ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
# ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
# МАТЕМАТИКА

2017

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 4. 2017, стр. 3–11.

# СВОЙСТВО ЕДИНСТВЕННОГО СЛЕДА $n$-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

В. С. АТАБЕКЯН, А. Л. ГЕВОРГЯН, Ш. А. СТЕПАНЯН

*Ереванский государственный университет, Армения*
*Российско-Армянский университет*
E-mails: *avarujan@ysu.am*; *amirjan.gevorgian@googlemail.com*; *shogh.stepanyan@gmail.com*

Аннотация. В работе доказывается единственность следа $C^*$-алгебр $n$-периодических произведений произвольных семейств групп без инволюций. Показано, что свободные бернсайдовы группы $B(m,n)$ и их группы автоморфизмов также обладают свойством единственного следа. Показано также, что любая счетная группа вкладывается в некоторую 3-порожденную группу со свойством единственного следа, а любая счетная периодическая группа ограниченного периода без инволюций вкладывается в некоторую 3-порожденную периодическую группу $G$ ограниченного периода со свойством единственного следа. При этом в качестве группы $G$ можно выбрать как простую, так и не простую группу.

**MSC2010 number:** 20F50, 20E06, 20F28, 22D25.

**Ключевые слова:**[1] периодическая группа; периодическое произведение групп; группа автоморфизмов; приведенная $C^*$-алгебра группы.

## 1. Введение

Для заданной (дискретной) группы $G$ обозначим через $l_2(G)$ гильбертово пространство всех функций $f : G \to \mathbb{C}$, для которых ряд $\sum\limits_{g\in G} |f(g)|^2$ сходится, а через $\mathcal{B}(l_2(G))$ обозначим $C^*$-алгебру всех ограниченных линейных операторов на $l_2(G)$. Пусть $\lambda_G : G \to \mathcal{B}(l_2(G))$ есть левое регулярное представление группы $G$, задаваемое формулой $(\lambda_G(g)(f))(s) = f(g^{-1}s)$ для всех $g, s \in G$. По определению, *приведенная $C^*$-алгебра группы $G$* есть замыкание линейной оболочки множества $\{\lambda_G(g)|g \in G\}$ относительно операторной нормы. Она обозначается через $C_{red}(G)$. Следом $C^*$-алгебры $A$ называется любой положительный линейный функционал $T : A \to \mathbf{C}$ такой, что $T(1) = 1$ и $T(ab) = T(ba)$ для всех

[1]Исследования первого автора были проведены при поддержке Центра математических исследований при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41.
Исследования второго автора были проведены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15Т-1А258.

$a, b \in A$. Говорят, что группа $G$ обладает свойством единственного следа, если ее $C^*$-алгебра $C_{red}(G)$ имеет единственный (т.е. только канонический) след.

В работе [1] Поуерсом была доказана, что свободная группа ранга 2 обладает свойством единственного следа. Вслед за этим разные авторы указали другие интересные классы групп, $C^*$-алгебры которых имеют единственный след. В работе [2] А. Ю. Ольшанский и Д. В. Осин доказали, что для достаточно больших нечетных $n$ свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ периода $n$ и ранга $m > 1$ обладают свойством единственного следа, а алгебра $C_{red}(B(m, n))$ является простой алгеброй. До недавних пор был открыт старый вопрос об эквивалентности следующих двух условий (см., например, [3], вопрос 4):

1) $C^*$-алгебра группы $G$ имеет единственный след;

2) группа $G$ имеет тривиальный аменабельный радикал.

Напомним, что аменабельным радикалом группы называется ее наибольшая аменабельная нормальная подгруппа. Как показал М.Дэй [4], любая группа обладает аменабельным радикалом.

В работе [5] на указанный вопрос был дан положительный ответ. А именно, было доказано, что аменабельный радикал группы $G$ тривиален тогда и только тогда, когда $C^*$-алгебра $C_{red}(G)$ данной группы $G$ имеет единственный след. Кроме того, в этой же работе [5] было дано еще одно доказательство единственности следа $C^*$-алгебр свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода. Доказана также простота алгебр $C_{red}(B(m, n))$ используя некоторые свойства групп $B(m, n)$, указанные в работах [6] и [7]. Вопрос простоты $C^*$-алгебр $n$-периодических произведений исследован в [8].

Целью настоящей заметки является доказательство единственности следа $C^*$-алгебр всех нетривиальных $n$-периодических произведений произвольных семейств групп без инволюций. Понятие периодического произведения данного периода $n$ (т.е. $n$-периодического произведения) данного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ было введено в работе С.И.Адяна [9] (см. также [10]). Эта операция, обозначаемая через $\prod\limits_{i\in I}{}^n G_i$, определяется на классе всех групп для каждого нечетного $n \geq 665$ как фактор группа свободного произведения заданного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$, $F = \prod\limits_{i\in I}{}^* G_i$ по специально выбранной нормальной подгруппе, которая задается некоторой системой определяющих соотношений вида $A^n = 1$ с применением сложной совместной индукции по натуральному параметру, называемому рангом (см. [11-12]). В работе [13] приведены различными интересные свойства $n$-периодических произведений. Поскольку свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ изоморфны $n$-периодическому произведению $m$ циклических групп порядка $n$ (см. [9, теорема 5]), то мы получаем существенное усиление результатов [2] и [5] о свойстве единственного следа свободных бернсайдовых групп. Показано, что группы автоморфизмов групп $B(m, n)$ также обладают свойством единственного следа. Кроме того, мы докажем, что любая счетная группа изоморфно вкладывается в некоторую 3-порожденную группу со свойством единственного следа, а любая счетная периодическая группа $H$ ограниченного периода и без инволюций вкладывается в некоторую 3-порожденную периодическую группу $G$ ограниченного периода со свойством единственного следа. При этом в качестве группы $G$ можно выбрать как простую, так и не простую группу.

## 2. Формулировки результатов

**Теорема 2.1.** *$n$-периодическое произведение произвольного семейства групп без инволюций обладает свойством единственного следа при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Как уже отметили выше справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.1.** *(см. [5, теорема 1.6] и [14, теорема 5.2 ]) Дискретная группа $G$ обладает свойством единственного следа тогда и только тогда, когда ее аменабельный радикал тривиален.*

Поэтому теорема 2.1 эквивалентна следующему утверждению.

**Теорема 2.2.** *$n$-периодическое произведение произвольного семейства групп без инволюций имеет тривиальный аменабельный радикал при любом нечетном $n \geq 1003$.*

**Следствие 2.1.** *Свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ обладают свойством единственного следа при любом нечетном $n > 1003$ и для любого ранга $m > 1$.*

**Теорема 2.3.** *Группа автоморфизмов $Aut(F_m)$ свободной группы $F_m$ и группа автоморфизмов $Aut(B(m,n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ обладает свойством единственного следа для любого ранга $m > 1$ и при любом нечетном $n \geq 1003$.*

**Теорема 2.4.** *Любая счетная группа изоморфно вкладывается в некоторую 3-порожденную группу со свойством единственного следа.*

**Теорема 2.5.** *Любая счетная периодическая группа $H$ ограниченного периода и без инволюций можно вложить в некоторую 3-порожденную периодическую группу $G$ ограниченного периода со свойством единственного следа. При этом в качестве группы $G$ можно выбрать как простую, так и не простую группу.*

Теоремы 2.1 и 2.2 будут доказаны в разделе 3, а теоремы 2.3 – 2.5 будут доказаны в разделе 4.

## 3. Доказательство теорем 2.1 и 2.2

Поскольку теоремы 2.1 и 2.2 эквивалентны, то мы докажем только теорему 2.2.

**Доказательство теоремы 2.2.** Рассмотрим $n$-периодическое произведение $G = \prod\limits_{i\in I}{}^{n} G_i$ произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ без инволюций и покажем, что ее аменабельный радикал тривиален.

В работе [15] было доказано, что $n$-периодическое произведение семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ без инволюций есть фактор группа $F/M$ свободного произведения $F = \prod_{i\in I}^{*} G_i$ по нормальной подгруппе $M$, которая однозначно определяется следующими условиями:

**a.** подгруппа $M$ имеет тривиальное пересечение со всеми компонентами $G_i$,

**b.** подгруппа $M$ является нормальным замыканием некоторого множества $\mathcal{R}$ слов вида $C^n \in F$, причем, если элемент $X \in F$ не сопряжен в $F/M$ никакому элементу из компонент $G_i$, то $X^n = 1$ в фактор группе $F/M$.

С помощью такого описания $n$-периодических произведений в работе [15] доказан также следующий результат.

**Лемма 3.1.** *(см. [15, теорема 2]) Пусть $G$ есть $n$-периодическое произведение произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ без инволюций, где $n \geqslant 1003$ – произвольное нечетное число. Тогда каждая нециклическая подгруппа $H$ группы $G$,* *которая не сопряжена никакой подгруппе компонент $G_i$, содержит подгруппу, изоморфную свободной периодической группе $B(2, n)$ ранга 2.*

Это утверждение мы используем для доказательства теоремы 2.2. Хорошо известно, что подгруппы аменабельных групп тоже аменабельны. Поэтому каждая нециклическая подгруппа $H$ группы $G$, которая не сопряжена ни с какой подгруппой компонент $G_i$, является неаменабельной. Действительно, из леммы 3.1 следует, что $H$ содержит подгруппу, изоморфную свободной периодической группе $B(2, n)$ ранга 2, а по классической теореме С. И. Адяна (см. [6, теорема 5]), группа $B(2, n)$ не аменабельна.

Таким образом, в группе $G$ аменабельными являются только аменабельные подгруппы компонент $G_i$ или сопряженные им подгруппы группы $G$. Покажем, что ни одна нетривиальная подгруппа группы $G$, которая сопряжена какой-либо подгруппе $H$ одной из компонент $G_i$ не является нормальной подгруппой в $G$.

**Лемма 3.2.** *Любая подгруппа $H$ компоненты $G_i$ «антинормальна» при любом $i$, т.е. из $x \notin G_i$ следует $xHx^{-1} \cap H = 1$.*

**Доказательство.** Напомним, что согласно определению периодических произведений элементы всех компонент являются порождающими, т.е. имеют длину 1. Рассмотрим произвольный элемент $xhx^{-1}$, где $h \in H$ и $x \notin G_i$. Выбрав $\alpha$ достаточно большим, можем считать, что $x \in \mathscr{A}_\alpha \cap \mathscr{M}_\alpha$ и $xhx^{-1} \in \mathscr{R}_0$. Покажем, что слово $xhx^{-1}$ является абсолютно приведенным словом.

Допустим, что при некотором $\beta$ выполнено соотношение $xhx^{-1} \notin \mathscr{K}_\beta$. Выберем такое $\beta$ минимальным. Тогда в силу [11, IV.1.19] найдется некоторое нормированное вхождение $V \in$ Норм$(\beta, xhx^{-1}, n - 217)$. Допустим, что $V = P * E * Q$. Можем считать, что $\beta \leq \alpha$. В силу леммы [11, IV. 1.18] неприводимые подслова $x$ и $x^{-1}$ не могут содержать более $(n+1)/2 + 42$ участков. Поэтому, элементарное слово $E$ ранга $\beta$ имеет вид $E = x_1 h x_2$, где выделена центральная буква $h$ несократимого слова $xhx^{-1}$. При этом каждое из подслов $x_1$ и $x_2$ слова $E$ содержит не более $(n+1)/2 + 42$ участков, а значит, и не менее $2p$ участков, так как $n - 217 - (n + 1/2 + 43) > 2p$. Эти вхождения элементарных $2p$-степеней $x_1$ и $x_2$ согласованы, так как вхождение $V$ является их общим продолжением. Тогда в силу леммы [11. II. 5.17] подслова $x_1$ и $x_2$ родственны. Без ограничения общности, можем считать, что длина $x_1$ не больше длины $x_2$. Тогда $x_1^{-1}$ будет началом

$x_2$. Это означает, что элементарные $p$-степени $x_1^{-1}$ и $x_2$ тоже родственны, а это противоречит [11, II, 5.22]. Следовательно, имеем $xhx^{-1} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$.

Если теперь для некоторого $h_1 \in H$ имеет место равенство $h_1 = xhx^{-1}$ в $G$, то в силу [11, IV. 2.16] равенство $h_1 = xhx^{-1}$ справедливо также в свободном произведении семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$. Но это противоречит условию $x \notin G_i$. Лемма 3.2 доказана.

Из леммы 3.2 следует, что все подгруппы компонент $G_i$ (и их сопряженные) не являются нормальными подгруппами в $n$-периодическом произведении $G$. Поэтому наибольшая аменабельная нормальная подгруппа группы $G$ тривиальна, т. е. аменабельный радикал группы $G$ тривиален. Теорема 2.2 доказана.

## 4. Доказательство теорем 2.3 – 2.5

**Доказательство теоремы 2.3.** Докажем, что группа $Aut(F_m)$ имеет тривиальный аменабельный радикал. Предположим, что $A$ – аменабельный радикал группы $Aut(F_m)$ и $A$ – нетривиальная подгруппа. Если $\alpha$ произвольный автоморфизм некоторой группы $G$, а $i_g$ – внутренний автоморфизм элемента $g \in G$, то легко проверяемая формула $\alpha \circ i_g \circ \alpha^{-1} = i_{g^\alpha}$ показывает, что централизатор группы внутренних автоморфизмов произвольной группы с тривиальным центром также тривиален.

Пусть $Inn(F_m)$ – группа внутренних автоморфизмов свободной группы $F_m$. С одной стороны, из тривиальности централизатора $C_{Aut(F_m)}(Inn(F_m))$ следует, что пересечение нормальных подгрупп $A \cap Inn(F_m)$ является нетривиальной аменабельной нормальной подгруппой в $Inn(F_m)$ (подгруппы аменабельных групп аменабельны). С другой стороны, так как $Inn(F_m)$ изоморфна свободной группе $F_m$, то по теореме Нильсена–Шрейера нетривиальная нормальная подгруппа $A \cap Inn(F_m)$ изоморфна свободной группе некоторого ранга $> 1$. Согласно известной теореме фон Неймана о неаменабельности свободных групп ранга $>1$, группа $A \cap Inn(F_m)$ неаменабельна. Полученное пртиворечие доказывает, что аменабельный радикал $A$ группы $Aut(F_m)$ тривиален.

Теперь докажем, что аменабельный радикал $A$ группы $Aut(B(m,n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ тоже тривиален при нечетных $n \geq 1003$. Предположим, что $A$ нетривиальная аменабельная нормальная подгруппа группы $Aut(B(m,n))$.

Прежде всего, напомним, что в силу теоремы [11, гл. VI, теорема 3.4] центр группы $B(m, n)$ тривиален для всех нечетных $n \geq 665$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы придем к выводу, что пересечение

$$A \cap Inn(B(m, n)) = N$$

является нетривиальной аменабельной нормальной подгруппой в группе внутренних автоморфизмов $Inn(B(m, n))$. Докажем, что нормальная подгруппа $N$ бесконечна.

Поскольку $Inn(B(m, n))$ и $B(m, n)$ изоморфны (в силу тривиальности центра $B(m, n)$), то можно считать, что $N$ является нормальной подгруппой в $B(m, n)$. Ядро гомоморфизма $f : B(m, n) \to Aut(N)$ сопоставляющего каждому элементу $g \in B(m, n)$ ограничение на $N$ внутреннего автоморфизма элемента $g$, совпадает с централизатором $C$ подгруппы $N$ в $B(m, n)$. Если бы $N$ была бы конечной подгруппой, то конечным был бы и $Aut(N)$. По теореме [11, гл. VI, теорема 3.1] централизатор любого нетривиального элемента группы $B(m, n)$ — циклическая группа. Следовательно из конечности $N$ вытекало бы также конечность централизатор $C$. Тогда и группа $B(m, n)$ была бы конечной, поскольку фактор группа $B(m, n)/C$ вкладывается в $Aut(N)$. Это противоречит теореме [11, гл. VI, теорема 1.5], согласно которой группа $B(m, n)$ бесконечна. Таким образом, нормальная подгруппа $N \lhd Inn(B(m, n))$ бесконечна и, в частности, не является циклической подгруппой.

Из изоморфности групп $Inn(B(m, n))$ и $B(m, n)$, в силу теоремы 1 работы [7], следует, что нециклическая подгруппа $N$ содержит подгруппу изоморфную группе $B(2, n)$. Как уже отметили выше, в силу [6, теорема 5] группы $B(2, n)$ неаменабельны для всех нечетных $n \geq 665$. Тогда подгруппа $N$ тоже неаменабельна, так как содержит неаменабельную подгруппу $B(2, n)$. Таким образом получается, что $N$ и аменабельна и неаменабельна. Противоречие завершает доказательство теоремы 2.3.

**Доказательство теоремы 2.4.** Пусть $G$ — произвольная счетная группа. В силу известной теоремы Г.Хигмана, Б.Ноймана и Х.Ноймана, группа $G$ вкладывается в некоторую 2-порожденную группу $\Gamma$. Рассмотрим свободное произведение $\Gamma * \mathbb{Z}$ бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ на $\Gamma$. Группа $\Gamma * \mathbb{Z}$ является 3-порожденной группой, содержащей изоморфную копию группы $G$. Любая нетривиальная нормальная подгруппа этого произведения содержит подгруппу изоморфную свободной группе ранга 2 (см., например, [16, следствие 3.6.3]) и поэтому не является аменабельной группой. Значит аменабельный радикал группы $\Gamma * \mathbb{Z}$ тривиален. Теорема 2.4 доказана.

**Доказательство теоремы 2.5.** Пусть $G$ — произвольная счетная периодическая группа некоторого ограниченного периода $k$ и без инволюций. Тогда $k$ можно считать нечетным числом. Воспользуемся следующим результатом из [17].

**Лемма 4.1.** ([17, следствие 3.2]) *Для каждого нечетного $n \geq 1003$ любая счетная группа периода $n$ вкладывается в некоторую 2-порожденную группу периода $n$.*

В силу леммы 4.1, группа $G$ вкладывается в некоторую 2-порожденную группу $\Gamma$ периода $n$, где $n \geq 1003$ произвольное нечетное число, которое делится на $k$. Рассмотрим $n$-периодическое произведение $\Gamma \overset{n}{*} \mathbb{Z}_s$ циклической группы $\mathbb{Z}_s$ произвольного нечетного периода $s$ на $\Gamma$. Это произведение является 3-порожденной группой, которая содержит изоморфную копию группы $\Gamma$ в силу точности операции $n$-периодического произведения (см. [9, теорема 3]). Следовательно и группа $G$ вкладывается в $\Gamma \overset{n}{*} \mathbb{Z}_s$. По теореме 2.1 группа $\Gamma \overset{n}{*} \mathbb{Z}_s$ обладает свойством единственного следа. Остается воспользоваться критерием простоты периодических произведений, доказанным С.И.Адяном в работе [18]. Согласно этому критерию группа $\Gamma \overset{n}{*} \mathbb{Z}_s$ проста тогда и только тогда, когда числа $s$ и $n$ взаимно просты. Теорема 2.5 доказана.

**Abstract.** In this paper we prove the unique trace property of $C^*$-algebras of $n$-periodic products of arbitrary family of groups without involutions. We show that the free Burnside groups $B(m, n)$ and their automorphism groups also possess the unique trace property. Also, we show that every countable group is embedded into some 3-generated group with the unique trace property, while every countable periodic group of bounded period and without involutions is embedded into some 3-generated periodic group $G$ of bounded period with the unique trace property. Moreover, as a group $G$ can be chosen both simple and not simple group.

## Список литературы

[1] R. T. Powers, "Simplicity of the $C^*$-algebra associated with the free group on two generators", Duke Math. J., **42**, 151 – 156 (1975).

[2] A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, "$C^*$-simple groups without free subgroups", Groups, geometry and dynamics, 8:3, 933 – 983 (2014).

[3] P. de la Harpe, "On simplicity of reduced $C^*$-algebras of groups", Bull. Lond. Math. Soc., 39:1, 1 – 26 (2007).

[4] M. M. Day, "Amenable semigroups", Illinois J. Math., 1, 509 – 544 (1957).

[5] E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy, N. Ozawa, "C*-simplicity and the unique trace property for discrete groups", ArXiv:1410.2518, 1 – 20 (2014).

[6] С. И. Адян, "Случайные блуждания на свободных периодических группах", Изв. АН СССР, Сер. матем., 46:6, 1139 – 1149 (1982).

[7] В. С. Атабекян, "О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n > 1003$", Изв. РАН. Сер. матем., 73:5, 3 – 36 (2009).

[8] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "$C^*$-простота $n$-периодических произведений", Матем. заметки, 99:5, 643 – 648 (2016).

[9] С. И. Адян, "Периодические произведения групп", Тр. МИАН СССР, **142**, 3 – 21 (1976).

[10] С. И. Адян, Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева. Матем. заметки, 88:6, 803 – 810 (2010).

[11] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах. Наука, М., 1975.

[12] С. И. Адян, "Новые оценки нечетных периодов бесконечных бернсайдовых групп", Тр. МИАН, **289**, 41 – 82 (2015).

[13] С. И. Адян, В.С. Атабекян, "Периодические произведения групп", Известия НАН Армении, Серия Математика, т. 52(3), 3 – 15 (2017).

[14] Uffe Haagerup, "A new look at C*-simplicity and the unique trace property of a group", ArXiv:1509.05880 (2015)

[15] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "Характеристические свойства и равномерная неаменабельность $n$-периодических произведений групп", Изв. РАН. Сер. матем., **79**:6, 3 – 18 (2015).

[16] Ю. В. Тишин, "Нормальные подгруппы свободных конструкций", Матем. сб., **126**(168):3, 377 – 396 (1985).

[17] В. С. Атабекян, "О нормальных подгруппах в периодических произведениях С. И. Адяна", Тр. МИАН, **274**, 15 – 31 (2011).

[18] С. И. Адян, "О простоте периодических произведений групп", Докл. АН СССР, 241:4, 745 – 748 (1978).

Поступила 2 марта 2016

*Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 4. 2017, стр. 12–25.*

# NONLOCAL SEMI-LINEAR FRACTIONAL-ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH STRIP CONDITIONS

B. AHMAD, A. ALSAEDI AND A. ALSHRIEF

*King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia*
E-mails: *bashirahmad_qau@yahoo.com; aalsaedi@hotmail.com; alaash1089@gmail.com*

**Abstract.** This paper is concerned with the question of existence of solutions for one-dimensional higher-order semi-linear fractional differential equations supplemented with nonlocal strip type boundary conditions. The nonlocal strip condition addresses a situation where the linear combination of the values of unknown function at two nonlocal points, located to the left and right hand sides of the strip, respectively, is proportional to its strip value. The case of Stieltjes type strip condition is also discussed. Our results, relying on some standard fixed point theorems, are supported with illustrative examples.

**MSC2010 numbers:** 34A08, 34B15.

**Keywords:** fractional differential equation; nonlocal condition; strip; existence; fixed point.

## 1. Introduction

In this paper, we consider a new class of boundary value problems of Caputo type fractional differential equations of arbitrary order involving a nonlocal sub-strip condition given by

$$(1.1)\qquad \begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t, x(t)),\ n-1 < q \le n,\ n \ge 2,\ t \in [0,1], \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0, \\ ax(\zeta_1) + bx(\zeta_2) = c\displaystyle\int_\eta^\xi x(s)ds,\ 0 < \zeta_1 < \eta < \xi < \zeta_2 < 1. \end{cases}$$

where $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a given continuous function, and $a, b, c$ are real constants.

In (1.1), the nonlocal strip condition can be interpreted as follows: the linear combination of the values of unknown function at two points $\zeta_1$ and $\zeta_2$, located to the left and right hand sides of the strip, respectively, is proportional to its strip value ($\int_\eta^\xi x(s)ds$). This situation has interesting applications in oil exploration (geophysics) and acoustic scattering (scattering from a strip together with some nonlocal scatterers off the strip located on a given boundary).

The interest in the study of fractional calculus mainly owes to its extensive theoretical development and widespread applications in a variety of disciplines such as biological sciences, ecology, aerodynamics, control theory, viscoelasticity, electro-dynamics of complex medium, electron-analytical chemistry, environmental issues, etc. The nonlocal characteristic of fractional-order differential and integral operators helps to trace the past history of several materials and processes, and thus fractional calculus' tools have contributed toward revolutionizing the traditional mathematical modeling techniques based on integer-order calculus. More details on the topic can be found in [1]-[7]. Fractional-order boundary value problems involving classical, nonlocal, multi-point, periodic and anti-periodic, fractional-order, and integral boundary conditions have recently been investigated by many researchers (see, [8]-[26], and references therein). The paper is organized as follows. In Section 2, we recall some preliminary concepts of fractional calculus and establish an auxiliary lemma concerning the linear variant of the problem (1.1). In Section 3, we state and prove our main existence results. We emphasize that the tools of fixed point theory employed in this section are well-known, however, their exposition in the present setting allow to explore further insight in terms of the existence criteria for solutions of the problem at hand. In Section 4, we extend the existence results, obtained in Section 3, to the case of Stieltjes type strip conditions.

## 2. Background material

In this section, we recall some basic definitions and tools of fractional calculus (see [1, 3]), and state two auxiliary lemmas, which will be used in the proofs of the main results of the paper.

**Definition 2.1.** *The fractional integral of order $q > 0$ with the lower limit zero for a function $f$ is defined as follows:*

$$I^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-q}} ds, \quad t > 0.$$

*provided the right hand-side is pointwise defined on $[0, \infty)$, where $\Gamma(q) = \int_0^\infty t^{q-1} e^{-t} dt$ is the gamma function.*

**Definition 2.2.** *The Riemann-Liouville fractional derivative of order $q > 0$, $n - 1 < q < n$, $n \in N$, is defined as*

$$D^q_{0+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-q-1} f(s) ds,$$

*where the function $f(t)$ has absolutely continuous derivatives up to order $(n-1)$.*

**Definition 2.3.** *The Caputo derivative of order $q$ $(n - 1 < q < n)$ for a function $f : [0, \infty) \to R$ is defined by*

$$^cD^q f(t) = D^q \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) \right), \quad t > 0.$$

**Remark 2.1.** *If $f(t) \in C^n[0, \infty)$, then for $n - 1 < q < n$ we have*

$$^cD^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{q+1-n}} ds = I^{n-q} f^{(n)}(t), \ t > 0.$$

**Lemma 2.1** (see [4, 14]). *Let $u \in AC^m[0, 1]$ and $v \in AC[0, 1]$. Then for $\rho \in (m - 1, m)$, $m \in \mathbb{N}$ and $t \in [0, 1]$ the following assertions hold:*

- **(a):** *the general solution of the fractional differential equation $^cD^\rho u(t) = 0$ is $u(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_{m-1} t^{m-1}$, where $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, ..., m-1$;*
- **(b):** $I^\rho\, {}^cD^\rho u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0)$;
- **(c):** $^cD^\rho I^\rho v(t) = v(t)$.

