left|\sum_{\mathbf{j}\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n M_{\mathbf{j}}^{\nu}(\mathbf{x})\right| \leq |M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x})| \leq 2^{(\nu_0+1)d}.$$

Следовательно

$$|I_{n,5}| < 2^{-2d}\cdot\varepsilon. \tag{2.37}$$

Из (2.30), (2.31), (2.35) (2.37) и (2.25) вытекает, что

$$\left|\int_{[0;1]^d}\sigma_{\nu_0}(\mathbf{x})M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| < \varepsilon \quad \text{когда } k \geq k_0.$$

Соотношение (2.5) доказано.

Теперь докажем, что для любого $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$ выполняется (1.5). Сначала зафиксируем некоторое ν, с условием $2^\nu \geq \max_{1\leq i\leq d} m_i$. Тогда (см. (2.4)) $f_{\mathbf{m}}\in \mathbf{S}_\nu$. Учитывая, что система функций $\{M_{\mathbf{j}}^\nu\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_\nu^d}$ образует базис в $\mathbf{S}_\nu$, найдутся коэффициенты $\beta_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j}\in\mathbb{N}_\nu^d$, такие что

$$f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_\nu^d}\beta_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}). \tag{2.38}$$

Очевидно

$$a_{\mathbf{m}} = (\sigma_\nu, f_{\mathbf{m}}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_\nu^d}\beta_{\mathbf{j}}(\sigma_\nu, M_{\mathbf{j}}^\nu).$$

Отсюда, с применением (2.5) и (2.38), получим

$$a_{\mathbf{m}} = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_\nu^d}\beta_{\mathbf{j}}\lim_{k\to+\infty}\int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty}\int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Теорема 1.2 полностью доказана.

Abstract. In this paper, we obtain recovery formulas for coefficients of multiple Franklin series by means of its sum, if the series satisfies the following conditions: 1) the square partial sums with indices 2^{ν} converge almost everywhere, 2) the majorant of partial sums with indices 2^{ν} satisfies some necessary condition.

Список литературы

[1] Ph. Franklin, "A set of continuos orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928)

[2] Г. Г. Геворкян, "Теоремы единственности рядов по системе Франклина", Мат. заметки, **98**, no. 5, 786 – 789 (2015).

[3] Г. Г. Геворкян, "Теорема единственности для кратных рядов Франклина", Мат. заметки, **101**, no. 2, 199 – 201 (2017).

[4] Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. заметки, **46**, no. 2, 51 – 58 (1989).

[5] Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. заметки, **59**, no. 4, 521 – 545 (1996).

[6] М. П. Погосян, "О единственности рядов по общей системе Франклина", Изв. НАН Армении, сер. матем., **35**, no. 4, 75 – 81 (2000).

[7] В. В. Костин, "К вопросу о восстановлении коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций", Мат. заметки, **73**, no. 5, 704 – 723 (2003).

[8] В. В. Костин, "Обобщение теоремы Л. А. Балашова о подрядах ряда Фурье-Хаара", Мат. заметки, **76**, no. 5, 740 – 747 (2004).

Поступила 28 июня 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 5, 2017, стр. 36–51.

POINTWISE CONVERGENCE OF MARCINKIEWICZ-FEJÉR MEANS OF DOUBLE VILENKIN-FOURIER SERIES

U. GOGINAVA

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Georgia
E-mail: *zazagoginava@gmail.com*

Abstract. In this paper we give a characterization of points at which the Marcinkiewicz-Fejér means of double Vilenkin Fourier series converge. [1]

MSC2010 numbers: 42C10.

Keywords: Vilenkin function; Pointwise summability; Marcinkiewicz-Fejer mean; Lebesgue point.

1. Introduction

Lebesgue's theorem [14] is well known for trigonometric Fourier series: *the Fejer means $\sigma_n f$ of a function $f \in L_1([0,2\pi))$ converge to f almost everywhere if* (see also Zygmund [26]). An analogous result for Walsh-Fourier series is due to Fine [3]. Later Schipp [19] showed that the maximal operator σ^* of the Fejer means of one-dimensional Walsh-Fourier series is of weak type (1,1), from which the a. e. convergence can be deduced by standard arguments.

For two-dimensional trigonometric Fourier series. Marcinkiewicz [15] established that the Marcinkiewicz-Fejér means

$$\sigma_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}S_{j,j}(f)$$

of a function $f \in L\log L([0,2\pi)\times[0,2\pi))$ converge a.e. to f as $n\to\infty$, where $S_{j,j}(f)$ denotes the cubic partial sums of the Fourier series of f. Later Zhizhiashvili [24, 25] extended this result to all $f \in L_1([0,2\pi)\times[0,2\pi))$. An analogous result for two-dimensional Walsh-Fourier series is due to Weisz [21].

In one-dimensional case the set of convergence is characterized with the help of Lebesgue points. It is known that an a.e. point $x \in [0,2\pi)$ is a Lebesgue point of $f \in L_1([0,2\pi))$ and the Fejer means of the trigonometric Fourier series of $f \in$

[1]The research was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation grant no.DI/9/5-100/13.

$L_1([0, 2\pi))$ converge to f at each Lebesgue point (see Butzer and Nessel [2]). Weisz [20] introduced the notion of Walsh-Lebesgue points and proved the analogous results for Walsh-Fourier series.

For Vilenkin-Fourier series, the author and Gogoladze [11] introduced the notion of Vilenkin-Lebesgue points and proved that the Fejér means of Vilenkin-Fourier series of $f \in L_1(G_m)$ converge to f at each Vilenkin-Lebesgue point.

In this paper we generalize these results for the Marcinkiewicz-Fejér means of double Vilenkin-Fourier series, and characterize the set of convergence of these means. We introduce the notion of Marcinkiewicz-Lebesgue points, and prove that a.e. point is a Marcinkiewicz-Lebesgue point of an integrable function f and the Marcinkiewicz-Fejér means of double Vilenkin-Fourier series of f converge to f at each Marcinkiewicz-Lebesgue point. The summability problems of cubic partial sums of multiple Fourier series have been investigated in [4]-[13].

2. Definitions and Notation

Let $\mathbb{N}_+$ denote the set of positive integers, and $\mathbb{N} = \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$. Let $m = (m_0, m_1, ...)$ denote a sequence of positive integers not less than 2. Denote by $Z_{m_k} = \{0, 1, ..., m_k - 1\}$ the additive group of integers modulo m_k. Define the group G_m to be the complete direct product of the groups Z_{m_k}, with the product of the discrete topologies of Z_{m_k}'s. The direct product of the measures

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \quad (j \in Z_{m_k}),$$

denoted by μ, is the Haar measure on G_m with $\mu(G_m) = 1$. If the sequence m is bounded, then G_m is called a bounded Vilenkin group. The elements of G_m can be represented by sequences $x := (x_0, x_1, ..., x_j, ...)$, $(x_j \in Z_{m_j})$. The group operation "$+$" in G_m is given by $x + y = (x_0 + y_0 \pmod{m_0}, ..., x_k + y_k \pmod{m_k}, ...)$, where $x = (x_0, ..., x_k, ...)$ and $y = (y_0, ..., y_k, ...) \in G_m$. The inverse of "$+$" is denoted by "$-$". In this paper we consider only bounded Vilenkin groups.

A base for the neighborhoods of G_m can be given as follows: for $x \in G_m$ and $n \in \mathbb{N}$ define

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m | y_0 = x_0, ..., y_{n-1} = x_{n-1}\}.$$

Also, define $I_n = I_n(0)$ for $n \in \mathbb{N}_+$. For $n \in \mathbb{N}$ we set $e_n := (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in G_m$ the nth coordinate of which is 1 and the remaining are zeros.

If we define the so-called generalized number system based on m in the following way: $M_0 := 1, M_{k+1} := m_k M_k (k \in \mathbb{N})$, then every $n \in \mathbb{N}$ can be uniquely expressed as $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j$, where $n_j \in Z_{m_j}$ $(j \in \mathbb{N}_+)$ and only a finite number of n_j's differ from zero. We also use the following notation: $|n| := \max\{k \in \mathbb{N} : n_k \neq 0\}$, that is, $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$ for $n > 0$.

Next, we introduce on G_m an orthonormal system which is called the Vilenkin system. To this end, we first define the complex valued functions $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$, the generalized Rademacher functions as follows:

$$r_k(x) := \exp\left(\frac{2\pi \imath x_k}{m_k}\right) \quad (\imath^2 = -1, \ x \in G_m, \ k \in \mathbb{N}).$$

It is known that

$$\sum_{i=0}^{m_n - 1} r_n^i(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_n \neq 0 \\ m_n, & \text{if } x_n = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Now define the Vilenkin system $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ on G_m as follows:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

In the special case $m \equiv 2$, this system is called the Walsh-Paley system.
Observe that the Vilenkin system is orthonormal and complete in $L^1(G_m)$ (see [1]). We consider the double system $\{\psi_n(x) \times \psi_m(y) : n, m \in \mathbb{N}\}$ on $G_m \times G_m$. Throughout the paper, the notation $a \lesssim b$ will stand for $a \leq cb$, where c is an absolute constant.

The rectangular partial sums of the double Vilenkin-Fourier series of a function f are defined as follows:

$$S_{M,N}(x, y; f) := \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{f}(i, j)\, \psi_i(x)\, \psi_j(y),$$

where the number

$$\widehat{f}(i, j) = \int_{G_m \times G_m} f(x, y)\, \psi_i(x)\, \psi_j(y)\, d\mu(x, y)$$

is said to be the (i, j)th Vilenkin-Fourier coefficient of f.

The norm (or quasinorm) of the space $L_p(G_m \times G_m)$ is defined by

$$\|f\|_p := \left(\int_{G_m \times G_m} |f(x, y)|^p \, d\mu(x, y) \right)^{1/p} \quad (0 < p < +\infty).$$

The space weak-$L_p(G_m \times G_m)$ consists of all measurable functions f for which

$$\|f\|_{\text{weak}-L_p(G_m \times G_m)} := \sup_{\lambda>0} \lambda \mu\left(|f| > \lambda\right)^{1/p} < +\infty.$$

The σ-algebra generated by the dyadic 2-dimensional $I_k \times I_k$ cube of measure $M_k^{-1} \times M_k^{-1}$ will be denoted by F_k $(k \in \mathbb{N})$. Denote by $f = \left(f^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right)$ the one-parameter martingales with respect to $(F_n, n \in \mathbb{N})$ (for details see [22]). The maximal function of a martingale f is defined by $f^* = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left|f^{(n)}\right|$. In the case $f \in L_1(G_m \times G_m)$, the maximal function can also be given by

$$f^*(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu\left(I_n(x) \times I_n(y)\right)} \left| \int\limits_{I_n(x)\times I_n(y)} f(t,u)\, d\mu(t,u) \right|,$$

$$(x,y) \in G_m \times G_m.$$

For $0 < p < \infty$ the dyadic martingale Hardy space $H_p(G \times G)$ consists of all martingales for which $\|f\|_{H_p} := \|f^*\|_p < \infty$. If $f \in L_1(G_m \times G_m)$, then it is easy to show that the sequence $(S_{M_n, M_n}(f) : n \in \mathbb{N})$ is a martingale. If f is a martingale, that is, $f = (f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots)$, then the Vilenkin-Fourier coefficients must be defined in a slightly different way:

$$\widehat{f}(i,j) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{G_m\times G_m} f^{(k)}(x,y)\, w_i(x)\, w_j(y)\, d\mu(x,y).$$

The Vilenkin-Fourier coefficients of $f \in L_1(G_m \times G_m)$ are the same as those of the martingale $(S_{M_n, M_n}(f) : n \in \mathbb{N})$ obtained from f.

For $n = 1, 2, \ldots$ and a martingale f, the Marcinkiewicz-Fejér means of order n of the 2-dimensional Vilenkin-Fourier series of f are given by

$$\sigma_n(x,y,f) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} S_{j,j}(x,y,f).$$

Denoting by

$$K_n(x,y) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)\, D_k(y)$$

the 2-dimensional Marcinkiewicz-Fejér kernel of order n, we can write

$$\sigma_n(x,y;f) = \int\limits_{G_m\times G_m} f(t,u)\, K_n(x-t, y-u)\, d\mu(t,u). \tag{2.2}$$

A bounded measurable function a is said to be a p-atom, if there exists a generalized square $I \times J \in F_n$, such that

a) $\int\limits_{I\times J} a\, d\mu = 0$; b) $\|a\|_\infty \le \mu(I \times J)^{-1/p}$; c) $\operatorname{supp} a \subset I \times J$.

An operator T, which maps the set of martingales into the collection of measurable functions, be called p-quasi-local if there exists a constant $C_p > 0$ such that for every p-atom a

$$\int_{G_m \times G_m \setminus (I \times J)} |Ta|^p \leq C_p < \infty,$$

where $I \times J$ is the support of the atom.

3. Marcinkiewicz-Lebesgue points

In one-dimensional case a point $x \in (-\infty, \infty)$ is called a Lebesgue point of a function f if

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt = 0.$$

It is known that a.e. point $x \in [0, 2\pi)$ is a Lebesgue point of $f \in L_1([0, 2\pi))$ and that the Fejér means of the trigonometric Fourier series of $f \in L_1([0, 2\pi))$ converge to f at each Lebesgue point (see Butzer and Nessel [2]). Feichtinger and Weisz [18] extended these results to two-dimensional trigonometric Fourier series, to arbitrary summability method and to all $f \in L(\log L)^+ ([0, 2\pi)^2)$.

In [20], Weisz introduced the notion of one-dimensional Walsh-Lebesgue point: $x \in G_2$ is a Walsh-Lebesgue point of $f \in L_1(G_2)$ if

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} 2^k \int_{I_n(e_k)} |f(x+t) - f(x)| dt = 0.$$

He proved that an a.e. point $x \in G_2$ is a Walsh-Lebesgue point of an integrable function f, and the Fejér means of the Walsh-Fourier series of $f \in L_1(G_2)$ converge to f at each Walsh-Lebesgue point. The higher dimensional extension of this result can be found in [11, 23].

In [11], the author and Gogoladze have introduced the notion of Vilenkin-Lebesgue points as follows. Consider the operator

$$W_A f(x) := \sum_{s=0}^{A-1} M_s \sum_{r_s=1}^{m_s-1} \int_{I_A(x - r_s e_s)} |f(t) - f(x)| d\mu(t).$$

A point $x \in G_m$ is said to be a Vilenkin-Lebesgue point of a function $f \in L_1(G_m)$ if $\lim_{A \to \infty} W_A f(x) = 0$. In [11] it is characterized the set of convergence of Vilenkin-Fejér means. Specifically the following results were proved in [11].

Theorem GG ([11]). *Let $f \in L_1(G_m)$, where G_m is a bounded Vilenkin group. Then for all Vilenkin-Lebesgue points of f*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = f(x).$$

Corollary GG1 ([11]). *Let $f \in L_1(G_m)$, where G_m is a bounded Vilenkin group. Then*

$$\lim_{A\to\infty} W_A f(x) = 0 \quad \textit{for a. e. } x \in G_m,$$

thus an a. e. point is a Vilenkin-Lebesgue point of f.

