ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2017

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 3, 2017, стр. 3-15.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

С. И. АДЯН, В. С. АТАБЕКЯН

Ереванский государственный университет, Армения[1]
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва[2]
E-mails: *sia@mi.ras.ru*; *avarujan@ysu.am*

Аннотация. В работе дается обзор результатов, относящихся к n-периодическим произведениям групп, которые были получены в последние годы авторами данной статьи, а также результаты других авторов в этом направлении. Эти операции были введены С.И.Адяном в 1976 году для решения известной проблемы А.И. Мальцева. Было установлено, что периодические произведения являются ассоциативными, точными, наследственными по подгруппам а также обладают другими важными свойствами, такими как хопфовость, C^*-простота, равномерная неаменабельность, SQ-универсальность и т.д. Было также установлено, что n-периодические произведения групп можно однозначно охарактеризовать с помощью некоторых конкретных и просто формулируемых свойств, что позволяет на n-периодические произведения разных семейств групп распространить многие полученные ранее результаты о свободных периодических группах $B(m, n)$. В частности, в статье дается описание конечных подгрупп n-периодических произведений, анализируется и обобщается полученное ранее С. И. Адяном критерий простоты периодических произведений.

MSC2010 number: 20F50; 20F05; 20E06; 20F28; 22D25

Ключевые слова: Периодическая группа, n-периодическое произведение, автоморфизм, подгруппа, равномерная неаменабельность, C^*-простая группа.

1. Введение

Понятие *периодического произведения периода n* для данного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$, обозначаемое через $\prod_{i\in I}^{n} G_i$, было введено С. И. Адяном в работе [1] (см. также [2]). Создание этих произведений позволило решить известную проблему А. И. Мальцева о существовании операции умножения групп, отличной от классических операций свободного и прямого произведений и удовлетворяющей всем известным свойствам этих операций.

[1]Исследование В. С. Атабекяна выполнено за счет гранта ГК МОН РА и РФФИ РФ в рамках совместных научных программ 15RF-054 и 15-51-05012-Арм_н

[2]Разделы 1-5 статьи выполнены С. И. Адяном, а разделы 6-9 – В. С. Атабекяном. Исследование С. И. Адяна выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект номер 16-11-10252) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Периодическое произведение данного периода n определяется для каждого нечетного $n \geq 665$ на основе теории Новикова-Адяна, которая подробно изложена в монографии [3] (см. также [4]). Для произвольного данного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ произведение $G = \prod\limits_{i\in I}^{n} G_i$ определяется как фактор группа свободного произведения этого семейства по системе определяющих соотношений вида $A^n = 1$, которые определяются сложной совместной индукцией по натуральному параметру, называемому *рангом*.

Эти операции умножения групп обладают основными свойствами классических операций свободного и прямого произведения групп (см. [1]): они являются точными, ассоциативными и наследственными по подгруппам. В связи с проблемой поставленной А. И. Мальцевым, последнее свойство получило название постулат Мальцева. Свойство наследственности по подгруппам означает, что подгруппы H_i компонент G_i n-периодического произведения $G = \prod\limits_{i\in I}^{n} G_i$ порождают в G свое n-периодическое произведение. Точнее, тождественные вложения $H_i \rightarrowtail G_i$ продолжаются до вложения их n-периодического произведения $H = \prod\limits_{i\in I}^{n} H_i$ в группу $G = \prod\limits_{i\in I}^{n} G_i$.

2. Критерий простоты и его обобщение

Конструкция n-периодического произведения нечетного периода n обладает также следующим важным свойством условной периодичности, которое можно рассматривать как естественный аналог тождества коммутации элементов из разных компонент в прямых произведениях групп:

Предложение 2.1. *(см. [1, Теорема 2]) Если исходные группы G_i не содержат инволюций, то операция умножения групп $\prod\limits_{i\in I}^{n} G_i$ может быть построена так, чтобы в ней для любого элемента x, который не сопряжен никакому элементу исходных компонент, выполнялось равенство $x^n = 1$.*

На основе этого свойства в работе [5] С. И. Адяном был доказан следующий критерий простоты n-периодических произведений групп.

Теорема 2.1. *(см. [5, Теорема 1]) Периодическое произведение данного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$, не содержащих инволюцию, является простой группой в том и только том случае, если $G_i^n = G_i$ для каждого множителя G_i этого произведения.*

Критерий простоты позволил указать новые серии конечно порожденных бесконечных простых групп в многообразиях периодических групп нечетного составного периода nk, где $k > 1$ и $n \geq 665$ (см. [5, Теорема 2]). Таким образом, был получен положительный ответ на вопрос, поставленный в известной монографии Ханны Нейман: *Может ли многообразие, отличное от многообразия всех групп, содержать бесконечное множество неизоморфных (нециклических) простых групп?*

Спектром данной периодической группы называется множество порядков всех нетривиальных элементов этой группы. В работе [5] доказана также

Теорема 2.2. *Для всякого множества M нечетных простых чисел, содержащего хотя бы одно число $p > 665$, можно построить счетную периодическую простую группу H, для которой M является спектром. Если при этом множество M конечно, то построенная группа H имеет конечное число порождающих и ограниченную экспоненту.*

Отсюда также следует существование континуума различных счетных простых периодических групп.