To define a solution of the problem (1.1), we consider its linear variant:

$$\left\{ \begin{array}{l} ^cD^q x(t) = h(t), \ n - 1 < q \le n, \ n \ge 2, \ t \in [0, 1], \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = ... = x^{(n-2)}(0) = 0, \\ a x(\zeta_1) + b x(\zeta_2) = c \int_\eta^\xi x(s) ds, \ 0 < \zeta_1 < \eta < \xi < \zeta_2 < 1, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

where $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ is a given appropriate function.

**Definition 2.4.** *A function $x \in AC^n[0, 1]$ is said to be a solution of the problem (2.1) on $[0, 1]$ if it satisfies the conditions in (2.1), and the fractional differential equation in (2.1) for any $h \in AC[0, 1]$.*

**Lemma 2.2.** *A function $x$ is a solution of the problem (2.1) (in the sense of Definition 2.4), if and only if it satisfies the following fractional integral equation:*

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s)ds + \frac{t^{n-1}}{A}\Big[ -a \int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s)ds \\ &- b\int_0^{\xi_2} \frac{(\xi_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s)ds + c\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(u)duds\Big], \end{aligned} \tag{2.2}$$

*where*

$$A = \Big[a\zeta_1^{n-1} + b\zeta_2^{n-1} - \frac{c}{n}\Big(\xi^n - \eta^n\Big)\Big] \neq 0. \tag{2.3}$$

**Proof.** By Lemma 2.1, the solution of fractional differential equation in (2.1) can be written as follows:

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s)ds + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_{n-2}t^{n-2} + b_{n-1}t^{n-1}, \tag{2.4}$$

where $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ are arbitrary constants. Using the boundary conditions $x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots = x^{(n-2)}(0) = 0$, we find that $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-2} = 0$. Thus, (2.4) takes the form:

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s)ds + b_{n-1}t^{n-1}. \tag{2.5}$$

Now applying the condition $ax(\zeta_1) + bx(\zeta_2) = c\int_\eta^\xi x(s)ds$ in (2.5), we obtain

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= \frac{1}{A}\Big[ -a\int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s)ds - b\int_0^{\xi_2} \frac{(\xi_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s)ds \\ &+ c\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(u)duds\Big], \end{aligned}$$

where $A$ is given by (2.3). Substituting $b_{n-1}$ into (2.5) we get the solution (2.2).

Conversely, by direct computation with the aid of Lemma 2.1, we infer that $x(t)$ given by (2.2) satisfies the problem (2.1). This completes the proof.

## 3. Existence results

Let $\mathcal{P} = C([0,1], \mathbb{R})$ denote the Banach space of all continuous functions from [0,1] to $\mathbb{R}$ endowed with the norm $:\|x\| = sup\{|x(t)|, t \in [0,1]\}$. In view of Lemma 2.2, we define an operator $\mathcal{K}: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ associated with problem (1.1) as follows:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}x)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds + \frac{t^{r-1}}{A}\Big[-a\int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds \\
&- b\int_0^{\xi_2} \frac{(\xi_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds + c\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(u,x(u))duds\Big].
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Observe that the problem (1.1) has solutions if and only if the operator $\mathcal{K}$ has fixed points.

For the sake of computational convenience, we set

$$
\sigma = \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{|A|}\Big[|a|\frac{\zeta_1^q}{\Gamma(q+1)} + |b|\frac{\zeta_2^q}{\Gamma(q+1)} + |c|\frac{(\xi^{q+1}-\eta^{q+1})}{\Gamma(q+2)}\Big]. \tag{3.2}
$$

Now we state an existence and uniqueness result for problem (1.1) which is based on Banach's contraction mapping principle.

**Theorem 3.1.** *Let $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function satisfying the Lipschitz condition:*

$(A_1)$: $\quad |f(t,x) - f(t,y)| \leq \ell|x-y|, \ \forall t \in [0,1], \ x, y \in \mathbb{R}, \ell > 0.$

*Then (1.1) has a unique solution provided that $\ell\sigma < 1$, where $\sigma$ is given by (3.2).*

**Proof.** We first show that the operator $\mathcal{K}$ defined by (3.1) satisfies the inclusion: $\mathcal{K}B_r \subset B_r$, where $B_r = \{x \in \mathcal{P} : \|x\| \leq r\}$, $r > \sigma\alpha/(1-\sigma\ell)$, and $\alpha = \sup_{t\in[0,1]} |f(t,0)|$. For $x \in B_r$ and $t \in [0,1]$, it follows from Lipschitz condition that

$$
|f(t,x(t))| \leq |f(t,x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)| \leq \ell\|x\| + \alpha \leq \ell r + \alpha. \tag{3.3}
$$

In view of (3.2) and (3.3), we can write

$$
\begin{aligned}
\|(\mathcal{K}x)\| \leq & \sup_{t\in[0,1]}\Big\{\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s))|ds + \frac{t^{r-1}}{|A|}\Big[|a|\int_0^{\zeta_1}\frac{(\zeta_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s))|ds \\
+ & |b|\int_0^{\zeta_2}\frac{(\zeta_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s))|ds + |c|\int_\eta^\xi\int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(u,x(u))|duds\Big]\Big\} \\
\leq & (\ell r + \alpha)\sup_{t\in[0,1]}\Big\{\frac{t^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{t^{(r-1)}}{|A|}\Big[|a|\frac{\zeta_1^q}{\Gamma(q+1)} + |b|\frac{\zeta_2^q}{\Gamma(q+1)} + |c|\frac{(\xi^{q+1}-\eta^{q+1})}{\Gamma(q+2)}\Big]\Big\} \\
\leq & (\ell r + \alpha)\Big[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{|A|}\Big(|a|\frac{\zeta_1^q}{\Gamma(q+1)} + |b|\frac{\zeta_2^q}{\Gamma(q+1)} + |c|\frac{(\xi^{q+1}-\eta^{q+1})}{\Gamma(q+2)}\Big)\Big] \\
& \leq (\ell r + \alpha)\sigma \leq r,
\end{aligned}
$$

showing that $\mathcal{K}B_r \subset B_r$.

Now, for $x, y \in \mathbb{R}$ and for each $t \in [0,1]$, we obtain

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}x - \mathcal{K}y\| &\leq \sup_{t\in[0,1]}\Big\{\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&+ \frac{t^{q-1}}{|A|}\Big[|a|\int_0^{\zeta_1} \frac{(\zeta_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&+ |b|\int_0^{\zeta_2} \frac{(\zeta_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&+ |c|\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(u,x(u)) - f(u,y(u))|duds\Big]\Big\} \\
&\leq \ell\|x-y\| \sup_{t\in[0,1]}\Big\{\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds + \frac{t^{q-1}}{|A|}\Big[|a|\int_0^{\zeta_1} \frac{(\zeta_1-s)^{q-1}}{\Gamma q}ds \\
&+ |b|\int_0^{\zeta_2} \frac{(\zeta_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds + |c|\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)}duds\Big]\Big\} \leq \ell\sigma\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Taking into account that $\ell\sigma < 1$, we conclude that the operator $\mathcal{K}$ is a contraction. Thus, by Banach's contraction mapping principle, there exists a unique solution of (1.1). This completes the proof of theorem 3.1.

Our next existence result is based on the following fixed point theorem .

**Lemma 3.1** (Krasnoselskii, [28]). *Let $\mathcal{Y}_1$ be a closed, convex, bounded and nonempty subset of a Banach space $\mathcal{Y}$. Let $\chi_1, \chi_2$ be operators satisfying the conditions:*

*(a) $\chi_1 y_1 + \chi_2 y_2 \in \mathcal{Y}_1$ whenever $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}_1$;*

*(b) $\chi_1$ is compact and continuous;*

*(c) $\chi_2$ is a contraction mapping.*

*Then there exists $y \in \mathcal{Y}_1$ such that $y = \chi_1 y + \chi_2 y$.*

**Theorem 3.2.** *Let $f : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function satisfying the condition $(A_1)$, and $|f(t,x)| \leq \delta(t)$ for all $(t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R}$ and $\delta \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$. Then problem (1.1) has at least one solution on $[0,1]$ provided that $\ell\gamma < 1$, where*

$$\gamma = \frac{1}{|A|}\Big(|a|\frac{\zeta_1^q}{\Gamma(q+1)} + |b|\frac{\zeta_2^q}{\Gamma(q+1)} + |c|\frac{(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})}{\Gamma(q+2)}\Big). \tag{3.4}$$

**Proof.** We fix $r \geq \|\delta\|\sigma$ and set $B_r = \{x \in \mathcal{P} : \|x\| \leq r\}$. Define the operators $\mathcal{K}_1$ and $\mathcal{K}_2$ on $B_r$ as follows:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}_1)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s))ds, \\
(\mathcal{K}_2)(t) &= \frac{t^{n-1}}{A}\Big[-a\int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds - b\int_0^{\xi_2} \frac{(\xi_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds \\
&+ c\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(u,x(u))duds\Big].
\end{aligned}
$$

For $x, y \in B_r$, it is easy to show that $\|(\mathcal{K}_1 x) + (\mathcal{K}_2 y)\| \leq \|\delta\|\sigma \leq r$, where $\sigma$ is as in (3.2). Hence $\mathcal{K}_1 x + \mathcal{K}_2 y \in B_r$.

Next, using the condition $(A_1)$ and formula (3.4), we can show that the operator $\mathcal{K}_2$ is a contraction. Indeed, for $x, y \in \mathbb{R}$ and $t \in [0, 1]$, we can write

$$
\begin{aligned}
&\|(\mathcal{K}_2 x) - (\mathcal{K}_2 y)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \Big\{ \frac{t^{n-1}}{|A|}\Big[|a|\int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&+|b|\int_0^{\xi_2} \frac{(\xi_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&+|c|\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(u,x(u)) - f(u,y(u))|duds\Big]\Big\} \\
&\leq \ell\|x-y\| \sup_{t\in[0,1]} \Big\{\frac{t^{n-1}}{|A|}\Big[|a|\frac{\zeta_1^q}{\Gamma(q+1)} + |b|\frac{\zeta_2^q}{\Gamma(q+1)} + |c|\frac{(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})}{\Gamma(q+2)}\Big]\Big\} \\
&\leq \ell\|x-y\|\frac{1}{|A|}\Big[|a|\frac{\zeta_1^q}{\Gamma(q+1)} + |b|\frac{\zeta_2^q}{\Gamma(q+1)} + |c|\frac{(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})}{\Gamma(q+2)}\Big] \leq \ell\gamma\|x-y\|.
\end{aligned}
$$

This shows that $\mathcal{K}_2$ is a contraction in view of the condition $\ell\gamma < 1$. The continuity of $f$ implies that the operator $\mathcal{K}_1$ is continuous. Also, $\mathcal{K}_1$ is uniformly bounded on $B_r$:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{K}_1 x\| &\leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s,x(s))|ds \leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \delta(s)ds \\
&\leq \|\delta\| \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} ds \leq \frac{\|\delta\|}{\Gamma(q+1)}.
\end{aligned}
$$

Moreover, with $\sup_{(t,x)\in[0,1]\times B_r} |f(t,x)| = \overline{f} < \infty$ and $0 < t_1 < t_2 < 1$, we have

$$
\begin{aligned}
\Big|(\mathcal{K}_1 x)(t_2) - (\mathcal{K}_1 x)(t_1)\Big| &= \Big|\int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds\Big| \\
&= \Big|\int_0^{t_1} \frac{[(t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}]}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds\Big| \leq \frac{\overline{f}}{\Gamma(q+1)}\Big(2|t_2-t_1|^q + |t_2^q - t_1^q|\Big).
\end{aligned}
$$

which tends to zero independent of $x$ as $t_2 - t_1 \longrightarrow 0$. This implies that $\mathcal{K}_1$ is relatively compact on $B_r$, and hence, by the Arzela-Ascoli theorem, $\mathcal{K}_1$ is compact on $B_r$. Thus, the assumptions of Krasonselskii's fixed point theorem (Lemma 3.1) are satisfied. Hence we can apply Lemma 3.1 to conclude that the problem (1.1) has at least one solution on $[0,1]$. This completes the proof.

Now we are going to show the existence of solutions for problem (1.1) via the following fixed point theorem (see [28]).

**Theorem 3.3.** *Let $\mathcal{X}$ be a Banach space. Assume that $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ is a completely continuous operator and the set $V = \{u \in \mathcal{X} | u = \epsilon T u, 0 < \epsilon < 1\}$ is bounded. Then $T$ has a fixed point in $\mathcal{X}$.*

**Theorem 3.4.** *Assume that there exists a positive constant $L_1$ such that $|f(t,x)| \leq L_1$ for all $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$. Then problem* (1.1) *has at least one solution on* $[0,1]$.

**Proof.** We first show that the operator $\mathcal{K}$ defined by (3.1) is completely continuous. Indeed, observe that the continuity of $\mathcal{K}$ follows from the continuity of $f$. Let $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ be bounded. Then, it is easy to show that $|(\mathcal{K}x)(t)| \leq L_1\sigma = L_2$ for all $x \in \mathcal{D}$, where $\sigma$ is given by (3.2). Furthermore, for $0 < t_1 < t_2 < 1$, we can write

$$
\begin{aligned}
& |(\mathcal{K}x)(t_2) - (\mathcal{K}x)(t_1)| \\
\leq\ & \Big| \int_0^{t_1} \frac{[(t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}]}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds \Big| \\
& + \Big| \frac{(t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{A} \Big[ -a \int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds \\
& - b \int_0^{\xi_2} \frac{(\xi_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds + c \int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(u,x(u))duds \Big] \Big| \\
\leq\ & \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} \Big( 2|t_2-t_1|^q + |t_2^q - t_1^q| \Big) \\
& + \frac{L_1 |t_2^{n-1} - t_1^{n-1}|}{A} \Big( |a| \frac{\xi_1^q}{\Gamma(q+1)} + |b| \frac{\xi_2^q}{\Gamma(q+1)} + |c| \frac{|\xi^{q+1} - \eta^{q+1}|}{\Gamma(q+2)} \Big),
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

which tends to zero independent of $x$ as $t_2 - t_1 \longrightarrow 0$. Therefore, $\mathcal{K}$ is equicontinuous on $[0,1]$. Thus, by the Arzela-Ascoli theorem, the operator $\mathcal{K}$ is completely continuous.

Next, we show that the set $V = \{x \in \mathcal{P} : x = \epsilon \mathcal{K}x, 0 < \epsilon < 1\}$ is bounded. Let $x \in V$ and $t \in [0, 1]$. Then we have

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s))ds + \frac{t^{n-1}}{A}\Big[ - a\int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s))ds \\ &- b\int_0^{\xi_2} \frac{(\xi_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s))ds + c\int_\eta^\zeta \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(u, x(u))duds\Big]. \end{aligned}$$

As before, it can be shown that $|x(t)| = \epsilon|(\mathcal{K}x)(t)| \le L_1\sigma = L_2$. Hence, $\|x\| < L_2$ for all $x \in V$ and $t \in [0, 1]$, showing that the set $V$ is bounded. Thus, we can apply Theorem 3.3 to conclude that problem (1.1) has at least one solution on $[0, 1]$. This completes the proof.

In our next existence result, we make use of the Leray-Schauder nonlinear alternative for single valued maps (see [29]).

**Lemma 3.2** (Leray-Schauder nonlinear alternative). *Let $E_1$ be a closed, convex subset of a Banach space $E$, and let $V$ be an open subset of $E_1$ with $0 \in V$. Suppose that $\mathcal{U} : \overline{V} \longrightarrow E_1$ is a continuous, compact map (that is, $\mathcal{U}(\overline{V})$ is a relatively compact subset of $E_1$). Then either $\mathcal{U}$ has a fixed point in $\overline{V}$ or there is $x \in \partial V$ (the boundary of $V$ in $E_1$), such that $x = \kappa\mathcal{U}(x)$ for $\kappa \in (0, 1)$.*

**Theorem 3.5.** *Let $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function, and let the following conditions hold:*

$(A_2)$: *there exist a function $p \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^+)$ and a nondecreasing function $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ such that $|f(t, x)| \le p(t)\psi(\|x\|)$ for all $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$;*

$(A_3)$: *there exists a constant $M > 0$ such that*

$$M\Big\{\frac{\psi(M)\|p\|}{|A|\Gamma(q+2)}\Big[(q+1)\Big(|A| + |a\zeta_1^q| + |b\zeta_2^q|\Big) + |c(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})|\Big]\Big\}^{-1} > 1.$$

*Then problem (1.1) has at least one solution on $[0, 1]$.*

**Proof.** We consider the operator $\mathcal{K} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ defined by (3.1), and show that it maps bounded sets into bounded sets in $\mathcal{P}$. For a positive number $r$, let $B_r = \{x \in \mathcal{P} : \|x\| \le r\}$ be a bounded set in $\mathcal{P}$. Then, in view of condition $(A_2)$, for $x \in B_r$ and

$t \in [0, 1]$, we have

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{K}x)(t)\| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} p(s)\psi(\|x\|)ds + \frac{t^{q-1}}{|A|}\Big[|a|\int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} p(s)\psi(\|x\|)ds \\ &+ |b|\int_0^{\xi_2} \frac{(\xi_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} p(s)\psi(\|x\|)ds + |c|\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)} p(u)\psi(\|x\|)du ds\Big] \\ &\leq \frac{\psi(r)\|p\|}{|A|\Gamma(q+2)}\Big[(q+1)\Big(|A| + |a|\zeta_1^q + |b|\zeta_2^q\Big) + |c|(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})\Big]. \end{aligned}$$

Next, it will be shown that $\mathcal{K}$ maps bounded sets into equicontinuous sets of $\mathcal{P}$. Let $t_1, t_2 \in [0, 1]$ with $t_1 < t_2$ and $x \in B_r$. Then, we have

$$\begin{aligned} &|(\mathcal{K}x)(t_2) - (\mathcal{K}x)(t_1)| \\ \leq\ & \psi(r)\|p\|\Big[\frac{2|t_2 - t_1|^q + |t_2^q - t_1^q|}{\Gamma(q+1)} \\ +\ & \frac{|t_2^{(q-1)} - t_1^{(q-1)}|}{|A|\Gamma(q+2)}\Big\{(q+1)\Big(|A| + |a|\zeta_1^q + |b|\zeta_2^q\Big) + |c|(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})\Big\}\Big]. \end{aligned}$$

Clearly, the right-hand side of the above inequality tends to zero independent of $x \in B_r$ as $t_2 \longrightarrow t_1$. Thus, by the Arzela-Ascoli theorem, the operator $\mathcal{K}$ is completely continuous.

Let $x$ be a solution of problem (1.1). Then, following the method employed to establish the boundedness of the operator $\mathcal{K}$, for $\lambda \in (0, 1)$ we obtain

$$\|x(t)\| = \|\lambda(\mathcal{K}x)(t)\| \leq \frac{\psi(\|x\|)\|p\|}{|A|\Gamma(q+2)}\Big[(q+1)\Big(|A| + |a|\zeta_1^q + |b|\zeta_2^q\Big) + |c|(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})\Big]$$

which can alternatively be expressed as follows:

$$\|x\|\Big\{\frac{\psi(\|x\|)\|p\|}{|A|\Gamma(q+2)}\Big[(q+1)\Big(|A| + |a|\zeta_1^q + |b|\zeta_2^q\Big) + |c|(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})\Big]\Big\}^{-1} \leq 1.$$

In view of condition $(A_3)$, there exists $M$ such that $\|x\| \neq M$. We choose $\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{P} : \|x\| < M + 1\}$, and observe that the operator $\mathcal{K} : \overline{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathcal{P}$ is continuous and completely continuous. Also, from the choice of $\mathcal{N}$, it follows that there is no $x \in \partial\mathcal{N}$ to satisfy $x = \lambda\mathcal{K}(x)$ for some $\lambda \in (0, 1)$. Thus, we can use Lemma 3.2, to conclude that the operator $\mathcal{K}$ has a fixed point $x \in \overline{\mathcal{N}}$, which is a solution of problem (1.1). This completes the proof.

**Example 3.1.** *Consider the following fractional boundary value problem:*

$$(3.6)\qquad \begin{cases} {}^cD^q x(t) = \dfrac{x}{\sqrt{t+4}} + 5t\tan^{-1} x + e^{-t}\cos(t^2+1), t \in [0,1], \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0, \\ ax(\zeta_1) + bx(\zeta_2) = c\displaystyle\int_\eta^\xi x(s)ds, 0 < \zeta_1 < \eta < \xi < \zeta_2 < 1, \end{cases}$$

Here we have $q = 9/2, a = 1/2, b = 1/3, c = 1, \zeta_1 = 1/5, \zeta_2 = 2/3, \xi = 1/2, \eta = 1/3$ and $f(t,x) = \dfrac{x}{\sqrt{t+4}} + 5t\tan^{-1} x + e^{-t}\cos(t^2+1)$. With the given data, we get $\ell = 11/2$.

$$|A| = |a\zeta_1^{n-1} + b\zeta_2^{n-1} - \frac{c}{n}(\xi^n - \eta^n)| \simeq 0.061217,$$

$$\sigma = \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{|A|}\Big[|a|\frac{\zeta_1^q}{\Gamma(q+1)} + |b|\frac{\zeta_2^q}{\Gamma(q+1)} + |c|\frac{(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})}{\Gamma(q+2)}\Big] \simeq 0.037113.$$

It is clear that $\ell\sigma < 1$. Thus, all the conditions of Theorem 3.1 are satisfied, and consequently there exists a unique solution for the problem (3.6).

**Example 3.2.** *Consider the problem* (3.6) *with*

$$(3.7)\qquad f(t,x) = (2t+1)\Big(\frac{x^2}{1+x^2} + \cos x\Big).$$

Clearly, we have $|f(t,x)| \le p(t)\psi(|x|)$ with $p(t) = (2t+1)$ and $\psi(|x|) = 2$. By the assumption:

$$M\Big\{\frac{\psi(M)\|p\|}{|A|\Gamma(q+2)}\Big[(q+1)\Big(|A| + |a|\zeta_1^q + |b|\zeta_2^q\Big) + |c|(\xi^{q+1} - \eta^{q+1})\Big]\Big\}^{-1} > 1,$$

we find that $M > 0.222678$. Thus, by Theorem 3.5, there exists at least one solution for problem (3.6) with $f(t,x)$ given by (3.7).

## 4. Existence results for Stieltjes type problem

In this section, the existence results obtained in Section 3, we extend to the case of Stieltjes type strip condition. More precisely, we consider the following boundary value problem:

$$(4.1)\qquad \begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t,x), \ n-1 < q \le n, n \ge 2, t \in [0,1], \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0, \\ ax(\zeta_1) + bx(\zeta_2) = c\displaystyle\int_\eta^\xi x(s)d\varphi(s), 0 < \zeta_1 < \eta < \xi < \zeta_2 < 1, \end{cases}$$

where $\varphi(s)$ is a function of bounded variation.

In this case, we define an operator $\mathcal{K}_s$: $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ as follows: $(\mathcal{K}_s x)(t) =$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds + \frac{t^{n-1}}{A_s}\Big[-a\int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds \tag{4.2}$$

$$- b\int_0^{\xi_2} \frac{(\xi_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,x(s))ds + c\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(u,x(u))dud\varphi(s)\Big].$$

(4.3)

where

$$A_s = \Big[a\zeta_1^{n-1} + b\zeta_2^{n-1} - c\int_\eta^\xi s^{n-1}d\varphi(s)\Big] \neq 0 \tag{4.4}$$

In what follows we use the notation:

$$\sigma_s = \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{|A_s|}\Big[|a|\frac{\zeta_1^q}{\Gamma(q+1)} + |b|\frac{\zeta_2^q}{\Gamma(q+1)} + |c|\int_\eta^\xi \int_0^s \frac{(s-u)^{q-1}}{\Gamma(q)}dud\varphi(s)\Big]. \tag{4.5}$$

**Theorem 4.1.** *Let $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function satisfying the Lipschitz condition: $|f(t,x) - f(t,y)| \leq \ell|x-y|$ for all $t \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}$ and $\ell > 0$. Then problem* (4.1) *has a unique solution provided that $\ell\sigma_s < 1$, where $\sigma_s$ is given by* (4.5).

**Proof.** With the help of the operator $\mathcal{K}_s$ defined by (4.2), (4.4). we can complete the proof following the method of proof of Theorem 3.1. So. we omit the details.

**Remark 4.1.** *The analogs of Theorems 3.2, 3.4, 3.5 for problem* (4.1) *can also be obtained by using the operator $\mathcal{K}_s$ and $\sigma_s$ defined by* (4.2), (4.4) *and* (4.5), *respectively.*

**Example 4.1.** *Consider the following Stieltjes type fractional boundary value problem:*

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t,x), \ t \in [0,1], \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0, ax(\zeta_1) + bx(\zeta_2) = c\displaystyle\int_\eta^\xi x(s)d\varphi(s). \end{cases} \tag{4.6}$$

Here we have $q = 9/2, a = 1/2, b = 1/3, c = 1, \zeta_1 = 1/5, \zeta_2 = 2/3, \xi = 1/2, \eta = 1/3$, $\varphi(s) = s + s^2/2$ and $f(t,x) = x/\sqrt{t+4} + 5t\tan^{-1}x + e^{-t}\cos(t^2+1)$. Using the given data. we find that $\ell = 11/2$. $|A_s| \simeq 0.058841$ and $\sigma_s \simeq 0.038353$. With $\ell\sigma_s < 1$, all the conditions of Theorem 4.1 are satisfied. So, there exists a unique solution for problem (4.6).