Corollary GG2 ([11]). *Let $f \in L_1(G_m)$, where G_m is a bounded Vilenkin group. Then*

$$\sigma_n(x;f) \to f(x) \ \textit{for a.e. } x \in G_m.$$

For two-dimensional Walsh-Fourier series, Weisz [21] has proved that for all $f \in L_1(G \times G)$ the Marcinkiewicz-Fejer means $\sigma_n f$ converge a.e. to f as $n \to \infty$.

In [13] it is characterized the set of convergence of Marcinkiewicz-Fejér means of two-dimensional Walsh-Fourier series.

For two-dimensional Vilenkin-Fourier series, Gat [4] has proved that for all $f \in L_1(G_m \times G_m)$ the Marcinkiewicz-Fejér means $\sigma_n f$ converge a.e. to f as $n \to \infty$.

In this paper we characterize the set of convergence of Marcinkiewicz-Fejer means with respect to bounded Vilenkin system. We introduce the notion of Marcinkiewicz-Lebesgue points and prove that an a.e. point is a Marcinkiewicz-Lebesgue point of an integrable function f and the Marcinkiewicz-Fejér means of the two-dimensional Vilenkin-Fourier series of f converge to f at each Marcinkiewicz-Lebesgue point.

We set

$$W_j(x,y,f) := M_j^{-1} \sum_{q=0}^{j-1} \sum_{k=q}^{j-1} \sum_{u_q=1}^{m_q-1} M_q M_k^2$$

$$\times \int_{I_k \times I_k(u_q e_q)} |f(x-t, y-u) - f(x,y)| \, r_{k+1,j-1}(t,u) \, d\mu(t,u)$$

$$+ M_j^{-1} \sum_{q=0}^{j-1} \sum_{k=q}^{j-1} \sum_{t_q=1}^{m_q-1} M_q M_k^2 \int_{I_k(t_q e_q) \times I_k} |f(x-t, y-u) - f(x,y)| \, r_{k+1,j-1}(t,u) \, d\mu(t,u)$$

$$+ \sum_{s=0}^{j} \sum_{i=s}^{j} M_s M_i \sum_{u_i=1}^{m_i-1} \int_{I_j \times I_i(u_i e_i)} |f(x-t, y-u) - f(x,y)| \, d\mu(t,u)$$

$$+\sum_{s=0}^{j}\sum_{i=s}^{j} M_s M_i \sum_{t_s=1}^{m_s-1} \int_{I_i(t_s e_s)\times I_j} |f(x-t, y-u) - f(x,y)|\, d\mu(t,u),$$

where

$$r_{i,n}(x,y) = \prod_{l=i}^{n}\left(\sum_{s=0}^{m_l-1} \psi_{M_l}^{s}(x+y)\right).$$

Using (2.1), it is easy to show that

$$r_{i,n}(x,y) = \begin{cases} m_i m_{i+1}\cdots m_n, & \text{if } x_j + y_j \,(\mathrm{mod}\, m_j) = 0, \quad j = i, i+1, \ldots, n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

A point $(x,y) \in G_m \times G_m$ is said to be a Marcinkiewicz-Lebesgue point (for bounded Vilenkin group) of $f \in L_1(G_m \times G_m)$ if $\lim_{n\to\infty} W_n(x,y;f) = 0$. Set

$$V_n(x,y;f) := \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{k=q}^{n-1}\sum_{t_q=1}^{m_q-1} \frac{M_q M_k}{m_k} \tag{3.1}$$

$$\times \int_{I_k(t_q e_q)\times I_k} f(x-t, y-u)\, \mathrm{I}_{\{t_r+u_r (\mathrm{mod}\, m_r)=0, r=k+1,\ldots,n-1\}}(t,u)\, d\mu(t,u)$$

$$+\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{k=q}^{n-1}\sum_{u_q=1}^{m_q-1} \frac{M_q M_k}{m_k}$$

$$\times \int_{I_k\times I_k(u_q e_q)} f(x-t, y-u)\, \mathrm{I}_{\{t_r+u_r (\mathrm{mod}\, m_r)=0, r=k+1,\ldots,n-1\}}(t,u)\, d\mu(t,u)\, d\mu(t,u)$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\sum_{i=s}^{n} M_s M_i \sum_{u_s=1}^{m_s-1} \int_{I_n\times I_i(u_s e_s)} f(x-t, y-u)\, d\mu(t,u)$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\sum_{i=s}^{n} M_s M_i \sum_{t_s=1}^{m_s-1} \int_{I_i(t_s e_s)\times I_n} f(x-t, y-u)\, d\mu(t,u) = \sum_{j=1}^{4} V_n^{(j)}(x,y;f),$$

where I_E stands for the characteristic function of set E.

It is easy to see that $W_n f(x,y) \to 0$ as $n \to \infty$ if and only if

$$\lim_{n\to\infty} V_n(|f - f(x,y)|)(x,y) = 0.$$

We also will use the following notation:

$$Vf := \sup_n |V_n f|, \qquad V^{(i)} f := \sup_n |V_n^{(i)} f|, \; i = 1,2,3,4.$$

4. The main results

In this section we state the main results of the paper.

Theorem 4.1. *Let $f \in L_1(G_m \times G_m)$. Then $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(x,y,f) = f(x,y)$ for all Marcinkiewicz-Lebesgue points of f.*

Theorem 4.2. *Let $p > 1/2$. Then $\|Vf\|_p \le c_p \|f\|_p$ for any $f \in H_p(G_m \times G_m)$ and $\sup_{\lambda} \lambda\mu\{Vf > \lambda\} \le c\|f\|_1$.*

It is easy to show that $\lim_{n\to\infty} W_n(x,y;f) = 0$ for every Vilenkin polynomial and $(x,y) \in G_m \times G_m$. Taking into account that the Vilenkin polynomials are dense in $L_1(G_m \times G_m)$, from Theorem 4.2 and usual density arguments (see Marcinkiewicz and Zygmund [16]), we obtain the following result.

Corollary 4.1. *Let $f \in L_1(G_m \times G_m)$. Then*

$$\lim_{n\to\infty} W_n(x,y;f) = 0 \quad a.\ e.\ (x,y) \in G_m \times G_m,$$

and thus a. e. point is Marcinkiewicz-Lebesgue point of f.

Corollary 4.2 (Gat [4]). *Let $f \in L_1(G_m \times G_m)$. Then*

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(x,y;f) = f(x,y) \quad a.\ e.\ (x,y) \in G_m \times G_m.$$

5. Auxiliary propositions

In this section we state some auxiliary results that will be used in the proofs of main results.

Theorem W (Weisz [22]). *Suppose that the operator T is σ-sublinear and p-quasi-local for each $0 < p_0 < p \le 1$. If T is bounded from $L_\infty(G_m \times G_m)$ to $L_\infty(G_m \times G_m)$, then for every $0 < p_0 < p < \infty$ $\|Tf\|_p \le c_p \|f\|_p$, $(f \in H_p(G_m \times G_m))$. In particular, for $f \in L_1(G_m \times G_m)$ the inequality holds:*

$$\|Tf\|_{weak\_L_1(G_m \times G_m)} \le c\|f\|_1.$$

Lemma 5.1. *We have*

$$M_A K_{M_A}(x,y) = \tau_{1,A-1}(x+y) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{A-1} \tau_{k+1,A-1}(x,y) M_k \sum_{r=1}^{m_k-1} \left(\sum_{q=0}^{r-1} r_{M_k}^q(x)\right) \left(\sum_{s=0}^{r-1} r_{M_k}^s(y)\right) D_{M_k}(x) D_{M_k}(y)$$

$$
+\sum_{k=0}^{A-1} r_{k+1,A-1}(x,y)\sum_{r=1}^{m_k-1}\left(\sum_{q=0}^{r-1}\psi^q_{M_k}(x)\right)\psi^r_{M_k}(y)\,D_{M_k}(x)\,M_kK_{M_k}(y)
$$

$$
+\sum_{k=0}^{A-1} r_{k+1,A-1}(x,y)\sum_{r=1}^{m_k-1}\left(\sum_{s=0}^{r-1}\psi^s_{M_k}(y)\right)\psi^r_{M_k}(x)\,D_{M_k}(y)\,M_kK_{M_k}(x).
$$

Proof. Since (see [7])

$$
D_{j+rM_A}(x)=\left(\sum_{q=0}^{r-1}\psi^q_{M_A}(x)\right)D_{M_A}(x)+\psi^r_{M_A}(x)\,D_j(x)
$$

$$
j=0,1,\dots,M_A-1,\quad r=1,2,\dots,m_{A-1}-1,
$$

we can write

$$
M_AK_{M_A}(x,y)=\sum_{j=0}^{M_A-1}D_j(x)\,D_j(y)=M_{A-1}K_{M_{A-1}}(x,y)
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m_{A-1}-1}\sum_{j=0}^{M_{A-1}-1}D_{j+rM_{A-1}}(x)\,D_{j+rM_{A-1}}(y)=M_{A-1}K_{M_{A-1}}(x,y)
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m_{A-1}-1}\sum_{j=0}^{M_{A-1}-1}\left(\sum_{q=0}^{r-1}\psi^q_{M_{A-1}}(x)\right)D_{M_{A-1}}(x)\left(\sum_{q=0}^{r-1}\psi^q_{M_{A-1}}(y)\right)D_{M_{A-1}}(y)
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m_{A-1}-1}\sum_{j=0}^{M_{A-1}-1}\psi^r_{M_{A-1}}(x)\,\psi^r_{M_{A-1}}(y)\,D_j(x)\,D_j(y)
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m_{A-1}-1}\sum_{j=0}^{M_{A-1}-1}\left(\sum_{q=0}^{r-1}\psi^q_{M_{A-1}}(x)\right)D_{M_{A-1}}(x)\,\psi^r_{M_{A-1}}(y)\,D_j(y)
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m_{A-1}-1}\sum_{j=0}^{M_{A-1}-1}\left(\sum_{s=0}^{r-1}\psi^s_{M_{A-1}}(y)\right)D_{M_{A-1}}(y)\,\psi^r_{M_{A-1}}(x)\,D_j(x)
$$

$$
=\left(\sum_{r=0}^{m_{A-1}-1}\psi^r_{M_{A-1}}(x+y)\right)M_{A-1}K_{M_{A-1}}(x,y)
$$

$$
+M_{A-1}\sum_{r=1}^{m_{A-1}-1}\left(\sum_{q=0}^{r-1}\psi^q_{M_{A-1}}(x)\right)\left(\sum_{s=0}^{r-1}\psi^s_{M_{A-1}}(y)\right)D_{M_{A-1}}(x)\,D_{M_{A-1}}(y)
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m_{A-1}-1}\left(\sum_{q=0}^{r-1}\psi^q_{M_{A-1}}(x)\right)\psi^r_{M_{A-1}}(y)\,D_{M_{A-1}}(x)\,M_{A-1}K_{M_{A-1}}(y)
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m_{A-1}-1}\left(\sum_{s=0}^{r-1}\psi^s_{M_{A-1}}(y)\right)\psi^r_{M_{A-1}}(x)\,D_{M_{A-1}}(y)\,M_{A-1}K_{M_{A-1}}(x).
$$

Iterating this equality we complete the proof. $\square$

By results of [17] we have

$$|K_{M_A}(x)| \lesssim \sum_{s=0}^{A} \frac{M_s}{M_A} \sum_{x_s=1}^{m_s-1} D_{M_s}(x - x_s e_s), \tag{5.1}$$

$$n|K_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{A} M_j |K_{M_j}(x)|, \; M_A \leq n < M_{A+1}. \tag{5.2}$$

Then from (5.1) and (5.2) we can write

$$\begin{aligned} n|K_n(x)| &\lesssim \sum_{j=0}^{A} \sum_{s=0}^{j} M_s \sum_{x_s=1}^{m_s-1} D_{M_j}(x - x_s e_s) \\ &\lesssim \sum_{s=0}^{A} M_s \sum_{j=s}^{A} \sum_{x_s=1}^{m_s-1} D_{M_j}(x - x_s e_s). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Lemma 5.2. *Let $M_A \leq n < M_{A+1}$. Then we have*

$$\begin{aligned} n|K_n(x,y)| \leq &\sum_{j=0}^{A} \sum_{q=0}^{j-1} \sum_{k=q}^{j-1} r_{k+1,j-1}(x,y) M_q D_{M_k}(x) \sum_{y_q=1}^{m_q-1} D_{M_k}(y - y_q e_q) \\ &+ \sum_{j=0}^{A} \sum_{q=0}^{j-1} \sum_{k=q}^{j-1} r_{k+1,j-1}(x,y) M_q D_{M_k}(y) \sum_{x_q=1}^{m_q-1} D_{M_k}(x - x_q e_q) \\ &+ \sum_{j=0}^{A} D_{M_j}(x) \sum_{s=0}^{j} M_s \sum_{i=s}^{j} \sum_{y_s=1}^{m_s-1} D_{M_i}(y - y_s e_s) \\ &+ \sum_{j=0}^{A} D_{M_j}(y) \sum_{s=0}^{j} M_s \sum_{i=s}^{j} \sum_{x_s=1}^{m_s-1} D_{M_i}(x - x_s e_s). \end{aligned}$$

Proof. In [9] it is proved that

$$\begin{aligned} n|K_n(x,y)| \leq &\sum_{j=0}^{A} M_j |K_{M_j}(x,y)| + \sum_{j=0}^{A} D_{M_j}(x) \max_{1 \leq n \leq n^{(j)}} n|K_n(y)| \\ &+ \sum_{j=0}^{A} D_{M_j}(y) \max_{1 \leq n \leq n^{(j)}} n|K_n(x)|, \end{aligned}$$

where $n^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} n_k M_k$.