В совместной работе авторов [6] получено естественное обобщение критерия простоты (см. теорему 2.1 выше).

Теорема 2.3. *(см. [6, Теорема 2]) Любая нетривиальная нормальная подгруппа n-периодического произведения $G = \prod_{i\in I}^{n} G_i$ содержит подгруппу G^n.*

Из него непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *n-периодическое произведение $G = \prod_{i\in I}^{n} G_i$ является простой группой тогда и только тогда, когда $G = G^n$.*

3. О ХОПФОВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Группа называется хопфовой, если всякий ее эпиморфизм на себя является автоморфизмом. Согласно известной теореме Мальцева (1958) все конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы хопфовы. Примеры относительно свободных (разрешимых) не финитно аппроксимируемых хопфовых групп впервые были построены Ю. Г. Клейманом в 1982г. Вопрос о том являются ли хопфовыми свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 665$ пока остается открытым.

Существуют примеры бесконечных, конечно порожденных финитно аппроксимируемых, а следовательно и хопфовых, периодических групп (Голод, 1964г., Григорчук, 1984 г.), но эти группы не удовлетворяют какому либо тождеству вида $x^n = 1$. Нами получен положительный ответ на более общий вопрос о том, существуют ли не простые, не финитно аппроксимируемые, конечно порожденные хопфовы группы, удовлетворяющие тождеству вида $x^n = 1$?

Теорема 3.1. *(см. [6, Теорема 4]) Если в n-периодическом произведении* $G = \prod_{i\in I}^{n} G_i$ *групп без инволюций хотя бы в одном из множителей не выполняется тождество* $x^n = 1$, *то* G *является хопфовой группой.*

С помощью теоремы 3.1 удается построить примеры не простых и не финитно аппроксимируемых хопфовых групп ограниченного периода.

Следствие 3.1. *(см. [6, Следствие 3]) Если нечетное число* $n \geq 665$ *является собственным делителем числа* $r = kn$, *то n-периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть не простая хопфова группа, которая не финитно аппроксимируема.*

4. Наследуемо факторизуемые множители периодических произведений

В работе [6] выявлено еще одно интересное свойство нормальных подгрупп n-периодических произведений групп. Допустим, что некоторая подгруппа H группы G обладает вполне естественным свойством подгрупп: заданную конгруэнцию на данной подгруппе H можно продолжить до некоторой конгруэнции на всей группе G. Это означает, что фактор группа подгруппы H группы G естественным образом вкладывается в некоторую фактор группу всей группы G.

Определение 4.1. *Нормальную подгруппу* N_H *подгруппы* H *группы* G *назовем наследуемо нормальной подгруппой, если существует нормальная подгруппа* N_G *группы* G *такая, что* $H \cap N_G = N_H$.

Если любая нормальная подгруппа данной подгруппы H группы G является наследуемо нормальной, то подгруппа H называется *наследуемо факторизуемой*. Понятие *НФ*-подгруппы было введено Б.Нейманом в 1954 г., где указанные подгруппы были названы *E-подгруппами*. (В литературе встречаются также и другие названия для этого понятия: *CEP-подгруппа* и *Q-подгруппа*).

Центр любой группы является $H\Phi$-подгруппой, любая простая подгруппа данной группы – $H\Phi$-подгруппа, любой ретракт H данной группы G – $H\Phi$-подгруппа. В абсолютно свободной группе F_2 ранга 2 с порождающими a, b подгруппа порожденная элементами $[a, b^{2i-1}ab^{-(2i-1)}]$, $(i = 1, 2, \dots)$ является $H\Phi$-подгруппой, изоморфной свободной группе F_∞ бесконечного ранга (Б. Нейман, 1959 г.). Одним из важных результатов об $H\Phi$-подгруппах является результат А.Ю.Ольшанского (1991 г.) о том, что произвольная неэлементарная гиперболическая группа содержит $H\Phi$-подгруппу, изоморфную абсолютно свободной группе F_∞ бесконечного ранга.

Из определений прямого и свободного произведения непосредственно следует, что произвольная группа G_1 является $H\Phi$-подгруппой как прямого произведения $G_1 \times G_2$, так и свободного произведения $G_1 * G_2$ групп G_1 и G_2. Справедлива следующая

Теорема 4.1. *(см. [6, Теорема 1]) Нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_i} множителя G_i нетривиального n-периодического произведения $\prod_{i\in I}^{n} G_i$ является наследуемо нормальной подгруппой группы G_i в том и только том случае, если N_{G_i} содержит все n-ые степени элементов G_i.*

Следствие 4.1. *Множитель G_1 n-периодического произведения является наследуемо факторизуемой подгруппой тогда и только тогда, когда любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_1} группы G_1 содержит подгруппу G_1^n.*

Еще один важный результат об $H\Phi$-подгруппах свободных бернсайдовых групп изложен ниже (см. теорему 6.2).