## Concluding remarks

In this paper, we have studied a new class of nonlocal fractional boundary value problems of arbitrary order in presence of classical and Stieltjes type strip conditions. Our results are new and take care of some new special situations. For instance, by taking $c = 0$. we obtain the results for a boundary value problem of fractional-order $q \in (n-1, n]$ involving a nonlocal condition of the form $ax(\zeta_1) + bx(\zeta_2) = 0$ with $a/b \neq -\zeta_2^{n-1}/\zeta_1^{n-1}$. In the case where $a = 0$ (or $\zeta_1 \to 0^+$) and $\zeta_2 \to 1^-$, our results correspond to a condition of the form: $x(1) = \mu_1 \int_{\eta}^{\xi} x(s)ds$ ($\mu_1$ – constant). Letting $b = 0$ and $\zeta_1 \to 0^+$, we get the results for the condition: $\int_{\eta}^{\xi} x(s)ds = 0$. The last two observations obviously hold for Stieltjes type strip conditions as well.

**Acknowledgement.** The authors thank a referee for useful comments that led to the improvement of the original manuscript.

## Список литературы


[1] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon (1993).

[2] G. M. Zaslavsky, Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics, Oxford University Press, Oxford (2005).

[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B. V., Amsterdam (2006).

[4] J. Sabatier, O. P. Agrawal, J.A.T. Machado (Eds.), *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, Dordrecht (2007).

[5] S. Konjik, L. Oparnica, D. Zorica, "Waves in viscoelastic media described by a linear fractional model", Integral Transforms Spec. Funct., **22**, 283 – 291 (2011).

[6] V. Keyantuo, C. Lizama, "A characterization of periodic solutions for time-fractional differential equations in UMD spaces and applications", Math. Nach., **284**, 494 – 506 (2011).

[7] X. J. Yang, J. Hristov, H. M. Srivastava, B. Ahmad, "Modelling fractal waves on shallow water surfaces via local fractional Korteweg–de Vries equation", Abstr. Appl. Anal., Art. ID 278672, 10 pp. (2014).

[8] S. Liang, J. Zhang, "Existence of multiple positive solutions for m-point fractional boundary value problems on an infinite interval", Math. Comput. Modelling, **54**, 1334 – 1346 (2011).

[9] Z. B. Bai, W. Sun, "Existence and multiplicity of positive solutions for singular fractional boundary value problems", Comput. Math. Appl., **63** 1369 – 1381 (2012).

[10] R. P. Agarwal, D. O'Regan, S. Stanek, "Positive solutions for mixed problems of singular fractional differential equations", Math. Nachr., **285**, 27 – 41 (2012).

[11] A. Cabada, G. Wang, "Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions", J. Math. Anal. Appl., **389**, 403 – 411 (2012).

[12] L. Zhang, G. Wang, B. Ahmad, R. P. Agarwal, "Nonlinear fractional integro-differential equations on unbounded domains in a Banach space", J. Comput. Appl. Math., **249**, 51 – 56 (2013).

[13] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, "Existence results for higher order fractional differential inclusions with multi-strip fractional integral boundary conditions", Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., no. 20, 19 pp. (2013).

[14] K. Q. Lan, W. Lin, "Positive solutions of systems of Caputo fractional differential equations", Commun. Appl. Anal., **17**, 61 – 85 (2013).

[15] D. O'Regan, S. Stanek, "Fractional boundary value problems with singularities in space variables", Nonlinear Dynam., **71**, 641 – 652 (2013).

[16] J. R. Graef, L. Kong, M. Wang, "Existence and uniqueness of solutions for a fractional boundary value problem on a graph", Fract. Calc. Appl. Anal., **17**, 499 – 510 (2014).

[17] G. Wang, S. Liu, L. Zhang, "Eigenvalue problem for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions", Abstr. Appl. Anal., Art. ID 916260, 6 pp (2014).

[18] B. Ahmad, R. P. Agarwal, "Some new versions of fractional boundary value problems with slit-strips conditions", Bound. Value Probl., 2014:175 (2014).

[19] X. Liu, Z. Liu, X. Fu, "Relaxation in nonconvex optimal control problems described by fractional differential equations", J. Math. Anal. Appl., **409**, 446 – 458 (2014).

[20] C. Zhai, L. Xu, "Properties of positive solutions to a class of four-point boundary value problem of Caputo fractional differential equations with a parameter", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **19**, 2820 – 2827 (2014).

[21] B. Ahmad, J. J. Nieto, A. Alsaedi, H. Al-Hutami, "On a $q$-fractional variant of nonlinear Langevin equation of different orders", J. Contemp. Math. Anal., **49**, 277 – 286 (2014).

[22] F. Punzo, G. Terrone, "On the Cauchy problem for a general fractional porous medium equation with variable density", Nonlinear Anal., **98**, 27 – 47 (2014).

[23] L. Zhang, B. Ahmad, G. Wang, "Successive iterations for positive extremal solutions of nonlinear fractional differential equations on a half line", Bull. Aust. Math. Soc., **91**, 116 – 128 (2015).

[24] Y. Ding, Z. Wei, J. Xu, D. O'Regan, "Extremal solutions for nonlinear fractional boundary value problems with $p$-Laplacian", J. Comput. Appl. Math., **288**, 151 – 158 (2015).

[25] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, A. Alsaedi, F. Alzahrani, "New fractional-order multivalued problems with nonlocal nonlinear flux type integral boundary conditions", Bound. Value Probl., 2015:83 (2015).

[26] G. Wang, "Explicit iteration and unbounded solutions for fractional integral boundary value problem on an infinite interval", Appl. Math. Lett., **47**, 1 – 7 (2015).

[27] K. Q. Lan, W. Lin, "Positive solutions of systems of Caputo fractional differential equations", Commun. Appl. Anal., **17**, 61 – 85 (2013).

[28] D. R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press (1980).

[29] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York (2003).

Поступила 20 июня 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 4. 2017, стр. 26–38.

# GENERALIZED (JORDAN) LEFT DERIVATIONS ON RINGS ASSOCIATED WITH AN ELEMENT OF RINGS

B. DAVVAZ, L. KAMALI ARDEKANI

*Yazd University, Yazd, Iran*
*Ardakan University, Ardakan, Iran*
E-mails: *davvaz@yazd.ac.ir, bdavvaz@yahoo.com,*
*l.kamali@ardakan.ac.ir, kamali_leili@yahoo.com*

Abstract. In this paper, we introduce a new notion of generalized (Jordan) left derivation on rings as follows: let $R$ be a ring, an additive mapping $F : R \longrightarrow R$ is called a generalized (resp. Jordan) left derivation if there exists an element $w \in R$ such that $F(xy) = xF(y)+yF(x) + yxw$ (resp. $F(x^2) = 2xF(x) + x^2w$) for all $x, y \in R$. Then, some related properties and results on generalized (Jordan) left derivation of square closed Lie ideals are obtained.

**MSC2010 numbers:** 16Y99, 20N20.

**Keywords:** ring; generalized left derivation; generalized Jordan left derivation; square closed Lie ideal.

## 1. Introduction

Throughout the paper $R$ will denote an associative ring with center $Z(R)$. For any $x, y \in R$, the symbol $[x, y]$ will stand for the commutator $xy - yx$. We will use the commutator identities $[x, yz] = [x, y]z + y[x, z]$ and $[xy, z] = [x, z]y + x[y, z]$. A mapping $\sigma : R \longrightarrow R$ is said to be commuting if $[\sigma(x), x] = 0$ for all $x \in R$. Recall that a ring $R$ is prime if $xRy = 0$ implies that either $x = 0$ or $y = 0$, and $R$ is semiprime if $xRx = 0$ implies that $x = 0$. A ring $R$ is $n$-torsion free, where $n > 1$ is an integer, if $nx = 0$, $x \in R$, implies that $x = 0$. An additive subgroup $U$ of $R$ is called a Lie ideal if $[U, R] \subseteq U$. A Lie ideal $U$ is called square closed if $u^2 \in U$ for all $u \in U$. Note that for every $u$, $v$ in square closed Lie ideal $U$, we have $uv + vu = (u + v)^2 - u^2 - v^2 \in U$ and $uv - vu \in U$, and hence $2uv \in U$ for all $u, v \in U$.

Following [9], an additive mapping $d : R \longrightarrow R$ we will call a derivation (resp. a Jordan derivation) if $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ (resp. $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$), for all $x, y \in R$. In particular, for a fixed $a \in R$, the mapping $I_a : R \longrightarrow R$ given by $I_a(x) = [a, x]$ is a derivation, and is called an inner derivation. Following [15], an additive mapping $H : R \longrightarrow R$ is called a left (resp. right) centralizer (multiplier) of

$R$ if $H(xy) = H(x)y$ (resp. $H(xy) = xH(y)$), for all $x, y \in R$. An additive mapping $H : R \longrightarrow R$ is called a left (resp. right) Jordan centralizer (multiplier) of $R$ if $H(x^2) = H(x)x$ (resp. $H(x^2) = xH(x)$), for all $x \in R$. An additive function $F : R \longrightarrow R$ is called a generalized inner derivation if $F(x) = ax + xb$, for fixed $a, b \in R$. For such a mapping $F$, it is easy to see that $F(xy) = F(x)y + x[y, b] = F(x)y + xI_b(y)$, for all $x, y \in R$. This observation leads to the following definition, given by Brešar in [6]: An additive mapping $F : R \longrightarrow R$ is called a generalized derivation (resp. generalized Jordan derivation) if there exists a derivation $d : R \longrightarrow R$ such that $F(xy) = F(x)y + xd(y)$ (resp. $F(x^2) = F(x)x + xd(x)$), for all $x, y \in R$. Hence, the concept of generalized derivation covers both the concept of derivation and the concept of left centralizer.

In [10], another type of generalized (Jordan) derivation is defined as follows: an additive mapping $F : R \longrightarrow R$ is called a generalized derivation (resp. generalized Jordan derivation) if there exists an element $w \in R$ such that $F(xy) = F(x)y + xF(y) + xwy$ (resp. $F(x^2) = F(x)x + xF(x) + xwx$), for all $x, y \in R$.

The concepts of left derivation and Jordan left derivation were introduced by Brešar and Vukman in [7], defined as follows: an additive mapping $d : R \longrightarrow R$ is called a left derivation (resp. a left Jordan derivation) if $d(xy) = xd(y) + yd(x)$ (resp. $d(x^2) = 2xd(x)$), for all $x, y \in R$. Ashraf and Ali [3], generalized the notions of left and Jordan left derivations as follows: an additive mapping $F : R \longrightarrow R$ is called a generalized left derivation if there exists a left derivation $d : R \longrightarrow R$ such that

$$F(xy) = xF(y) + yd(x), \text{for all } x, y \in R. \tag{1.1}$$

and an additive mapping $F : R \longrightarrow R$ is called a generalized Jordan left derivation if there exists a Jordan left derivation $d : R \longrightarrow R$ such that

$$F(x^2) = xF(x) + xd(x), \text{for all } x \in R. \tag{1.2}$$

We denote (1.1) and (1.2) by $(F, d)$. It is easy to see that $F : R \longrightarrow R$ is a generalized left derivation if and only if $F$ is of the form $F = d + H$, where $d$ is a left derivation and $H$ is a right centralizer on $R$. The concept of generalized left derivation covers the concepts of left derivation and right centralizer. It is easy to see that every generalized left derivation on a ring $R$ is a generalized Jordan left derivation. However, the converse is not true in general (see Example 1.1 of [3]). In [3] it was shown that if $R$ is a 2-torsion free prime ring, then every generalized Jordan left derivation on $R$ is a generalized left derivation. Further, Ali [1] showed that the above result remains valid for 2-torsion free semiprime ring $R$. For some properties of Jordan left derivation and generalized Jordan left derivation, we refer the reader to [1, 2, 3, 4, 7, 8].

Now, we introduce another type of a generalized left derivation and a generalized Jordan left derivation. Let $R$ be a ring, an additive mapping $F : R \longrightarrow R$ is called a generalized left derivation if there exists an element $w \in R$ such that

$$F(xy) = xF(y) + yF(x) + yxw, \tag{1.3}$$

and $F$ is called a generalized Jordan left derivation if there exists $w \in R$ such that

$$F(x^2) = 2xF(x) + x^2w. \tag{1.4}$$

We denote (1.3) and (1.4) by $(F, w)$.

Observe that if $(F, w)$ is a generalized left derivation of type (1.3), then $F + w_r : R \longrightarrow R$ is a left derivation, where $w_r : R \longrightarrow R$ is defined as $w_r(x) = xw$. Indeed, we have $(F + w_r)(xy) = F(xy) + w_r(xy) = xF(y) + yF(x) + yxw + xyw = (xF(y) + xyw) + (yF(x) + yxw) = x(F + w_r)(y) + y(F + w_r)(x)$. Also, $(F, F + w_r)$ is a generalized left derivation of type (1.1), because $F(xy) = xF(y) + yF(x) + yxw = xF(y) + y(F + w_r)(x)$. In this case $R$ has an identity 1. The converse is also valid, that is, if $(F, d)$ is a generalized left derivation of type (1.1), then $(F, -F(1))$ is a generalized left derivation of type (1.3), because $F(xy) = xF(y) + yd(x) = xF(y) + y(F(x) - xF(1)) = xF(y) + yF(x) + yx(-F(1))$.

**Example 1.1.** *Consider the ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. For $a \in \mathbb{Z}$ we set $w = -a$ and define the map $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ as $F(x) = ax$, for all $x \in \mathbb{Z}$. Then it is easy to see that $(F, w)$ is a generalized left derivation.*

**Example 1.2.** *Let $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Then $M$ with usual addition and multiplication of matrices is a ring. Suppose that $w = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and define the map $F : M \longrightarrow M$ as $F\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Then $(F, w)$ is a generalized left derivation.*

**Example 1.3.** *Let $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Then $M$ with usual addition and multiplication of matrices is a ring. Suppose that $w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ and define* *the map* $F : M \longrightarrow M$ *as* $F\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$. *Then* $(F, w)$ *is a generalized left derivation.*

**Example 1.4.** *Let* $\Omega$ *be a power set. For all* $A, B \in \Omega$, *we define* $A + B = A\Delta B = A \cup B - A \cap B$ *and* $A \cdot B = A \cap B$. *Then* $(\Omega, +, \cdot)$ *is a ring. Suppose that* $w = \Omega$ *and define the map* $F : \Omega \longrightarrow \Omega$ *as* $F(A) = A$, *for all* $A \in \Omega$. *Then* $(F, w)$ *is a generalized left derivation.*

## 2. Generalized left derivations associated with an element on rings

In this section, we prove some properties of generalized (Jordan) left derivation $(F, w)$ on semiprime and prime rings. To this end, we first recall and prove some necessary lemmas.

**Lemma 2.1.** *Let* $R$ *be a 2-torsion free ring and let* $L$ *be a square closed Lie ideal of* $R$. *If* $(F, w) : R \longrightarrow R$ *is a generalized Jordan left derivation on* $L$, *then the following assertions hold:*

(1) $F(uv + vu) = 2uF(v) + 2vF(u) + uvw + vuw$;
(2) $F(uvu) = u^2F(v) - vuF(u) + 3uvF(u) + u^2vw + 2uvuw - vu^2w$;
(3) $F(uvz + zvu) = (uz + zu)F(v) + 3uvF(z) + 3zvF(u) - vuF(z) - vzF(u) + uzvw + zuvw + 2uvzw + 2zvuw - vuzw - vzuw$;
(4) $[u, v]u(F(u) + uw) = u[u, v](F(u) + uw)$;
(5) $[u, v](F(uv) - uF(v) - vF(u) - vuw) = 0$;
(6) $F([u, v]^2) = [u, v]F([u, v])$.

**Lemma 2.2** ([13]). *Let* $R$ *be a semiprime ring and let the relation* $axb + bxc = 0$ *hold for all* $x \in R$ *and for some* $a, b, c \in R$. *Then* $(a + c)xb = 0$ *for all* $x \in R$.

**Lemma 2.3** ([11]). *Let* $R$ *be a 2-torsion free semiprime ring and let* $F : R \longrightarrow R$ *be an additive mapping satisfying* $[[F(x), x], x] = 0$ *for all* $x \in R$. *Then* $[F(x), x] = 0$, *for all* $x \in R$.

**Lemma 2.4** ([11]). *Let* $R$ *be a prime ring and let* $a, b, c$ *be elements of* $R$ *such that* $arbrc = 0$ *for all* $r \in R$. *Then* $a = 0$ *or* $b = 0$ *or* $c = 0$.

**Lemma 2.5** ([11]). *Let* $R$ *be a 2-torsion free prime ring and let* $d_1, d_2$ *be derivations of* $R$ *such that* $d_1d_2$ *is also a derivation. Then* $d_1 = 0$ *or* $d_2 = 0$.

**Lemma 2.6.** *Let $R$ be a prime ring and let $(F, w) : R \longrightarrow R$ be a nonzero generalized Jordan left derivation. Further, let $a \in R$ be such that $F(a) \neq -aw$. Then $(I_a^2)^2 = (I_a(I_a))^2 = 0$, where $I_a(x) = [a, x]$ is an inner derivation associated to $a$.*

**Proof.** By Lemma 2.1 (4), we have $[a, [a, x]]F(a) + [a, [a, x]]aw = 0$, for all $x \in R$. This implies that

$$I_a^2(x)(F(a) + aw) = [a, [a, x]](F(a) + aw) = 0. \tag{2.1}$$

On the other hand, we have $I_a^2(xy) = I_a^2(x)y + 2I_a(x)I_a(y) + xI_a^2(y)$. Therefore, by (2.1), we get

$$\begin{aligned} 0 &= I_a^2(xy)(F(a) + aw) = (I_a^2(x)y + 2I_a(x)I_a(y) + xI_a^2(y))(F(a) + aw) \\ &= (I_a^2(x)y + 2I_a(x)I_a(y))(F(a) + aw). \end{aligned} \tag{2.2}$$

We replace $y$ by $I_a(yz)$ in (2.2), and use (2.1), to get $I_a^2(x)I_a(yz)(F(a) + aw) = 0$. This implies that

$$I_a^2(x)I_a(y)z(F(a) + aw) + I_a^2(x)yI_a(z)(F(a) + aw) = 0. \tag{2.3}$$

Next, we replace $z$ by $I_a(z)$ in (2.3), and use (2.1), to obtain

$$I_a^2(x)I_a(y)I_a(z)(F(a) + aw) = 0. \tag{2.4}$$

In (2.3), we replace $y$ by $I_a(y)$ and use (2.4), to get

$$I_a^2(x)I_a^2(y)z(F(a) + aw) = 0.$$

So, we have $I_a^2(x)I_a^2(y) = 0$, since $R$ is prime and $F(a) \neq -aw$. Finally, we replace $y$ by $x$, to obtain $(I_a^2(x))^2 = ([a, [a, x]])^2 = 0$, for all $x \in R$. □

**Lemma 2.7** ([5]). *Let $R$ be a 2-torsion free prime ring and let $L$ be a Lie ideal of $R$ such that $L \not\subseteq Z(R)$. If $x, y \in R$ such that $xLy = 0$, then $x = 0$ or $y = 0$.*

**Lemma 2.8** ([12]). *Let $R$ be a 2-torsion free prime ring and let $L$ be a nonzero Lie ideal of $R$. If $L$ is commutative, that is, $[u, v] = 0$ for all $u, v \in L$, then $L \subseteq Z(R)$.*

Using arguments similar to those applied in the proof of Theorem 3.1 of [3], we can prove the following result.

**Proposition 2.1.** *Let $R$ be a 2-torsion free ring and let $(F, w) : R \longrightarrow R$ be a generalized Jordan left derivation. Further, let $L$ be a square closed Lie ideal of $R$ such that $L$ has a commutator which is not a left zero divisor. Then $(F, w)$ is a generalized left derivation on $L$.*

**Corollary 2.1.** *Let $R$ be a 2-torsion free ring such that $R$ has a commutator which is not a left zero divisor. Also, let $(F, w) : R \longrightarrow R$ be a generalized Jordan left derivation. Then $(F, w)$ is a generalized left derivation on $R$.*

**Theorem 2.1.** *Let $R$ be a 2-torsion free semiprime ring and let $(F, w) : R \longrightarrow R$ be a generalized Jordan left derivation, where $w \in Z(R)$. Then $F$ is commuting on $R$.*

**Proof.** By Lemma 2.1, we have for all $x, y \in R$,

$$F(xy + yx) = 2xF(y) + 2yF(x) + xyw + yxw, \tag{2.5}$$

$$F(xyx) = x^2F(y) + 3xyF(x) - yxF(x) + x^2yw + 2xyxw - yx^2w. \tag{2.6}$$

In (2.5), we replace $y$ by $xyx$ and use (2.6) to get

$$\begin{aligned} F(x^2yx + xyx^2) &= 2xF(xyx) + 2xyxF(x) + x^2yxw + xyx^2w \\ &= 2x^3F(y) + 6x^2yF(x) + 2x^3yw + 5x^2yxw - xyx^2w. \end{aligned} \tag{2.7}$$

In (2.6), we replace $y$ by $xy + yx$ and use (2.5) to obtain

$$\begin{aligned} F(x^2yx + xyx^2) &= x^2F(xy + yx) + 3x(xy + yx)F(x) - (xy + yx)xF(x) + x^2(xy + yx)w \\ &\quad +2x(xy + yx)xw - (xy + yx)x^2w \\ &= 2x^3F(y) + 5x^2yF(x) + 2xyxF(x) - yx^2F(x) + 2x^3yw + 4x^2yxw \\ &\quad +xyx^2w - yx^3w. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Combining (2.7) and (2.8), we have for all $x, y \in R$,

$$x^2yF(x) - 2xyxF(x) + yx^2F(x) + x^2yxw - 2xyx^2w + yx^3w = 0. \tag{2.9}$$

Replace $y$ by $F(x)y$ in (2.9) to obtain

$$\begin{aligned} x^2F(x)yF(x) - 2xF(x)yxF(x) + F(x)yx^2F(x) + x^2F(x)yxw \\ -2xF(x)yx^2w + F(x)yx^3w = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Left multiplication in (2.9) by $F(x)$ yields

$$\begin{aligned} F(x)x^2yF(x) - 2F(x)xyxF(x) + F(x)yx^2F(x) + F(x)x^2yxw \\ -2F(x)xyx^2w + F(x)yx^3w = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Combining (2.10) and (2.11), we obtain for all $x, y \in R$,

$$\begin{aligned} [F(x), x^2]yF(x) - 2[F(x), x]yxF(x) + \\ +[F(x), x^2]yxw - 2[F(x), x]yx^2w = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Replace $y$ by $yx$ in (2.12), to get

$$[F(x),x^2]yxF(x)-2[F(x),x]yx^2F(x)+ \tag{2.13}$$
$$+[F(x),x^2]yx^2w-2[F(x),x]yx^3w=0.$$

Right multiplicaion in (2.12) by $x$ yields

$$[F(x),x^2]yF(x)x-2[F(x),x]yxF(x)x+ \tag{2.14}$$
$$+[F(x),x^2]yxwx-2[F(x),x]yx^2wx=0.$$

Combining (2.13) and (2.14), and taking into account that $w\in Z(R)$, we obtain for all $x,y\in R$,

$$[F(x),x^2]y[F(x),x]+[F(x),x]y(-2x[F(x),x])=0.$$

So, by Lemma 2.2, we have $\left([F(x),x^2]-2x[F(x),x]\right)y[F(x),x]=0$, which implies that

$$[[F(x),x],x]y[F(x),x]=0. \tag{2.15}$$

By (2.15), we obtain $[[F(x),x],x]y[[F(x),x],x]=0$. Therefore, $[[F(x),x],x]=0$, since $R$ is semiprime. So, we can apply Lemma 2.3 to conclude that $[F(x),x]=0$ for all $x\in R$. □

**Theorem 2.2.** *Let $R$ be a ring and $(F,w):R\longrightarrow R$ be a nonzero generalized left derivation. Then the following assertions hold:*

(1) *If $R$ is prime, then $R$ is commutative or $F(x)=-xw$, for all $x\in R$.*
(2) *If $R$ is semiprime and $w\in Z(R)$, then $F$ maps $Z(R)$ into $Z(R)$.*

**Proof.** To prove assertion (1) of the theorem, observe first that for all $x,y\in R$,

$$\begin{aligned} F(x(yx)) &= xF(yx)+yxF(x)+yx^2w \\ &= xyF(x)+x^2F(y)+yxF(x)+x^2yw+yx^2w. \end{aligned} \tag{2.16}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} F((xy)x) &= xyF(x)+xF(xy)+x^2yw \\ &= xyF(x)+x^2F(y)+xyF(x)+xyxw+x^2yw. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Comparing (2.16) and (2.17), we obtain $(xy-yx)F(x)+(xy-yx)xw=0$. So, $(xy-yx)(F(x)+xw)=0$, for all $x,y\in R$. Replace $y$ by $zy$, where $z\in R$ we get

$$\begin{aligned} 0 &= (xzy-zyx)(F(x)+xw)=(xzy-zxy+zxy-zyx)(F(x)+xw) \\ &= (xz-zx)y(F(x)+xw)+z(xy-yx)(F(x)+xw)=(xz-zx)y(F(x)+xw). \end{aligned}$$

Therefore,

$$(xz - zx)y(F(x) + xw) = 0, \text{ for all } x, y, z \in R. \tag{2.18}$$

The last relation implies that either $x \in Z(R)$ or $F(x) = -xw$ for all $x \in R$. Put $A = \{x \in R \mid x \in Z(R)\}$ and $B = \{x \in R \mid F(x) = -xw\}$, and observe that $R = A \cup B$. So, either $R = A$ or $R = B$, since $A$ and $B$ are subgroups of $R$. If $R = A$, then $R$ is commutative. If $R = B$, then $F(x) = -xw$, for all $x \in R$. This completes the proof of assertion (1).

To prove assertion (2) of the theorem, we put $x + a$ instead of $x$ in the relation (2.18), where $a \in Z(R)$, to get $0 = (xz - zx)y(F(a) + aw) + (az - za)y(F(x) + xw) = (xz - zx)y(F(a) + aw)$. So, we have $(xz - zx)y(F(a) + aw) = 0$, and replace $z$ by $F(a)$ to obtain $(xF(a) - F(a)x)y(F(a) + aw) = 0$.

Now we replace $y$ by $yx$ to get $(xF(a) - F(a)x)y(xF(a) + xaw) = 0$.