Hence, in view of Lemma 5.1 and formula (5.2), we can write

$$n|K_n(x,y)| \leq \sum_{j=0}^{A} \sum_{k=0}^{j-1} r_{k+1,j-1}(x,y) D_{M_k}(x) M_k |K_{M_k}(y)|$$

$$+\sum_{j=0}^{A}\sum_{k=0}^{j-1} r_{k+1,j-1}(x,y)\,D_{M_k}(y)\,M_k\,|K_{M_k}(x)|$$

$$+\sum_{j=0}^{A}\left[D_{M_j}(x)\max_{1\le n\le n^{(j)}} n\,|K_n(y)| + D_{M_j}(y)\max_{1\le n\le n^{(j)}} n\,|K_n(x)|\right]$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{A}\sum_{k=0}^{j-1} r_{k+1,j-1}(x,y)\,D_{M_k}(x)\sum_{q=0}^{k} M_q \sum_{y_q=1}^{m_q-1} D_{M_k}(y-y_qe_q)$$

$$+\sum_{j=0}^{A}\sum_{k=0}^{j-1} r_{k+1,j-1}(x,y)\,D_{M_k}(y)\sum_{q=0}^{k} M_q \sum_{x_q=1}^{m_q-1} D_{M_k}(x-x_qe_q)$$

$$+\sum_{j=0}^{A} D_{M_j}(x)\sum_{s=0}^{j} M_s \sum_{i=s}^{j}\sum_{y_s=1}^{m_s-1} D_{M_i}(y-y_se_s)$$

$$+\sum_{j=0}^{A} D_{M_j}(y)\sum_{s=0}^{j} M_s \sum_{i=s}^{j}\sum_{x_s=1}^{m_s-1} D_{M_i}(x-x_se_s).$$

Lemma 5.2 is proved. □

6. Proofs of main results

Proof of Theorem 4.1. We can write

$$|\sigma_n(x,y;f)-f(x,y)| \le \int\limits_{G_m\times G_m} |f(x-t,y-u)-f(x,y)|\,|K_n(t,u)|\,d\mu(t,u)$$

$$\le \frac{c}{n}\sum_{j=0}^{A}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{k=q}^{j-1}\sum_{u_q=1}^{m_q-1}\int\limits_{G_m\times G_m}|f(x-t,y-u)-f(x,y)|$$
$$\times r_{k+1,j-1}(t,u)M_qD_{M_k}(t)D_{M_k}(u-u_qe_q)d\mu(t,u)$$

$$+\frac{c}{n}\sum_{j=0}^{A}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{k=q}^{j-1}\sum_{t_q=1}^{m_q-1}\int\limits_{G_m\times G_m}|f(x-t,y-u)-f(x,y)|$$
$$\times r_{k+1,j-1}(t,u)M_qD_{M_k}(t-t_qe_q)D_{M_k}(u)d\mu(t,u)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{A}\sum_{s=0}^{j-1}\sum_{i=s}^{j}\sum_{u_s=1}^{m_s-1} M_s\int\limits_{G_m\times G_m}|f(x-t,y-u)-f(x,y)|\,D_{M_j}(t)D_{M_i}(u-u_se_s)d\mu(t,u)$$

$$+\frac{c}{n}\sum_{j=0}^{A}\sum_{s=0}^{j-1}\sum_{i=s}^{j}\sum_{t_s=1}^{m_s-1} M_s\int\limits_{G_m\times G_m}|f(x-t,y-u)-f(x,y)|\,D_{M_j}(t-t_se_s)D_{M_i}(u)d\mu(t,u)$$

$$= \frac{c}{n}\sum_{j=0}^{A}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{k=q}^{j-1}\sum_{u_q=1}^{m_q-1} M_q M_k^2 \int\limits_{I_k \times I_k(u_q e_q)} |f(x-t, y-u) - f(x,y)|$$

$$\times r_{k+1,j-1}(t,u) d\mu(t,u)$$

$$+\frac{c}{n}\sum_{j=0}^{A}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{k=q}^{j-1}\sum_{u_q=1}^{m_q-1} M_q M_k^2 \int\limits_{I_k(t_q e_q)\times I_k} |f(x-t, y-u) - f(x,y)| r_{k+1,j-1}(t,u) d\mu(t,u)$$

$$+\frac{c}{n}\sum_{j=0}^{A}\sum_{s=0}^{j}\sum_{i=s}^{j}\sum_{u_s=1}^{m_s-1} M_s M_i M_j \int\limits_{I_j \times I_i(u_s e_s)} |f(x-t, y-u) - f(x,y)| d\mu(t,u)$$

$$+\frac{c}{n}\sum_{j=0}^{A}\sum_{s=0}^{j}\sum_{i=s}^{j}\sum_{t_s=1}^{m_s-1} M_s M_i M_j \int\limits_{I_i(t_s e_s)\times I_j} |f(x-t, y-u) - f(x,y)| d\mu(t,u)$$

$$< \frac{c}{n}\sum_{j=0}^{A} M_j W_j(x, y; f).$$

The last expression tends to 0 as $n \to \infty$. and the result follows. □

Proof of Theorem 4.2. Since $Vf \le \sum_{j=1}^{4} V^{(j)} f$, in view of Theorem W, to complete the proof it is enough to show that the operators $V^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$ are p-quasi-local for each $1/2 < p < 1$ and bounded from $L_\infty(G_m \times G_m)$ to $L_\infty(G_m \times G_m)$. It follows from (3.1) that

$$\|Vf\|_\infty \le c\|f\|_\infty \sup_n \sum_{q=0}^{n}\sum_{k=q}^{n} \frac{M_q M_k}{M_k M_n} \le c\|f\|_\infty .$$

Let a be an arbitrary atom with support $I_N(z', z'') = I_N(z') \times I_N(z'')$. It is easy to see that $V_n(a) = 0$ if $n < N$. Therefore we can suppose that $n \ge N$. We may assume that $z' = z'' = 0$. Hence

$$\operatorname{supp}(a) \subset I_N \times I_N. \tag{6.1}$$

The rest of the proof we split into three steps.

Step 1: Integrating over $\overline{I}_N \times \overline{I}_N$. If $q > N$, then by (3.1) we have $y - u \notin I_N$, and hence $a(x-t, y-u) = 0$. Consequently, we can write

$$V_n^{(1)}(x, y; a) := \sum_{q=0}^{N-1}\sum_{k=q}^{N-1} \frac{M_k M_q}{m_k} \sum_{t_q=1}^{m_q-1}$$

$$\int\limits_{I_k(t_q e_q)\times I_k} a(x-t, y-u)\, \mathbb{I}_{\{t_r + u_r \pmod{m_r} = 0,\, r=k+1,\dots,n-1\}}(t,u)\, d\mu(t,u).$$

Then, in view of (6.1), $a(x-t, y-u) \neq 0$ implies that

$$t = (0, \ldots, 0, t_q, 0, \ldots, 0, x_k, \ldots, x_{N-1}, t_N, \ldots)$$

$$x = (0, \ldots, 0, t_q, 0, \ldots, 0, x_k, \ldots, x_{N-1}, \ldots)$$

$$u = (0, \ldots, 0, y_k, m_{k+1} - x_{k+1}, \ldots, m_{N-1} - x_{N-1}, u_N, \ldots)$$

$$y = (0, \ldots, 0, y_k, m_{k+1} - x_{k+1}, \ldots, m_{N-1} - x_{N-1}, y_N, \ldots).$$

Hence

$$\left|V_n^{(1)}(x, y; a)\right| \lesssim \frac{M_N^{2/p}}{M_N^2} \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{k=q}^{N-1} M_k M_q \mathbb{I}_{I_k(t_q e_q)}(x)$$
$$\times \mathbb{I}_{I_k(0, \ldots, 0, y_k, m_{k+1} - x_{k+1}, \ldots, m_{N-1} - x_{N-1})}(y)$$

and

$$(6.2) \qquad \int_{\overline{I}_N \times \overline{I}_N} \left(V^{(1)}(x, y; a)\right)^p d\mu(x, y) \leq \frac{c_p M_N^2}{M_N^{2p}} \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{k=q}^{N-1} M_k^p M_q^p \frac{1}{M_k} \frac{1}{M_N}$$
$$\leq c_p \frac{M_N}{M_N^{2p}} \sum_{q=0}^{N-1} M_q^p \sum_{k=q}^{N-1} M_k^{p-1} \leq c_p < \infty \qquad (1/2 < p \leq 1).$$

Analogously, we can prove that

$$(6.3) \qquad \int_{\overline{I}_N \times \overline{I}_N} \left(V^{(2)}(x, y; a)\right)^p d\mu(x, y) \leq c_p < \infty \qquad (1/2 < p \leq 1).$$

Since $x + t \notin I_N$, we obtain $V_n^{(3)}(x, y, a) = 0$. Similarly it can be shown that $V_n^{(4)}(x, y; a) = 0$. Using these and combining with (3.1) and (6.2), (6.3), we obtain

$$(6.4) \qquad \int_{\overline{I}_N \times \overline{I}_N} (V(x, y; a))^p d\mu(x, y) \leq c_p \quad (1/2 < p \leq 1).$$

Step 2: Integrating over $\overline{I}_N \times I_N$. Since $V_n^{(1)}(x, y; a) = 0$ for $q \geq N$, we have

$$(6.5) \qquad V_n^{(1)}(x, y; a) = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{k=q}^{N-1} \frac{M_k M_q}{m_k} \sum_{t_q=1}^{m_q-1} \int_{I_k(t_q e_q) \times I_k} a(x-t, y-u)$$
$$\times \mathbb{I}_{\{t_r + u_r (\mathrm{mod}\, m_r) = 0, r = k+1, \ldots, n-1\}}(t, u) \, d\mu(t, u) + \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{k=N}^{n} \frac{M_k M_q}{m_k} \sum_{t_q=1}^{m_q-1}$$
$$\int_{I_k(t_q e_q) \times I_k} a(x-t, y-u) \mathbb{I}_{\{t_r + u_r (\mathrm{mod}\, m_r) = 0, r = k+1, \ldots, n-1\}}(t, u) \, d\mu(t, u)$$
$$= V_n^{(1,1)}(x, y; a) + V_n^{(1,2)}(x, y; a).$$

In view of (6.1), $V_n^{(1.1)}(x,y;a) \neq 0$ implies that

$$u = (0,\ldots,0,u_N,\ldots), \quad y = (0,\ldots,0,y_N,\ldots)$$

$$t = (0,\ldots,0,t_q,0,\ldots,0,t_k,0,\ldots,0,t_N,\ldots)$$

$$x = (0,\ldots,0,t_q,0,\ldots,0,t_k,0,\ldots,0,x_N,\ldots).$$

Consequently, we have

$$\left|V_n^{(1.1)}(x,y;a)\right| \lesssim \frac{M_N^{2/p}}{M_N^2} \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{k=q}^{N-1} M_k M_q \sum_{t_q=1}^{m_q-1} \sum_{t_k=1}^{m_k-1} \mathbb{I}_{I_N(e_q t_q + e_k t_k)}(x)\, \mathbb{I}_{I_N}(y)$$

and

$$(6.6) \qquad \int_{\overline{I}_N \times I_N} \left(\sup_n \left|V_n^{(1.1)}(x,y;a)\right|\right)^p \leq \frac{c_p M_N^2}{M_N^{2p}} \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{k=q}^{N-1} M_k^p M_q^p \frac{1}{M_N^2} \leq c_p.$$

In view of (6.1), $V_n^{(1.2)}(x,y;a) \neq 0$ implies that

$$t = (0,\ldots,0,t_q,0,\ldots,0,t_k,\ldots,t_{n-1},t_n,\ldots), \quad x = (0,\ldots,0,t_q,0,\ldots,0,x_N,\ldots)$$

$$u = (0,\ldots,0,u_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{n-1},u_n,\ldots), \quad y = (0,\ldots,0,y_N,\ldots),$$

where

$$\alpha_j := \begin{cases} m_j - t_j, & t_j \neq 0 \\ 0, & t_j = 0, \; j = k+1,\ldots,n-1. \end{cases}$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} \left|V_n^{(1.2)}(x,y;a)\right| &\leq \frac{M_N^{2/p}}{M_N M_n} \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{k=q}^{N-1} M_k M_q \sum_{t_q=1}^{m_q-1} \mathbb{I}_{I_N(e_q t_q)}(x)\, \mathbb{I}_{I_N}(y) \\ &\leq \frac{c M_N^{2/p}}{M_n} \sum_{q=0}^{N-1} M_q \mathbb{I}_{I_N(e_q t_q)}(x)\, \mathbb{I}_{I_N}(y) \end{aligned}$$

and $(n \geq N)$

$$(6.7) \qquad \int_{\overline{I}_N \times I_N} \left(\sup_n \left|V_n^{(1,2)}(x,y;a)\right|\right)^p d\mu(x,y) \leq \frac{c_p M_N^2}{M_N^2 M_N^p} \sum_{q=0}^{N-1} M_q^p \leq c_p < \infty.$$

Combining (6.5)-(6.7) we conclude that

$$(6.8) \qquad \int_{\overline{I}_N \times I_N} \left(\left|V^{(1)}(x,y;a)\right|\right)^p d\mu(x,y) \leq c_p < \infty.$$

Let $q < N$. Then it is easy to show that $y - u \notin I_N$ and consequently $a(x-t, y-u) = 0$, $V_n^{(2)}(x,y;a) = 0$. Now let $q \geq N$. Then $x - t \notin I_N$ and $V_n^{(2)}(x,y;a) = 0$. Hence

$$(6.9) \qquad V^{(2)}(x,y;a) = 0.$$

Analogously, we can prove that

$$V^{(4)}(x,y;a)=0. \tag{6.10}$$

The estimation of $V^{(3)}(x,y;a)$ is similar to that of $V^{(2)}(x,y;a)$, and it can be shown that

$$\int\limits_{\overline{I}_N\times I_N}\left(\left|V^{(3)}(x,y;a)\right|\right)^p d\mu(x,y)\leq c_p<\infty \ \ (1/2<p\leq 1). \tag{6.11}$$

Combining (6.8)-(6.11) we conclude that

$$\int\limits_{\overline{I}_N\times I_N}\left(\left|V(x,y;a)\right|\right)^p d\mu(x,y)\leq c_p<\infty \ \ (1/2<p\leq 1). \tag{6.12}$$

Step 3: Integrating over $I_N\times\overline{I}_N$. This case is similar to the Step 2, and we obtain that

$$\int\limits_{I_N\times\overline{I}_N}\left(\left|V(x,y;a)\right|\right)^p d\mu(x,y)\leq c_p<\infty \ \ (1/2<p\leq 1). \tag{6.13}$$

Combining (6.4), (6.12) and (6.13) we complete the proof of the theorem. □

Список литературы

[1] G. N. Agaev, N. Ya. Vilenkin, G. M. Dzhafarli and A. I. Rubinshtejn, Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups [in Russian], Baku, Ehlm (1981).

[2] P. L. Butzer and R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation, Birkuser, Basel (1971)

[3] J. Fine, "Cesaro summability of Walsh-Fourier series", Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41**, 558 591 (1955).

[4] G. Gat, "Convergence of Marcinkiewicz means of integrable functions with respect to two-dimensional Vilenkin systems", Georgian Math. J. **11**, no. 3, 467 - 478 (2004).

[5] G. Gat and U. Goginava, "Almost everywhere strong summability of double Walsh-Fourier series", Journal of Contemporary Mathematical Analysis **50**, no. 1, 1 13 (2015).

[6] G. Gat, U. Goginava and G. Karagulyan, "Almost everywhere strong summability of Marcinkiewicz means of double Walsh-Fourier series" Anal. Math. **40**, no. 4, 243 266 (2014).

[7] B. I Golubov, A. V. Efimov, and V. A. Skvortsov, Series and Transformations of Walsh, Nauka, Moscow [in Russian] (1987); English transl.: Kluwer Acad. publ (1991).

[8] U. Goginava, "Almost everywhere convergence of (C,α)-means of cubical partial sums of d-dimensional Walsh-Fourier series", J. Approx. Theory. **141**, no. 1, 8 28 (2006).

[9] U. Goginava, "Marcinkiewicz-Fejér means of double Vilenkin-Fourier series", Studia Sci. Math Hungar., **44**, no. 1, 97 - 115 (2007).

[10] U. Goginava, "The weak type inequality for the Walsh system", Studia Math. **185**, no. 1, 35 48 (2008).

[11] U. Goginava and L. Gogoladze, "Pointwise summability of Vilenkin-Fourier series", Publ Math. Debrecen **79**, no. 1-2, 89 108 (2011).