5. Характеристические свойства периодических произведений

В основополагающей работе [1] доказано, что свободное произведение $F = \prod_{i\in I}^{*} G_i$ содержит некоторую нормальную подгруппу N, фактор группа F/N по которой названа n-периодическим произведением семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$, которая удовлетворяет следующим условиям: **a**. Подгруппа N имеет тривиальное пересечение со всеми компонентами G_i, **b**. Подгруппа N является нормальным замыканием некоторого множества слов вида $C^n \in F$ и, если элемент $X \in M$ не сопряжен в F/N никакому элементу из компонент G_i, то $X^n = 1$ в фактор группе F/N.

На самом деле, приведенные выше свойства n-периодических произведений являются *характеристическими* в том смысле, что верна следующая теорема единственности.

Теорема 5.1. (см. [8, Теорема 1]) *Пусть число $n \geq 665$ нечетно и множители $\{G_i\}_{i\in I}$ не содержат инволюций. Тогда свободное произведение $F = \prod_{i\in I}^{*} G_i$ содержит **единственную** нормальную подгруппу M, удовлетворяющую условиям:*

a. Подгруппа M имеет тривиальное пересечение со всеми компонентами G_i.

b. Подгруппа M является нормальным замыканием некоторого множества слов вида $C^n \in F$ и, если элемент $X \in M$ не сопряжен в F/M никакому элементу из компонент G_i, то $X^n = 1$ в фактор группе F/M.

6. Вложение свободных бернсайдовых групп в периодические произведения

Укажем важное приложение теоремы 5.1, показывающее, что подгруппы n-периодических произведений достаточно "большие".

Напомним, что *свободной бернсайдовой группой* $B(m,n)$ периода n и ранга m называется группа со следующим заданием:

$$B(m,n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid x^n = 1 \rangle,$$

где x пробегает множество всех слов в групповом алфавите $\{a_1, \dots, a_m\}$. Хорошо известно, что для любого нечетного $n \geq 665$ и $m > 1$ группа $B(m,n)$ бесконечна и даже имеет показательный рост.

Теорема 6.1. (см. [8, Теорема 2]) *Всякая нециклическая подгруппа n-периодического произведения групп без инволюций, которая не сопряжена с какой либо подгруппой групп G_i, содержит подгруппу, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(2,n)$ ранга 2.*

Следствие 6.1. *Для любого нечетного $n \geqslant 1003$ каждая нециклическая конечная подгруппа n-периодического произведения произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ без инволюций сопряжена некоторой подгруппе из H_i одного из компонент G_i.*

В связи с теоремой 6.1 отметим, что существует интересное сходство централизаторов циклических подгрупп свободных бернсайдовых групп, n-периодических произведений и свободных групп бесконечно базируемых многообразий С.И.Адяна (см. [9]).

Следующая теорема доказана в работе [12].

Теорема 6.2. *(см. [12, Теорема 3]) Для каждого нечетного $n \geq 1003$ любая нециклическая подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ содержит НФ-подгруппу группы $B(m, n)$, изоморфную группе $B(\infty, n)$.*

Из этого, в частности, следует, что любая нециклическая подгруппа H группы $B(m, n)$ SQ-унивресальна в многообразии $\mathfrak{B}_n$ всех групп периода n, т.е. всякая счетная группа из многообразия $\mathfrak{B}_n$ изоморфно вложима в некоторую фактор группу подгруппы H (см. также [13]).

Кроме того, получается, что каждая счетная группа периода n вкладывается в некоторую 2-порожденную группу периода n (см. также [14, Теорема 35.4]).

7. Равномерная неаменабельность периодических произведений

Приведенная выше теорема единственности (теорема 5.1) позволяет также исследовать равномерную неаменабельность периодических произведений. Группа G называется *аменабельной*, если существует конечно-аддитивная мера μ, определенная на множестве всех подмножеств группы G, которая инвариантна относительно левых сдвигов и $\mu(G) = 1$. Как показано Дж. фон Нейманом, класс аменабельных групп замкнут относительно операций взятия подгруппы, фактор группы, индуктивного предела, расширения. Все конечные группы, все конечно порожденные разрешимые группы аменабельны. С другой стороны, любая группа, содержащая свободную подгруппу ранга 2 — неаменабельна.

В работе С. И. Адяна [7] впервые было доказано, что для всех нечетных $n \geq 665$ и $m > 1$ группы $B(m, n)$ неаменабельны и случайные блуждания на них не возвратны (решение известной проблемы Кестена). Это были первые примеры неаменабельных групп, удовлетворяющих нетривиальному тождеству и, тем самым, не содержащие свободных подгрупп.