Therefore, we have $(xF(a) - F(a)x)y(xF(a) + xaw) - (xF(a) - F(a)x)y(F(a)x + awx) = 0$. So, $(xF(a) - F(a)x)y(xF(a) - F(a)x) = 0$, since $a, w \in Z(R)$. Hence, $xF(a) - F(a)x = 0$, implying that $F(a) \in Z(R)$. □

**Theorem 2.3.** *Let $R$ be a 6-torsion free prime ring and let $(F, w) : R \longrightarrow R$ be a nonzero generalized Jordan left derivation. If $a \in R$ is such that $a^2 = 0$, then $F(a) = -aw$.*

**Proof.** For $a = 0$, the statement is obvious. So, we suppose that $a \neq 0$. Then we have $0 = F(0) = F(a^2) = 2aF(a) + a^2w = 2aF(a)$, implying that $aF(a) = 0$, since $R$ is a 2-torsion free ring. By Lemma 2.1 (2), we get for all $y \in R$,

$$\begin{aligned} F(aya) &= a^2F(y) - yaF(a) + 3ayF(a) + a^2yw + 2ayaw - ya^2w \\ &= 3ayF(a) + 2ayaw. \end{aligned} \tag{2.19}$$

So, we have for all $x, y \in R$,

$$F(a(xay + yax)a) = 3axayF(a) + 3ayaxF(a) + 2axayaw + 2ayaxaw. \tag{2.20}$$

On the other hand, by Lemma 2.1 (3) and the relation (2.19), we have

$$\begin{aligned} F(a(xay + yax)a) &= F(ax(aya) + (aya)xa) \\ &= 3axF(aya) + 3ayaxF(a) - xaF(aya) + 2axayaw + 2ayaxaw \\ &= 9axayF(a) + 3ayaxF(a) + 8axayaw + 2ayaxaw. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Comparing (2.20) and (2.21), we obtain

$$6axayF(a) + 6axayaw = 0.$$

Thus, $(axa)y(F(a)+aw) = 0$, since $R$ is 6-torsion free. This implies that $F(a) = -aw$, since $R$ is prime and $a \neq 0$. □

**Theorem 2.4.** *Let $R$ be a prime ring such that $char(R) \neq 2, 3$, and let $(F, w) : R \longrightarrow R$ be a nonzero generalized Jordan left derivation. If there exists a nonzero $a \in R$ such that $a^2 = 0$, then $F(x) = -xw$ for all $x \in R$.*

**Proof.** By the hypothesis, we have $0 = F(0) = F(a^2) = 2aF(a) + a^2w = 2aF(a)$. So, $aF(a) = 0$, since $R$ is 2-torsion free. Therefore, by Lemma 2.1 (1), $F(aba) = F(a(ba) + (ba)a) = 2aF(ba) + 2baF(a) + ba^2w + abaw = 2aF(ba) + abaw$, for all $b \in R$. This implies that

$$F(aba) = 2aF(ba) + abaw. \tag{2.22}$$

On the other hand, by Lemma 2.1 (2), we have

$$F(aba) = a^2F(b) - baF(a) + 3abF(a) + a^2bw + 2abaw - ba^2w = 2abaw \tag{2.23}$$

Comparing (2.22) and (2.23), we get for all $b \in R$,

$$2aF(ba) = abaw. \tag{2.24}$$

By (2.24), we obtain

$$F(baba) = F((ba)^2) = 2baF(ba) + babaw = 2babaw. \tag{2.25}$$

Also, by Lemma 2.1 (2), we have

$$\begin{aligned} F(ab^2a) &= a^2F(b^2) - b^2aF(a) + 3ab^2F(a) + a^2b^2w + 2ab^2aw - b^2a^2w \\ &= 2ab^2aw. \end{aligned} \tag{2.26}$$

By (2.25) and (2.26), we find

$$2\left(F(ab^2a) + F(baba)\right) = 4ab^2aw + 4babaw. \tag{2.27}$$

On the other hand, by Lemma 2.1 (3) and (2.24), we obtain

$$\begin{aligned} 2\left(F(ab^2a) + F(baba)\right) &= 2\left(F(ab^2a + baba)\right) \\ &= 2(abaF(b) + ba^2F(b) - baF(ba) - b^2aF(a) + ababw + ba^2bw \\ &\quad +2ab^2aw + 2babaw - babaw - b^2a^2w) \\ &= 2(abaF(b) - baF(ba) + ababw + 2ab^2aw + babaw) \\ &= 2abaF(b) + babaw + 2ababw + 4ab^2aw. \end{aligned} \tag{2.28}$$

By comparing (2.27) and (2.28), we get $2abaF(b) + 2ababw = 0$. This implies that

$$aba(F(b) + bw) = 0, \tag{2.29}$$

since $R$ is 2-torsion free. We replace $b$ by $b+c$ in (2.29), where $c \in R$, to get

$$aba(F(c)+cw)+aca(F(b)+bw)=0 \tag{2.30}$$

Next, we replace $c$ by $ac+ca$ in (2.30), to obtain

$$aba(F(ac+ca)+(ac+ca)w)=0.$$

Therefore, by Lemma 2.1 (1), we find

$$0=aba(2aF(c)+2cF(a)+2acw+2caw)=2abacF(a)+2abacaw.$$

So, $abac(F(a)+aw)=0$, since $R$ is 2-torsion free. Now, Lemma 2.4 implies that

$$F(a)=-aw, \tag{2.31}$$

since $a \neq 0$. Hence, by Lemma 2.1 (2), we have

$$\begin{aligned} acaF(bab) &= aca(b^2F(a)-abF(b)+b^2aw+2babw-ab^2w) \\ &= acab^2F(a)+acab^2aw+2acababw=2acababw. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Replace $b$ by $bab$ in (2.30) and use (2.32), to obtain

$$\begin{aligned} 0 &= ababa(F(c)+cw)+aca(F(bab)+babw) \\ &= ababa(F(c)+cw)+3acababw=ababa(F(c)+cw). \end{aligned}$$

Thus, $ababa(F(c)+cw)=0$. Now, Lemma 2.4 implies that $a(F(c)+cw)=0$, since $a \neq 0$. So, we have

$$aF(c)=-acw. \tag{2.33}$$

Next, replace c by $c^2$ in (2.33), to get $acF(c)+ac^2w=0$. Then, replace $c$ by $c+b$, to obtain $acF(b)+abF(c)+acbw+abcw=0$. Also, replace $c$ by $ac$, to find $ab(F(ac)+acw)=0$. So, we have

$$F(ac)=-acw, \tag{2.34}$$

since $R$ is prime and $a \neq 0$. Hence, in view of (2.31), (2.33), (2.34) and Lemma 2.1 (1), we can write

$$\begin{aligned} -acw+F(ca) &= F(ac)+F(ca)=F(ac+ca)=2aF(c)+2cF(a)+acw+caw \\ &= 2aF(c)+2cF(a)+acw+caw=-acw-caw. \end{aligned}$$

Therefore,

$$F(ca)=-caw. \tag{2.35}$$

Now, we replace $c$ by $bc$ in (2.34) and $c$ by $cb$ in (2.35). to obtain $F(abc) = -abcw$ and $F(cba) = -cbaw$. Hence. by Lemma 2.1 (3). we have

$$\begin{aligned} -abcw - cbaw &= F(abc) + F(cba) = F(abc + cba) \\ &= acF(b) + caF(b) - baF(c) - bcF(a) + acbw + cabw \\ &\quad +2abcw + 2cbaw - bacw - bcaw \\ &= acF(b) + acbw + 2abcw + 2cbaw. \end{aligned}$$

Thus. $ac(F(b) + bw) = 0$, implying that $F(b) = -bw$ for all $b \in R$. since $R$ is prime and $a \neq 0$. □

**Corollary 2.2.** *Let $R$ be a prime ring such that $char(R) \neq 2,3$. If there exists a nonzero generalized Jordan left derivation $F : R \longrightarrow R$ such that $F(a) \neq -aw$ for some $a \in R$, then $R$ is commutative.*

**Proof.** Let $a \in R$ be such that $F(a) \neq -aw$. Then. by Lemma 2.6, we have $(I_a^2(x))^2 = ([a,[a,x]])^2 = 0$ for all $x \in R$. So, by Theorem 2.4. we get $I_a^2(x) = [a,[a,x]] = 0$. Now, Lemma 2.5 implies that $I_a(x) = [a,x] = 0$ for all $x \in R$. This means that $a \in Z(R)$. Put $A = \{x \in R \mid x \in Z(R)\}$ and $B = \{x \in R \mid F(x) = -xw\}$, and observe that $R = A \cup B$. So, $R = A$ or $R = B$. since $A$ and $B$ are subgroups of $R$. If $R = B$, then $F(x) = -xw$ for all $x \in R$, yielding a contradiction. Thus, $R = A = Z(R)$, implying that $R$ is commutative. □

**Theorem 2.5.** *Let $R$ be a 2-torsion free prime ring and let $L$ be a nonzero square closed Lie ideal of $R$ such that $L$ has no a nonzero nilpotent element of order 2. Further, let $(F,w) : R \longrightarrow R$ be a generalized Jordan left derivation. Then $(F,w)$ is a generalized left derivation on $L$.*

**Proof.** If $L$ is commutative, then by Lemma 2.8, we have $L \subseteq Z(R)$. So, by Lemma 2.1 (1), we get $2F(uv) = 2\{uF(v) + vF(u) + vuw\}$ for all $u,v \in L$. Therefore. $F(uv) = uF(v) + vF(u) + vuw$. since $R$ is a 2-torsion free ring.

Now. let $L$ be noncommutative. Then by Lemma 2.1 (4), we have for all $u,v \in L$,

$$u^2vF(u) + vu^2F(u) - 2uvuF(u) + u^2vuw + vu^3w - 2uvu^2w = 0.$$

In the above relation. we replace $u$ by $[u,z_0]$, where $z_0 \in L$. and use Theorem 2.4. to obtain

$$[u,z_0]^2v(F([u,z_0]) + [u,z_0]w) = 0 \text{ for all } u,v \in L.$$

So, by Lemma 2.7, we have $[u, z_0]^2 = 0$ or $F([u, z_0]) = -[u, z_0]w$. Therefore, $[u, z_0] = 0$ or $F([u, z_0]) = -[u, z_0]w$ for all $u \in L$, since by assumption, $L$ has no a nonzero nilpotent element of order 2.

Next, we put $A = \{u \in L \mid [u, z_0] = 0\}$ and $B = \{u \in L \mid F([u, z_0]) = -[u, z_0]w\}$, and observe that $L = A \cup B$. So, either $L = A$ or $L = B$, since $A$ and $B$ are subgroups of $L$. If $L = A$, then $uz_0 = z_0u$ for all $u \in L$. So, by Theorem 2.1 of [1], we have $F(uz_0) = uF(z_0) + z_0F(u) + z_0uw$ for all $u \in L$, since $R$ is 2-torsion free. If $L = B$, then $F([u, z_0]) = -[u, z_0]w$ for all $u \in L$. Therefore

$$F(uz_0) - F(z_0u) = z_0uw - uz_0w. \tag{2.36}$$

On the other hand, we have

$$F(uz_0) + F(z_0u) = 2uF(z_0) + 2z_0F(u) + uz_0w + z_0uw. \tag{2.37}$$

Adding the equations in (2.36) and (2.37), we get $F(uz_0) = uF(z_0) + z_0F(u) + z_0uw$ for all $u \in L$, since $R$ is 2-torsion free. Hence, we have $F(uz) = uF(z) + zF(u) + zuw$ for all $u, z \in L$. □

**Corollary 2.3.** *Let $R$ be a 2-torsion free prime ring and let $(F, w) : R \longrightarrow R$ be a generalized Jordan left derivation such that $R$ has no a nonzero nilpotent element of order 2. Then $(F, w)$ is a generalized left derivation on $R$.*

**Theorem 2.6.** *Let $R$ be a 2-torsion free prime ring such that $R$ has no a nonzero nilpotent element of order 2. Further, let $(F, w) : R \longrightarrow R$ be a generalized Jordan left derivation. Then $R$ is commutative or $F(x) = -xw$ for all $x \in R$.*

**Proof.** The result immediately follows from Corollary 2.3 and Theorem 2.2 (1). □

**Acknowledgement.** The authors are highly grateful to referees for their valuable comments and suggestions that led to considerable improvement of the paper.

## Список литературы


[1] S. Ali, "On generalized left derivations in rings and Banach algebras", Aequat. Math., **81**, 209 – 226 (2011).

[2] M. Ashraf, "On Jordan left derivations of Lie ideals in prime rings", Southeast Asian Bull. Math., **25**, 379 – 382 (2001).

[3] M. Ashraf and S. Ali, "On generalized Jordan left derivations in rings", Bull. Korean. Math. Soc., **45**, 253 – 261 (2008).

[4] M. Ashraf and N. Rehman, "On Lie ideals and Jordan left derivations of prime rings", Arch. Math. (Brno), **36**, 201 – 206 (2000).

[5] J. Bergen, I. N. Herstein and J. W. Kerr, "Lie ideals and derivations of prime rings", J. Algebra, **71**, 259 – 267 (1981).

[6] M. Bresar, "On the distance of the composition of two derivations to be the generalized derivations", Glasgow Math. J., **33**, 89 – 93 (1991).

[7] M. Brešar and J. Vukman, "On left derivations and related mapping", Proc. Amer. Math. Soc., **110**, 7 – 16 (1990).
[8] D. Han and F. Wei, "Generalized Jordan left derivations on semiprime algebras", Monatsh. Math., **161**, 77 – 83 (2010).
[9] I. N. Herstein, "Jordan derivations of prime rings", Proc. Amer. Math. Soc., **8**, 1104 – 1110 (1957).
[10] A. Nakajima, "On categorical properties of generalized derivations", Sci. Math., **2**, 345 – 352 (1999).
[11] E. Posner, "Derivations in prime rings", Proc. Amer. Math. Soc., **8**, 1093 – 1100 (1957).
[12] N. Rehman, "On commutativity of rings with generalized derivations", Math. J. Okayama Univ., **44**, 43 – 49 (2002).
[13] J. Vukman, "Centralizers on semiprime rings", Comment. Math. Univ. Carolin., **42**, 237 – 245 (2001).
[14] J. Vukman and I. Kosi-Ulbl, "On some equations related to derivations in rings", Int. J. Math. Math. Sci., **17**, 2703 – 2710 (2005).
[15] B. Zalar, "On centralizers of semiprime rings", Comm. Math. Univ. Carolinae, **32**, 609 – 614 (1991).

Поступила 20 мая 2015

*Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 1, 2017, стр. 39-50.*

# WEYL-TYPE THEOREMS FOR UNBOUNDED POSINORMAL OPERATORS

A. GUPTA, K. MAMTANI

*Delhi College of Arts and Commerce, New Delhi, India*
*University of Delhi, New Delhi, India*
E-mails: *dishna2@yahoo.in; karunamamtani@gmail.com*

Abstract. For bounded linear operators, the study of Weyl-type theorems and properties has been of significant interest for several non-normal classes of operators. In this paper, we extend this study to a class of unbounded posinormal operators. We define and study the spectral properties of unbounded posinormal and totally posinormal operators defined on an infinite dimensional complex Hilbert space $H$. For this class, under certain conditions several Weyl-type theorems and related properties are obtained.[1]

**MSC2010 numbers:** 47B20, 47A10, 47A11, 47A53.
**Keywords:** unbounded posinormal operator; Weyl's theorem; Browder's theorem;

## 1. Introduction

In [16], H. Weyl proved that if $T$ is a hermitian operator, then $\sigma_w(T)$ consists precisely of all points in $\sigma(T)$ except the isolated eigenvalues of finite multiplicity. Later, Weyl's theorem has been extended from hermitian operators to the classes of bounded normal, hyponormal and Toeplitz operators by L. Coburn [4]. Further, M. Berkani [2] proved that if $T$ is a bounded normal operator acting on a Hilbert space $H$, then $\sigma_{BW}(T) = \sigma(T) \setminus E(T)$, where $E(T)$ is the set of all isolated eigenvalues of $T$. This gives a generalization of the Weyl's theorem. Then, this generalized version of classical Weyl's theorem was proved for bounded hyponormal operators by M. Berkani and A. Arroud [3]. However, the study of Weyl-type theorems and related properties has so far been limited to the class of bounded operators.

For an infinite dimensional complex Hilbert space $H$, we denote by $C(H)$ the set of all closed linear operators acting on $H$. For an operator $T \in C(H)$, by $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{N}(T)$ and $\mathcal{R}(T)$ we denote the domain, null space and range of $T$, respectively.

[1]The second author was supported by the Senior Research fellowship of Council of Scientific and Industrial Research, India, under the University Grants Commission Fellowship scheme (grant no. SRF/AA/139/F-211/2012-13).

Also, by $\alpha(T)$ and $\beta(T)$ we denote the nullity and defect of $T$, respectively, that is, $\alpha(T) = dim\mathcal{N}(T)$ and $\beta(T) = codim\mathcal{R}(T)$. We call an operator T $\in C(H)$ *upper semi-Fredholm* (respectively, *lower semi-Fredholm*) if $\mathcal{R}(T)$ is closed and $\alpha(T) < \infty$ (respectively, $\beta(T) < \infty$). A *semi-Fredholm operator* is either an upper or lower semi-Fredholm operator. In this case, the *index of* $T$ is defined as $ind(T) = \alpha(T) - \beta(T)$. If T is both upper and lower semi-Fredholm, that is, if $\alpha$(T) and $\beta$(T) both are finite, then T is called a *Fredholm operator*. An operator $T \in C(H)$ is called *Weyl* if it is a Fredholm operator of index 0, and the *Weyl spectrum* of T is defined as $\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ is not Weyl}\}$. Denote

$$SF_+^-(H) = \{T \in C(H) : T \text{ is upper semi-Fredholm with } ind(T) \leqslant 0\},$$
$$SF^+_-(H) = \{T \in C(H) : T \text{ is lower semi-Fredholm with } ind(T) \geqslant 0\},$$

and observe that these operators generate the following upper and lower-Weyl spectra:

$$\sigma_{uw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin SF_+^-(H)\},$$
$$\sigma_{lw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin SF_-^+(H)\}.$$

The *ascent* p(T) and *descent* q(T) of an operator T $\in C(H)$ are defined as follows:

$$p(\mathrm{T}) = inf\{n : \mathcal{N}(\mathrm{T}^n) = \mathcal{N}(\mathrm{T}^{n+1})\}, \quad q(T) = inf\{n : \mathcal{R}(\mathrm{T}^n) = \mathcal{R}(\mathrm{T}^{n+1})\}.$$

Let $\sigma$(T), $\sigma_a$(T), $\sigma_s$(T) and $\rho$(T) denote the spectrum, approximate spectrum, surjective spectrum and the resolvent set of an operator T $\in C(H)$, respectively. By iso$\sigma$(T) and iso$\sigma_a$(T) we denote the isolated points of $\sigma$(T) and $\sigma_a$(T), respectively. It is well known that the resolvent operator $R_\lambda$(T) = (T - $\lambda$I)$^{-1}$ is an analytic operator-valued function for all $\lambda \in \rho$(T) (see [15, Ch. V]), and the points of iso$\sigma$(T) are either poles or essential singularities of R$_\lambda$(T). For T $\in C(H)$, $\lambda \in$ iso$\sigma$(T) is said to be a *pole of order p* if p = p(T - $\lambda$I) $< \infty$ and q(T - $\lambda$I) $< \infty$ (see [12]). Also, $\lambda \in \sigma_a$(T) is said to be a *left-pole* if p = p(T - $\lambda$I) $< \infty$ and $\mathcal{R}$(T - $\lambda$I)$^{p+1}$ is closed. Let $\pi_o$(T) and $\pi^a_o$(T) denote the set of all poles of finite multiplicity and left poles of finite multiplicity, respectively. Also, let E$_o$(T) and E$^a_o$(T) denote the set of all eigenvalues of finite multiplicities in iso$\sigma$(T) and iso$\sigma_a$(T), respectively.

An important property of closed linear operators in Fredholm theory is the *single valued extension property* (SVEP). We mainly concern with the SVEP at a point, the localized version of SVEP, introduced by J. Finch [6], and relate it to the finiteness of the ascent of a closed linear operator. Let $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ be a closed linear mapping and let $\lambda_o$ be a complex number. An operator $T$ has the *single valued extension property* (SVEP) at $\lambda_o$, if $f = 0$ is the only solution to $(T - \lambda I)f(\lambda) = 0$ that is analytic in every neighborhood of $\lambda_o$. Also, $T$ has SVEP if it has this property at every point $\lambda_o$ in the complex plane.

Evidently, $\mathrm{T} \in C(H)$ has SVEP at every $\lambda \in \rho(\mathrm{T})$. Moreover, by identity theorem for analytic functions, it is easily seen that T has SVEP at every boundary point (in particular, at every isolated point) of $\sigma(\mathrm{T})$. Also, from the definition of localized SVEP, it follows that

$$\lambda \in \mathrm{iso}\sigma_a(T) \Longrightarrow \mathrm{T} \text{ has SVEP at } \lambda, \quad \text{and by duality,}$$

$$\lambda \in \mathrm{iso}\sigma_s(T) \Longrightarrow \mathrm{T}^* \text{ has SVEP at } \lambda.$$

The above implications become equivalences whenever T is a bounded semi-Fredholm operator (see [1, Chapter 3]). For the case $\mathrm{T} \in C(H)$, we prove this equivalence in the theorem that follows. We begin with a definition.

**Definition 1.1** ([11, Ch IV, §1]). *Let $T \in C(H)$. Let $A$ be an operator such that $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(A)$ and $\|Au\| \leqslant a\|u\| + b\|Tu\|$ for $u \in \mathcal{D}(T)$, where $a, b$ are nonnegative constants. Then we say that $A$ is relatively bounded with respect to $T$ or $T$-bounded and the $T$-bound of $A$ is $\inf b$.*

**Lemma 1.1** ([11, Ch. IV, Theorem 5.31]). *Let $T \in C(H)$ be semi-Fredholm and let $A$ be a $T$-bounded operator in $H$. Then $S = T + \lambda A \in C(H)$, $S$ is semi-Fredholm and $\alpha(S)$ as well as $\beta(S)$ are constant for sufficiently small $|\lambda| > 0$.*

The *reduced minimum modulus* of an operator $\mathrm{T} \in C(H)$ is defined by

$$\gamma(\mathrm{T}) = \inf\{\|Tx\| : x \in \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{N}(T)^{\perp}, \|x\| = 1\}.$$

It is known that $\mathcal{R}(\mathrm{T})$ is closed if and only if $\gamma(\mathrm{T}) > 0$ for every $\mathrm{T} \in C(H)$.

**Theorem 1.1.** *Let $T \in C(H)$ be a semi-Fredholm operator. Then the following are equivalent:*

(i) *$T$ has SVEP at 0*

(ii) *$\sigma_a(T)$ does not cluster at 0*

(iii) *$p(T) < \infty$.*

*Proof.* The equivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) follows from [6, Theorem 15]. Now we prove the implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Suppose T has SVEP at zero. Since T is semi-Fredholm operator, so is $T^n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then $\mathcal{R}(T^n)$ is closed for all $n$, so that $T^\infty(H) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(T^n)$ is closed.

Since T is semi-Fredholm, $\mathcal{R}(T)$ is closed, and there exists an $\epsilon > 0$ such that $\gamma(T) > \epsilon$. Consider $\lambda$ in $0 < |\lambda| < \epsilon$. Then $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| < \epsilon\|x\| < \gamma(T)\|x\|$ for all $x \in H$. By Lemma 1.1, T - $\lambda$I is a closed semi-Fredholm operator, so that $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ is closed for all $\lambda$ satisfying $0 < |\lambda| < \epsilon$. Thus, we have that if $0 < |\lambda| < \epsilon$, then $\lambda \in \sigma_a(T)$ if and only if $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Next, if $0 \neq x \in \mathcal{N}(T - \lambda I)$, then $x = \frac{1}{\lambda}Tx = T(\frac{x}{\lambda}) \in \mathcal{R}(T)$. Also, $T^2x = T(\lambda x) = \lambda Tx = \lambda^2 x$. This implies $x = \frac{1}{\lambda^2}T^2x \in \mathcal{R}(T^2)$. Continuing this process, we get $x \in T^\infty(H)$. Thus, $\mathcal{N}(T - \lambda I) \subseteq T^\infty(H)$ for all $\lambda \neq 0$. This implies that every non-zero eigenvalue of T belongs to $\sigma(T|_{T^\infty(H)})$.

Suppose the opposite that 0 is a cluster point of $\sigma_a(T)$. Then there exists a sequence $(\lambda_n)$ of nonzero eigenvalues of $T$ such that $\lambda_n \to 0$ as $n \to \infty$. Hence $\lambda_n \in \sigma(T|_{T^\infty(H)})$ so that $0 \in \sigma(T|_{T^\infty(H)})$, because the spectrum of an operator is closed. Since $T$ is a semi-Fredholm operator, either $\alpha(T)$ or $\beta(T)$ is finite and $\mathcal{R}(T)$ is closed. Hence $T|_{T^\infty(H)}$ is onto. Also, since $T$ has SVEP at 0, by Corollary 3 from [6, p. 62], we have that $T|_{T^\infty(H)}$ is injective, so that $0 \notin \sigma(T|_{T^\infty(H)})$, which is a contradiction. Therefore, $\sigma_a(T)$ does not cluster at 0. Finally, observe that the implication (ii) $\Rightarrow$ (i) holds for all closed linear operators. □

Recently, we have extended the study of Weyl-type theorems to the class of unbounded normal operators [9], and the class of unbounded hyponormal operators [8].

In this paper, we define the class of unbounded posinormal operators on an infinite dimensional complex Hilbert space H. In Section 2, we introduce and study the spectral properties of operators from this class. In Sections 3 and 4, we study the Weyl-type theorems and its variants, namely, the properties (w), (aw), (b) and (ab) for the class of unbounded totally posinormal operators. Also, we discuss an example that illustrates the obtained results.