[12] U. Goginava and L. Gogoladze, "Strong approximation by Marcinkiewicz means of two-dimensional Walsh-Fourier series", Constr. Approx. **35**, no. 1, 1 19 (2012).

[13] U. Goginava and F. Weisz, "Pointwise convergence of Marcinkiewicz-Fejér means of two-dimensional Walsh-Fourier series", Studia Sci. Math. Hungar., **49**, no. 2, 236 253 (2012).

[14] H. Lebesgue, "Recherches sur la convergence des séries de Fourier, Math. Annalen. **61**, 251 – 280 (1905).

[15] J. Marcinkiewicz, "Sur une mñthode remarquable de sommation des series doubles de Fourier", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. **8**, 149 – 160 (1939).

[16] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, "On the summability of double Fourier series", Fund. Math. **32**, 122 - 132 (1939).

[17] J. Pál and P. Simon, "On a generalization of the concept of derivative", Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **29**, no. 1-2, 155 - 164 (1977).

[18] H. G. Feichtinger and F. Weisz, "Wiener amalgams and pointwise summability of Fourier transforms and Fourier series", Math. Proc. Comb. Phil. Soc, **140**, 509 - 536 (2006).

[19] F. Schipp, "Bber gewissen maximaloperatoren", Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math., **18** 189 – 195 (1975).

[20] F. Weisz, "Convergence of singular integrals", Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math. **32**, 243 – 256 (1989).

[21] F. Weisz, "Convergence of double Walsh-Fourier series and Hardy spaces", Approx. Theory & its. Appl., **17**, no. 2, 32 – 44 (2001).

[22] F. Weisz, Summability of Multi-Dimensional Fourier Series and Hardy Space, Kluwer Academic, Dordrecht (2002).

[23] F. Weisz, "Walsh-Lebesgue points of multi-dimensional functions", Anal. Math., **34**, 307 – 324 (2008).

[24] L. Zhizhiashvili, "A generalization of a theorem of Marcinkiewicz [in Russian], Math. USSR, Izvestija, **2**, 1065 – 1075 (1968).

[25] L. Zhizhiashvili, Trigonometric Fourier Series and their Conjugates, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1996).

[26] A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge Press, London, 3rd edition, (2002).

Поступила 17 августа 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 5, 2017, стр. 52-67.

ОЦЕНКИ СНИЗУ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - армянский (Славянский) университет
Математический институт НАН Армении
E-mails: *haikghazaryan@mail.ru; vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ называется почти гипоэллиптическим (см. [16]), если все его производные $D^\nu P(\xi)$ оцениваются сверху через $P(\xi)$. Из Теоремы Зайденберга - Тарского следует, что для каждого многочлена $P(\xi)$ удовлетворяющего условию $P(\xi) > 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ существуют числа $\sigma > 0$ и $T \in \mathbb{R}^1$ такие, что $P(\xi) \geq \sigma(1 + |\xi|)^T$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Наибольшее из чисел T, удовлетворяющее этому соотношению, обозначим через $ST(P)$ и назовем числом Зайденберга - Тарского многочлена P. Известно, что если к тому же $P \in I_n$, т.е. $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, то $T = T(P) > 0$. В работе для одного класса почти гипоэллиптических многочленов $n \geq 2$ переменных находится достаточные условия при которых $ST(P) > 1$, а в случае $n = 2$ доказывается, что $ST(P) \geq 1$ для любого почти гипоэллиптического многочлена $P \in I_2$.

MSC2010 number: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: почти гипоэллиптический оператор; число Зайденберга - Тарского; многогранник Ньютона[1].

1. Постановка задачи и вспомогательные предложения

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times ... \times \mathbb{N}_0$ – множество n-мерных мультииндексов, $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ – n-мерные эвклидовы пространства точек (векторов) соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. $\mathbb{R}_+^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0 \ (j = 1, ..., n).\}$ $\mathbb{R}_0^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \cdots \xi_n \neq 0\}$. Для $\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{E}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^n \cap \mathbb{R}_0^n$ и $t > 0$ положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$,

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}, \quad |\xi, \lambda| = \sqrt{|\xi_1|^{2/\lambda_1} + ... + |\xi_n|^{2/\lambda_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n,$$

где $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ или $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ $(j = 1, ..., n)$, $(\lambda, \alpha) = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n$, $t^\lambda = (t^{\lambda_1}, \cdots, t^{\lambda_n})$, $t^\lambda \xi = (t^{\lambda_1} \xi_1, \cdots, t^{\lambda_n} \xi_n)$.

---

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 15T-1A 197 и Тематического Фонда Российско-Армянского университета министерства образования и науки Российской Федерации.

ОЦЕНКИ СНИЗУ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Многие свойства решений тех или иных задач линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами определяются поведением на бесконечности характеристического многочлена (символа) $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ дифференциального оператора $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$, отвечающего данному дифференциальному уравнению. Хорошо известно, что символ $P(\xi)$ гипоэллиптического по Л. Хермандеру оператора бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля аргумента (см. [1] или [2]), при этом из теоремы 11.1.3 монографии [1] следует существование положительных чисел σ и $c_0 = c_0(P)$ таких, что $|P(\xi)| \geq \sigma[1 + |\xi|^{c_0}]$ для всех достаточно больших $|\xi|$. Обозначим через $c = c(P)$ наибольшее из чисел $c_0(P)$ и назовем его числом гипоэллиптичности оператора P. Символы эллиптических операторов возрастают оптимально, т.е. для любого эллиптического оператора $P(D)$ порядка m существует число $\sigma > 0$ такое, что $|P(\xi)| \geq \sigma[1 + |\xi|^m]$ для всех достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Что касается символов общих линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, то из теоремы Зайденберга - Тарского следует (см. [3], [4], или [1], Пример А.2.6), что для каждого оператора $P(D)$, символ которого удовлетворяет условию $P(\xi) > 0$ $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$ существуют числа $\sigma > 0$ и $T \in \mathbb{R}^1$ такие, что $P(\xi) \geq \sigma(1 + |\xi|)^T$ $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$. Наибольшее из чисел T, удовлетворяющее этому соотношению, обозначим через $ST(P)$ и назовем числом Зайденберга - Тарского. Таким образом, для гипоэллиптического оператора (многочлена) P $ST(P) = c(P)$, а для эллиптического оператора P порядка m $ST(P) = m$.

Для гипоэллиптического оператора $P(D)$ числом Зайденберга - Тарского $ST(P)$ определяются те классы Жевре, к которым принадлежат решения уравнения $P(D)u = 0$, а для общих линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами этим числом определяются поведение фундаментальных решений в начале координат и на бесконечности и другие свойства (см. [5] - [8]).

Обозначим через I_n множество многочленов с вещественными коэффициентами n переменных таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. Очевидно, что умножением на (-1) и добавлением положительной константы всегда можно добиться того, что любой многочлен $P \in \mathrm{I}_2$ будет положительным для всех значений $\xi \in \mathbb{R}^n$.

В работе [9] для многочленов двух переменных, представляющихся в виде суммы трех однородных многочленов, найдены необходимые и достаточные условия принадлежности этих многочленов множеству I_2, а в [10] найден алгоритм вычисления числа Зайденберга - Тарского для таких многочленов. Отмеченные условия и алгоритм получены в терминах порядков и кратностей нулей соответствующих однородных многочленов. В работе [11] получены необходимые и достаточные условия принадлежности почти гипоэллиптического многочлена (см. ниже, определение 1.1) $n \geq 2$ переменных к $\mathbb{I}_n$ в терминах устойчивости многочленов относительно линейных невырожденных преобразований. В работе В. П. Михайлова [12] найдены достаточные условия принадлежности многочлена к I_n в терминах невырожденности соответствующих подмногочленов, а в работе Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [13] в терминах устойчивости многочленов относительно возмущения коэффициентов исследуемого многочлена.

Из теоремы Зайденберга - Тарского следует, что для многочлена $P \in I_2$ число $ST(P)$ является положительным. Однако во многих вопросах теории линейных дифференциальных уравнений особый интерес представляет случай, когда $ST(P) \geq 1$, поэтому часто на изучаемый оператор априори ставится условие $ST(P) \geq 1$. Это обеспечивает, например, существование достаточно богатого множества бесконечно дифференцируемых решений в множестве обобщенных решений негипоэллиптического (например, почти гипоэллиптического) уравнения $P(D) = 0$ (см., например, [14] - [15]).

Целью настоящей работы является нахождение алгебраических условий на почти гипоэллиптический многочлен $P \in \mathbb{I}_n$, при которых $ST(P) > 1$. Основными результатами работы являются:

Теорема I (см. Следствие 1.1) *Пусть* $P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi)$ *почти гипоэллиптический многочлен (с, вообще говоря, комплексными коэффициентами), где* P_j m_j *- однородный многочлен* ($j = 0, 1, ..., M$: $m_0 > m_1 > ... > m_M$). *Пусть для всех* $\eta \in \Sigma(P_0)$ *кратность нуля* $l(\eta)$ *многочлена* P_0 *меньше* m_0. *Если* $P \in \mathbb{I}_n$, *то с некоторой постоянной* $C > 0$ *и для всех* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *имеет место неравенство*

$$|\xi| \leq C\,[|P(\xi)| + 1].$$

Теорема II (см. Теорема 3.1) *Пусть* $n = 2$ *и* $P \in \mathbb{I}_2$ *почти гипоэллиптический многочлен. Тогда с некоторой постоянной* $C > 0$ *и для всех* $\xi \in \mathbb{R}^2$ *имеем*

$$|\xi| \leq C\,[|P(\xi)| + 1].$$

Статья имеет следующую структуру: в оставшейся части этого параграфа мы формулируем некоторые вспомогательные результаты и доказываем Теорему I (см. Следствие 1.1). В §2 мы изучаем некоторые свойства многочленов двух переменных, которые мы используем в §3 для доказательства Теоремы II (см. Теорему 3.1).

Следующий пример показывает, что принадлежность многочлена P множеству I_n не гарантирует оценку $ST(P) > 1$. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^4 - \xi_2)^2 + \xi_1^2$. Очевидно, $P \in \mathbb{I}_2$. Рассмотрим поведение P на последовательности $\{\xi^s = (s^{1/4}, s)\}_{s=1}^{\infty}$ при $s \to \infty$. Очевидно, что для достаточно больших s $P(\xi^s) = s^{1/2}$, а $|\xi^s| \sim s$, т.е $P(\xi^s)/|\xi^s| \to 0$ при $s \to \infty$, поэтому многочлен P не удовлетворяет соотношению $ST(P) \geq 1$. Отметим, что многочлен P в этом примере не является почти гипоэллиптическим, так как, например, $|D_1^2 P(\xi^s)|/P(\xi^s) = 32\, s^2 \to \infty$ при $s \to \infty$.

Далее под n-мерным многочленом мы будем понимать многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum \gamma_\alpha \xi^\alpha$ такой, что для каждого $j = 1, ..., n$ существует точка $\xi^j \in \mathbb{R}^n$ такая, что $D_j P(\xi^j) \neq 0$. Обозначим через (P) множество $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, для которых $\gamma_\alpha \neq 0$.

Лемма 1.1. *Пусть $M, n_j \in \mathbb{N}_0$, $n_M > ... > n_0 \geq 0$ $x, a_j \in \mathbb{R}^1$ $(j = 0, 1, ..., M)$, $a_0 \cdots a_M \neq 0$ и $r(x) = \sum_{j=0}^{M} a_j x^{n_j}$. Тогда кратность нуля любого ненулевого корня многочлена r не превосходит M.*

Доказательство. Пусть, наоборот, для некоторого $x_0 \neq 0$

$$r^{(j)}(x_0) = 0, \ \ j = 0, 1, ..., M. \tag{1.1}$$

Тогда система соотношений (1.1) эквивалентна системе

$$x_0^j r^{(j)}(x_0) = 0 \ \ j = 0, 1, ..., M. \tag{1.1'}$$

Рассмотрим эту систему как линейную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\{a_j\}$. Введем обозначения $a(x_0) = (a_0 x_0^{n_0}, a_1 x_0^{n_1}, ..., a_M x_0^{n_M})$ и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ n_0 & n_1 & \dots & n_M \\ \vdots & \vdots & & \\ \prod_{j=0}^{M-1}(n_0 - j) & \prod_{j=0}^{M-1}(n_1 - j) & \dots & \prod_{j=0}^{M-1}(n_M - j) \end{pmatrix}$$

Тогда систему (1.1') можно записать в виде $Aa(x_0) = 0$. Так как $x_0 \neq 0$ и $det A \neq 0$, то $a_j = 0$, $j = 0, 1, ..., M$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Определение 1.1. *(см. [16]) Многочлен P назовем почти гипоэллиптическим, если с некоторой постоянной $C > 0$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |D^\alpha P(\xi)| \leq C\,[|P(\xi)| + 1].$$

Пусть R однородный многочлен порядка m (m - однородный многочлен). Через $\Sigma(R)$ обозначим множество его вещественных корней на единичной сфере: $\Sigma(R) = \{\eta \in R^n, |\eta| = 1, R(\eta) = 0\}$, а через $l_R(\eta)$ кратность корня $\eta \in \Sigma(R)$ и положим $l(R) := \sup\limits_{\eta \in \Sigma(R)} l_R(\eta)$. Из формулы Эйлера для однородных функций непосредственно следует утверждение.

Лемма 1.2. *Если для m-однородного многочлена R $l = l(R) < m$, то*

$$\inf_{|\eta|=1} \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha R(\eta)| > 0 \quad (j = l, l+1, \dots, m).$$

Лемма 1.3. *Пусть R m- однородный многочлен с вещественными коэффициентами и $\eta \in \Sigma(R)$. Если $R(\xi) \geq 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, то m и $l(\eta)$ четные числа.*

Доказательство. Четность m очевидна. Докажем четность $l(\eta)$, при этом достаточно рассмотреть случай $l(\eta) < m$. В силу определения $l(\eta)$ имеем $\sum\limits_{|\alpha|=l(\eta)} |D^\alpha R(\eta)| \neq 0$, поэтому существует точка $\tau \in R^n$ такая, что $\sum\limits_{|\alpha|=l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!} \tau^\alpha \neq 0$. Применяя формулу Лейбница, получаем

$$0 \leq R(\eta + t\,\tau) = \left[\sum_{|\alpha|=l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!} \tau^\alpha\right] t^{l(\eta)} + \sum_{|\alpha|>l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!} \tau^\alpha t^{|\alpha|}.$$

Отсюда при $t \to \infty$ имеем

$$0 \leq R(\eta + t\,\tau) = t^{l(\eta)} [\sum_{|\alpha|=l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!} \tau^\alpha](1 + o(1)).$$

Откуда непосредственно следует, что $\sum\limits_{|\alpha|=l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!} \tau^\alpha > 0$ и число $l(\eta)$ четное. $\square$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n$. Многочлен $R(\xi) = R(\xi_1, \dots, \xi_n)$ назовем λ - однородным λ-порядка $d = d(R, \lambda)$, если $R(t^\lambda \xi) = R(t^{\lambda_1}\xi_1, \dots, t^{\lambda_n}\xi_n) = t^d R(\xi)$ для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, λ–однородный многочлен $R(\xi)$ λ–порядка d, представляется в виде

$$R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{1.2}$$

Лемма 1.4. *Пусть $n = 2$. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ взаимно простые числа, R $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ однородный многочлен $\lambda-$порядка d вида (1.2) такой, что $R(0,1) \cdot R(1,0) \neq 0$. Тогда 1) $d, d/\lambda_1, d/\lambda_2 \in \mathbb{N}$, 2) существуют числа $d_1 \in \mathbb{N}$ и $a_j \in \mathbb{R}^1$ $(j = 0, 1, \ldots, d_1)$ такие, что многочлен R можно представить в виде*

$$R(\xi) = \sum_{j=0}^{d_1} a_j \, (\xi_1^{\lambda_2})^j \, (\xi_2^{\lambda_1})^{d_1 - j} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Доказательство. Что $d \in \mathbb{N}$, очевидно. Из условия $R(0,1) \cdot R(1,0) \neq 0$ следует, что множество (R) содержит ненулевые мультииндексы $(\alpha_1, 0)$ и $(0, \alpha_2)$ такие, что $\alpha_1 \lambda_1 = \alpha_2 \lambda_2 = d$, откуда следует, что $d/\lambda_1, d/\lambda_2 \in \mathbb{N}$. Это доказывает первый пункт леммы.