Аменабельные группы описываются также с помощью, так называемой, константы Фелнера группы. *Константой Фелнера группы G относительно конечного порождающего множества S* называется число

$$Fol_S(G) \rightleftharpoons \inf_A \frac{|\partial_S(A)|}{|A|}.$$

где инфимум берется по всем конечным непустым подмножествам $A \subset G$ и

$$\partial_S(A) = \{a \in A \mid ax \notin A \text{ для некоторого } x \in S^{\pm 1}\}.$$

Известно, что группа аменабельна тогда и только тогда, когда $Fol_S(G) = 0$ для некоторого (следовательно, для каждого) конечного порождающего множества S.

Группа G называется равномерно неаменабельной группой, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $Fol_S(G) > \varepsilon$ для любого конечного порождающего множества S.

В 2009 г. (см. [10], [11]) было доказано, что для каждого нечетного числа $n \geqslant 1003$ любая конечно порожденная нециклическая подгруппа H свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ – равномерно неаменабельная группа. В частности, для любого $m \geqslant 2$ и нечетного $n \geqslant 1003$ свободная бернсайдова группа $B(m, n)$, не только не аменабельна, но и равномерно неаменабельна.

Естественным обобщением последних результатов является следующее утверждение.

Теорема 7.1. *(см. [8, Теорема 3]) Всякая конечно порожденная подгруппа n-периодического произведения $\prod_{i \in I}^{n} G_i$, которая не сопряжена ни с какой подгруппой групп G_i, является равномерно неаменабельной группой.*

Следствие 7.1. *Если нечетное число $n \geq 1003$ является собственным делителем числа r, то n-периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть не простая, хопфова, не финитно аппроксимируемая и равномерно неаменабельная группа периода r.*

Следствие 7.2. *Если нечетное число $n \geq 1003$ взаимно просто с числом r, то n-периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть простая равномерно неаменабельная группа периода nr.*

В частности, 1003-периодическое произведение двух циклических групп порядка 3 равномерно неаменабельная простая группа в которой выполняется тождество $x^{3009} = 1$.

8. О C^*-ПРОСТОТЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Для заданной группы G обозначим через $l_2(G)$ гильбертово пространство всех функций $f : G \to \mathbb{C}$, для которых ряд $\sum_{g\in G} |f(g)|^2$ сходится, а через $\mathcal{B}(l_2(G))$ обозначим C^*-алгебру всех ограниченных линейных операторов на $l_2(G)$.

Пусть $\lambda_G : G \to \mathcal{B}(l_2(G))$ есть левое регулярное представление группы G (т.е. $(\lambda_G(g)(f))(s) = f(g^{-1}s))$ для всех $g, s \in G$. *Приведенной C^*-алгеброй группы G* называется замыкание линейной оболочки множества $\{\lambda_G(g) | g \in G\}$ относительно операторной нормы. Она обозначается $C_{red}(G)$.

Определение 8.1. *Группа G называется C^*-простой группой, если алгебра $C_{red}(G)$ проста, т.е. не содержит собственных нетривиальных двусторонних идеалов.*

Следом C^*-алгебры A называется любой положительный линейный функционал $T : A \to \mathbb{C}$ такой, что $T(1) = 1$ и $T(ab) = T(ba)$ для всех $a, b \in A$. Говорят, что группа G обладает свойством единственного следа, если ее C^*-алгебра $C_{red}(G)$ имеет единственный (т.е. только канонический) след. В 1975 году Пауэрс доказал, что свободная группа ранга 2 обладает свойством единственного следа. Вслед за этим разные авторы указали другие интересные классы групп, C^*-алгебры которых имеют единственный след.

Определение 8.2. *Наибольшая аменабельная нормальная подгруппа группы называется ее аменабельным радикалом.*

Как доказал М. Дэй (1957 г.), любая группа обладает аменабельным радикалом. В 2014 г. в работе [16] было доказано, что аменабельный радикал группы G тривиален тогда и только тогда, когда C^*-алгебра $C_{red}(G)$ данной группы G имеет единственный след. Кроме того, в [16]) было доказано, что дискретная группа со счетным количеством аменабельных подгрупп является C^*-простой группой тогда и только тогда, когда ее аменабельный радикал тривиален.

В работе [15] были поставлены следующие вопросы.

Вопрос. (a) Существуют ли не тривиальные C^*-простые группы без нециклических свободных подгрупп?

(b) Являются ли свободные бернсайдовы группы C^*-простыми для достаточно большого нечетного периода и ранга >1?

Ответы на эти вопросы легко вытекают из нижеследующей теоремы.

Теорема 8.1. *(см. [17, Теорема 1]) n-Периодическое произведение не более чем счетного семейства произвольных конечных или счетных групп без инволюций, каждый из которых содержит лишь счетное количество аменабельных подгрупп является C^*-простой группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Следствие 8.1. *n-Периодическое произведение не более, чем счетного семейства произвольных конечных групп без инволюций является C^*-простой группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Следствие 8.2. *n-Периодическое произведение счетного семейства произвольных циклических групп без инволюций является C^*-простой группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Следствие 8.3. *Свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ является C^*-простой группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Последнее следствие для значительно больших нечетных значений n ранее было доказано в работе А.Ю.Ольшанского и Д. В. Осина [18]. С использованием n-периодических произведений специальных групп в [17] была доказана следующая теорема.