## 2. Unbounded Posinormal operators

The class of bounded posinormal operators is sufficiently large and contains the classes of hyponormal operators, M-hyponormal operators and dominant operators. The class of bounded posinormal operators was introduced by H. Rhaly in [14], where many interesting properties of operators from this class were studied. Since then these operators have been explored in a number of papers (see, e.g., Jeon et al. [10], Duggal and Kubrusly [5], Mecheri [13]). For instance, Jeon et al. [10] have proved the Weyl's theorem for posinormal operators with certain additional conditions. Duggal and Kubrusly [5] have proved the Weyl's theorem for posinormal operators under weaker conditions than those imposed in [10]. In this paper, we extend this study to the class of *unbounded* posinormal operators.

Recall that a self-adjoint operator P is positive if $<Px, x> \geqslant 0$ for every $x \in \mathcal{D}(\mathrm{P}) \subseteq H$.

**Definition 2.1.** *A densely defined operator $T \in C(H)$ with $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ is said to be* posinormal *(or positive-normal) if there exist a positive operator $P$, ($\mathcal{D}(P) \supset \mathcal{R}(T)$), called the interrupter, such that $TT^* = T^*PT$.*

Notice that the equality $TT^* = T^*PT$ in Definition 2.1 implicitly carries the condition that $\mathcal{D}(TT^*) = \mathcal{D}(T^*PT)$.

**Example 2.1.** Let $H = l^2$ and let the operator T be defined as follows:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, 2x_1, x_2, 3x_3, 4x_4, \dots) = (0, a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, a_4x_4, \dots),$$

where

$$a_j = \begin{cases} j, & \text{if } j \in \mathbb{N},\ j \geqslant 3; \\ 2, & \text{if } j = 1; \\ 1, & \text{if } j = 2 \end{cases}$$

and

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^2 : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j x_j|^2 < \infty \right\}.$$

If $c_{oo} = \{x = (x_n) : (x_n) \neq 0$ for only finitely many $n \in \mathbb{N}\}$, then $c_{oo}$ is dense in $l^2$. Since $c_{oo} \subset \mathcal{D}(\mathrm{T})$, we have that $\mathcal{D}(\mathrm{T})$ is dense in $H$. Also, the adjoint $T^*$ of T is defined as follows:

$$T^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (2x_2, x_3, 3x_4, 4x_5, \dots) = (\overline{a_1}x_2, \overline{a_2}x_3, \overline{a_3}x_4, \overline{a_4}x_5, \dots)$$

with

$$\mathcal{D}(\mathrm{T}^*) = \left\{ (x_n) \in l^2 : \sum_{j=1}^{\infty} |\overline{a_j} x_{j+1}|^2 < \infty \right\} = \mathcal{D}(T).$$

Define P to be the diagonal operator with the diagonal entries $p_i$ given by:

$$p_i = \begin{cases} \left|\frac{a_{i-2}}{a_{i-1}}\right|^2, & \text{if } i \in \mathbb{N},\ i \geqslant 3; \\ 0, & \text{if } i = 1, 2. \end{cases}$$

Then we have $TT^* = T^*PT$, and hence T is an unbounded posinormal operator.

**Remark 2.1.** In Example 2.1, since $|a_n| \nleq |a_{n+1}|$, T is a posinormal operator which is not hyponormal.

**Definition 2.2.** *A densely defined operator $T \in C(H)$ with $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ is said to be totally posinormal if $T - \lambda I$ is posinormal for every $\lambda \in \mathbb{C}$.*

We define a class $\mathcal{N}$ of operators as follows: $\mathcal{N} := \{T \in C(H)\colon \sigma(T|_M - \lambda I) = \{0\} \Longrightarrow (T|_M - \lambda I) = 0$ for every invariant subspace $M$ of $T\}$, and we will use the following notation:

$$\wp(H) = \{T \in \mathcal{N} : T \text{ is a totally posinormal operator with } \rho(T) \neq \emptyset\}.$$

**Theorem 2.1.** *If $T \in C(H)$ with $\mathcal{N}(T - \lambda I) \subset \mathcal{N}((T - \lambda I)^*)$, then $p(T - \lambda I) \leqslant 1$.*

*Proof.* Suppose $x \in \mathcal{N}((T - \lambda I)^2)$, then $(T - \lambda I)x \in \mathcal{N}(T - \lambda I) \cap \mathcal{R}(T - \lambda I) \subset \mathcal{N}(T - \lambda I) \cap \{\mathcal{N}((T - \lambda I)^*)\}^{\perp} = \{0\}$. Thus, $x \in \mathcal{N}(T - \lambda I)$, and since the reverse inclusion is true for every linear operator, we conclude that $\mathcal{N}((T - \lambda I)^2) = \mathcal{N}(T - \lambda I)$ and $p(T - \lambda I) \leqslant 1$. $\square$

**Theorem 2.2.** *If $T$ is an unbounded posinormal operator, then $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^*)$. In particular, if $T \in \wp(H)$, then $\mathcal{N}(T - \lambda I) \subseteq \mathcal{N}(T - \lambda I)^*$ for all $\lambda \in \mathbb{C}$ and thus, $p(T - \lambda I) \leqslant 1$ for every $\lambda \in \mathbb{C}$.*

*Proof.* Suppose that $T$ is an unbounded posinormal operator with interrupter $P$ and let $x \in \mathcal{N}(T)$. Then $Tx = 0$ implies $0 = T^*PTx = TT^*x$ and $\|T^*x\|^2 = \langle TT^*x, x\rangle = 0$. Thus, $x \in \mathcal{N}(T^*)$, and hence $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^*)$. If $T \in \wp(H)$, then $T - \lambda I$ is posinormal and $\mathcal{N}(T - \lambda I) \subset \mathcal{N}((T - \lambda I)^*)$ for every $\lambda \in \mathbb{C}$. Thus, we can apply Theorem 2.1 to obtain $p(T - \lambda I) \leqslant 1$ for every $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

In the next lemma, it is shown that $T \in \wp(H)$ is *polaroid*, that is, every isolated point of the spectrum of T is a pole of the resolvent operator.

**Lemma 2.1.** *If $T \in \wp(H)$, then $\lambda$ is an isolated point of $\sigma(T)$ if and only if $\lambda$ is a simple pole of the resolvent of $T$.*

*Proof.* Suppose $\lambda$ is an isolated point of $\sigma(T)$. Then $H = \mathcal{N}(E_o) \oplus \mathcal{R}(E_o)$, where $E_o$ is the corresponding spectral projection operator. If $T_1 = T|_{\mathcal{N}(E_o)}$ and $T_2 = T|_{\mathcal{R}(E_o)}$, then $\sigma(T_1) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ and $\sigma(T_2) = \{\lambda\}$. Since. $\sigma(T_2 - \lambda I) = \{0\}$ and $T \in \mathcal{N}$, we have that $\|(T - \lambda I)x\| = 0$ for every $x \in \mathcal{R}(E_o)$. Therefore, $\mathcal{R}(T - \lambda I) = \mathcal{N}(E_o) \oplus (T - \lambda I)\mathcal{R}(E_o) = \mathcal{N}(E_o) \oplus 0$, and thus $\mathcal{R}(T - \lambda I)^2 = (T - \lambda I)\mathcal{N}(E_o) \oplus 0 = \mathcal{N}(E_o) \oplus 0 = \mathcal{R}(T - \lambda I)$.

Thus. $q(T - \lambda I) = p(T - \lambda I) \leqslant 1$, and hence $\lambda$ is a simple pole of the resolvent operator $R_\lambda(T)$. □

## 3. Weyl-type theorems

In this section, we study Weyl-type theorems for totally posinormal operators and their adjoints. We say that an operator $T \in C(H)$ satisfies:

(i) Weyl's theorem if $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = E_o(T)$.

(ii) a-Weyl's theorem if $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = E_o^a(T)$.

(iii) Browder's theorem if $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_o(T)$.

(iv) a-Browder's theorem if $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_o^a(T)$.

**Theorem 3.1.** *If $T \in \wp(H)$, then the following assertions hold:*

(i) *$T$ and $T^*$ satisfy Weyl's theorem,*

(ii) *$T^*$ satisfies a-Weyl's theorem,*

(iii) *If $T^*$ has SVEP, then $T$ satisfies a-Weyl's theorem.*

*Proof.*

(i) Suppose $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Then $0 < \alpha(T - \lambda I) = \beta(T - \lambda I) < \infty$. Also, $p(T - \lambda I) < \infty$ gives $q(T - \lambda I) = p(T - \lambda I) < \infty$ and thus, $\lambda \in E_o(T)$. Conversely, if $\lambda \in E_o(T)$, then $\lambda$ being isolated in $\sigma(T)$ is a pole of order 1, so that $H = \mathcal{R}(T - \lambda I) \oplus \mathcal{N}(T - \lambda I)$. Since $\lambda$ has finite multiplicity in $\sigma(T)$, we have $0 < \alpha(T - \lambda I) = \beta(T - \lambda I) < \infty$. Hence, T satisfies Weyl's theorem.

To prove that $T^*$ satisfies Weyl's Theorem. let $\lambda \in \sigma(T^*) \setminus \sigma_w(T^*)$. Then $0 < \alpha(T^* - \lambda I) = \beta(T^* - \lambda I) < \infty$. Now, $q(T^* - \lambda I) = p(T - \bar{\lambda} I) < \infty$ together with Theorem 3.4(iv) from [1] gives $\lambda \in E_o(T^*)$. Conversely. if $\lambda \in E_o(T^*)$, then $\bar{\lambda} \in \mathrm{iso}\,\sigma(T)$ is a pole of order 1 and $H = \mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I) \oplus \mathcal{N}(T - \bar{\lambda} I)$. Thus, $0 < \beta(T^* - \lambda I) = \alpha(T - \bar{\lambda} I) = \beta(T - \bar{\lambda} I) = \alpha(T^* - \lambda I) < \infty$. Now, $\lambda \in \sigma(T^*) \setminus \sigma_w(T^*)$, and hence $T^*$ satisfies Weyl's theorem.

(ii) Since T being posinormal has SVEP, by Corollary 7 from [6] we have $\sigma(T^*) = \sigma_a(T^*)$ and thus, $E_o(T^*) = E_o^a(T^*)$. Therefore, since $T^*$ satisfies Weyl's theorem by (i), it is enough to show that $\sigma_w(T^*) = \sigma_{uw}(T^*)$. If $\lambda \notin \sigma_{uw}(T^*)$, then $ind(T^* - \lambda I) \leqslant 0$. Also, Theorem 3.4(ii) from [1] and $q(T^* - \lambda I) = p(T - \bar{\lambda} I) < \infty$ imply $ind(T^* - \lambda I) \geqslant 0$, so that $ind(T^* - \lambda I) = 0$ and $\lambda \notin \sigma_w(T^*)$. Taking into account that the reverse inclusion holds for every closed operator, we conclude that $T^*$ satisfies a-Weyl's theorem.

(iii) If $T^*$ has SVEP, then $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ and $E_o(T) = E_o^a(T)$. By part (i), $T$ satisfies Weyl's theorem, so it is enough to show that $\sigma_w(T) = \sigma_{uw}(T)$. Suppose $\lambda \notin \sigma_{uw}(T)$. Then $T^* - \bar{\lambda} I$ is a lower semi-Fredholm operator with $ind(T^* - \bar{\lambda} I) \geqslant 0$. Since $T^*$ has SVEP, we have $p(T^* - \bar{\lambda} I) < \infty$, and thus $ind(T^* - \bar{\lambda} I) \leqslant 0$. Now, $ind(T - \lambda I) = ind(T^* - \bar{\lambda} I) = 0$ and $q(T - \lambda I) = p(T - \lambda I) < \infty$, so that $\lambda$ is a pole of order $p = p(T - \lambda I) = 1$ and $H = \mathcal{N}(T - \lambda I) \oplus \mathcal{R}(T - \lambda I)$. Therefore, $\beta(T - \lambda I) = \alpha(T - \lambda I) < \infty$ and $\lambda \notin \sigma_w(T)$. Since the reverse inclusion always holds, $T$ satisfies a-Weyl's theorem. □

**Theorem 3.2.** *If $T \in \wp(H)$, then $T$ and $T^*$ satisfy Browder's Theorem.*

*Proof.* For every totally posinormal operator T we have $q(T^* - \bar{\lambda}) = p(T - \lambda I) < \infty$ for every $\lambda \in \mathbb{C}$. Browder's theorem for T and $T^*$ now follows from Theorem 3.4 of [1]. Suppose $\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_w(T)$, then $q(T - \lambda I) = p(T - \lambda I) < \infty$ and $\lambda \in \pi_o(T)$. Conversely, suppose $\lambda \in \pi_o(T)$, then $H = \mathcal{N}(T - \lambda I) \oplus \mathcal{R}(T - \lambda I)$ and $\beta(T - \lambda I) = \alpha(T - \lambda I) < \infty$. Thus, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$, and hence $T$ satisfies Browder's theorem.

Next, suppose $\lambda \in \sigma(T^*) \setminus \sigma_w(T^*)$, then $\bar{\lambda} \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_o(T)$ and hence $p(T^* - \lambda I) = q(T - \bar{\lambda} I) = p(T - \bar{\lambda} I) = q(T^* - \lambda I) < \infty$. Therefore, $\lambda \in \pi_o(T^*)$. Conversely, suppose $\lambda \in \pi_o(T^*)$, then $\lambda \in iso\sigma(T^*)$ and $\bar{\lambda} \in iso\sigma(T)$. We have that $\bar{\lambda}$ is a pole of order 1 and $H = \mathcal{N}(T - \bar{\lambda} I) \oplus \mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I)$. Therefore, $\alpha(T - \bar{\lambda} I) = \beta(T - \bar{\lambda} I) = \alpha(T^* - \lambda I) < \infty$ and $\bar{\lambda} \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$, so that $\lambda \in \sigma(T^*) \setminus \sigma_w(T^*)$, and hence $T^*$ satisfies Browder's theorem. □

**Theorem 3.3.** *If $T \in \wp(H)$, then $T^*$ satisfies a-Browder's theorem. In addition, if $T^*$ has SVEP, then $T$ satisfies a-Browder's theorem.*

*Proof.* If $\lambda \in \pi_o^a(T^*)$, then $\alpha(T^* - \lambda I) < \infty$ and $p(T^* - \lambda I) < \infty$. Also, $T \in \wp(H)$ gives $q(T^* - \lambda I) = p(T - \bar{\lambda} I) < \infty$, so that $\beta(T^* - \lambda I) = \alpha(T^* - \lambda I) < \infty$ and $\lambda \in \sigma_a(T^*) \backslash \sigma_{uw}(T^*)$. Conversely, if $\lambda \in \sigma_a(T^*) \backslash \sigma_{uw}(T^*)$, then $ind(T^* - \lambda I) \leqslant 0$, and $q(T^* -$

$\lambda I) = p(T - \lambda I) < \infty$ implies $ind(T^* - \lambda I) = 0$. Now, $p(T^* - \lambda I) < \infty$ and $\mathcal{R}(T^* - \lambda I)^n$ is closed for every $n$. Therefore, $\lambda \in \pi_a^a(T^*)$, and hence $T^*$ satisfies a-Browder's theorem.

Next, since $p(T - \lambda I) < \infty$ and T is semi-Fredholm, it follows that $T^n$ is semi-Fredholm for every $n \in \mathbb{N}$. Hence the inclusion $\sigma(T) \setminus \sigma_{uw}(T) \subseteq \pi_a^a(T)$ follows easily. Conversely, if $\lambda \in \pi_a^a(T)$, then $p(T - \lambda I) = 1$, $\alpha(T - \lambda I) < \infty$ and $\mathcal{R}(T - \lambda I)^2$ is closed. Now, $(T - \lambda I)^2$ is semi-Fredholm with $p((T - \lambda I)^2) < \infty$ and thus, $ind((T - \lambda I)^2) \leqslant 0$. Since, $T^*$ has SVEP, so does $(T^*)^2$. Hence, $q((T - \lambda I)^2) < \infty$ and thus, $ind((T - \lambda I)^2) \geqslant 0$. Therefore, $2.ind(T - \lambda I) = ind((T - \lambda I)^2) = 0$, so that $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$, showing that $T$ satisfies a-Browder's theorem. □

## 4. Variants of Weyl's theorem

In this section, we study several properties which were introduced as variants of the Weyl's theorem. We say that an operator $T \in C(H)$ satisfies:

(i) property (w) if $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = E_o(T)$.
(ii) property (aw) if $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = E_o^a(T)$.
(iii) property (b) if $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_o(T)$.
(iv) property (ab) if $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_o^a(T)$.

**Theorem 4.1.** *If $T \in \wp(H)$ and $T^*$ has SVEP, then $T$ satisfies properties (w), (aw), (b) and (ab).*

*Proof.*

(i) Since T satisfies Weyl's theorem, we have $E_o(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$. Conversely, if $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T)$, then $p(T - \lambda I) < \infty$ implies $\lambda \in \mathrm{iso}\sigma_a(T)$, and $T^*$ has SVEP implies $\lambda \in \mathrm{iso}\sigma_s(T)$. Therefore, $\lambda \in \mathrm{iso}\sigma(T)$ and hence in $E_o(T)$.
(ii) Since $T^*$ has SVEP, we have $\sigma(T) = \sigma_a(T)$, and thus $E_o(T) = E_o^a(T)$. By Theorem 3.1(i), we get $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = E_o(T) = E_o^a(T)$.
(iii) Since T satisfies Browder's theorem (Theorem 3.2), and $T^*$ has SVEP implies $\sigma(T) = \sigma_a(T)$, it is enough to show that $\sigma_w(T) = \sigma_{uw}(T)$. If $\lambda \notin \sigma_{uw}(T)$, then $ind(T - \lambda I) \leqslant 0$. Next, $T^*$ has SVEP implies $q(T - \lambda I) < \infty$ so that $ind(T - \lambda I) \geqslant 0$. Thus, $ind(T - \lambda I) = 0$ and $\lambda \notin \sigma_w(T)$. Hence, $\sigma_w(T) \subseteq \sigma_{uw}(T)$, and since the reverse inclusion always holds, we conclude that T satisfies (b).

(iv) Suppose $\lambda \in \sigma(\mathrm{T}) \setminus \sigma_w(\mathrm{T})$. Since $p(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}) = 1$, we need to show that $\mathcal{R}(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I})^2$ is closed. This follows from the fact that $(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I})^2$ is Fredholm operator, because $(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I})$ is so. Therefore, $\lambda \in \pi_0^a(\mathrm{T})$. The converse follows from the proof of a-Browder's theorem for operator T (see Theorem 3.3). □

**Theorem 4.2.** *Let $T \in \wp(H)$. Then $T^*$ satisfies properties (w), (aw), (b) and (ab).*

*Proof.*

(i) By Theorem 3.1(i), $\mathrm{T}^*$ satisfies Weyl's theorem. Thus, it is enough to show that $\sigma(\mathrm{T}^*) \setminus \sigma_w(\mathrm{T}^*) = \sigma_a(\mathrm{T}^*) \setminus \sigma_{uw}(\mathrm{T}^*)$. If $\lambda \in \sigma_a(\mathrm{T}^*) \setminus \sigma_{uw}(\mathrm{T}^*)$, then $ind(\mathrm{T}^* - \lambda\mathrm{I}) \leqslant 0$. Also, $q(\mathrm{T}^* - \lambda\mathrm{I}) = p(\mathrm{T} - \bar{\lambda}\mathrm{I}) < \infty$ as T is totally posinormal, so that $ind(\mathrm{T}^* - \lambda\mathrm{I}) \geqslant 0$. Then, $ind(\mathrm{T}^* - \lambda\mathrm{I}) = 0$ and $\lambda \in \sigma(\mathrm{T}^*) \setminus \sigma_w(\mathrm{T}^*)$. Since the reverse inclusion holds for every operator, we conclude that $\mathrm{T}^*$ satisfies property (w).

(ii) Since T has SVEP, we have $\sigma(\mathrm{T}^*) = \sigma_a(\mathrm{T}^*)$. Now property (aw) for $\mathrm{T}^*$ follows from Weyl's theorem for $\mathrm{T}^*$ (Theorem 3.1(i)).

The proof of parts (iii) and (iv) is similar to that of part (i) because $\mathrm{T}^*$ satisfies Browder's and a-Browder's theorems (see Theorem 3.2). □

**Example 4.1.** Let $H = l^2$ and T be defined as in Example 2.1:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, 2x_2, x_3, 4x_4, \dots) = (0, a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, a_4x_4, \dots),$$

where

$$a_j = \begin{cases} j, & \text{if } j \in \mathbb{N},\ j = 2n; \\ 1, & \text{if } j = 2n - 1. \end{cases}$$

Also, an interrupter P for T is given by the diagonal operator with diagonal entries $p_i$:

$$p_i = \begin{cases} |\frac{a_{i-2}}{a_{i-1}}|^2, & \text{if } i \in \mathbb{N},\ i \geqslant 3; \\ 0, & \text{if } i = 1, 2. \end{cases}$$

Clearly, $\sigma_p(\mathrm{T}) = \phi$, and hence $\mathrm{E}_0(\mathrm{T}) = \mathrm{E}_0^a(\mathrm{T}) = \phi$. From [7], since $\lim_{n \to \infty} |a_n| = \infty$, we have

$\sigma(\mathrm{T}) = \sigma(\mathrm{T}^*) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, the extended complex plane.

$\sigma_a(\mathrm{T}) = \{\infty\}$ and $\sigma_a(\mathrm{T}^*) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$\sigma_p(\mathrm{T}^*) = \mathbb{C}$ so that $\mathrm{E}_0(\mathrm{T}^*) = \mathrm{E}_0^a(\mathrm{T}^*) = \phi$.

**Case (i):** Let $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$, $\lambda \neq \infty$.

Then, $\lambda \notin \sigma_a(\mathrm{T})$ implies that $\beta(\mathrm{T}^* - \lambda \mathrm{I}) = \alpha(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}) = 0$. Hence $p(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}) = q(\mathrm{T}^* - \lambda \mathrm{I}) = 0$, and $\mathcal{R}(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I})$ is closed, so that $\lambda \notin \sigma_{uw}(\mathrm{T})$ and $ind(\mathrm{T}^* - \lambda \mathrm{I}) \geqslant 0$, implying that $\lambda \in \sigma_{uw}(\mathrm{T}^*)$. Also, $\lambda \in \sigma_p(\mathrm{T}^*)$ implies that $\beta(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}) = \alpha(\mathrm{T}^* - \lambda \mathrm{I}) \neq 0$, so that $ind(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}) = -ind(\mathrm{T}^* - \lambda \mathrm{I}) \neq 0$, and hence $\lambda \in \sigma_w(\mathrm{T})$ and $\lambda \in \sigma_w(\mathrm{T}^*)$.

Since $\lambda \notin \mathrm{iso}\sigma(\mathrm{T})$ and $\lambda \notin \mathrm{iso}\sigma(\mathrm{T}^*)$, then $\lambda$ does not lie in $\pi_o(\mathrm{T})$, $\pi_o^a(\mathrm{T})$, $\pi_o(\mathrm{T}^*)$ or $\pi_o^a(\mathrm{T}^*)$.

**Case (ii):** Let $\lambda = \infty$.

Then $\lambda \notin \sigma_p(\mathrm{T})$, and $\lambda \in \sigma_a(\mathrm{T})$ implies that $\alpha(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}) = 0$, but $\mathcal{R}(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I})$, and thus, $\mathcal{R}(\mathrm{T}^* - \lambda \mathrm{I})$ is not closed. Hence, $\lambda = \infty$ lies in $\sigma_{uw}(\mathrm{T})$, $\sigma_w(\mathrm{T})$, $\sigma_{uw}(\mathrm{T}^*)$ and $\sigma_w(\mathrm{T}^*)$, and $\lambda$ does not belong to $\pi_o(\mathrm{T})$, $\pi_o^a(\mathrm{T})$, $\pi_o(\mathrm{T}^*)$ and $\pi_o^a(\mathrm{T}^*)$.

From the above cases, we infer that:

$\sigma_w(\mathrm{T}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and $\sigma_{uw}(\mathrm{T}) = \{\infty\}$,

$\sigma_w(\mathrm{T}^*) = \sigma_{uw}(\mathrm{T}^*) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$\mathrm{E}_o(\mathrm{T}) = \mathrm{E}_o^a(\mathrm{T}) = \mathrm{E}_o(\mathrm{T}^*) = \mathrm{E}_o^a(\mathrm{T}^*) = \phi$,

$\pi_o(\mathrm{T}) = \pi_o^a(\mathrm{T}) = \pi_o(\mathrm{T}^*) = \pi_o^a(\mathrm{T}^*) = \phi$.

Therefore, the operators T and T* satisfy Weyl's theorem, Browder's theorem, a-Weyl's theorem, a-Browder's theorem, and properties (w), (b), (aw) and (ab).

**Remark 4.1.** Example 4.1 also shows that the condition that T* has SVEP, for T $\in \wp(H)$ to satisfy a-Weyl's theorem, a-Browder's theorem and properties (w), (b), (aw) and (ab), is only a sufficient condition but not a necessary one.

## Список литературы


[1] P. Aiena, Fredholm and Local Spectral Theory, With Applications to Multipliers, Kluwer Acad. Publishers (2004).

[2] M. Berkani, "Index of B-Fredholm operators and generalization of a Weyl theorem", Proc. Amer. Math. Soc., **130**, 1717 – 1723 (2002).

[3] M. Berkani, A. Arroud, "Generalized Weyl's theorem and hyponormal operators", J. Aust. Math. Soc., **76**(2), 291 – 302 (2004).

[4] L. A. Coburn, "Weyl's theorem for nonnormal operators", Michigan Math. J., **133**, 285 – 288 (1966).

[5] B. P. Duggal, C. Kubrusly, "WeylвЂ™s theorems for posinormal operators", J. Korean Math. Soc., **42**(3), 529 – 541 (2005).

[6] J. K. Finch, "The single valued extension property on a Banach space", Pacific J. Math., **58** (1), 61 – 69 (1975).

[7] W. Gongbao, M. Jipu, Spectral characterization of Hyponormal Weighted Shifts, arXiv preprint math/0302275 (2003).

[8] A. Gupta, K. Mamtani, "Weyl-type theorems for unbounded Hyponormal operators", Kyungpook Math. J., **55**, 531 – 540 (2015).