Для доказательства второго пункта отметим, что из взаимной простоты чисел λ_1 и λ_2 следует, что $d_1 := d/(\lambda_1 \lambda_2) \in \mathbb{N}$. Положим $\Pi := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^2, (\lambda, \alpha) = d\}$ и пусть $\beta \in \Pi$, т.е. $\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 = d = d_1 \lambda_1 \lambda_2$, или, что то же самое, $\frac{\beta_1}{\lambda_2} \lambda_1 = d_1 \lambda_1 - \beta_2$.

Так как $d_1 \lambda_1 - \beta_2 \in \mathbb{N}_0$ и числа λ_1 и λ_2 взаимно простые, то $\frac{\beta_1}{\lambda_2} \in \mathbb{N}_0$. Следовательно $\Pi := \{(\lambda_2 j, \lambda_1 (d_1 - j)) \; j = 0, 1, \ldots, d_1\}$. Так как $(R) \subset \Pi$, то отсюда имеем

$$R(\xi) = \sum_{j=0}^{d_1} \gamma_{j \lambda_2, (d_1 - j) \lambda_1} \, (\xi_1^{\lambda_2})^j \, (\xi_2^{\lambda_1})^{d_1 - j} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где $\gamma_{j \lambda_2, (d_1 - j) \lambda_1} = 0$ при $(j \lambda_2, (d_1 - j) \lambda_1) \notin (R)$, что доказывает требуемое представление. Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.5. *Пусть P почти гипоэллиптический многочлен m-ого порядка, представленный в виде суммы однородных многочленов:*

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_{m_j}(\xi), \tag{1.3}$$

где $m = m_0 > m_1 > \ldots > m_M \geq 0$, P_{m_j} m_j- однородный многочлен $(j = 0, \ldots, M)$. Если $l = l(P_m) < m$, то 1) $P \in I_n$, 2) существует положительное число c_1 такое, что

$$|\xi|^2 \leq (|\xi| + 1)^{m-l} \leq c_1 \left[|P(\xi)| + 1\right] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Доказательство. В силу леммы 1.2 и m-однородности многочлена P_m с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\xi|^{m-l} \leq C_1 |\xi|^{m-l} \sum_{|\alpha|=l} |(D^\alpha P_m)(\xi/|\xi|)|$$

$$= C_1|\xi|^{m-l}|\xi|^{-(m-l)}\sum_{|\alpha|=l}|(D^\alpha P_m)(\xi)| = C_1\sum_{|\alpha|=l}|(D^\alpha P_m)(\xi)|.$$

Так как многочлен P почти гипоэллиптичен, то отсюда имеем с некоторыми положительными постоянными C_2 и C_3

$$|\xi|^{m-l} \le C_1\sum_{|\alpha|=l}|[(D^\alpha P)(\xi) - D^\alpha(P - P_m)(\xi)]|$$

$$< C_1\sum_{|\alpha|=l}|(D^\alpha P)(\xi)| + C_2(|\xi|+1)^{m_1-l}$$

$$< C_3[|P(\xi)|+1] + C_2(|\xi|+1)^{m_1-l} \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Так как $m_1 < m$, то отсюда с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$|\xi|^{m-l} \le C_4[|P(\xi)|+1] \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Так как $l < m$, то это значит, что $P \in \mathbb{I}_n$, что доказывает первый пункт леммы. Неравенством (1.5) доказана также правая часть неравенства (1.4)

Для доказательства левой части неравенства (1.4), нам надо показать, что $m - l \ge 2$. С этой целью заметим (см. [17], лемма 3.1), что для многочлена $P \in \mathbb{I}_n$ подмногочлен P_m (с вещественными коэффициентами) сохраняет знак в R^n. А это по лемме 1.3 означает, что числа m и $l_{P_m}(\eta)$ чётные для всех $\eta \in \Sigma(P_m)$. В силу того, что $l < m$ отсюда следует, что $m - l \ge 2$, если $m > 2$ и $l = 0$, если $m = 2$. Этим левая часть (1.4) и тем самым лемма 1.5 доказана. □

Следствие 1.1. *(см. Теорему I в пункте 1) Так как многочлен P (с, вообще говоря, комплексными коэффициентами) и многочлен $|P|^2$ одновременно принадлежат или нет $\mathbb{I}_n$, то в силу леммы 1.5 существует число $c > 0$ такое, что*

$$|\xi|^2 \le (1+|\xi|)^{2(m_0-l)} \le c\,[|P(\xi)|^2+1] \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

где $l := \sup_{\eta\in\Sigma(P_0)} l(\eta)$.

Это дает ответ (достаточное условие) на поставленный вопрос в случае, когда почти гипоэллиптический многочлен вида (1.3) удовлетворяет условию $l(P_m) < m$. Нам не известно, является ли это условие также необходимым для n−мерных почти гипоэллиптических многочленов $P \in \mathbb{I}_n$ при $n > 2$? Но ниже мы покажем, что любой почти гипоэллиптический многочлен двух переменных $P \in \mathbb{I}_2$ удовлетворяет соотношению (1.6).

Отметим, что принадлежность многочлена множеству $\mathbb{I}_n$ не гарантирует его гипоэллиптичность, что следует из следующего примера: пусть $n = 3$, $P(\xi) = (\xi^2 + \xi_3^2 - \xi_1^2)^4 + \xi^2 + \xi_2^2 + \xi_3^4$. Применяя теорему 3.1 работы [17] убедимся, что это почти гипоэллиптический многочлен, а из теоремы 1 работы [11] следует, что $P \in \mathbb{I}_3$, при этом это не гипоэллиптический многочлен, так как не удовлетворяет необходимому условию гипоэллиптичности (см. [19] , теорема 1).

2. Некоторые свойства многочленов двух переменных

Многоугольником Ньютона многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ назовем наименьший выпуклый многоугольник $\Re(P) \subset \mathbb{R}_+^2$ с вершинами из $\mathbb{N}_0^2$, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$. Очевидно, многоугольник Ньютона 2−мерного многочлена является 2−мерным, т.е. $\Re \cap \mathbb{R}_+^2 \cap \mathbb{R}_0^2 \neq \emptyset$.

Многоугольник $\Re$ назовем правильным, если для любого $\nu \in \Re$ $\Pi(\nu) := \{\mu \in \mathbb{R}_+^2, \mu \le \nu\} \subset \Re$. Для 2−мерного многоугольника $\Re \subset R_+^2$ через $\Lambda(\Re)$ обозначим множество внешних (относительно $\Re$) нормалей одномерных некоординатных сторон. Легко убедиться, что 2-мерный многоугольник $\Re \subset \mathbb{R}_+^2$ является правильным тогда и только тогда, когда $\Lambda(\Re) \subset \mathbb{R}_+^2$. В [17] доказано, что многоугольник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена является правильным.

Так как вершины многоугольника Ньютона любого многочлена являются мультииндексами, то среди внешних нормалей любой (одномерной) стороны (нормалей из $\Lambda(\Re)$) существует вектор с рациональными и, следовательно, с целыми координатами. При этом, если λ какая - то внешняя нормаль (одномерной) стороны Γ многоугольника $\Re(P)$ многочлена $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$, то уравнение прямой содержащей сторону Γ задается формулой $(\lambda, \alpha) = m(\lambda)$, где $m(\lambda) = \max\{(\lambda, \beta), \beta \in (P)\}$. В этом случае $m(\lambda)$−однородный многочлен $P_{m(\lambda)}(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha)=m(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ назовем подмногочленом многочлена P, отвечающим стороне Γ.

Лемма 2.1. *Пусть $\Re(P)$ правильный многоугольник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена $P \in \mathbb{I}_2$. Если существует некоординатная (одномерная) сторона Γ многоугольника $\Re(P)$, среди внешних нормалей которой имеется вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ с взаимно простыми натуральными компонентами, то подмногочлен $P_{m(\lambda)}$ сохраняет знак в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Так как многочлен $P_{m(\lambda)}$ λ−однородный, то достаточно показать, что $P_{m(\lambda)}$ сохраняет знак на множестве $\mathfrak{D} = \{\xi \in \mathbb{R}^2, |\xi, \lambda| = 1\}$.

Пусть, наоборот, $P_{m(\lambda)}(\eta^1) > 0$, $P_{m(\lambda)}(\eta^2) < 0$ для пары точек $\eta^1, \eta^2 \in \mathcal{D}$ и пусть $t \to \infty$. Тогда

$$P(t^\lambda \eta^1) = t^{m(\lambda)} P_{m(\lambda)}(\eta^1) + o(t^{m(\lambda)}) \to +\infty,$$

$$P(t^\lambda \eta^2) = t^{m(\lambda)} P_{m(\lambda)}(\eta^2) + o(t^{m(\lambda)}) \to -\infty.$$

Это значит, что для любого достаточно большого t существует точка $\eta(t) \in \mathcal{D}$ такая, что $P(t^\lambda \eta(t)) = 0$. Из компактности множества $\mathcal{D}$ следует существование последовательности $\{t_s\}_{s=1}^\infty$ такой, что $t_s \to \infty$ и последовательность $\{\eta(t_s)\}_{s=1}^\infty$ сходится к некоторой точке $\tau \in \mathcal{D}$ при $s \to \infty$.

Так как $\eta(t_s) \to \tau$, $0 = P(t_s^\lambda \eta(t_s)) = t_s^{m(\lambda)} P_{m(\lambda)}(\eta(t_s)) + o(t_s^{m(\lambda)})$ при $s \to \infty$, то $P_{m(\lambda)}(\tau) = 0$, т.е. $\tau \subset \Sigma(P_{m(\lambda)}, \lambda)$, где $\Sigma(P_{m(\lambda)}, \lambda) = \{\eta \in R^n, |\xi, \lambda| - 1, P_{m(\lambda)}(\eta) = 0\}$.

Так как многочлен $P_{m(\lambda)}$ является $\lambda-$однородным, то существуют числа $l_1, l_2 \in N_0$ и $\lambda-$однородный многочлен R, $\lambda-$порядка $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 > 0$ такие, что $R(0,1) \cdot R(1,0) \neq 0$ и многочлен $P_{m(\lambda)}$ представляется в виде $P_{m(\lambda)}(\xi) = \xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} R(\xi)$ $\forall \xi \in R^2$

Вследствие того, что R $\lambda-$однородный многочлен $\lambda-$порядка $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 > 0$ такой, что $R(0,1) \cdot R(1,0) \neq 0$ и λ вектор с целочисленными компонентами, из первого пункта леммы 1.4 следует, что числа $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2$, $(m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2)/\lambda_1$ и $(m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2)/\lambda_2$ натуральные. Имея в виду, что числа λ_1 и λ_2 взаимно простые, из второго пункта леммы 1.4 получим, что $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 = l\lambda_1\lambda_2$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, множество $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^2, (\lambda, \alpha) = m\}$ можно представить в виде $\{(\lambda_2(l-j), \lambda_1 j)\ (j = 0, 1, ..., l)\}$ и, что многочлен $P_{m(\lambda)}$ представляется в виде

$$P_{m(\lambda)}(\xi) = \xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} R(\xi) = \xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} \sum_{j=0}^{l} \delta_j \xi_1^{\lambda_2(l-j)} \xi_2^{\lambda_1 j} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

где $\delta_0 = R(0,1)$, $\delta_l = R(1,0)$.

Рассмотрим следующие три возможности: 1) $\tau_1 = 0$ (следовательно $\tau = (0, \pm 1)$), 2) $\tau_2 = 0$ (следовательно $\tau = (\pm 1, 0)$), 3) $\tau_1\tau_2 \neq 0$.

В случае 1) из представления (2.1) и из того, что $R(0,1) \neq 0$ следует, что $l_1 > 1$ и $D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau) \neq 0$. Так как $\eta(t_s) \to \tau$ при $s \to \infty$, то с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем для достаточно больших s

$$|(D_1^{l_1} P)(t_s^\lambda\, \eta(t_s))| \geq |(D_1^{l_1} P_{m(\lambda)})(t_s^\lambda\, \eta(t_s))| - |(D_1^{l_1} [P - P_{m(\lambda)}](t_s^\lambda\, \eta(t_s))|$$

$$\geq t_s^{m(\lambda) - l_1\lambda_1} |(D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\eta(t_s))| - o(t_s^{m(\lambda) - l_1\lambda_1}) \geq C_1\, t_s^{m(\lambda) - l_1\lambda_1}.$$

Из почти гипоэллиптичности P отсюда имеем с некоторыми постоянными $C_2, C_3 > 0$ для всех достаточно больших s

$$t_s^{m(\lambda)-l_1\lambda_1} \le C_2\,|(D_1^{l_1}P)(t_s^\lambda\,\eta(t_s))| \le C_3[|P(t_s^\lambda\,\eta(t_s))|+1] = C_3,$$

что противоречит тому, что $m(\lambda) - l_1\lambda_1 > 0$ и $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$.

В случае 2) из представлении (2.1) следует, что $l_2 \ge 1$. Проводя аналогичные рассуждения, получим с некоторыми постоянными $C_4, C_5 > 0$ для всех достаточно больших s

$$t_s^{m(\lambda)-l_2\lambda_2} \le C_4\,|(D_2^{l_2}P)(t_s^\lambda\,\eta(t_s))| \le C_5[|P(t_s^\lambda\,\eta(t_s))|+1] = C_5,$$

что противоречит тому, что $m(\lambda) - l_2\lambda_2 > 0$ и $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$.