Теорема 8.2. *(см. [17, Теорема 2]) Для каждого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум неизоморфных не простых 3-порожденных групп, в которых выполняется тождество $x^n = 1$.*

Относительно вопроса единственности следа в работе [19] получен также следующий результат.

Теорема 8.3. *(см. [19, Теорема 3]) Группы автоморфизмов $Aut(F_m)$ свободных групп F_m, а также группы автоморфизмов $Aut(B(m, n))$ свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ обладают свойством единственного следа для любого ранга $m > 1$ и при любом нечетном $n \geq 1003$.*

С помощью конструкций n-периодических произведений доказывается следующая теорема о вложении групп.

Теорема 8.4. *(см. [19, Теорема 4]) Любая счетная группа изоморфно вкладывается в некоторую 3-порожденную группу со свойством единственного следа.*

9. Об автоморфизмах периодических произведений

Автоморфизм φ группы G называется *нормальным автоморфизмом*, если $\varphi(H) = H$ для любой нормальной подгруппы H группы G. Очевидно, любой внутренний автоморфизм произвольной группы является ее нормальным автоморфизмом. М. В. Нещадим в [20] доказал, что каждый нормальный автоморфизм свободного произведения нетривиальных групп – внутренний. Аналогичные утверждения были доказаны в разные годы для различных интересных классов групп.

Отметим важный результат о том, что для нечетных $n \geq 1003$ все нормальные автоморфизмы нециклических свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ являются внутренними (см. [21] – [23]). Этот результат распространяется на некоторые n-периодические произведения.

Теорема 9.1. *(см. [25, Теорема 1]) Любой нормальный автоморфизм n-периодического произведения циклических групп порядка r, где r делит n, является внутренним.*

Однако, как показывает следующий результат из [24], аналог результата Нещадима не верен для n-периодических произведений в общем случае.

Теорема 9.2. *(см. [24, Теорема 1]) Пусть G произвольная группа без инволюций, обладающая автоморфизмом порядка 2. Тогда если для некоторого нечетного числа $n \geq 665$ группа G совпадает со своей подгруппой G^n, то n-периодическое произведение $G \overset{n}{*} G$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 9.3. *(см. [26, Теорема 1]) Любой расщепляющий автоморфизм n-периодического произведения циклических групп порядка r, где r делит n, является внутренним, если порядок этого автоморфизма есть степень простого числа.*

Напомним, что автоморфизм φ группы G называется *расщепляющим автоморфизмом периода n*, если $\varphi^n = 1$ и $g g^{\varphi} g^{\varphi^2} \cdots g^{\varphi^{n-1}} = 1$ для любого элемента $g \in G$. Следует также отметить, что последняя теорема 9.3 обобщает некоторые результаты работ [27] и [28].

Abstract. In this paper we provide an overview of the results relating to the n-periodic products of groups that have been obtained in recent years by the authors of the present paper, as well as some results obtained by other authors in this direction. The periodic products were introduced by S. I. Adian in 1976 to solve the Maltsev's well-known problem. It was shown that the periodic products are exact, associative and hereditary for subgroups. They also possess some other important properties such as the Hopf property, the C^*-simplicity, the uniform non-amenability, the SQ-universality, etc. It was proved that the n-periodic products of groups can uniquely be characterized by means of certain quite specific and simply formulated properties. These properties allow to extend to n-periodic products of various families of groups a number of results previously obtained for free periodic groups $B(m,n)$. In particular, we describe the finite subgroups of n-periodic products, Also, we analyze and extend the simplicity criterion of n-periodic products obtained previously by S. I. Adian.

Список литературы

[1] С. И. Адян, "Периодические произведения групп", Тр. МИАН СССР, **142**, 3 – 21 (1976).

[2] С. И. Адян, "Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева", Матем. заметки, **88:0**, 803 – 810 (2010).

[3] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и Тождества в Группах, Наука, М. (1975).

[4] С. И. Адян, "Новые оценки нечетных периодов бесконечных бернсайдовых групп", Тр. МИАН, **289**, МАИК, М., 41 – 82 (2015).

[5] С. И. Адян, "О простоте периодических произведений групп", Докл. АН СССР, **241:4**, 745 – 748 (1978).

[6] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "О хопфовости n-периодических произведений групп", Математические заметки, **95**, но. 4, 483 – 491 (2014).

[7] С. И. Адян, "Случайные блуждания на свободных периодических группах", Изв. АН СССР. Сер. матем., **46**, но. 6, 1139 – 1149 (1982).

[8] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "Характеристические свойства и равномерная неаменабельность n-периодических произведений групп", Изв. РАН. Сер. матем., **79**, но. 6, 3 – 18 (2015).