[9] A. Gupta, K. Mamtani, "Weyl-type theorems for unbounded normal operators", (communicated)

[10] I H. Jeon, S. H. Kim, E. Ko, J. E. Park, "On positive-normal operators", Bull. Korean Math. Soc., **39(1)**, 33 42 (2002).
[11] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators. Springer, **132** (1995).
[12] D. C. Lay, "Spectral analysis using Ascent, Descent, Nullity and Defect, Math. Ann., **184**, 197 214 (1970)
[13] S. Mecheri, 'Generalized Weyl's theorem for posinormal operators", Math. Proc. R. Ir. Acad., **107** (1), 81 89 (2007).
[14] H. C. Rhaly, "Posinormal operators", J. Math. Soc. Japan. **46** (4), 587 - 605 (1994).
[15] A. E. Taylor, D. C. Lay, Introduction to Functional Analysis, Second Edition, New York. Wiley and sons (1980)
[16] H. Weyl. "*U*ber beschrankte quadatische Formen, deren Differenz Vollstetig ist", Rend. Circ. Mat. Palermo, **27**, 373 392 (1909).

Поступила 21 июля 2015

*Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 4, 2017, стр. 51-71.*

# ЯВЛЕНИЕ ГИББСА ДЛЯ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА

В. Г. МИКАЕЛЯН

*Ереванский государственный университет, Армения*
E-mail: *mik.vazgen@gmail.com*

Аннотация. Явление Гиббса исследуется для рядов по общей системе Франклина. Общая система Франклина порожденная всюду плотной в $[0,1]$ последовательностью точек $\mathcal{T} = (t_n, n \geq 0)$, это последовательность кусочно линейных непрерывных функций с узлами из $\mathcal{T}$, $n$-ая функция которой имеет узлы $t_0, \dots, t_n$. В статье доказано, что явление Гиббса для рядов по общей системе Франклина имеет место почти для всех точек отрезка $[0,1]$.

**MSC2010 number:** 42C10.

**Ключевые слова:** явление Гиббса; ряд Фурье; общая система Франклина.

## 1. Введение

Явлением Гиббса называется определенная особенность поведения частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции. Оно впервые обнаружено Г. Уилбрейамом (1848 г.) и значительно позже переоткрыто Дж. Гиббсом (1899 г.). $n$-ая частичная сумма ряда Фурье имеет большие колебания вблизи скачка, которое достигает максимума частичной суммы, выше заданной функции. При увеличении $n$ скачок не затухает, а стремится к конечному пределу.

Классическая система Франклина – полная ортонормированная система кусочно-линейных непрерывных функций с двоичными узлами. Она была введена Франклином в [1], как пример полной ортонормированной системы, которая является базисом в $C[0,1]$. Затем эта система была исследована многими авторами с разных точек зрения. Хорошо известно, что классическая система Франклина является базисом в $L^p[0,1]$ при $1 \leq p < \infty$ и безусловным базисом при $1 < p < \infty$ (см. [2]).

В данной статье мы исследуем общую систему Франклина, которая получается рассмотрением произвольной последовательности узлов. Берется всюду плотная в $[0,1]$ последовательность различных точек $\mathcal{T} = (t_n, n \geq 0)$ из $[0,1]$ и строится общая система Франклина кусочно-линейных непрерывных функций с узлами

$\mathcal{T}$. Более подробно общая система Франклина определена в параграфе 2. Общая система Франклина также является базисом в $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$ при $1 \leq p < \infty$ (см. [3]) и безусловным базисом при $1 < p < \infty$ (см. [4]).

## 2. Определения и основной результат

**Определение 2.1.** *Последовательность $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ различных точек из $[0,1]$ назовем допустимой, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0,1)$ для любого $n \geq 2$ и $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0,1]$.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 1$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n+1\}$. Пусть $\pi_n = \{x_i^n : x_i^n < x_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n\}$ – неубывающая перестановка последовательности $\mathcal{T}_n$. Тогда через $S_n$ обозначим пространство функций определенных на $R$, которые непрерывны, линейны на $[x_i^n, x_{i+1}^n]$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n$. Ясно, что $\dim S_n = n+1$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно существует (с точностью до знака) единственная функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна $S_{n-1}$ и $\|f_n\|_2 = 1$. Эту функцию назовем $n$-ной функцией Франклина на $R$, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$.

Для фиксированного $n$ через $N_i^n$, $0 \leq i \leq n+1$, обозначим $B$-сплайны соответствующие $\pi_n$, т.е.

$$N_0^n(t) = \begin{cases} \frac{x_1^n - t}{x_1^n - x_0^n} & \text{при } t \in [x_0^n, x_1^n] \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$N_n^n(t) = \begin{cases} \frac{t - x_{n-1}^n}{x_n^n - x_{n-1}^n} & \text{при } t \in [x_{n-1}^n, x_n^n] \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и

$$N_k^n(t) = \begin{cases} \frac{t - x_{k-1}^n}{x_k^n - x_{k-1}^n} & \text{при } t \in [x_{k-1}^n, x_k^n] \\ \frac{x_{k+1}^n - t}{x_{k+1}^n - x_k^n} & \text{при } t \in [x_k^n, x_{k+1}^n] \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

при $1 \leq k \leq n-1$. Ясно, что $\{N_i^n\}_{i=0}^n$ образует базис в пространстве $S_n$.

**Определение 2.2.** *Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность. Общая система Франклина $\{f_n, n \geq 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = \sqrt{3}(2t-1)$, и для $n \geq 2$, $f_n$ есть $n$-ая функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.*

Из оценок $L_\infty$-норм ортогональных проекций на кусочно-линейных функциях (см. [3]) следует, что для каждой последовательности узлов $\mathcal{T}$, соответствующая система Франклина является базисом в $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$.

Отметим, что в случае $t_n = \dfrac{2m-1}{2^k}$, для $n = 2^k + m$, $k = 0,1,\ldots$, $m \in \{1,2,\ldots,2^k\}$, мы получаем классическую систему Франклина (см. [1]).

**Определение 2.3.** *Пусть $t_0$ — точка разрыва первого рода функции $q \in L^1[0,1]$, причем $|q(t_0+) - q(t_0-)| = 2d > 0$, и пусть последователность функций $\{q_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к $q(t)$ в каждой точке некоторой окресности точки $t_0$. Функцию*

$$G\left(t_0, q, \{q_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = G(t_0) = \varlimsup_{\substack{t \to t_0 \\ n \to \infty}} \frac{1}{d} \left| q_n(t) - \frac{q(t_0+) + q(t_0-)}{2} \right|$$

*назовем функцией Гиббса для последовательности $\{q_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. Если $G(t_0) > 1$, то скажем, что для последователности $\{q_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ в точке $t_0$ имеет место явление Гиббса.*

Хорошо известно (см. [5], стр. 123-126), что для частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе имеет место явление Гиббса: функция $G(t_0)$ не зависит от $t_0$ и равна постоянной Гиббса

$$G(t_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1,17.$$

Явление Гиббса для рядов Фурье по системе Уолша исследовано в работах [6] и [7]. Существование явления Гиббса для рядов Фурье по системе Уолша доказано А. М. Зубакином в [6]. В [7] доказано, что значение постоянной Гиббса для частичных сумм рядов Фурье-Уолша зависит от распределения точек разрыва функции, и для двоично-иррациональных точек находиться между числами $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{2}$. Значение $\frac{3}{2}$ достигается почти всюду, а значение $\frac{4}{3}$ в определенных точках.

Явление Гиббса для рядов Фурье по классической системе Франклина исследовано О. Г. Саргсяном в [8], где доказана следующая теорема:

**Теорема 2.1.** *Пусть $t_0$ является точкой разрыва первого рода функции $f \in L^1[0,1]$. Обозначим через $S_n(f,t)$ частичную сумму ряда Фурье-Франклина функции $f$ и $G(t_0) = G\left(t_0, f, \{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}\right)$. Тогда в каждой точке $t_0 \in (0,1)$*

$$1 + \frac{\sqrt{3}-1}{3} \leq G(t_0) \leq 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})},$$

*причем почти всюду*

$$G(t_0) = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3\left(3+\sqrt{3}\right)}.$$

Сформулируем основной результат настоящей статьи:

**Теорема 2.2.** *Пусть $t_0$ является точкой разрыва первого рода функции $f \in L^1[0,1]$. Обозначим через $S_n(f,t)$ частичную сумму ряда Фурье по общей системе Франклина функции $f$ и $G(t_0) = G\left(t_0, f, \{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}\right)$. Тогда*

a) $G(t_0) \leq 2$ *для любого* $t_0 \in (0,1)$,

b) $G(t_0) \geq \frac{5}{4}$ *для почти всех* $t_0 \in [0,1]$.

**Замечание 2.1.** *Заметим, что нижняя грань в теореме 2.2 больше чем нижняя грань в теореме 2.1.*

**Следствие 2.1.** *Явление Гиббса для рядов Фурье по общей системе Франклина имеет место почти во всех точках отрезка $[0,1]$.*

**Замечание 2.2.** *В статье [9] для общей системы Франклина $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ доказано, что для почти всех $x \in [0,1]$, если функция $f \in L^1[0,1]$ в точке $x$ имеет разрыв первого рода, то ряд Фурье-Франклина расходится в этой точке. До этого в [10] было доказано, что для классической системы Франклина последнее свойство справедливо для всех $x \in [0,1]$. В связи с этим и с теоремой 2.2 возникают следующие два вопроса:*

**Вопрос 2.1.** *Справедливо ли утверждение, что для рядов Фурье по произвольной общей системе Франклина явление Гиббса имеет место для всех точек интервала $(0,1)$?*

**Вопрос 2.2.** *Справедливо ли утверждение, что для произвольной общей системы Франклина, если в точке $x \in [0,1]$ функция $f \in L^1[0,1]$ имеет разрыв первого рода, то ряд Фурье расходится в этой точке?*

## 3. Доказательство основного результата

Для упрощения обозначений, иногда будем писать $x_i$ вместо $x_i^n$. Зафиксируем $n$-ое разбиение отрезка $[0,1]$:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

и обозначим $\lambda_i = x_i - x_{i-1}$. Также, для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ обозначим $\alpha_i = K_n(x_k, x_i)$. Рассмотрим следующую функцию

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \le t \le x \\ 0, & \text{при } x < t \le 1, \end{cases} \qquad x \in (0, 1)$$

Обозначим через $S_n(\varphi_x, t)$ последовательность частичных сумм ряда Фурье по общей системе Франклина функции $\varphi_x$. Заметим, что

$$S_n(\varphi_x, t) = \int_0^1 \varphi_x(\tau) K_n(t, \tau)\, d\tau = \int_0^x K_n(t, \tau)\, d\tau,$$

где $K_n(x, \tau)$ — $n$-ое ядро Дирихле общей системы Франклина.

**Лемма 3.1.** Если $x \in (0, 1)$ и $t \in [0, 1]$, то

$$-\frac{1}{2} \le S_n(\varphi_x, t) \le \frac{3}{2}$$

**Доказательство.** Поскольку функция $S_n(\varphi_x, t)$ кусочно-линейная и непрерывная относительно переменной $t$, следовательно, достаточно доказать, что

$$-\frac{1}{2} \le S_n(\varphi_x, x_k) \le \frac{3}{2}$$

для любого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $x \in [x_m, x_{m+1}]$, где $m \in \{1, 2, \dots, n-2\}$. Обозначим $\alpha_i = K_n(x_k, x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Через $x'$ обозначим точку, которая удовлетворяет условиям $K_n(x_k, x') = 0$ и $x' \in (x_m, x_{m+1})$.

Теперь вычислим $S_n(\varphi_x, x_k)$. Поскольку функция

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, x_m) \\ \frac{x_{m+1} - t}{\lambda_{m+1}} & \text{при } t \in [x_m, x_{m+1}] \\ 0 & \text{при } t \in (x_{m+1}, 1], \end{cases}$$

принадлежит $S_n$, то

$$\int_0^1 K_n(x_k, t)\, \psi(t)\, dt = \psi(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k \le m \\ 0 & \text{при } k > m. \end{cases}$$

Следовательно, получаем

$$\int_0^{x_m} K_n(x_k, t)\, dt = \int_0^1 K_n(x_k, t)\, \psi(t)\, dt - \int_{x_m}^{x_{m+1}} K_n(x_k, t) \frac{x_{m+1} - t}{\lambda_{m+1}} dt$$

$$= \psi(x_k) - \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} \left( \alpha_m + \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{\lambda_{m+1}} (t - x_m) \right) \frac{x_{m+1} - t}{\lambda_{m+1}} dt$$

$$= \psi(x_k) - \frac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} = \begin{cases} 1 - \dfrac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} & \text{при } k \leq m, \\ -\dfrac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} & \text{при } k > m. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$S_n(\varphi_x, x_k) = \int\limits_0^x K_n(x_k, t)\, dt = \int\limits_0^{x_m} K_n(x_k, t)\, dt + \int\limits_{x_m}^x K_n(x_k, t)\, dt$$

$$= \int\limits_0^{x_m} K_n(x_k, t)\, dt + \int\limits_{x_m}^x \left( \alpha_m + \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{\lambda_{m+1}} (t - x_m) \right) dt$$

$$= \int\limits_0^{x_m} K_n(x_k, t)\, dt + \alpha_m (x - x_m) + \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{2\lambda_{m+1}} (x - x_m)^2$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} + \alpha_m (x - x_m) + \dfrac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{2\lambda_{m+1}} (x - x_m)^2 & \text{при } k \leq m, \\ -\dfrac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} + \alpha_m (x - x_m) + \dfrac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{2\lambda_{m+1}} (x - x_m)^2 & \text{при } k > m. \end{cases}$$

**Случай I:** $k \leq m$. Если $k < m$, тогда имеем, что (см. [11])

$$(\alpha_i + 2\alpha_{i+1})\lambda_{i+1} = -(2\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})\lambda_{i+2}$$

для любого $i \in \{k, k+1, \ldots, m-1\}$. Следовательно

$$(\alpha_k + 2\alpha_{k+1})\lambda_{k+1} \cdot \prod_{i=k+1}^{m-1} \frac{\alpha_i + 2\alpha_{i+1}}{2\alpha_i + \alpha_{i+1}} = (-1)^{m-k} (2\alpha_m + \alpha_{m+1})\lambda_{m+1}.$$

Из неравенств $|\alpha_i| > 2|\alpha_{i+1}|$ и $\alpha_i \alpha_{i+1} < 0$ (см. [11]) следует, что

$$0 < \frac{\alpha_i + 2\alpha_{i+1}}{2\alpha_i + \alpha_{i+1}} < \frac{1}{2}$$

для любого $i \in \{k+1, k+2, \ldots, m-1\}$, поэтому

$$\frac{(\alpha_k + 2\alpha_{k+1})\lambda_{k+1}}{2^{m-k-1}} \geq (-1)^{m-k} (2\alpha_m + \alpha_{m+1})\lambda_{m+1}.$$

Заметим, что из равенства (см. [11])

$$\frac{\alpha_{k-1}\lambda_k}{6} + \frac{\alpha_k(\lambda_k + \lambda_{k+1})}{6} + \frac{\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}}{6} = 1$$

вытекает, что

$$(\alpha_k + 2\alpha_{k+1})\lambda_{k+1} \leq \frac{(2\alpha_k + \alpha_{k+1})\lambda_{k+1}}{2} = 3\left(1 - \frac{(2\alpha_k + \alpha_{k-1})\lambda_k}{6}\right) < 3,$$

следовательно

$$(-1)^{m-k}\left(2\alpha_m+\alpha_{m+1}\right)\lambda_{m+1}<\frac{3}{2^{m-k-1}},$$

в частности

$$(-1)^{m-k}\left(2\alpha_m+\alpha_{m+1}\right)\lambda_{m+1}<3 \tag{3.1}$$

при $k<m$. Теперь рассмотрим два подслучая.

а) $\alpha_m>0$. В этом случае имеем

$$S_n\left(\varphi_{x_m},x_k\right)\le S_n\left(\varphi_x,x_k\right)\le S_n\left(\varphi_{x'},x_k\right),$$

потому что

$$\int\limits_{x_m}^{x_{m+1}}K_n\left(x_k,t\right)dt=\frac{\left(\alpha_m+\alpha_{m+1}\right)\lambda_{m+1}}{2}>0.$$

Таким образом достаточно доказать, что

$$S_n\left(\varphi_{x_m},x_k\right)>-\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad S_n\left(\varphi_{x'},x_k\right)<\frac{3}{2}. \tag{3.2}$$

Поскольку $\alpha_m,\alpha_k>0$ и $\alpha_i\alpha_{i+1}<0$ для любого $i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, следовательно $(m-k)\vdots 2$.

Если $k<m$, то используя неравенство (3.1), получим

$$S_n\left(\varphi_{x_m},x_k\right)=1-\frac{\left(\alpha_{m+1}+2\alpha_m\right)\lambda_{m+1}}{6}>\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}.$$

Если $k=m$, то будем иметь

$$S_n\left(\varphi_{x_m},x_k\right)=1-\frac{\left(\alpha_{k+1}+2\alpha_k\right)\lambda_{k+1}}{6}=\frac{\left(2\alpha_k+\alpha_{k-1}\right)\lambda_{k+1}}{6}>0>-\frac{1}{2}.$$

Теперь докажем второе неравенство в (3.2). Поскольку $x'-x_m=\dfrac{\alpha_m\lambda_{m+1}}{\alpha_m-\alpha_{m+1}}$, следовательно

$$S_n\left(\varphi_{x'},x_k\right)=1+\lambda_{m+1}\frac{\alpha_m^2+\alpha_m\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}^2}{6\left(\alpha_m-\alpha_{m+1}\right)}.$$

Так как $(m-k)\vdots 2$, то из неравенств (3.1) и

$$\frac{\left(\alpha_{k+1}+2\alpha_k\right)\lambda_{k+1}}{6}\le 1$$

следует, что если $k\le m$, то $\lambda_{m+1}\le\dfrac{6}{2\alpha_m+\alpha_{m+1}}$.

Таким образом

$$S_n\left(\varphi_{x'},x_k\right)\le 1+\frac{\alpha_m^2+\alpha_m\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}^2}{\left(2\alpha_m+\alpha_{m+1}\right)\left(\alpha_m-\alpha_{m+1}\right)}$$

$$= 1 + \frac{(2\alpha_m + \alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1}) + 3\alpha_{m+1}(\alpha_m + \alpha_{m+1})}{2(2\alpha_m + \alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Второе неравенство в (3.2) доказано.

б) $\alpha_m < 0$. В этом случае имеем

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) \leq S_n(\varphi_x, x_k) \leq S_n(\varphi_{x_m}, x_k),$$

потому что

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} K_n(x_k, t)\, dt = \frac{(\alpha_m + \alpha_{m+1})\lambda_{m+1}}{2} < 0.$$

Таким образом достаточно доказать, что

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) \geq -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad S_n(\varphi_{x_m}, x_k) \leq \frac{3}{2}. \tag{3.3}$$

Поскольку $\alpha_m < 0$, то $k < m$ и $(m - k + 1) \vdots 2$. Следовательно, из неравенства (3.1) получим оценку $\lambda_{m+1} < -\dfrac{3}{2\alpha_m + \alpha_{m+1}}$. Имеем также $\alpha_{m+1} > 0$ и $\alpha_m + 2\alpha_{m+1} < 0$. Отсюда следует, что

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) = 1 + \lambda_{m+1}\frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{6(\alpha_m - \alpha_{m+1})} > 1 - \frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{2(2\alpha_m + \alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})}$$

$$= \frac{3(\alpha_m^2 - \alpha_{m+1}(\alpha_m + \alpha_{m+1}))}{2(2\alpha_m + \alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})} > 0 > -\frac{1}{2}.$$

Первое неравенство в (3.3) доказано. Вторе неравенство в (3.3) сразу следует из неравенства (3.1):

$$S_n(\varphi_{x_m}, x_k) = 1 - \frac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

**Случай II:** $k > m$. В этом случае из неравенства (см. [11])

$$(\alpha_i + 2\alpha_{i+1})\lambda_{i+1} = -(2\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})\lambda_{i+2}, \quad i \in \{m-1, m, \ldots, k-2\}$$

следует, что

$$(2\alpha_{k-1} + \alpha_k)\lambda_k \cdot \prod_{i=m}^{k-2}\frac{2\alpha_i + \alpha_{i+1}}{\alpha_i + 2\alpha_{i+1}} = (-1)^{k-m}(\alpha_{m-1} + 2\alpha_m)\lambda_m.$$

Из неравенств $|\alpha_i| > 2|\alpha_{i+1}|$ и $\alpha_i\alpha_{i+1} < 0$ (см. [11]) следует, что

$$0 < \frac{2\alpha_i + \alpha_{i+1}}{\alpha_i + 2\alpha_{i+1}} < \frac{1}{2}$$

для любого $i \in \{m, m+1, \ldots, k-2\}$, поэтому

$$(-1)^{k-m}(\alpha_{m-1} + 2\alpha_m)\lambda_m \leq \frac{(2\alpha_{k-1} + \alpha_k)\lambda_k}{2^{k-m-1}}.$$

Замечая, что

$$\left(2\alpha_{k-1}+\alpha_k\right)\lambda_k \le \frac{\left(\alpha_{k-1}+2\alpha_k\right)\lambda_k}{2} = 3\left(1-\frac{\left(\alpha_{k+1}+2\alpha_k\right)\lambda_{k+1}}{6}\right) < 3,$$

получаем

$$(-1)^{k-m}\left(\alpha_{m-1}+2\alpha_m\right)\lambda_m < \frac{3}{2^{k-m-1}},$$

в частности, имеем

$$(-1)^{k-m}\left(\alpha_{m-1}+2\alpha_m\right)\lambda_m < 3. \tag{3.4}$$

Опять рассмотрим два подслучая.

а) $\alpha_m > 0$. В этом случае имеем

$$S_n\left(\varphi_{x_{m+1}}, x_k\right) \le S_n\left(\varphi_x, x_k\right) \le S_n\left(\varphi_{x'}, x_k\right),$$

потому что

$$\int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} K_n\left(x_k, t\right) dt = \frac{\left(\alpha_m+\alpha_{m+1}\right)\lambda_{m+1}}{2} < 0.$$

Поскольку $\alpha_m > 0$, то $m+1 < k$ и $(m-k)\,\vdots\,2$. Следовательно, из неравенств (3.4) получим

$$S_n\left(\varphi_{x_{m+1}}, x_k\right) = \frac{\left(\alpha_m+2\alpha_{m+1}\right)\lambda_{m+1}}{6} > -\frac{1}{2}$$

и

$$S_n\left(\varphi_{x'}, x_k\right) = \lambda_{m+1}\frac{\alpha_m^2+\alpha_m\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}^2}{6\left(\alpha_m-\alpha_{m+1}\right)} < -\frac{\alpha_m^2+\alpha_m\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}^2}{2\left(\alpha_m+2\alpha_{m+1}\right)\left(\alpha_m-\alpha_{m+1}\right)}$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{2\alpha_m\left(\alpha_m+\alpha_{m+1}\right)-\alpha_{m+1}^2}{2\left(\alpha_m+2\alpha_{m+1}\right)\left(\alpha_m-\alpha_{m+1}\right)} < \frac{1}{2} < \frac{3}{2}.$$

б) $\alpha_m < 0$. В этом случае имеем

$$S_n\left(\varphi_{x'}, x_k\right) \le S_n\left(\varphi_x, x_k\right) \le S_n\left(\varphi_{x_{m+1}}, x_k\right),$$

потому что

$$\int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} K_n\left(x_k, t\right) dt = \frac{\left(\alpha_m+\alpha_{m+1}\right)\lambda_{m+1}}{2} > 0.$$

Поскольку $\alpha_{m+1} > 0$, следовательно, если $m+1 < k$, то из неравенств (3.4) получим оценку $\left(\alpha_m+2\alpha_{m+1}\right)\lambda_{m+1} < 6$, но мы также имеем

$$\left(\alpha_{k-1}+2\alpha_k\right)\lambda_k = 6\left(1-\frac{\left(\alpha_{k+1}+2\alpha_k\right)\lambda_{k+1}}{6}\right) < 6.$$

Таким образом, если $m < k$, то $(\alpha_m + 2\alpha_{m+1})\,\lambda_{m+1} < 6$. Следовательно

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) = \lambda_{m+1}\frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{6(\alpha_m - \alpha_{m+1})} > \frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{(\alpha_m + 2\alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})}$$

$$= \frac{3\alpha_m(\alpha_m + \alpha_{m+1})}{2(\alpha_m + 2\alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$$

и

$$S_n(\varphi_{x_{m+1}}, x_k) = \frac{(\alpha_m + 2\alpha_{m+1})\,\lambda_{m+1}}{6} < 1 < \frac{3}{2}.$$

Лемма 3.1 доказана. □

**Лемма 3.2.** Если $0 \le k \le n-1$, то справедливы следующие утверждения.

a) Если $c \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}-3}{6}\right]$, то для любого $x \in \left[x_k + \lambda_{k+1}\left(1 - \sqrt{\frac{1-6c}{3}}\right), x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}\right]$

$$S_n(\varphi_x, x_k) \ge 1 + c\lambda_{k+1}\alpha_k.$$

b) Если $c \in \left(\frac{2\sqrt{3}-3}{6}, \frac{1}{12}\right]$, то для любого $x \in \left[x_k + \lambda_{k+1}\frac{2-\sqrt{1-12c}}{3}, x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}\right]$

$$S_n(\varphi_x, x_k) \ge 1 + c\lambda_{k+1}\alpha_k.$$

**Доказательство.** Пусть $c \in \left(0, \frac{1}{12}\right]$. Решим следующее неравенство относительно переменной $x$:

$$S_n(\varphi_x, x_k) \ge 1 + c\lambda_{k+1}\alpha_k. \tag{3.5}$$

Поскольку (см. доказательство леммы 3.1)

$$S_n(\varphi_x, x_k) = 1 - \frac{\lambda_{k+1}(2\alpha_k + \alpha_{k+1})}{6} + \alpha_k(x - x_k) + \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\lambda_{k+1}}\cdot\frac{(x-x_k)^2}{2},$$

следовательно корни уравнения $S_n(\varphi_x, x_k) = 1 + c\lambda_{k+1}\alpha_k$ являются следующие числа

$$x = x_k + \lambda_{k+1}\frac{\alpha_k \pm \sqrt{\frac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k\alpha_{k+1} + \alpha_{k+1}^2}{3}}}{\alpha_k - \alpha_{k+1}}$$

Обозначим через $x'$ точку, удовлетворяющую следующим условиям: $K_n(x_k, x') = 0$, $x' \in (x_k, x_{k+1})$. Заметим, что из неравенства $\alpha_k > 2|\alpha_{k+1}|$ (см. [11]) следует, что

$$\frac{x' - x_k}{\lambda_{k+1} + x_k - x'} = \frac{\alpha_k}{|\alpha_{k+1}|} > 2,$$

т.е. $x' > x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}$ (см. рисунок).