В случае 3) зафиксируем τ_2 и рассмотрим $R(x,\tau_2)$ как многочлен от x, зависящий от параметра τ_2. Так как в силу леммы 1.1 $x = \tau_1$ является корнем многочлена $R(x,\tau_2)$ кратности $l_0 \le l$, то $D_1^{l_0}P_{m(\lambda)}(\tau) = \tau_1^{l_1}\tau_2^{l_2}D_1^{l_0}R(\tau) \ne 0$. И так как $D_1^{l_0}P_{m(\lambda)}(\eta(t_s)) \to D_1^{l_0}P_{m(\lambda)}(\tau)$ при $s \to \infty$, то существует число $C_6 > 0$ такое, что для всех достаточно больших s

$$|D_1^{l_0}P_{m(\lambda)}\,(t_s^\lambda\eta(t_s))| = t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}|D_1^{l_0}P_{m(\lambda)}\,(\eta(t_s))| \ge t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}.$$

Отсюда с некоторой постоянной $C_7 > 0$ имеем для всех достаточно больших s

$$|D_1^{l_0}P(t_s^\lambda\eta(t_s))| \ge |D_1^{l_0}P_{m(\lambda)}\,(t_s^\lambda\eta(t_s))| - |D_1^{l_0}[P - P_{m(\lambda)}](t_s^\lambda\eta(t_s))|$$

$$\ge C_6\,t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1} - o(t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}) \ge C_7\,t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}.$$

Имея в виду почти гипоэллиптичность многочлена P, отсюда имеем с некоторой постоянной $C_8 > 0$ для всех достаточно больших s

$$t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1} \le C_8\,[|P(t_s^\lambda\eta(t_s))|+1] = C_8. \tag{2.2}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\lambda_1 < \lambda_2$, тогда $m(\lambda) - l_0\lambda_1 = m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 - l_0\lambda_1 = l\lambda_1\lambda_2 - l_0\lambda_1 + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 \ge l\lambda_1(\lambda_2 - 1) + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 > 0$. Так как $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$, то это противоречит соотношению (2.2) и доказывает лемму. □

Лемма 2.2. *Пусть многочлен P удовлетворяет условиям леммы 2.1 и $\lambda_2 > \lambda_1$. Тогда существует число $C > 0$ такое, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ имеем*

$$|\xi|^{[\text{illegible}]} \le C[|P(\xi)|+1]. \tag{2.3}$$

Доказательство. В ходе доказательства будем пользоваться обозначениями, введенными в доказательстве леммы 2.1. Сначала отметим следующую простую цепь неравенств при $\lambda_2 > \lambda_1$ и для всех $\xi \in R^2$

$$|\xi|^{2\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}} \le c_1[1+|\xi_1|^{2\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}}+|\xi_2|^{2\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}}]$$

$$\le c_2[1+(\sqrt{|\xi_1|^{2/\lambda_1}+|\xi_2|^{2/\lambda_2}})^{2(\lambda_2-1)}] = c_2[1+|\xi,\lambda|^{2(\lambda_2-1)}].$$

Так, что мы докажем больше, если покажем, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$|\xi,\lambda|^{2(\lambda_2-1)} \le C_1[|P(\xi)|+1] \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^2. \tag{2.4}$$

Предположим обратное, что существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ такая, что $|\xi^s,\lambda| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$|P(\xi^s)|/|\xi^s,\lambda|^{2(\lambda_2-1)} \to 0. \tag{2.5}$$

Положим $\tau^s = \xi^s/|\xi^s,\lambda|^\lambda$ $(s = 1,2,\ldots)$. Из леммы 2.1 следует, что многочлен $P_{m(\lambda)}$ сохраняет знак: $P_{m(\lambda)}(\xi) \ge 0$ в R^2, а из леммы 1.4 следует, что числа l_1, l_2, и $m(\lambda)$ четные, при этом $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 \ge 0$. Поэтому $m(\lambda) \ge 2$.

С другой стороны так как $|\tau^s,\lambda| = 1$ $(s = 1,2,\ldots)$ и при $s \to \infty$

$$P(\xi^s) = |\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)}\, P_{m(\lambda)}(\tau^s) + o(|\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)}),$$

то из предположения (2.5) следует, что предельные точки последовательности $\{\tau^s\}$ принадлежат множеству $\Sigma(P_{m(\lambda)},\lambda) := \{\xi \in R^2,\ |\xi,\lambda| = 1,\ P_{m(\lambda)}(\xi) = 0\}$. Пусть $\tau \in \Sigma(P_{m(\lambda)})$ одна из этих предельных точек. Не умаляя общности, можно считать, что $\tau^s \to \tau$ при $s \to \infty$. Представим многочлен $P_{m(\lambda)}$ в виде (2.1) и, как при доказательстве леммы 2.1, рассмотрим следующие три возможности: 1) $\tau_1 = 0$ (следовательно $\tau = (0,\pm1)$), 2) $\tau_2 = 0$ (следовательно $\tau = (\pm1,0)$), 3) $\tau_1\tau_2 \ne 0$. Так как в случае 1) $D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau) = l_1!\tau_2^{l_2} R(\tau) = l_1! R(0,1) \ne 0$ и $D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau^s) \to D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau)$ при $s \to \infty$, то с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем для достаточно больших s

$$|D_1^{l_1} P(\xi^s)| \ge |D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\xi^s)| - |D_1^{l_1}(P - P_{m(\lambda)})(\xi^s)|$$

$$= |\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)-l_1\lambda_1}|D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau^s)| - o(|\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)-l_1\lambda_1}) \ge C_2\,|\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)-l_1\lambda_1}.$$

В силу почти гипоэллиптичности P отсюда имеем с некоторой постоянной $C_3 > 0$ для достаточно больших s $|\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)-l_1\lambda_1} \le C_3\,[|P(\xi^s)|+1]$. Так как (см. выше) $m(\lambda) - l_1\lambda_1 \ge 2\lambda_2$, то это противоречит (2.5) и завершает рассмотрение первого случая.

Рассуждая как в случае 1), в случае 2) для достаточно больших s получим оценку $|\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)-l_2\lambda_2} \leq C_4\,[|P(\xi^s)| + 1]$ с некоторой постоянной $C_4 > 0$. Так как $m(\lambda) - l_2\lambda_2 > 2\lambda_2$, то это противоречит (2.5) и завершает рассмотрение второго случая.

В случае 3) из представления (2.1) следует, что $\tau \in \Sigma(R, \lambda)$. Зафиксируем τ_2 и рассмотрим $R(x, \tau_2)$ как многочлен от x, зависящей от параметра τ_2. Если через l_0 обозначить кратность корня $x = \tau_1$ многочлена $R(x, \tau_2)$, то в силу леммы 1.1 $l_0 \leq l$. С другой стороны, так как $(D_1^{l_0-j} R)(\tau) = 0$ при $j > 0$, $D_1^{l_0} R(x, \tau_2)]|_{x=\tau_1} \neq 0$, то $D_1^{l_0} P_{m(\lambda)}(\tau) = \tau_1^{l_1}\tau_2^{l_2}\, D_1^{l_0} R(\tau) \neq 0$.

Пусть $\tau^s \to \tau$ при $s \to \infty$, тогда с некоторой постоянной $C_5 > 0$ имеем для достаточно больших s

$$|D_1^{l_0} P(\xi^s)| \geq |D_1^{l_0} P_{m(\lambda)}(\xi^s)| - |D_1^{l_0}[P - P_{m(\lambda)}](\xi^s)|$$

$$\geq |\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}\, |D_1^{l_0} P_{m(\lambda)}(\tau^s)| - o(|\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}) \geq C_5\, |\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}$$

Отсюда, в силу почти гипоэллиптичности многочлена P, получаем неравенство $|\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)-l_0\lambda_1} \leq C_6\,[|P(\xi^s)| + 1]$ с некоторой постоянной $C_6 > 0$ для всех достаточно больших s. Так как $m(\lambda) - l_0\lambda_1 = l\,\lambda_1\lambda_2 + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 - l_0\lambda_1 > l\,\lambda_1(\lambda_2 - 1) + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_1 \geq 2(\lambda_2 - 1)$, то полученная оценка противоречит (2.5) и завершает доказательство оценки (2.4). □

На примере покажем, что оценка (2.3) является точной в том смысле, что в левой части неравенства (2.3) нельзя показатель $2(\lambda_2 - 1)/\lambda_2$ заменить на $2(\lambda_2 - 1)/\lambda_2 + \varepsilon$ ни для какого $\varepsilon > 0$.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что многочлен $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2)^2 + \xi_1^2$ является почти гипоэллиптическим. Его многоугольником Ньютона является прямоугольный треугольник с вершинами $(4, 0), (0, 0), (0, 2)$ и с единственной некоординатной стороной $(4, 0) - (0, 2)$. При этом вектор $\lambda = (1, 2)$, с взаимопростыми координатами, является внешней нормалью этой грани. Так, что многочлен P удовлетворяет условиям леммы 2.2.

Рассмотрим последовательность $\{\xi^s = (s, s^2)\}_{s=1}^{\infty}$. На этой последовательности

$$\lim_{s\to\infty} \frac{[|P(\xi^s)| + 1]}{|\xi^s|^{2\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}}} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+1}{(s^2 + s^4)^{1/2}} = 1,$$

поэтому, для любого $\varepsilon > 0$ $\lim_{s\to\infty} (s^2 + 1)/(s^2 + s^4)^{1/2+\varepsilon} = 0$.

3. Основной результат в двумерном случае

Теорема 3.1. *(см. Теорему II в пункте 1) Пусть* $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \in \mathbb{I}_2$ *почти гипоэллиптический многочлен. Тогда существует число* $C > 0$ *такое, что*

$$|\xi| \le C\,[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $m = \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|$ и $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Так как $P \in \mathbb{I}_2$, то многочлен P и многоугольник Ньютона $\Re(P)$ двумерные.

Рассмотрим два возможных случая: 1) $card(P_m) = 1$ и 2) $card(P_m) \ge 2$.

Пусть в случае 1) $(P_m) = \{\beta\}$. Если $\beta \in \mathbb{R}^2_0$, то $\Sigma(P_m) = \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$, при этом (кратность корней $(0, \pm 1)$) $l_1 := deg(0, \pm 1) = \beta_1$, а $l_2 := deg(\pm 1, 0) = \beta_2$ и поэтому $l(P_m) := max\{\beta_1, \beta_2\} < m$. В этом случае утверждение теоремы следует из второго пункта леммы 1.5.

Если в случае 1) $\beta \notin \mathbb{R}^2_0$, то либо $\beta = (m, 0)$, либо $\beta = (0, m)$. Пусть $\beta = (m, 0)$ (случай $\beta = (0, m)$ рассматривается аналогично). Так как многоугольник Ньютона $\Re(P)$ двумерный, то существует (одномерная) некоординатная сторона Γ многоугольника $\Re(P)$, с вершиной $\beta = (m, 0)$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ внешняя (относительно $\Re(P)$) нормаль этой стороны с целыми компонентами. Из геометрических соображений ясно, что $1 \le \lambda_1 < \lambda_2$, дробь λ_2/λ_1 рациональная и, не умаляя общности, можно считать, что дробь λ_2/λ_1 – несократимая, т.е. числа λ_1 и $\lambda_2 \ge 2$ взаимно простые.

Очевидно, уравнение прямой, проходящей через грань Γ, имеет вид $(\lambda, \alpha) = m(\lambda)$, где $m(\lambda) = m\,\lambda_1$, а подмногочлен, отвечающий этой грани вид: $P_{m(\lambda)}(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha) = m(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, при этом $(\lambda, \alpha) < m\,\lambda_1$ для точек $\alpha \in (P - P_{m(\lambda)})$. Так как λ_1 и λ_2 взаимно простые и $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, то $\lambda_2 \ge 2$.

Таким образом многочлен P удовлетворяет условиям леммы 2.2, что доказывает оценку (3.1) и в этом случае.

Прежде чем перейти к случаю 2), заметим, что однородный многочлен P_m двух переменных можно представить в виде

$$P_m(\xi) = \xi_1^{l_1}\, \xi_2^{l_2}\, R(\xi), \tag{3.2}$$

где $l_1, l_2 \in \mathbb{N}_0$, а R – однородный многочлен порядка $m - l_1 - l_2$ такой, что $R(1, 0) \cdot R(0, 1) \ne 0$. При этом, так как в случае 2) $card R = card(P_m) \ge 2$, то $m - l_1 - l_2 > 0$

В случае 2) имеются следующие две возможности: 2.1) $P_m(0, 1)\, P_m(1, 0) = 0$ и 2.2) $P_m(0, 1) P_m(1, 0) \ne 0$. Отметим, что в последнем случае многоугольник

Ньютона $\Re(P)$ многочлен P представляет собой прямоугольный треугольник с вершинами $(m, 0)$, $(0, m)$ и $(0, 0)$, при этом в представлении (3.2) $l_1 = l_2 = 0$.

Случай 2.1) в свою очередь разбивается на следующие подслучаи:

2.1.1) $P_m(0, 1) = 0$, $P_m(1, 0) \neq 0$ тогда $l_1 \in \mathbb{N}, l_2 = 0$

2.1.2) $P_m(0, 1) \neq 0$, $P_m(1, 0) = 0$ тогда $l_1 = 0, l_2 \in \mathbb{N}$

2.1.2) $P_m(0, 1) = P_m(1, 0) = 0$, тогда $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$.

Так как $m > l_1 + l_2$, то во всех этих случаях

$$l(P_m) := \max_{\tau \in \Sigma(P_m)} \{l_{P_m}(\tau)\} < max\{l_1, m - l_1\} < m$$

и оценка (3.1) следует из леммы 1.5.

Рассмотрим подслучай 2.2). Если в этом случае $\Sigma(P_m) = \emptyset$, т.е. $P_m(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \neq 0$, то P эллиптический многочлен и тогда неравенство (3.1) очевидно. Так, что стоит рассмотреть лишь случай $\Sigma(P_m) \neq \emptyset$.

Если $l(P_m) < m$, то оценка (3.1) следует из леммы 1.5. Так, что остается рассмотреть случай $l(P_m) = m$, т.е. когда существует точка $\tau \in \Sigma(P_m)$ такая, что $l_{P_m}(\tau) = m$. В этом случае $\Sigma(P_m) = \{\pm\tau\}$, при этом в представлении (3.2) $l_1 = l_2 = 0$ и многочлен P_m представляется в виде (см. [18] или [19], лемма 2.1) $P_m(\xi) = \gamma(\tau_2\xi_1 - \tau_1\xi_2)^m$, где $\gamma \neq 0$. Так как в этом случае $(D^\alpha P_m)(\tau) = 0$ при $|\alpha| < m$, то применяя формулу Тейлора и формулу Эйлера для однородных многочленов, имеем для любых $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $t > 0$

$$P_m(\xi + t\,\tau) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha P_m)\,(t\,\tau)\,\xi^\alpha = \sum_\alpha \frac{t^{m-|\alpha|}}{\alpha!}[(D^\alpha P_m)(\tau)]\,\xi^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}[D^\alpha P_m](\tau)\,\xi^\alpha = P_m(\xi) = \gamma(\tau_2\xi_1 - \tau_1\xi_2)^m.$$

Произведем замену переменных $\eta = A\xi$, где

$$A = \begin{pmatrix} \tau_2 & -\tau_1 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{pmatrix}, \quad det A = det A^{-1} = 1$$

и обозначим $Q(\eta) := P(A^{-1}\eta)$. Так как $P \in \mathbb{I}_2$ почти гипоэллиптический многочлен, а матрица $A-$ невырожденная, то в силу теоремы 3.1 работы [11] многочлен Q также принадлежит $\mathbb{I}_2$ и является почти гипоэллиптическим, при этом Q представляется в виде

(3.3) $$Q(\eta) = \gamma\,\eta_1^m + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \delta_\alpha \xi^\alpha.$$

Таким образом многочлен Q удовлетворяет условиям теоремы 3.1, причем из представления (3.3) следует, что для него возможен только случай 1) в процессе настоящего доказательства этой теоремы . По уже доказанной части теоремы существует число $C_1 > 0$ такое, что $|\eta| \leq C_1[|Q(\eta)| + 1]$ $\forall \eta \in \mathbb{R}^2$. Отсюда с некоторой постоянной $C_2 > 0$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$C_2 |\xi| \leq |A\xi| = |\eta| \leq C_1 \left[|Q(\eta)| + 1\right] \leq C_1 \left[|P(A^{-1}\eta)| + 1\right] = C_1 \left[|P(\xi)| + 1\right].$$

Этим рассмотрение подслучая 2.2) завершено и тем самым теорема полностью доказана.