[9] С. И. Адян, В. С. Атабекян, О свободных группах бесконечно базируемых многообразий С.И.Адяна. Изв. РАН. Сер. матем., **81**, но. 5 (2017).

[10] В. С. Атабекян, "Равномерная неаменабельность подгрупп свободных бернсайдовых групп нечетного периода", Матем. заметки, **85**, no. 4, 516 – 523 (2009).

[11] В. С. Атабекян, "О мономорфизмах свободных бернсайдовых групп", Матем. заметки, **86**, no. 4, 483 – 490 (2009).

[12] В. С. Атабекян, О нормальных подгруппах в периодических произведениях С. И. Адяна, Тр. МИАН, **274**, 15 – 31 (2011).

[13] S. V. Ivanov, "On subgroups of free Burnside groups of large odd exponent", Illinois J. Math., **47**, no. 1-2, 299 – 304 (2003).

[14] A. Yu. Olshanskii, The Geometry of Defning Relations in Groups,. Kluwer Academic Publishers (1991).

[15] P. de la Harpe, "On simplicity of reduced C^*-algebras of groups", Bull. Lond. Math. Soc., **39**, no. 1, 1 – 26 (2007).

[16] E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy, N. Ozawa, "C^*-simplicity and the unique trace property for discrete groups", ArXiv:1410.2518, 1 – 20 (2014).

[17] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "$C*$-простота n-периодических произведений", Матем. заметки, **99**, no. 5, 643 – 648 (2016).

[18] A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, "C^*-simple groups without free subgroups", Groups Geom. Dyn., **8**, no. 3, 933 – 983 (2014).

[19] В. С. Атабекян, А. Л. Геворгян, Ш. А. Степанян, "Свойство единственного следа n-периодических произведений групп", Известия НАН Армении. Математика, **52**, no. 5, (2017).

[20] М. В. Нешадим, "Свободное произведение групп не имеет внешних нормальных автоморфизмов", Алгебра и логика, **35**, no. 5, 562 – 566 (1996).

[21] В. С. Атабекян, "Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп", Изв. РАН. Сер. матем., **75**, no. 2, 3 – 18 (2011).

[22] V. S. Atabekyan, "Non-ϕ-admissible normal subgroups of free Burnside groups", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **45**, no. 2, 112 – 122 (2010).

[23] E. A. Cherepanov, "Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents", Internat. J. Algebra Comput, **16**, no. 5, 839 – 847 (2006).

[24] V. S. Atabekyan, A. L. Gevorgyan, "On outer normal automorphisms of periodic products of groups", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **46**, no. 6, 289 –292 (2011).

[25] A. L. Gevorgyan, "On automorphisms of periodic products of groups", Proceedings of the YSU, Physics and Mathematics, no. 2, 3 – 9 (2012).

[26] A. L. Gevorgyan, Sh. A. Stepanyan, "On automorphisms of some periodic products of groups", Proceedings of the YSU, Physics and Mathematics, no. 2, 7 – 10 (2015).

[27] V. S. Atabekyan, "Splitting automorphisms of free Burnside groups", Sb. Math., **204**, no. 2, 182 – 189 (2013).

[28] V. S. Atabekyan, "Splitting automorphisms of order p^k of free Burnside groups are inner", Math. Notes, **95**, no. 5, 586 – 589 (2014).

Поступила 15 сентября 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 3, 2017, стр. 16-29.

THE RADIUS OF CONVEXITY OF PARTICULAR FUNCTIONS AND APPLICATIONS TO THE STUDY OF A SECOND ORDER DIFFERENTIAL INEQUALITY

O. ENGEL, Á. O. PÁLL-SZABÓ

Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania
E-mails: *engel_olga@hotmail.com; kicsim21@yahoo.com*

Abstract. In this paper we determine the radius of convexity of particular functions. The obtained results are used to deduce sharp estimates regarding functions which satisfy a second order differential subordination. A lemma regarding starlikeness that involves the notion of convolution is established, and is used in order to obtain a sharp starlikeness condition.

MSC2010 numbers: 30C45

Keywords: Radius of convexity; convolution; starlikeness.

1. Introduction

Let r be a real number with $r > 0$, and let $U(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ be the disk centered at zero and of radius r and $U = U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Let f be a function defined by $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

We say that f is convex on $U(r)$ if $f : U(r) \to \mathbb{C}$ is univalent and $f(U(r))$ is a convex domain in $\mathbb{C}$. It is well-known that f is convex if and only if

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \quad \text{for all } z \in U(r).$$

Let r_f be the radius of convergence of the function f. We define the radius of convexity of the function f by the equality

$$r_f^c = \sup\left\{r \in (0, r_f) \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \quad \text{for all } z \in U(r)\right\}. \tag{1.1}$$

In this paper we first determine the radius of convexity of particular functions and use these results to determine sharp bounds regarding functions which satisfy a differential inequality. In the second part of the paper we deduce a sharp starlikeness condition. Results related to these questions can be found in [1]-[4] and [11]. The following problem was proposed in [7] (see p. 243): if $f(0) = a$ with $\mathrm{Re}\, a > 0$, and

$$\mathrm{Re}\left(a + 4zf'(z) + 2z^2 f''(z)\right) > 0, \ z \in U, \tag{1.2}$$

then $\operatorname{Re} f(z) > 0$, $z \in U$.