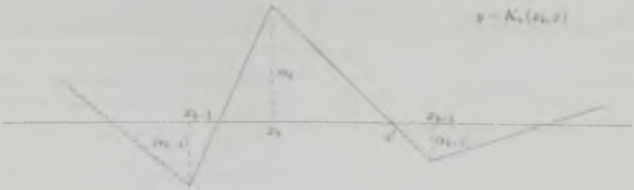

Рис. 1

Следовательно

$$x_k + \lambda_{k+1}\frac{\alpha_k + \sqrt{\dfrac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k\alpha_{k+1} + \alpha_{k+1}^2}{3}}}{\alpha_k - \alpha_{k+1}}$$

$$\geq x_k + \frac{\alpha_k\lambda_{k+1}}{\alpha_k - \alpha_{k+1}} = x' > x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}.$$

Введем функцию

$$h\,(x) = \frac{\alpha_k - \sqrt{\dfrac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k x + x^2}{3}}}{\alpha_k - x}, \quad x \in \left[-\frac{\alpha_k}{2}, 0\right].$$

Легко проверить, что неравенство $h'\,(x) \geq 0$ равносильно неравенству (3.6)

$$h'\,(x) = \frac{2\alpha_k\sqrt{\dfrac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k x + x^2}{3}} - (1-2c)\,\alpha_k^2 - (1+2c)\,\alpha_k x}{(\alpha_k - x)^2\cdot 2\sqrt{\dfrac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k x + x^2}{3}}} \geq 0.$$

Поскольку $\alpha_k > 0$ и $c < \frac{1}{12}$, то

$$(1-2c)\,\alpha_k + (1+2c)\,x \geq (1-2c)\,\alpha_k - (1+2c)\,\frac{\alpha_k}{2} = \frac{1-6c}{2}\alpha_k > 0,$$

следовательно нераненство (3.6) равносильно неравенству

$$4\frac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k x + x^2}{3} \geq \left((1-2c)\,\alpha_k + (1+2c)\,x\right)^2,$$

поэтому $1 - 12c - 12c^2 \geq 0$.

Таким образом, если $c \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}-3}{6}\right]$, то функция $h$ возрастающая и в частности $h(\alpha_{k+1}) \le h(0) = 1 - \sqrt{\frac{1-6c}{3}}$, т.е. неравенство (3.5) справедливо для любых $x \in \left[x_k + \lambda_{k+1}\left(1 - \sqrt{\frac{1-6c}{3}}\right), x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}\right]$.

Если $c \in \left(\frac{2\sqrt{3}-3}{6}, \frac{1}{12}\right]$, то функция $h$ убывающая, и, в частности, получаем

$$h(\alpha_{k+1}) \le h\left(-\frac{\alpha_k}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{1-12c}}{3}$$

т.е. (3.5) справедливо для любых $x \in \left[x_k + \lambda_{k+1}\frac{2-\sqrt{1-12c}}{3}, x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}\right]$. Лемма 3.2 доказана. □

**Лемма 3.3.** *Если $0 < \alpha < 1$, то для любого отрезка $[a, b] \subset [0, 1]$ существует такое натуральное число $N$, что для любого натурального числа $n > N$ существует $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ так, что $[x_s, x_{s+1}] \subset (a, b)$ и $\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} > \alpha$.*

**Доказательство.** Предположим, что существует такой отрезок $[a, b] \subset [0, 1]$, что для всех $N \in \mathbb{N}$ существует натуральное число $n \ge N$, так, что из $[x_s, x_{s+1}] \subset (a, b)$ следует неравенство $\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} \le \alpha$. Обозначим $\lambda(n) = \max\limits_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(n) = 0$, то существует натуральное число $N$, что для всех натуральных чисел $n \ge N$ выполняется неравенство $\lambda(n) < \frac{(b-a)(1-\alpha)}{2}$. Из нашего предположения получаем, что существует такое натуральное число $n_0 \ge N$, что из условия $[x_s, x_{s+1}] \subset (a, b)$ следует $\lambda_{s+1} \le \alpha\lambda_s$. Поскольку $[a, b] \subset [0, 1]$, то существуют такие $i, j \in \{1, 2, \dots, n_0\}$, что $x_{i-1} \le a < x_i < x_{i+1} < \dots < x_j < b \le x_{j+1}$. Таким образом $\lambda_{k+1} \le \alpha\lambda_k$ для всех $k \in \{i, i+1, \dots, j-1\}$, следовательно

$$\sum_{k=i+1}^{j}\lambda_k \le \alpha\sum_{k=i}^{j-1}\lambda_k < \alpha\sum_{k=i}^{j}\lambda_k.$$

поэтому $(1-\alpha)\sum\limits_{k=i+1}^{j}\lambda_k < \alpha\lambda_i \le \alpha\lambda(n_0)$.

С другой стороны, мы имеем

$$\sum_{k=i+1}^{j}\lambda_k \ge b - a - \lambda_{i-1} - \lambda_{j+1} \ge b - a - 2\lambda(n_0).$$

Таким образом $\lambda(n_0) > \dfrac{(b-a)(1-\alpha)}{2-\alpha} > \dfrac{(b-a)(1-\alpha)}{2}$, что противоречит нашему предположению. Лемма 3.3 доказана. $\square$

**Лемма 3.4**. Для всех $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right)$ существует такое положительное число $\varepsilon$, что для любого отрезка $[a, b] \subset [0, 1]$ существует натуральное число $N$, что из $n \geq N$ следует неравенство $\mu\left(E_n(\delta) \cap [a, b]\right) > \varepsilon(b-a)$, где

$$E_n(\delta) = \left\{x \in [0,1] : \text{существует такой } m \in \{0, 1, \ldots, n\}, \text{ что } S_n(\varphi_x, x_m) > 1 + \delta\right\}.$$

**Доказательство.** Поскольку $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right)$, то существуют такие $\alpha \in (0,1)$ и $\varepsilon_1 \in \left(0, \dfrac{1}{12}\right)$, что $\delta = \dfrac{1-9\varepsilon_1^2}{4} \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$. Теперь в лемме 2 положим $c = \dfrac{1-9\varepsilon_1^2}{12}$. Поскольку

$$\frac{1}{12} > c > \frac{1-\dfrac{9}{144}}{12} > \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

следовательно неравенство (3.5) справедливо для всех $x \in \left[x_k + \left(\dfrac{2}{3} - \varepsilon_1\right)\lambda_{k+1},\ x_k + \dfrac{2}{3}\lambda_{k+1}\right]$. Если $\dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > \alpha$, то из неравенства $\alpha_k \geq \dfrac{3}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}$ (см. [11]) вытекает, что

$$S_n(\varphi_x, x_k) \geq 1 + \frac{1-9\varepsilon_1^2}{12}\lambda_{k+1}\alpha_k \geq 1 + \frac{1-9\varepsilon_1^2}{12} \cdot \frac{3\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} > 1 + \frac{1-9\varepsilon_1^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} = 1 + \delta.$$

Таким образом, получаем

$$\mu\left(E_n(\delta) \cap [x_k, x_{k+1}]\right) > \varepsilon_1 \lambda_{k+1}. \tag{3.7}$$

Теперь возьмем отрезок $[a', b'] \subset [a, b]$ таким чтобы $a' > a$ и $b' - a < \dfrac{b-a}{3}$. Из леммы 3 следует, что существует такое натуральное число $N_1$, что для любого натурального числа $n \geq N_1$ существует $i \in \{1, 2, \ldots n-1\}$, что $[x_i, x_{i+1}] \subset (a', b')$ и $\dfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} > \alpha$. Поскольку $[a, b] \subset [0, 1]$, то существует $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, что $x_j < b \leq x_{j+1}$. Очевидно, что существует такое натуральное число $N_2$, что для любого натурального числа $n \geq N_2$ имеем $b - x_j < \dfrac{b-a}{3}$.

Пусть $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Если $\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} > \alpha$ для всех $s \in \{i, i+1, \ldots, j-1\}$, то используя (3.7) получим оценки

$$\mu\left(E_n(\delta) \cap [a, b]\right) \geq \mu\left(E_n(\delta) \cap [x_i, x_j]\right) \geq \varepsilon_1(\lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_j)$$

$$= \varepsilon_1\left(b - a - (x_i - a) - (b - x_j)\right) \geq \varepsilon_1\left(b - a - (b' - a) - (b - x_j)\right)$$

Наконец, из этих неравенств получаем

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(E_n(\delta)\cap[a,b]\right) \geq \mu\left(E_n(\delta)\cap[x_i,x_j]\right)\\
&= \mu\left(E_n(\delta)\cap\left(\bigcup_{s=1}^{k}\Delta_s\right)\right) + \mu\left(E_n(\delta)\cap\left([x_i,x_j]\setminus\left(\bigcup_{s=1}^{k}\Delta_s\right)\right)\right)\\
&\geq \varepsilon_1(1-\alpha)\sum_{s=1}^{k}\mu(\Delta_s) + \varepsilon_1(1-\alpha)\,\mu\left([x_i,x_j]\setminus\left(\bigcup_{s=1}^{k}\Delta_s\right)\right) = \varepsilon_1(1-\alpha)(x_j-x_i)\\
&= \varepsilon_1(1-\alpha)\left(b-a-(x_i-a)-(b-x_j)\right) > \varepsilon_1(1-\alpha)\left(b-a-(b'-a)-(b-x_j)\right)\\
&> \varepsilon_1(1-\alpha)\left(b-a-\frac{b-a}{3}-\frac{b-a}{3}\right) = \frac{\varepsilon_1(1-\alpha)}{3}(b-a).
\end{aligned}
$$

Положив $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1(1-\alpha)}{3}$, будем иметь $\mu\left(E_n(\delta)\cap[a,b]\right) > \varepsilon(b-a)$. Лемма 3.4 доказана. □

**Лемма 3.5.** Если $A\subset\mathbb{R}$ и $\mu(A)>0$, то для любого $\beta\in(0,1)$ существует такой отрезок $[a,b]$, что

$$\mu\left(A\cap[a,b]\right) > \beta(b-a).$$

**Доказательство.** Из теоремы Лебега о точках плотности следует, что существует $x\in A$, для которой

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\mu\left(A\cap[x-h,x+h]\right)}{2h} = 1.$$

Следовательно существует $h_0>0$, что

$$\frac{\mu\left(A\cap[x-h_0,x+h_0]\right)}{2h_0} > \beta,$$

т.е. $\mu\left(A\cap[x-h_0,x+h_0]\right) > \beta\left(x+h_0-(x-h_0)\right)$. Лемма 3.5 доказана. □

**Лемма 3.6.** Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность подмножеств $[0,1]$. Если существует такое положительное число $\varepsilon$, что для любого отрезка $[a,b]\subset[0,1]$ существует натуральное число $N$, что при $n\geq N$, справедливо неравенство

$$\mu\left(A_n\cap[a,b]\right) > \varepsilon(b-a),$$

тогда $\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right) = 1$.

**Доказательство.** Обозначим через $g_n(x)$, $x\in[0,1]$ характеристическую функцию множества $A_n$. Если $x\notin\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, то существует $n_0\in\mathbb{N}$, что $x\notin A_n$ для любого $n \geq n_0$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Таким образом, достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \neq 0$ почти всюду в $[0,1]$. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ для всех $x \in G$ и $\mu(G) > 0$. Из теоремы Егорова следует, что существует такое множество $F \subset [0,1]$, что $\mu(F) > 0$ и $g_n(x) \rightrightarrows 0$ на $F$, поэтому существует натуральное число $N'$, что $g_n(x) = 0$ для любого $n \geq N'$, т.е. $F \cap A_n = \emptyset$, при $n \geq N'$. Из леммы 3.5 следует, что существует такой отрезок $[a,b] \subset [0,1]$, что

$$\mu(F \cap [a,b]) > (1-\varepsilon)(b-a).$$

С другой стороны, мы имеем, что существует натуральное число $N$, что

$$\mu(A_n \cap [a,b]) > \varepsilon(b-a),$$

для любого $n \geq N$. Таким образом, если $n \geq \max\{N, N'\}$, то

$$0 = \mu(F \cap A_n) \geq \mu(F \cap [a,b]) + \mu(A_n \cap [a,b]) - \mu([a,b])$$
$$> (1-\varepsilon)(b-a) + \varepsilon(b-a) - (b-a) = 0,$$

что противоречит нашему предположению. Лемма 3.5 доказана. □

**Лемма 3.7.** *Пусть $x \in [0,1]$. Если существует положительное число $\delta$ и такие последовательности натуральных чисел $m_k, n_k$, что*

$$S_{n_k}(\varphi_x, x_{m_k}) > 1 + \delta,$$

*для всех $k \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x$.*

**Доказательство.** Зафиксируем $k$ и обозначим через $S_j$ площадь треугольника, вершинами которого являются точка $(x_j, K(x_{m_k}, x_j))$ и ближайшие слева и справа от точки $x_j$ нули функции $K(x_{m_k}, t)$. Мы имеем, что существует такое число $\varepsilon \in (0,1)$, что $S_j \leq \varepsilon^{m_k - j} S_{m_k}$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, m_k\}$ и $S_j \leq \varepsilon^{j - m_k} S_{m_k}$ для любого $j \in \{m_k, m_k + 1, \ldots, n\}$ (см. [12]). Заметим, что (см. [11])

$$S_{m_k} \leq \frac{\lambda_{m_k} + \lambda_{m_k+1}}{2} a_{m_k} \leq \frac{\lambda_{m_k} + \lambda_{m_k+1}}{2} \cdot \frac{4}{\lambda_{m_k} + \lambda_{m_k+1}} = 2.$$

Следовательно $S_j \leq 2\varepsilon^{m_k - j}$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, m_k\}$ и $S_j \leq 2\varepsilon^{j - m_k}$ для любого $j \in \{m_k, m_k + 1, \ldots, n\}$.

Допустим, что $x \in [x_{i-1}, x_i]$ и $i \leq m_k$. Тогда

$$1 + \delta < S_{n_k}(\varphi_x, x_{m_k}) = \int\limits_0^x K_{n_k}(x_{m_k}, t)\, dt < \sum_{j=1}^{i} S_j \leq 2 \sum_{j=1}^{i} \varepsilon^{m_k - j} < \frac{2\varepsilon^{m_k - i}}{1 - \varepsilon}$$

Следовательно $i > m_k - \log_\varepsilon \dfrac{(1-\varepsilon)(1+\delta)}{2}$. Если же $i > m_k$, то

$$1 + \delta < \int\limits_0^x K_{n_k}(x_{m_k}, t)\,dt = 1 - \int\limits_x^1 K_{n_k}(x_{m_k}, t)\,dt,$$

поэтому

$$-\delta > \int\limits_x^1 K_{n_k}(x_{m_k}, t)\,dt > -\sum_{j=i-1}^{\infty} S_j \geq -2\sum_{j=i-1}^{\infty} \varepsilon^{j-m_k} > -\frac{2\varepsilon^{i-1-m_k}}{1-\varepsilon}.$$

Таким образом $i < m_k + 1 + \log_\varepsilon \dfrac{(1-\varepsilon)\delta}{2}$. Поскольку числа $\log_\varepsilon \dfrac{(1-\varepsilon)(1+\delta)}{2}$ и $1 + \log_\varepsilon \dfrac{(1-\varepsilon)\delta}{2}$ не зависят от $k$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x$. Лемма 3.7 доказана. □

**Следствие 3.1.** $\varlimsup\limits_{\substack{t\to x\\ n\to\infty}} S_n(\varphi_x, t) \geq \dfrac{9}{8}$, для почти всех $x \in [0, 1]$.

**Доказательство.** Пусть $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right)$. Из лемм 3.4 и 3.6 следует, что

$$\mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n(\delta)\right) = 1.$$

Если $x \in \varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n(\delta)$, то существует такая последовательность натуральных чисел $n_k$, что $x \in E_{n_k}(\delta)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, что означает, что существует такая последовательность натуральных чисел $m_k$, что

$$S_{n_k}(\varphi_x, x_{m_k}) > 1 + \delta.$$

Следовательно из леммы 3.7 получим $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x$. Поэтому

$$\varlimsup_{\substack{t\to x\\ n\to\infty}} S_n(\varphi_x, t) \geq 1 + \delta,$$

и это неравенство справедливо для всех $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right)$, следовательно

$$\varlimsup_{\substack{t\to x\\ n\to\infty}} S_n(\varphi_x, t) \geq 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

Следствие 3.1 доказано. □

**Лемма 3.8.** Пусть $t_0 \in (0, 1)$, а $g$ ограниченная на $[0, 1]$ и непрерывная в точке $t_0$ функция. Тогда $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} S_n(g, t) = g(t_0)$.

**Доказательство.** Пусть

$$0 = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_n^n = 1$$

$n$-ое разбиение отрезка $[0, 1]$. Имеем, что для каждого $\varepsilon$ существует такая $\delta$, что для любого $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, справедливо неравенство $|g(t) - g(t_0)| < \varepsilon$. Мы также имеем, что существует такое действительное число $M$, что $|g(t)| \leq M$ для всех $t \in [0, 1]$. Поскольку

$$S_n(g, t) = \int_0^1 K_n(t, s)\, g(s)\, ds \text{ и } \int_0^1 K_n(t, s)\, ds = 1,$$

следовательно из (3.7) получим

$$|S_n(g, t) - g(t_0)| \leq \int_0^1 |K_n(t, s)|\, |g(s) - g(t_0)|\, ds$$

$$= \int_{|s - t_0| > \delta} |K_n(t, s)|\, |g(s) - g(t_0)|\, ds + \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} |K_n(t, s)|\, |g(s) - g(t_0)|\, ds$$

$$\leq 2M \int_{|s - t_0| > \delta} |K_n(t, s)|\, ds + \varepsilon \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} |K_n(t, s)|\, ds \leq 2M \int_{|s - t_0| > \delta} |K_n(t, s)|\, ds + 3\varepsilon.$$

Таким образом, достаточно доказать предельное соотношение

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ n \to +\infty}} \int_{|s - t_0| > \delta} |K_n(t, s)|\, ds = 0.$$

Справедлива формула (см. [11])

$$K_n(t, s) = \sum_{k=0}^{n} N_k^n(t)\, K_n(x_k^n, s).$$

Обозначим через $x_{p_n}^n$ ближайшую точку разбиения слева от точки $t_0 - \frac{\delta}{2}$ и через $x_{q_n}^n$ ближайшую точку разбиения справа от точки $t_0 - \delta$. Существует такое натуральное число $N$, что для любого натурального числа $n \geq N$, справедливо неравенство $|x_{p_n}^n - x_{q_n}^n| > \frac{\delta}{4}$.

Заметим, что если $t \in \left(t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}\right)$ и $n \geq N$, то из неравенства

$$|K_n(x_k^n, x_i^n)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{|k-i|} \frac{4}{|x_k^n - x_i^n|},$$

где $k, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и $k \neq i$ (см. [11]), следует, что

$$\int\limits_0^{t_0-\delta} |K_n(t,s)|\, ds = \int\limits_0^{t_0-\delta} \left| \sum_{k=0}^{n} N_k^n(t)\, K_n(x_k^n, s) \right| ds = \int\limits_0^{t_0-\delta} \left| \sum_{k=p_n}^{n} N_k^n(t)\, K_n(x_k^n, s) \right| ds$$

$$= \int\limits_0^{t_0-\delta} \left| \sum_{k=p_n}^{n} N_k^n(t) \sum_{i=0}^{n} N_i^n(s)\, K_n(x_k^n, x_i^n) \right| ds = \int\limits_0^{t_0-\delta} \left| \sum_{k=p_n}^{n} N_k^n(t) \sum_{i=0}^{q_n} N_i^n(s)\, K_n(x_k^n, x_i^n) \right| ds$$

$$\leq \int\limits_0^{t_0-\delta} \sum_{k=p_n}^{n} \sum_{i=0}^{q_n} |K_n(x_k^n, x_i^n)|\, ds \leq \int\limits_0^{t_0-\delta} \sum_{k=p_n}^{n} \sum_{i=0}^{q_n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i} \frac{4}{|x_k^n - x_i^n|}\, ds$$

$$\leq \frac{16}{\delta} \int\limits_0^{t_0-\delta} \sum_{k=p_n}^{n} \sum_{i=0}^{q_n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i} ds \leq \frac{48}{\delta} \int\limits_0^{t_0-\delta} \sum_{k=p_n}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-q_n} ds$$

$$\leq \frac{144}{\delta} \int\limits_0^{t_0-\delta} \left(\frac{2}{3}\right)^{p_n-q_n} ds \leq \frac{144}{\delta} \left(\frac{2}{3}\right)^{p_n-q_n}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} (p_n - q_n) = +\infty$, то

$$\lim_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} \int\limits_0^{t_0-\delta} |K_n(t,s)|\, ds = 0.$$

Точно также мы можем доказать, что

$$\lim_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} \int\limits_{t_0+\delta}^{1} |K_n(t,s)|\, ds = 0,$$

следовательно $\lim\limits_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} \int\limits_{|s-t_0|>\delta} |K_n(t,s)|\, ds = 0$. Лемма 3.8 доказана. □

Теперь докажем основной результат.

**Доказательство теоремы 2.2.** Пусть $t_0 \in (0,1)$, $f(t_0+) = d_1$ и $f(t_0-) = d_2$. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - \varphi_{t_0}(t)(d_2 - d_1) & \text{при} \quad t \in [0,1] \setminus \{t_0\} \\ d_1 & \text{при} \quad t = t_0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $g$ непрерывна в точке $t_0$ и ограничена на $[0,1]$. Следовательно из леммы 8 следует, что $\lim\limits_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} S_n(g,t) = g(t_0) = d_1$. Таким образом

$$\overline{\lim_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}}}\, S_n(f,t) = \begin{cases} d_1 + (d_2 - d_1) \overline{\lim\limits_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}}}\, S_n(\varphi_{t_0}, t) & \text{при} \quad d_2 > d_1 \\ d_1 + (d_2 - d_1) \underline{\lim\limits_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}}}\, S_n(\varphi_{t_0}, t) & \text{при} \quad d_2 < d_1. \end{cases}$$

и

$$\varlimsup_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} S_n(f,t) = \begin{cases} d_1 + (d_2 - d_1) \varliminf\limits_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) & \text{при} \quad d_2 < d_1 \\ d_1 + (d_2 - d_1) \varlimsup\limits_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) & \text{при} \quad d_2 > d_1. \end{cases}$$

Из определении 3 следует, что

$$G(t_0) = \max\left\{2 \varlimsup_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) - 1, -2 \varliminf_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) + 1\right\}$$

Из леммы 1 следует, что для любого $t_0 \in [0,1]$

$$G(t_0) \le \max\left\{2\cdot\frac{3}{2} - 1, 2\cdot\frac{1}{2} + 1\right\} = 2,$$

И наконец, из следствии 2 мы получаем, что для почти всех $t_0 \in [0,1]$

$$G(t_0) \ge 2 \varlimsup_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) - 1 \ge 2\cdot\frac{9}{8} - 1 = \frac{5}{4}$$

В заключение выражаю благодарность академику Г. Г. Геворкяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

**Abstract.** The paper is devoted to the Gibbs phenomenon for series by general Franklin systems. The general Franklin system corresponding to a given dense sequence of points $\mathcal{T} = (t_n, n \ge 0)$ in $[0,1]$ is defined to be a sequence of orthonormal piecewise linear functions with knots from $\mathcal{T}$, that is, the $n$-th function from the system has knots $t_0, \dots, t_n$. The main result of this paper is that the Gibbs phenomenon for Fourier series by general Franklin systems occurs for almost all points of $[0,1]$.

## Список литературы

[1] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928).

[2] S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", Anal. Math. **1**, 249 – 257 (1975).

[3] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., **23**, 141 – 157 (1963).

[4] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia math., **164**, 161 – 204 (2004).

[5] Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва (1961).

[6] А. М. Зубакин, "Явление Гиббса для мультипикативных систем типа Уолша и типа Виленкина-Джафарли", Сиб. мат. журн., **12**, no. 1, 147 – 157 (1971).

[7] Л. А. Балашов, В. А. Скворцов, "Константы Гиббса для частичных сумм рядов Фурье-Уолша и их $(C,1)$-средних", Тр. МИАН СССР, **164**, 37 – 48 (1983).

[8] О. Г. Саргсян, "О сходимости и явлении Гиббса рядов Франклина", Изв., НАН Армении, матем., **31**, no. 1, 61 – 84 (1996).

[9] Г. Г. Геворкян, "Об абсолютной сходимости рядов по общей системе Франклина", Изв. НАН Армении, матем., **49**, no. 2, 3 – 22 (2014).

[10] Г. Г. Геворкян, "О рядах по системе Франклина", Analysis Mathematica, **16**, 87 – 114 (1990)

[11] Г. Г. Геворкян, К. А. Керян, "Об одном обобщении общей системы Франклина на $\mathbb{R}$". Изв. НАН Армении, математика, **49**, no. 6, 29 – 42 (2014).
[12] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), **374**, 1 – 59 (1998).

Поступила 27 мая 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 4, 2017, стр. 72–80.

# ON A GENERAL NONLINEAR PROBLEM WITH DISTRIBUTED DELAYS

NASSER-EDDINE TATAR

*King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia*
E-mail: *tatarn@kfupm.edu.sa*

Abstract. The paper considers a general system of ordinary differential equations appearing in the neural network theory. The activation functions are assumed to be continuous and bounded by power type functions of the states and distributed delay terms. These activation functions are not necessarily Lipschitz continuous as it is commonly assumed in the literature. We obtain sufficient conditions for exponential decay of solutions.[1]

**MSC2010 numbers:** 34D20, 34K20.

**Keywords:** Neural network; activation function; distributed delay; exponential stabilization.

## 1. Introduction

In this paper, we deal with the following system of equations:

$$x_i'(t) = -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{m} f_{ij}\left(t, x_j(t), \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t,s,x_j(s))ds\right) + c_i(t), \tag{1.1}$$

$i = 1, ..., m$, with given continuous functions $x_j(t) = x_{0j}(t)$, $t \in (-\infty, 0]$, $a_i(t) \geq 0$ and $c_i(t)$, $i = 1, ..., m$, $t > 0$. The functions $f_{ij}$ and $K_{ij}$, $i, j = 1, ..., m$, are assumed to be nonlinear and continuous, and satisfy some condition that will be specified later. Notice that the system (1.1) is a generalized version of much simpler systems, appearing in the neural network theory (see [5, 7-9, 12, 14, 15]).