Abstract. A polynomial $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ is said to be almost hypoelliptic if all its derivatives $D^\nu P(\xi)$ can be estimated from above by $P(\xi)$ (see [16]). By a theorem of Seidenberg-Tarski it follows that for each polynomial $P(\xi)$ satisfying the condition $P(\xi) > 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$, there exist numbers $\sigma > 0$ and $T \in \mathbb{R}^1$ such that $P(\xi) \geq \sigma(1 + |\xi|)^T$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$. The greatest of numbers T satisfying this condition, denoted by $ST(P)$, is called Seidenberg-Tarski number of polynomial P. It is known that if, in addition, $P \in \mathbb{I}_n$, that is, $|P(\xi)| \to \infty$ as $|\xi| \to \infty$, then $T = T(P) > 0$. In this paper, for a class of almost hypoelliptic polynomials of n (≥ 2) variables we find a sufficient condition for $ST(P) \geq 1$. Moreover, in the case $n = 2$, we prove that $ST(P) \geq 1$ for any almost hypoelliptic polynomial $P \in \mathbb{I}_2$.

Список литературы

[1] L. Hormander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, 2, Springer - Verlag (1983).

[2] Krzyztof Maurin, Methods of Hilert spaces, PWN, Warsaw (1959), English transl (1967)

[3] A. Seidenberg, "A new decision method for elementary algebra", Ann.Math., **60**, 365 – 374 (1954).

[4] A. Tarski, "A decision method for elementary algebra and geometry", Manuscript, Berkley (1951).

[5] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, "Интегральные представления функций и теоремы вложения", Москва, Наука, Физматгиз (1996).

[6] F. Treves, "Fundamental solutions of linear partial differential equations", Amer. J. Math., **84**, 561 – 577 (1962).

[7] Ю. В. Егоров, "О субэллиптических операторах", УМН, **30**, no. 2, 57 – 114 (1975).

[8] М. И. Вишик, Г. Н. Эскин, "Нормально разрешимые задачи для эллиптических систем", Мат. Сб., **74**, no. 3, 326 – 356 (1967).

[9] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Поведение на бесконечности неэллиптических многочленов", Изв. НАН Армении, Мат., **39**, no.3, 21 – 38 (2004).

[10] Г. Г. Казарян и В. Н. Маргарян, "Число Зайденберга - Тарского для двумерных вырождающихся многочленов", Изв. НАН Армении, Мат., **39**, no. 6, 3 – 16 (2004).

[11] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "On increase at infinity of the almost hypoelliptic polynomials", Eurazian Math. Journal, **4**, no. 4, 67 – 89 (2014).

[12] В. П. Михайлов, "О поведение на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).

[13] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических полиномов", Матем. сб. **75** (117):3, 400 – 416 (1968).

[14] V. N. Margaryan, H. G. Ghazaryan, "Almost hypoelliptic operators with constant powers", Eurasian Mat. Journal...

[15] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, 'О выделении гладких решений одного класса почти гипоэллиптических уравнений постоянной мощности", Изв. НАН Армении ....

[16] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Doklady Ross. Acad. Nauk, Math., **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).

[17] Г. Г. Казарян, "О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности", Изв. НАН Армении, Мат., **46**, по. 6, 11 – 30 (2011).

[18] B. Pini, "Osservazoni sulla ipoellipticita", Boll.Un.Mat.Ital., (3), **18**, 420 – 432 (1963).

[19] Г. Г. Казарян, "Об одном семействе гипоэллиптических полиномов", Изв. АН Арм ССР, Математика, **9**, но. 3, 189 – 211 (1974).

Поступила 10 февраля 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 5, 2017, стр. 68–76.

PRIORI ESTIMATES AND ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS FOR SOME FRACTIONAL ORDER ELLIPTIC EQUATIONS

RUICHANG PEI, CAOCHUAN MA

Tianshui Normal University, Tianshui, China
E-mails: *prc211@163.com*, *macaoch@163.com*

Abstract. In this paper, we obtain estimates for solutions for a class of fractional order elliptic equations in different domains and boundary conditions, and prove some regularity results. Then, we study the qualitative properties of solutions with prescribed Q-curvature. [1]

MSC2010 numbers: 35J45, 35B40, 35B45.

Keywords: Fractional order elliptic equation; asymptotic behavior; priori estimate; Q-curvature.

1. Introduction

In this paper, we obtain estimates for solutions of the following fractional order elliptic equation:

$$(*)\qquad \begin{cases} (-\Delta)^{\frac{3}{2}}u(x) = Q(x)e^{3u} & \text{in } \Omega \subset R^3, \\ u = 0 & \text{in } \Omega^c, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

and investigate properties of solutions of the following fractional order elliptic equation:

$$(**)\qquad (-\Delta)^{\frac{3}{2}}u(x) = Q(x)e^{3u}, \quad x \in R^3,$$

where Ω is a bounded smooth domain, $Q(x)$ is a given function in $L^p(\Omega)$ for some $\frac{6}{5} < p \leq \infty$, and $(-\Delta)^{\frac{3}{2}}$ is interpreted as $(-\Delta) \circ (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$. To define $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}v$ for a function v in R^3, we require that

$$v \in L_{\frac{1}{2}}(R^3) := \left\{ v \in L^1_{loc}(R^3) : \int_{R^3} \frac{|v(x)|}{1+|x|^4}dx < \infty \right\},$$

which makes $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}v$ to be a tempered distribution (see [13]).

---

[1]This study was supported by the National NSF (Grant No. 11661070) and the National NSF (Grant No. 11361054, 11561059) of China, Natural Science Foundation of Gansu Province China (Grant No. 1506RJZE114) and Planned Projects for Postdoctoral Research Funds of Jiangsu Province (Grant No.1301038C).

Definition 1.1. *Given a tempered distribution f in R^3, we say that u is a solution of equation $(-\Delta)^{\frac{3}{2}}u = f$ if $u \in W^{2,1}_{loc}(R^3)$, $\Delta u \in L_{\frac{1}{2}}(R^3)$, and*

$$\int_{R^3}(-\Delta u)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi dx = \langle f, \varphi\rangle \text{ for every } \varphi \in S(R^3), \tag{1.1}$$

where $S(R^3)$ is the Schwarz space of rapidly decreasing smooth functions in R^3.

In equation $(*)$, we assume that $u \in L^1(\Omega)$ and $e^{3u} \in L^{p'}(\Omega)$, where p' is the conjugate exponent of p, so that $(*)$ has a meaning in the sense of distributions (see Definition 3.1 of [5]). A first question of interest is whether one can conclude that $u \in L^\infty(\Omega)$ for $(*)$. In Section 2, we give a positive answer to this question.

Recently, a series of works have been done to prove the existence and to study the qualitative properties of solutions of the following fourth order equation:

$$\Delta^2 u = Q(x)e^{4u}, \quad x \in R^4.$$

For $Q(x) = 6$, Lin [7] has given a complete classification of solutions of this equation in terms of their growth, or in terms of the behavior of Δu at ∞. Xu [17], has obtained similar results by using moving spheres methods. In [8], concentration phenomena of solutions of this equation was deeply discussed. Robert and Wei [9], have studied asymptotic behavior of solutions for a fourth order mean field equation with Dirichlet boundary condition. Martinazzi [10], and Wei and Xu [14] gave classifications of solutions for higher order Liouville's and conformally invariant equations, respectively. Concentration phenomena and asymptotic behavior of solutions for higher order Liouville's and a mean field equations was studied in [11, 12]. Based on these works, Jin et al. [6] have studied the existence and asymptotics of solutions for equation $(**)$. In Section 3, we extend the results of [6], by considering more general functions $Q(x)$. We first obtain the asymptotic behavior of solutions near infinity, and then prove that all solutions satisfy an identity, which is similar to the well-known Kazdan-Warner condition.

2. L^∞-BOUNDEDNESS FOR A SINGLE SOLUTION OF EQUATION $(-\Delta)^{\frac{3}{2}}u = Q(x)e^{3u}$

Let $\Omega \subset R^3$ be a bounded domain and let h be a solution of equation:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{3}{2}}h(x) = f(x) & \text{in } \Omega \subset R^3, \\ h = 0 & \text{in } \Omega^c, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}}h = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

The following lemma is obtained using the arguments of Brezis-Merle [1].

Lemma 2.1. *([5]). Let $f \in L^1(\Omega)$, and let $u \in L^1(\Omega)$ be a solution of equation (2.1). Then for any $p \in \left(0, \frac{2\pi^2}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}\right)$ the following inequality holds:*

$$\int_\Omega \exp^{3p|u|}\, dx \leq C(p, \mathrm{diam}\Omega),$$

where diamΩ *denotes the diameter of domain* Ω.

We will use Lemma 2.1 to prove the theorems that follow.

Theorem 2.1. *Let u be a solution of equation (2.1) with $f \in L^1(\Omega)$. Then for every constant $k > 0$ we have*

$$e^{ku} \in L^1(\Omega).$$

Proof. Letting $0 < \epsilon < \frac{1}{k}$, we can split the function f as $f = f_1 + f_2$ with $||f_1||_1 < \epsilon$ and $f_2 \in L^\infty(\Omega)$. Denote by u_i $(i = 1, 2)$ the solution of the equation

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{3}{2}} u_i = f_i & \text{in } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{in } \Omega^c, \quad i = 1, 2. \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_i = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

By Lemma 2.1, we have $\int_\Omega \exp\left[\frac{|u_1(x)|}{||f_1||_1}\right] dx < \infty$, implying that $\int_\Omega \exp[k|u_1|]dx < \infty$. Using Theorem 1.10 of [4], we obtain $|u| \leq |u_1| + |u_2|$ and $u_2 \in L^\infty(\Omega)$, and the result follows.

Theorem 2.2. *Let $u \in L_{Loc}(\Omega)$ and $(-\Delta)^{\frac{3}{2}} u \in L_{Loc}(\Omega)$. Then for every constant $k > 0$ we have*

$$e^{ku} \in L^1_{loc}(\Omega).$$

Proof. Without loss of generality, we can assume that $\Omega = B_R(\theta)$ is a ball of radius R centered at θ. For ϵ small enough, we split $(-\Delta)^{\frac{3}{2}} u$ as $(-\Delta)^{\frac{3}{2}} u = f_1 + f_2$ with $||f_1||_1 < \epsilon$ and $f_2 \in L^\infty(\Omega)$. Write $u = u_1 + u_2 + u_3$, where u_i $(i = 1, 2, 3)$ are respectively the solutions of equations:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{3}{2}} u_i = f_i & \text{in } B_R, \\ u_i = 0 & \text{in } (B_{\frac{R}{2}})^c, \quad i = 1, 2, 3. \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_i = 0 & \text{on } \partial B_R \end{cases}$$

It follows from Lemma 2.1 that $e^{k|u_1|} \in L^1_{Loc}(B_R)$. Using elliptic estimates from [4], we get $|u_2|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} \leq c$, implying that $e^{k|u_2|} \in L^1_{Loc}(B_R)$.

Since $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_3 = 0$, we have $|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_3|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} \leq c$. Taking into account that $u \in L_{Loc}(B_R)$, we get $|u_3|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} \leq c$ implying that $e^{ku_3} \in L^1_{Loc}(B_R)$.

Finally, in view of $|u| \leq |u_1| + |u_2| + |u_3|$, the result follows.

Remark 2.1. *Note that Theorem 2.2 is a local version of Theorem 2.1.*

Theorem 2.3. *Let u be a solution of equation $(*)$ with $Q \in L^p(\Omega)$, and let $e^{3u} \in L^{p'}(\Omega)$ for some $\frac{6}{5} < p \leq \infty$. Then $u \in L^\infty(\Omega)$.*

Proof. By Theorem 2.1, we have $e^{ku} \in L^1(\Omega)$ for all k, that is, $e^u \in L^r(\Omega)$ for all $r < \infty$. It follows that $Qe^{3u} \in L^{p-\delta}$ for all $\delta > 0$ if $p < \infty$, and $Qe^{3u} \in L^r(\Omega)$ for all $r < \infty$ if $p = \infty$. Now, standard elliptic theory and Sobolev embedding theorem can be applied to conclude that $u \in L^\infty(\Omega)$.

Corollary 2.1. *Let u be a solution of equation*

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{3}{2}} u = Qe^{3u} + f(x) & \text{in } \Omega, \\ u = g_1 & \text{in } \Omega^c, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = g_2 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

with $Q \in L^p(\Omega)$ and $e^{3u} \in L^{p'}(\Omega)$ for some $\frac{6}{5} < p < \infty$, where $g_1, g_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$ and $f \in L^q(\Omega)$ for some $q > \frac{6}{5}$. Then $u \in L^\infty(\Omega)$.

Proof. Let w be the solution of equation

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{3}{2}} w = f(x) & \text{in } \Omega, \\ w = g_1 & \text{in } \Omega^c, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} w = g_2 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

So that $w \in L^\infty(\Omega)$. Observing that the function $\tilde{u} = u - w$ satisfies the equation

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{3}{2}} \tilde{u} = Qe^{3w} e^{3\tilde{u}}, & \text{in } \Omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{in } \Omega^c, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \tilde{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

we can apply Theorem 2.3 to complete the proof.

Theorem 2.4. *Let $u \in L^1(R^3)$ be a solution of equation $(**)$ with $Q \in L^p(R^3)$, and let $e^{3u} \in L^{p'}(R^3)$ for some $\frac{6}{5} < p \leq \infty$. Then $u \in L^\infty_{Loc}(R^3)$.*

Proof. Without loss of generality, we can assume that $\Omega = B_R(\theta) \subset R^3$. We fix $\epsilon > 0$ small enough and split Qe^{3u} as $Qe^{3u} = f_1 + f_2$ with $||f_1||_1 < \epsilon$ and $f_2 \in L^\infty(B_R)$. Denote u_1, u_2 respectively, the solutions of equations:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{3}{2}} u_i = f_i & \text{in } B_R, \\ u_i = 0 & \text{in } (B_R)^c, \quad i = 1, 2. \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_i = 0 & \text{on } \partial B_R. \end{cases}$$

It follows from Lemma 2.1 that $e^{k|u_1|} \in L^1(B_R)$. Using elliptic estimates from [4], we get $|u_2|_{L^\infty(B_R)} \leq c$, implying that $e^{k|u_2|} \in L^1(B_R)$. Denoting $u_3 = u - u_1 - u_2$, and observing that Δu_3 is harmonic (see [6]), by the mean value theorem for harmonic functions, we obtain $|\Delta u_3|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} \leq c$ implying that $|u_3|_{L^\infty(B_{\frac{R}{4}})} \leq c$. Next, using the equation $(-\Delta)^{\frac{3}{2}} u = (Qe^{3u_1})e^{3u_2+3u_3}$ and elliptic estimates from [4], we get $||(-\Delta)^{\frac{3}{2}} u||_{L^\infty(B_{\frac{R}{8}})} \leq c$, implying that $||u||_{L^\infty(B_{\frac{R}{16}})} \leq c$, and the result follows.