This implication is very simple to prove using the theory of differential subordinations presented in [6] and [7]. In this paper we determine the best upper and lower bounds for $\operatorname{Re} f(z)$ provided that $a = 1$ and the condition (1.2) holds. The basic tool, used in the proofs, is the convexity of particular functions.

Notice that differential inequalities of type (1.2) were studied in [9] and [10], where the theory of extreme points, developed in [5], was used.

2. Preliminaries

In this section we give a number of lemmas, which will be used in the proofs of the main results. Let $\mathcal{H}(U)$ be the class of holomorphic functions in U. We define the classes of functions A_0 and $\mathcal{P}$ by the following equalities:

$$A_0 = \{f \in \mathcal{H}(U) |\, f(0) = 1\} \quad \text{and} \quad \mathcal{P} = \{f \in A_0 |\ \operatorname{Re} f(z) > 0,\ z \in U\}.$$

Lemma 2.1 (Herglotz, see [5], p. 27). *A function f belongs to the class $\mathcal{P}$ if and only if there is a probability measure μ on $[0, 2\pi]$ such that*

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t).$$

Lemma 2.2. *If $\theta \in [-\pi, \pi]$, then*

$$2(1 - \cos\theta)\left(\int_0^1 t\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\cos\theta}}dt\right)^2 \leq \int_0^1 t\frac{(1 + t)(1 - \cos\theta)}{1 + t^2 - 2t\cos\theta}dt.$$

Proof. We have to prove that

$$2\left(\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\cos\theta}}dt\right)^2 \leq \int_0^1 \frac{t + t^2}{1 + t^2 - 2t\cos\theta}dt. \tag{2.1}$$

From Cauchy-Schwarz inequality we get

$$2\left(\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\cos\theta}}dt\right)^2 \leq 2\int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2 - 2t\cos\theta}dt. \tag{2.2}$$

On the other hand, it is easy to see that

$$\int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2 - 2t\cos\theta}dt \leq \int_0^1 \frac{t + t^2}{1 + t^2 - 2t\cos\theta}dt. \tag{2.3}$$

The inequalities (2.2) and (2.3) imply (2.1). □

Let f and g be two analytic functions in U defined by the power series $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ and $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, respectively. The Hadamard product of these functions is defined by

$$(f * g)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

For $V \subset A_0$ the dual set of V is defined by

$$V^d = \{g \in A_0 | (f * g)(z) \neq 0 \quad \text{for all} \quad f \in V \text{ and all } \quad z \in U\}.$$

Lemma 2.3. *Let α be a real number with $\alpha \in [0, 1)$, and let the function h_T be defined by the power series $h_T(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \alpha + iT}{1 - \alpha + iT} z^n$. Then the function $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ is starlike of order α in U if and only if*

$$\frac{f(z)}{z} * \frac{h_T(z)}{z} \neq 0, \quad \textit{where } z \in U \textit{ and } \quad T \in \mathbb{R}.$$

Proof. Since $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}\Big|_{z=0} = 1 > \alpha > 0$, it follows that the condition

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \ z \in U$$

is equivalent to $\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha \neq -iT$, $z \in U$, $T \in \mathbb{R}$. This can be rewritten as

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n z^{n-1} - (\alpha - iT)(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}) \neq 0, \text{ for } \quad z \in U \text{ and } \quad T \in \mathbb{R}.$$

and hence we get

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{n - \alpha + iT}{1 - \alpha + iT} z^{n-1} \neq 0, \quad z \in U, \quad T \in \mathbb{R}.$$

The last relation is equivalent to

$$\frac{f(z)}{z} * \frac{h_T(z)}{z} \neq 0 \text{ for all } z \in U \text{ and for all } \quad T \in \mathbb{R},$$

and the result follows. $\square$

Lemma 2.4. *For the dual set of the class $\mathcal{P} = \{f \in A_0 | \ \operatorname{Re} f(z) > 0, \ z \in U\}$ we have*

$$\{f \in A_0 | \ \operatorname{Re} f(z) > \frac{1}{2}, \ z \in U\} \subset \mathcal{P}^d.$$

Proof. The inequality $\operatorname{Re} f(z) > \frac{1}{2}$, $z \in U$, is equivalent to $2f - 1 \in \mathcal{P}$. Hence, if $g \in \mathcal{P}$ and $2f - 1 \in \mathcal{P}$, then by Herglotz formula, we get $2f(z) - 1 = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\mu(t)$

and $g(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\nu(t)$. Observing that the first equality is equivalent to $f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-e^{-it}z} d\mu(t)$, we can write

$$f(z) * g(z) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-nit} d\nu(t)\right) * \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-nis} d\mu(s)\right)$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni(s+t)} d\mu(s) d\nu(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-i(t+s)}z}{1-e^{-i(t+s)}z} d\mu(s) d\nu(t).$$