In designing (artificial) neural networks, the researchers were mainly interested in the human brain. Neural networks consist of several simple computational elements (processors) known as "neurons which are highly interconnected and arranged in layers. The tasks of neurons is to transform the received signals from the input and transmit the outcome to the subsequent neurons.

The applications are numerous: quality control, identification of consumer characteristics, target marketing, financial health prediction, texture analysis, adaptive

[1]The author is grateful for the financial support and the facilities provided by King Abdulaziz City of Science and Technology (KACST) under the National Science, Technology and Innovation Plan (NSTIP), Project No. 15-OIL4884-0124

control, data segmentation, recognition of genes, medical diagnosis, signal processing, etc.

Neural networks are particularly useful for tasks a traditional computer cannot perform. Some of these tasks are, for example, detection of medical phenomena, forecasting, identification and prediction.

After appearance of the basic neural network systems, they have been extensively discussed in the literature. The goal was to generalize these systems and to discuss various issues for basic and generalized systems (see [5, 7-9, 12, 14, 15]). It seems, the most studied question is the (global) asymptotic stability of solutions. To establish this property, various conditions have been imposed on the coefficients and on the activation functions, and a lot of efforts were spent to relax these conditions. The most commonly assumed condition was the Lipschitz continuity condition for activation functions. We must, however, mention the references [1, 2, 4, 10, 11, 13], where the non-Lipschitz case was studied.

In this paper we assume that the functions $f_{ij}$ and $K_{ij}$ in (1.1) are (or are bounded by) continuous monotone nondecreasing functions that are not necessarily bounded or Lipschitz continuous. Even the monotonicity condition may be dropped.

The main result of this paper provides sufficiently mild sufficient conditions for solutions of the system (1.1) to converge to zero exponentially. To prove our main result, we use a generalization of the Gronwall inequality presented below in Lemma 2.1. Notice that this lemma may also be used to prove the local existence of solutions. The global existence can be derived from our theorem. Since here we are concerned in the convergence to zero (of any solution), the uniqueness is irrelevant.

The paper is organized as follows. Section 2 contains some notation, assumptions and a lemma, which is used in the proof of the main result of the paper. In Section 3 we state and prove our main result (Theorem 3.1), followed by some corollaries and remarks.

## 2. Preliminaries

The functions $f_{ij}$ and $K_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, m$, appearing in the system (1.1), are assumed to satisfy the following assumption.

**Assumption (H1).** For $t > 0$ and $i, j = 1, \ldots, m$,

$$\left|f_{ij}\left(t, x_j(t), \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t, s, x_j(s))\,ds\right)\right|$$
$$\leq b_{ij}(t)\,|x_j(t)|^{\alpha_{ij}}\left(|x_j(t)| + \int_{-\infty}^{t} l_{ij}(t-s)\psi_{ij}\left(|x_j(s)|\right) ds\right)^{m_{ij}},$$

where $b_{ij}$ are nonnegative continuous functions, $l_{ij}$ are nonnegative continuously differentiable functions with summable first order derivatives, $\varepsilon_{ij}$ are nonnegative nondecreasing continuous functions, and $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, m$.

**Definition 2.1.** *A function $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ is said to be in the class $H_{r,\omega}$ if it satisfies the following two conditions:*

(i) *$f(u)$ is nondecreasing and continuous for $u \geq 0$ and positive for $u > 0$;*

(ii) *$f(au) \leq r(a)\omega(u)$ for $a > 0$, $u > 0$, where $r(a)$ is a nonnegative continuous function in $\mathbf{R}_+$ and $\omega(u)$ is a nondecreasing continuous function in $\mathbf{R}_+$, which is positive for $u > 0$.*

**Lemma 2.1.** *Let $a(t)$ be a positive continuous function in $J := [\alpha, \beta)$, $k_j(t,s)$, $j = 1, \ldots, n$, are nonnegative continuous functions for $\alpha \leq s \leq t < \beta$, which are nondecreasing in $t$ for any fixed $s$, $g_j \in H_{r_j,\omega_j}$ for $u > 0$, and $u(t)$ is a nonnegative continuous functions in $J$. Then the inequality*

$$u(t) \leq a(t) + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \int_{\alpha}^{t} k_j(t,s) g_j(u(s))ds, \ t \in J.$$

*implies that*

$$u(t) \leq \hat{a}(t)\varphi_n(t), \ \alpha \leq t < \beta_n',$$

*where $\hat{a}(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} a(s)$, and $\varphi_0(t) \equiv 1$,*

$$\varphi_j(t) := \varphi_{j-1}(t) G_j^{-1} \left[ G_j(t) + \frac{r_j\left[\hat{a}(t)\varphi_{j-1}(t)\right]}{\hat{a}(t)} \int_{\alpha}^{t} k_j(t,s)ds \right], \ j = 1, \ldots, n.$$

$$G_j(u) = \int_{u_j}^{u} \frac{dx}{g_j(x)}, \ u > 0 \ (u_j > 0, \ j = 1, \ldots, n).$$

*Moreover, in this case*

$$u(t) \leq \hat{a}(t)\xi_n(t), \ \alpha \leq t < \beta_n'',$$

*where $\xi_0(t) \equiv 1$,*

$$\xi_j(t) := \xi_{j-1}(t) G_j^{-1} \left[ G_j(t) + \int_{\alpha}^{t} k_j(t,s) \frac{r_j\left[\hat{a}(s)\varphi_{j-1}(s)\right]}{\hat{a}(s)} ds \right], \ j = 1, \ldots, n.$$

*Here $\beta_n'$ and $\beta_n''$ are chosen so that the functions $\varphi_j(t)$ and $\xi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, are defined for $\alpha \leq t < \beta_n'$ and for $\alpha \leq t < \beta_n''$, respectively.*

We also will need the following assumption.

**Assumption (H2).** Assume that $\psi_{ij}(u) \in H_{r_j,\omega_j}$ and $g_l$ is a relabeling of $x^{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}$ and $\psi_{ij}$ with $k_l$ as coefficients (with $\tilde{k}_l$ in the other case).

We will also use the following notation.

$$x(t) := \sum_{i=1}^{m} |x_i(t)|, \; x_0(t) := \sum_{i=1}^{m} |x_{0i}(t)|$$

$$c(t) := \int_0^t \exp\left[\int_0^s a(\sigma)d\sigma\right] \sum_{i=1}^{m} |c_i(s)|\, ds, \; t > 0,$$

$$G_j(u) := \int_{u_j}^{u} \frac{dx}{g_j(x)}, \; u > 0 \; (u_j > 0, \; j = 1, \ldots, n),$$

$$z(0) = x_0(0) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{0} l_{ij}(-\sigma)\psi_{ij}(x_0(\sigma))\, d\sigma$$

$$\varphi_0(t) \equiv 1, \; \varphi_j(t) := \varphi_{j-1}(t)G_j^{-1}\left[G_j(t) + \frac{r_j\{[z(0) + c(t)]\,\varphi_{j-1}(t)\}}{z(0) + c(t)} \int_0^t k_j(s)ds\right],$$

$$\xi_0(t) \equiv 1, \; \xi_j(t) := \xi_{j-1}(t)G_j^{-1}\left[G_j(t) + \int_0^t \frac{k_j(s)r_j\{[z(0) + c(s)]\,\xi_{j-1}(s)\}}{z(0) + c(s)} ds\right],$$

$\bar{\varphi}_0(t) \equiv 1$ and for $j = 1, \ldots, n$

$$\bar{\varphi}_j(t) := \bar{\varphi}_{j-1}(t)G_j^{-1}\left[G_j(t) + \frac{r_j\{[\bar{z}(0) + c(t)]\,\bar{\varphi}_{j-1}(t)\}}{\bar{z}(0) + c(t)} \int_0^t \bar{k}_j(s)ds\right],$$

$\bar{\xi}_0(t) \equiv 1$ and for $j = 1, \ldots, n$,

$$\bar{\xi}_j(t) := \bar{\xi}_{j-1}(t)G_j^{-1}\left[G_j(t) + \int_0^t \frac{\bar{k}_j(s)r_j\{[\bar{z}(0) + c(s)]\,\bar{\xi}_{j-1}(s)\}}{\bar{z}(0) + c(s)} ds\right],$$

and $\bar{k}_j$ differ from $k_j$ by $l_{ij}(0) + \int_0^\infty |l'_{ij}(\sigma)|\, d\sigma$ instead of $l_{ij}(0)$.

## 3. The main result. Exponential convergence

In this section we state and prove our main result on the exponential convergence of solutions to zero.

**Theorem 3.1.** *Assume that the assumptions (H1) and (H2) hold, and*

$$\int_{-\infty}^{0} l_{ij}(-\sigma)\psi_{ij}(x_0(\sigma))\, d\sigma < \infty, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

*Then the following assertions hold.*

*(a) If $l'_{ij}(t) \le 0$, $i, j = 1, \ldots, m$, then there exists $\beta'_n > 0$ such that*

$$x(t) \le [z(0) + c(t)]\,\varphi_n(t) \exp\left[-\int_0^t a(s)ds\right], \; 0 \le t < \beta'_n,$$

*and there exists $\beta''_n > 0$ such that*

$$x(t) \le [z(0) + c(t)]\,\xi_n(t) \exp\left[-\int_0^t a(s)ds\right], \; 0 \le t < \beta''_n.$$

*(b) If $l'_{ij}(t)$, $i,j = 1,\dots,m$, are of arbitrary signs and*

$$\int_0^\infty |l'_{ij}(s)| \int_{-\infty}^0 \psi_{ij}\left(u_0(\sigma)\right) d\sigma ds < \infty,$$

*then there exists $\beta'_n > 0$ such that*

$$x(t) \le \left[ x_0(0) + \sum_{i,j=1}^m \int_{-\infty}^0 l_{ij}(-\sigma)\psi_{ij}\left(x_0(\sigma)\right) d\sigma \right] \\ \times \varphi_n(t) \exp\left[ -\int_0^t a(s)ds \right],\ 0 \le t < \beta'_n,$$

*and there exists $\beta''_n > 0$ such that*

$$x(t) \le \left[ x_0(0) + \sum_{i,j=1}^m \int_{-\infty}^0 l_{ij}(-\sigma)\psi_{ij}\left(x_0(\sigma)\right) d\sigma \right] \\ \times \xi_n(t) \exp\left[ -\int_0^t a(s)ds \right],\ 0 \le t < \beta''_n.$$

**Proof.** We first obtain a relation that will be used to prove the assertions (a) and (b) of the theorem.

Applying the Dini derivative to the equations in (1.1), for $t > 0$ and $i = 1,\dots,m$, we can write

$$D^+ |x_i(t)| \le -a_i(t)|x_i(t)| + \sum_{j=1}^m \left| f_{ij}\left( t, x_j(t), \int_{-\infty}^t K_{ij}(t,s,x_j(s))ds \right) \right| + c_i(t),$$

Then, using our notation and the assumption **(H1)**, for $t > 0$ we obtain

$$\begin{aligned} &D^+ x(t) \le -a(t)x(t) \\ &+ \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(t)|x(t)|^{\alpha_{ij}} \left( |x_j(t)| + \int_{-\infty}^t l_{ij}(t-s)\psi_{ij}\left(x(s)\right) ds \right)^{\beta_{ij}} + \sum_{i=1}^m |c_i(t)|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Multiplying both sides of (3.1) by $\exp\left[\int_0^t a(s)ds\right]$, for $t > 0$ we get

$$D^+\left\{ x(t)\exp\left[\int_0^t a(s)ds\right] \right\} \le \exp\left[\int_0^t a(s)ds\right] \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(t)|x(t)|^{\alpha_{ij}} \\ \times \left( |x_j(t)| + \int_{-\infty}^t l_{ij}(t-s)\psi_{ij}\left(x(s)\right) ds \right)^{\beta_{ij}} + \exp\left[\int_0^t a(s)ds\right] \sum_{i=1}^m |c_i(t)|.$$

Next, it follows that (see [6])

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) \le x(0) + c(t) + \sum_{j=1}^m \int_0^t \Bigg\{ &\sum_{i=1}^m b_{ij}(s)\exp\left[(1-\alpha_{ij})\int_0^s a(\sigma)d\sigma\right] \tilde{x}(s)^{\alpha_{ij}} \\ &\times \left( \tilde{x}(s) + \int_{-\infty}^s l_{ij}(s-\sigma)\psi_{ij}\left(\tilde{x}(\sigma)\right) d\sigma \right)^{\beta_{ij}} \Bigg\} ds,\ t > 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

where

$$\tilde{x}(t) := x(t)\exp\left[\int_0^t a(s)ds\right],\ t > 0.$$

We define $\tilde{x}(t) = x(t) := x_0(t) = \sum_{i=1}^{m} |x_{0i}(t)|$ for $t \le 0$. Let $y(t)$ denote the right hand side of (3.2) for $t > 0$, and let $y(t) := x(t)$ for $t \le 0$. It is clear that $y(0) = x(0)$, $\tilde{x}(t) \le y(t)$ for $t > 0$, and

$$\begin{aligned} y'(t) &= c'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \tilde{b}_{ij}(t)\tilde{x}(t)^{\alpha_{ij}} \left(\tilde{x}(t) + \int_{-\infty}^{t} l_{ij}(t-\sigma)\psi_{ij}\left(\tilde{x}(\sigma)\right) d\sigma\right)^{\beta_{ij}} \\ &\le c'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \tilde{b}_{ij}(t)y(t)^{\alpha_{ij}} \left(y(t) + \int_{-\infty}^{t} l_{ij}(t-\sigma)\psi_{ij}\left(y(\sigma)\right) d\sigma\right)^{\beta_{ij}}, \ t > 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

where

$$\tilde{b}_{ij}(t) := \exp\left[(1-\alpha_{ij})\int_0^t a(\sigma)d\sigma\right] b_{ij}(t), \ t > 0.$$

Define

$$z(t) := \begin{cases} y(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} l_{ij}(t-\sigma)\psi_{ij}\left(y(\sigma)\right) d\sigma, \ t > 0 \\ u_0(t) := x_0(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} l_{ij}(t-\sigma)\psi_{ij}\left(x_0(\sigma)\right) d\sigma, \ t \le 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Differentiating $z(t)$, given by (3.4), and using (3.3), we can write

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} l_{ij}(0)\psi_{ij}\left(y(t)\right) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} l'_{ij}(t-\sigma)\psi_{ij}\left(y(\sigma)\right) d\sigma \\ &\le c'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \tilde{b}_{ij}(t)y(t)^{\alpha_{ij}} \left(y(t) + \int_{-\infty}^{t} l_{ij}(t-\sigma)\psi_{ij}\left(y(\sigma)\right) d\sigma\right)^{\beta_{ij}} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{m} l_{ij}(0)\psi_{ij}\left(y(t)\right) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} l'_{ij}(t-\sigma)\psi_{ij}\left(y(\sigma)\right) d\sigma \\ &\le c'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \tilde{b}_{ij}(t)z(t)^{\alpha_{ij}+\beta_{ij}} + \sum_{i,j=1}^{m} l_{ij}(0)\psi_{ij}\left(z(t)\right) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} l'_{ij}(t-\sigma)\psi_{ij}\left(y(\sigma)\right) d\sigma \end{aligned} \tag{3.5}$$

Now we use the relation (3.5) to prove the assertions (a) and (b) of the theorem.

**Proof of (a).** Let $l'_{ij}(t) \le 0$, $i, j = 1, \ldots, m$. This case corresponds to the so-called "fading memory"situation. In this case, the relation (3.5) reduces to the following:

$$z'(t) \le c'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \left[\tilde{b}_{ij}(t)z(t)^{\alpha_{ij}+\beta_{ij}} + l_{ij}(0)\psi_{ij}\left(z(t)\right)\right], \ t > 0.$$

Therefore, we have

$$z(t) \le z(0) + c(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^t \left[\tilde{b}_{ij}(s)z(s)^{\alpha_{ij}+\beta_{ij}} + l_{ij}(0)\psi_{ij}\left(z(s)\right)\right] ds, \ t > 0, \tag{3.6}$$

where $z(0) = x_0(0) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{0} l_{ij}(-\sigma)\psi_{ij}\left(x_0(\sigma)\right) d\sigma$.

It is clear that the functions $z(s)^{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}$ belong to $H_{r_j,m_j}$, and since $\psi_{ij}$ are also assumed from this class, we can apply Lemma 2.1 to (3.6), to obtain

$$\tilde{x}(t) \leq z(t) \leq [z(0) + c(t)]\,\varphi_n(t),\ 0 \leq t < \beta_n' \tag{3.7}$$

$$x(t) \leq z(t) \leq [z(0) + c(t)]\,\xi_n(t),\ 0 \leq t < \beta_n''.$$

This completes the proof of assertion (a).

**Proof of (b).** Let $l_{ij}'(t)$, $i, j = 1, \dots, m$, be of arbitrary signs. Then, in view of relation (3.5), we have

$$\begin{aligned} z'(t) \leq c'(t) &+ \sum_{i,j=1}^{m} \bar{b}_{ij}(t) z(t)^{\alpha_{ij}+\beta_{ij}} + \sum_{i,j=1}^{m} l_{ij}(0)\psi_{ij}\left(z(t)\right) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^\infty \left|l_{ij}'(\sigma)\right| \psi_{ij}\left(z(t-\sigma)\right) d\sigma,\ t > 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

The integral term in (3.8) may be treated by introducing the auxiliary function:

$$\tilde{z}(t) = z(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^\infty \left|l_{ij}'(s)\right| \int_{t-s}^{t} \psi_{ij}\left(z(\sigma)\right) d\sigma ds,\ t \geq 0.$$

Differentiating $\tilde{z}(t)$, and using (3.8), we can write

$$\begin{aligned} \tilde{z}'(t) &= z'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^\infty \left|l_{ij}'(s)\right| \left[\psi_{ij}\left(z(t)\right) - \psi_{ij}\left(z(t-s)\right)\right] d\sigma ds \\ &\leq c'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \bar{b}_{ij}(t) z(t)^{\alpha_{ij}+\beta_{ij}} + \sum_{i,j=1}^{m} l_{ij}(0)\psi_{ij}\left(z(t)\right) \\ &\qquad + \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^\infty \left|l_{ij}'(\sigma)\right| \psi_{ij}\left(z(t-\sigma)\right) d\sigma \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^\infty \left|l_{ij}'(s)\right| \left[\psi_{ij}\left(z(t)\right) - \psi_{ij}\left(z(t-s)\right)\right] ds \\ &\leq c'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \left\{\bar{b}_{ij}(t) z(t)^{\alpha_{ij}+\beta_{ij}} + \left[l_{ij}(0) + \int_0^\infty \left|l_{ij}'(s)\right| ds\right] \psi_{ij}\left(z(t)\right)\right\},\ t > 0. \end{aligned}$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} &\tilde{z}(t) \leq \tilde{z}(0) + c(t) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^t \left\{\tilde{b}_{ij}(s)\left(\tilde{z}(s)\right)^{\alpha_{ij}+\beta_{ij}} + \left[l_{ij}(0) + \int_0^\infty \left|l_{ij}'(\sigma)\right| d\sigma\right] \psi_{ij}\left(\tilde{z}(s)\right)\right\} ds \end{aligned} \tag{3.9}$$

with

$$\begin{aligned} &\tilde{z}(0) = x_0(0) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{0} l_{ij}(-\sigma)\psi_{ij}\left(x_0(\sigma)\right) d\sigma + \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^\infty \left|l_{ij}'(s)\right| \int_{-s}^{0} \psi_{ij}\left(u_0(\sigma)\right) d\sigma ds. \end{aligned}$$

Finally, we apply Lemma 2.1 to (3.9) and use (3.8), to obtain

$$\tilde{x}(t) \leq \tilde{z}(t) \leq \left[x_0(0) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{0} l_{ij}(-\sigma)\psi_{ij}\left(x_0(\sigma)\right) d\sigma\right] \varphi_n(t),\ 0 \leq t < \bar{\beta}_n'$$

and

$$\bar{x}(t) \leq \bar{z}(t) \leq \left[ x_0(0) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{0} l_{ij}(-\sigma)\psi_{ij}\left(x_0(\sigma)\right) d\sigma \right] \xi_n(t), \; 0 \leq t < \tilde{\beta}_n''.$$

This completes the proof of assertion (b). Theorem 3.1 is proved.

**Corollary 3.1.** *If, in addition to the hypotheses of the theorem, $\beta_n'$, $\beta_n''$, $\tilde{\beta}_n'$ and $\tilde{\beta}_n''$ are infinite, then we have global existence of solutions.*

**Corollary 3.2.** *If, in addition to the hypotheses of the theorem, we assume that $[z(0) + c(t)]\,\varphi_n(t)$ and $\left[ x_0(0) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{0} l_{ij}(-\sigma)\psi_{ij}\left(x_0(\sigma)\right) d\sigma \right] \bar{\varphi}_n(t)$ grow at most polynomially, and $\exp\left[\int_0^t a(s)ds\right] \to \infty$ as $t \to \infty$, then the solutions decay in exponential rate.*

**Remarks:**

1. The smallness condition in the initial data is dictated by Lemma 2.1. Indeed, it is required for existence of functions $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$. It will be superfluous, for instance, if the functions $G_j(u)$ have infinite range. However, the other conditions on the initial data in the statement of the result remain the same.

2. The classical Hopfield neural network system with distributed delays

$$x_i'(t) = -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} l_{ij}(t-s)\psi_{ij}\left(|x_j(s)|\right) ds + c_i,$$

may be considered as a special case of ours when $\alpha_{ij} = 0$ and $\beta_{ij} = 1$, $i, j = 1, \ldots, m$. Regarding the asymptotic behavior, our Corollary 3.2 shows that the condition on $c(t)$

$$c(t) := \int_0^t \exp\left[\int_0^s a(\sigma)d\sigma\right] \sum_{i=1}^{m} |c_i(s)|\, ds, \; t > 0,$$

for the 'constants' $c_i$ becomes $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. The convergence to zero would mean stability of the equilibrium 0 ($\psi_{ij}(0) = 0$, $i, j = 1, \ldots, m$).

3. The class $H_{r,\omega}$ is sufficiently large. For instance, it contains all submultiplicative functions $\psi$ since $\psi \in H_{\psi,\psi}$. It contains also the class $\mathcal{F}$ introduced by Deo and Dongade [3]. Recall that the class $\mathcal{F}$ is formed by all nondecreasing continuous functions $\psi$ in $\mathbf{R}_+$ such that $\psi(u) > 0$ for $u > 0$ and $\frac{1}{a}\psi(u) \leq \psi(\frac{u}{a})$, $u \geq 0$, $a \geq 1$. To see that $H_{r,\omega}$ contains $\mathcal{F}$, is it is enough to take $r$ satisfying $r(a) = \max(1, a)$.

## Список литературы


[1] G. Bao and Z. Zeng, Analysis and design of associative memories based on recurrent neural network with discontinuous activation functions, Neurocomputing **77**, 101 – 107 (2012).

[2] Z. Cai and L. Huang, Existence and global asymptotic stability of periodic solution for discrete and distributed time-varying delayed neural networks with discontinuous activations, Neurocomputing **74**, 3170 – 3179 (2011).

[3] U. D. Dongadle and S. G. Deo, Pointwise estimates of solutions of some Volterra integral equations. J. Math. Anal. Appl. **45** (3), 615 – 628 (1974).

[4] M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri and L. Pancioni, Generalized Lyapunov approach for convergence of neural networks with discontinuous or non-Lipschitz activations, Physica D **214**, 88 – 99 (2006).

[5] B. Kosko, Neural Network and Fuzzy System - A Dynamical System Approach to Machine Intelligence, New Delhi: Prentice-Hall of India (1991).

[6] V. Lakshmikhantam and S. Leela, Differential and Integral Inequalities: Theory and Applications, Vo. 55-I, Mathematics in Sciences and Engineering, Edited by Richard Bellman, Acad. Press, New York-London (1969).

[7] S. Mohamad, K. Gopalsamy and H. Akca, Exponential stability of artificial neural networks with distributed delays and large impulses, Nonl. Anal.: Real World Applications **9**, 872 – 888 (2008).

[8] J. Park, On global stability criterion of neural networks with continuously distributed delays, Chaos Solitons & Fractals, **37**, 444 – 449 (2008).

[9] Z. Qiang, M. A. Run-Nian and X. Jin, Global exponential convergence analysis of Hopfield Neural Networks with continuously distributed delays, Commun. Theor Phys. **39** (3), 381 – 384 (2003).

[10] N.-e. Tatar, Hopfield neural networks with unbounded monotone activation functions, Adv. Artificial Neural Netw. Syst. 2012, ID 571358, 1 - 5 (2012).

[11] N.-e Tatar, Control of systems with Hölder continuous functions in the distributed delays, Carpathian J Math. **30** (1), 123 – 128 (2014).

[12] Y. X. Wang, Q. Y. Zhou, B. Xiao and Y. H. Yu, Global exponential stability of cellular neural networks with continuously distributed delays and impulses, Physics Letters A **350**, 89 – 95 (2006).

[13] H. Wu, F. Tao, L. Qin, R. Shi and L. He, Robust exponential stability for interval neural networks with delays and non-Lipschitz activation functions, Nonlinear Dyn. **66**, 479 – 487 (2011).

[14] Q. Zhang, X. P. Wei and J. Xu, Global exponential stability of Hopfield neural networks with continuously distributed delays, Physics Letters A **315**, 431 – 436 (2003).

[15] J. Zhou, S. Y. Li and Z. G. Yang, Global exponential stability of Hopfield neural networks with distributed delays, Appl. Math. Model. **33**, 1513 – 152 (2009).


Поступила 1 июня 2015

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 52, номер 4, 2017

Содержание



IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 52, No. 4, 2017

Contents

Cover to cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

# *JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS*

**(Armenian Academy of Sciences)**

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 52, No. 3, 2017

CONTENTS