From results of Brezis and Merle [1], it follows that a solution u of equation (**) is bounded from above if it satisfies the equation $-\Delta u = V(x)e^u$ and some other conditions. This result was used to study the qualitative properties and classification of solutions for some second order elliptic equations (see [2, 3, 16]). The following question arise naturally: do there exist a solution u of equation (**) with $\int_{R^3} Qe^{3u} < +\infty$ that is bounded from above? The theorem that follows contains a partial answer to this question.

Theorem 2.5. *Assume that the function $Q(x)$ in (**) is bounded away from 0 and bounded from above, and let u be a C^2 solution of equation (**) satisfying $\int_{R^3} e^{3u} < +\infty$ and $u(x) = o(|x|^2)$. Then $u^+ \in L^\infty(R^3)$.*

To prove the theorem we need a number of lemmas that follow.

Lemma 2.2. *([15]). Let u be a C^2 function on R^4 satisfying:*

(a) Qe^{4u} is in $L^1(R^4)$ with $0 < m \leq Q \leq M$ for some constants m and M;

(b) in the sense of weak derivative, u satisfies the following equation:

$$\Delta u + \frac{2}{\beta_0}\int_{R^4} \frac{Q(y)e^{4u(y)}}{|x-y|^2} dy = 0.$$

Then there is a constant $c > 0$, depending on u, such that $|\Delta u|(x) < c$ on R^4, where β_0 is given by $(-\Delta_x)^2 \left(ln \frac{1}{|x-y|}\right) = \beta_0 \delta_y(x)$.

In fact, $\beta_0 = 8\pi^2$.

Lemma 2.3. *([15]). Let u be a C^2 function on R^4 such that $0 \leq (-\Delta)u(x) \leq A$ on R^4 for some constant A, and let $\int_{R^4} Q(y)e^{4u(y)}dy = \alpha < \infty$ with $0 < m \leq Q \leq M$. Then there exists a constant B, depending only on A, m, M and α such that $u(x) < B$ on R^4.*

Lemma 2.4. *Let u be a solution of equation (**), and let*

$$w(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{R^3} ln\frac{|x-y|}{|y|+1} Q(y)e^{3u(y)}dy.$$

Then there is a constant c such that $w(x) \leq \beta ln(|x|+1) + c$, where

$$\beta = \frac{1}{2\pi^2}\int_{R^3} Q(y)e^{3u(y)}dy.$$

Proof. For $|x| \geq 4$, we decompose $R^3 = A_1 \cup A_2$, where $A_1 = \{y||y-x| \leq \frac{|x|}{2}\}$ and $A_2 = \{y||y-x| \geq \frac{|x|}{2}\}$. For $y \in A_1$, we have $|y| \geq |x| - |x-y| \geq \frac{|x|}{2} \geq |x-y|$.

which implies

$$ln\frac{|x-y|}{|y|+1} \le 0.$$

Since $|x-y| \le |x| + |y| \le |x|(|y|+1)$ for $|x|, |y| \ge 2$ and $ln|x-y| \le ln|x| + c$ for $|x| \ge 4$ and $|y| \le 2$, we have

$$\begin{aligned} w(x) &\le \frac{1}{2\pi^2}\int_{A_2} ln\frac{|x-y|}{|y|+1}Q(y)e^{3u(y)}dy \\ &\le \frac{1}{2\pi^2}\left(\int_{R^3} Q(y)e^{3u(y)}dy\right) ln|x| + c = \beta ln(|x|+1) + c. \end{aligned}$$

Lemma 2.5. *Let u be a solution of equation (**) with $u(x) = o(|x|^2)$. Then $\triangle u(x)$ admits the following integral representation:*

$$\Delta u(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{R^3}\frac{Q(y)e^{3u(y)}}{|x-y|^2}dy. \tag{2.2}$$

Proof. Let $v = u + w$. It is obvious that $(-\Delta)^{\frac{3}{2}}v \equiv 0$ in R^3. Using arguments similar to that of applied in Lin [7], for any $x_0 \in R^3$ and $r > 0$, we obtain

$$6\pi^2 r^2 \exp\left(\frac{r^2}{2}\Delta v(x_0)\right) \le e^{3v(x_0)}\int_{|x-x_0|=r} e^{3v}d\sigma.$$

Since $v = u + w \le u(x) + \beta ln|x| + c$, by Lemma 2.4, we have

$$r^{2-3\beta}\exp\left(\frac{\Delta v(x_0)}{2}r^2\right) \in L^1[1, +\infty).$$

Thus, $\Delta v(x_0) \le 0$ for all $x_0 \in R^3$. By Liouville's theorem, $\Delta v(x) \equiv -c_1$ in R^3 for some constant $c_1 \ge 0$. Hence, we have

$$\Delta u(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{R^3}\frac{Q(y)e^{3u(y)}}{|x-y|^2}dy - c_1. \tag{2.3}$$

Now, we claim that $c_1 = 0$. Otherwise, we have $\Delta u(x) \le -c_1 < 0$ for $|x| \ge R_0$ where R_0 is sufficiently large. Let $h(y) = u(y) + \epsilon|y|^2 + A(|y|^{-2} - R_0^{-1})$, where ϵ is small enough such that for $|y| > R_0$

$$\Delta h(y) = \Delta u + 8\epsilon < -\frac{c_1}{2} < 0, \tag{2.4}$$

and A is sufficiently large so that $\inf\limits_{|y| \ge R_0} h(y)$ is achieved by some $y_0 \in R^3$ with $|y_0| > R_0$. Applying the maximum principle to (2.4) at y_0, we get a contradiction. Hence, our claim is proved.

Proof of Theorem 2.5. By Lemma 2.5 and the proofs of Lemma 2.2 and Lemma 2.3, our conclusion holds.

3. Qualitative properties of solutions of equation $(-\Delta)^{\frac{3}{2}}u = Q(x)e^{3u}$

In this section, we study the qualitative properties of solutions of equation (**). In view of our Theorem 2.5 and Chen [3], we obtain the following theorem.

Theorem 3.1. *Assume that $Q(x)$ is a positive C^1 function bounded away from 0 and from above, and u is a C^2 solution of equation (**) satisfying $\int_{R^3} e^{3u}dx < \infty$ and $u(x) = o(|x|^2)$. Then*

$$(3.1)\qquad -\beta ln(|x|+1) - c \le u(x) \le -\beta ln(|x|+1) + c \quad \text{for some } \beta > 1.$$

Furthermore, the following identity holds:

$$(3.2)\qquad \int_{R^3} (x, \nabla Q)e^{3u}dx = 3\pi^2\beta(\beta - 2).$$

We first prove a number of lemmas.

Lemma 3.1. *Assume that u satisfies the assumptions of Theorem 3.1, then*

$$\frac{w(x)}{ln|x|} \to \beta \text{ uniformly as } |x| \to \infty,$$

where $w(x)$ and β are as in Section 2.

Proof. We need only to verify that

$$I = \int_{R^3} \frac{ln|x-y| - ln(|y|+1) - ln|x|}{ln|x|} Q(y)e^{3u(y)}dy \to 0 \text{ as } |x| \to \infty.$$

Write $I = I_1 + I_2 + I_3$, where I_1, I_2, I_3 stand for integrals over the regions $D_1 = \{y : |x-y| \le 1\}$, $D_2 = \{y : |x-y| > 1 \text{ and } |y| \le k\}$ and $D_3 = \{y : |x-y| > 1 \text{ and } |y| > k\}$, respectively. Assume that $|x| \ge 3$.

(a) To estimate I_1, we simply notice that

$$|I_1| \le C\int_{|x-y|\le 1} Q(y)e^{3u(y)}dy - \frac{1}{ln|x|}\int_{|x-y|\le 1} ln|x-y|Q(y)e^{3u(y)}dy.$$

Then by the boundedness of Qe^{3u} (see Theorem 2.5) and $\int_{R^3} Q(y)e^{3u(y)}dy$, we see that $I_1 \to 0$ as $|x| \to \infty$.

(b) For each fixed k, in region D_2, we have, as $|x| \to \infty$,

$$\frac{ln|x-y| - ln(|y|+1) - ln|x|}{ln|x|} \to 0.$$

Hence, $I_2 \to 0$.

(c) To see that $I_3 \to 0$, we use the fact that

$$\left|\frac{ln|x-y| - ln(|y|+1) - ln|x|}{ln|x|}\right| \le C$$

for $|x-y| > 1$. Then letting $k \to \infty$ the result follows.

Lemma 3.2. *Assume that u satisfies the assumptions of Theorem 3.1. Then*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{R^3} \ln\frac{|y|+1}{|x-y|}Q(y)e^{3u(y)}dy + c_0,$$

where c_0 is a constant.

Proof. By Lemma 2.5, we have $\triangle(u+w) = 0$ in R^3, and by Theorem 2.5, we have $u^+ \in L^\infty$. Hence, in view of Lemma 2.4, we conclude that $u + w \le c\ln|x| + c$. Since $u + w$ is harmonic function, by the gradient estimates of harmonic functions, we obtain $u(x) + w(x) \equiv c$.

Lemma 3.3. *Assume that u satisfies the assumptions of Theorem 3.1. Then $u(x) > -\beta ln(|x|+1) - c$ and $\beta > 1$.*

Proof. By Lemmas 2.4 and 3.2, we obtain

$$u(x) > -\beta ln(|x|+1) - c.$$

From the above inequality and $\int_{R^3} e^{3u}dx < +\infty$, we get $\beta > 1$.

Lemma 3.4. *Assume that u satisfies the assumption of Theorem 3.1. Then $u(x) \le -\beta ln(|x|+1) + c$.*

Proof. Observe first that for $|x-y| \ge 1$, we have

$$|x| \le |x-y|(|y|+1).$$

Hence

$$ln|x| - 2ln(|y|+1) \le ln|x-y| - ln(|y|+1).$$

Therefore, we can write

$$\begin{aligned} w(x) \;\; &\ge \;\; \frac{1}{2\pi^2}\int_{|x-y|\ge 1}(ln|x| - 2ln(|y|+1))Q(y)e^{3u(y)}dy \\ &+ \;\; \frac{1}{2\pi^2}\int_{|x-y|\le 1}(ln|x-y| - ln(|y|+1))Q(y)e^{3u(y)}dy \\ &\ge \;\; \beta ln|x| - \frac{ln|x|}{2\pi^2}\int_{|x-y|\le 1}Q(y)e^{3u(y)}dy \\ &+ \;\; \frac{1}{2\pi^2}\int_{|x-y|\le 1} ln|x-y|Q(y)e^{3u(y)}dy \\ &- \;\; \frac{1}{2\pi^2}\int_{R^3} ln(|y|+1)Q(y)e^{3u(y)}dy = \beta ln|x| + I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Taking into account the fact that $\frac{u(x)}{ln|x|} \to -\beta$ and $\beta > 1$, and the boundedness of $Q(x)$, we conclude that $I_1, I_2 \to 0$ as $|x| \to \infty$, and I_3 is finite. Therefore $w(x) > \beta ln(|x|+1) - c$. Finally, by Lemma 3.2, we have $u(x) < -\beta ln(|x|+1) + c$.

Proof of Theorem 3.1. The assertion (3.1) follows from Lemmas 3.3 and 3.4, while the assertion (3.2) follows from Lemma 3.2 and Theorem 1.1 of [18].

Список литературы

[1] H. Brezis, F. Merle, "Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions", Comm. P.D.E. **16**, 1223 – 1253 (1991).

[2] W. X. Chen, C. M. Li, "Classification of solutions some nonlinear elliptic equation", Duke Math. J. **63**, 615 – 622 (1991).

[3] W. X. Chen, C. M. Li, "Qualitative properties of solutions to some nonlinear elliptic equations in R^2", Duke Math. J. **71**, 427 – 439 (1993).

[4] X. Cabré, J. Tan, "Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the Laplacian", Adv. Math. **224**, 2052 – 2093 (2010).

[5] A. Hyder, "Structre of conformal metrics on $\mathbb{R}^n$ with constant Q-curvature", arXiv:1504.07095 (2015).

[6] T. Jin, A. Maalaoui, L. Martinazzi, J. Xiong, "Existence and asymptotics for solutions of nonlocal Q-curvature equation in dimension three", Calc. Var. Partial Differential Equations, **52**, no. 3 – 4, 469 – 488 (2015).

[7] C. S. Lin, "A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in R^n", Comment. Math. Helv. **73**, 206 – 231 (1998).

[8] Adimurthi, F. Robert, M. Struwe, "Concentration phenomena for Liouville's equation in dimension four", Journal EMS **8**, 171 – 180 (2006).

[9] F. Robert, J. C. Wei, "Asymptotic behavior of a fourth order mean field equation with Dirichlet boundary condition", Indiana Univ. Math. J., **57**, 2039 – 2060 (2008).

[10] L. Martinazzi, "Classification of solutions to the higher order Liouville's equation on R^{2m}", Math. Z., **263**, 307 – 329 (2009).

[11] L. Martinazzi, "Concentration-compactness phenomena in higher order Liouville's equation", J. Funct. Anal., **256**, 3743 – 3771 (2009).

[12] L. Martinazzi, M. Petrache, "Asymptotics and quantization for a mean field equation of higher order", Comm. Partial Differential Equations, **35**, 1 – 22 (2010)

[13] L.Sivestre, "Regularity of the obstacle problem for fractional power of the Laplace operator", Comm. Pure Appl. Math. **60**, 67 – 112 (2007).

[14] J. C. Wei, X. W. Xu, "Classification of solutions of higher order conformally invariant equations", Math. Ann., **313**, 207 – 228 (1999).

[15] J. C. Wei, X. W. Xu, "Prescribing Q- curvature problem on S^n", J. Funct. Anal., **257**, 1995 – 2023 (2009).

[16] J. C. Wei, "Asymptotic behavior of a nonlinear fourth order eigenvalue problem", Comm. P.D.E **21**, 1451 – 1467 (1996).

[17] X. W. Xu, "Classification of solutions of certain fourth-order nonlinear elliptic equation in R^4", Pacific J. Math. **225**, 361 – 378 (2006).

[18] X. W. Xu, "Uniqueness and non-existence theorems for conformally invariant equations", J. Funct. Anal. **222**, 1 – 28 (2005).

Поступила 28 сентября 2015

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 52, номер 5, 2017

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 52, No. 5, 2017

Contents

Cover to cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 52, No. 4, 2017

CONTENTS