Therefore $\mathrm{Re}\left(f(z) * g(z)\right) > 0$, $z \in U$, which means $f(z) * g(z) \neq 0$, $(\forall) z \in U$, $(\forall) g \in \mathcal{P}$, and hence $f \in \mathcal{P}^d$. $\square$

Lemma 2.5 (see [6], p. 64 and [7], p. 236). *Let $\mathcal{K}$ be the class of functions of the form $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ satisfying the condition*

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \quad \textit{for all } z \in U.$$

If $\mathbf{L}$ denotes the operator of Libera defined by $\mathbf{L}(f)(z) = \frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt$, then

$$\mathbf{L}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}.$$

Lemma 2.6. *The following equalities hold:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n(n+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y(\cos\theta - xy)}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta} dxdy + i\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y\sin\theta}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta} dxdy$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{(n+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy(\cos\theta - xy)}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta} dxdy + i\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy\sin\theta}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta} dxdy.$$

Proof. Using the equality $\int_0^1 (1-x)x^{n-1}dx = \frac{1}{n(1+n)}$, we can write

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta} \int_0^1 \int_0^1 (1-x)x^{n-1}y^n dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (1-x)ye^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(n-1)\theta}x^{n-1}y^{n-1} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (1-x)y \frac{e^{i\theta}}{1-xye^{i\theta}} dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y(\cos\theta - xy)}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta} dxdy + i\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y\sin\theta}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta} dxdy.$$

The proof of the second equality is similar, and so is omitted. $\square$

Lemma 2.7. *If $\alpha = \frac{2-\ln 4}{3-\ln 6-\frac{\pi^2}{12}}$, then the following inequalities hold:*

$$(1-\alpha) \int_0^1 \int_0^1 (1-x)y \frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)} dxdy$$

$$\geq \frac{1}{6} \int_0^1 \int_0^1 xy \frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)} dxdy, \quad \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi],$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{xy\sin\theta}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}dxdy$$
$$\le \int_0^1\int_0^1 \frac{xy\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{(1+xy)\sqrt{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}}dxdy,\ \ \theta\in[0,\pi]$$

Proof. The first inequality is equivalent to

$$\frac{6(1-\alpha)}{7-6\alpha}\int_0^1\int_0^1 y\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy$$
$$\ge \int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy. \tag{2.4}$$

To prove the last inequality we consider the following functions

$$u,v:[0,1]\to\mathbb{R},\ u(x)=x,\ v(x)=\int_0^1 y\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dy.$$

Since u is increasing and v is decreasing, according to Chebyshev inequality we have

$$\int_0^1 u(x)dx\int_0^1 v(x)dx\ge\int_0^1 u(x)v(x)dx.$$

This inequality is equivalent to the following:

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 y\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy$$
$$\ge\int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy.$$

Since $\dfrac{6(1-\alpha)}{7-6\alpha}=0.573\ldots>\dfrac{1}{2}$ the desired inequality (2.4) follows.

The second inequality follows because the inequality $\frac{xy\sin\theta}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}$ $\le\frac{xy\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{(1+xy)\sqrt{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}}$, $x,y\in[0,1]$, $\theta\in[0,\pi]$ is equivalent to $0\le(1-xy)^2(1+\cos\theta)$, $x,y\in[0,1]$, $\theta\in[0,\pi]$. □

Lemma 2.8. *The following inequality holds:*

$$\int_0^1\int_0^1\frac{2xy}{1-x^2y^2}dxdy\int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)(1+xy)}dxdy$$
$$\le 4(1-\alpha)\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\Big)\Big[(1-\alpha)\cdot\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\Big)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{(n+1)^2}\Big],\qquad\theta\in[0,\pi]. \tag{2.5}$$

Proof. We distinguish two cases. First suppose $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, and consider the function $u : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ defined by $u(\theta) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}$. An application of Lemma 2.6 yields

$$u'(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{(n+1)^2} = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy\sin\theta}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy.$$

Thus, it follows that

$$u(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2} \geq u(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2}$$

and consequently we have

$$\frac{6}{7}\int_0^1 \int_0^1 \frac{2xy}{1 - x^2y^2} dxdy = \frac{\pi^2}{14} = 0.704\ldots < 0.710\ldots = 4\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) = 4(1-\alpha)$$

$$(2.6)\quad \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2}\right) \leq 4(1-\alpha)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Again applying Lemma 2.6 we obtain

$$v(\theta) = (1-\alpha)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{(n+1)^2} = (1-\alpha) \times$$

$$(2.7)\quad \times\left(1 + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y(\cos\theta - xy)}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy\right) + \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy(\cos\theta - xy)}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy.$$

Taking into account that $v(\pi) = 0$, from (2.7) we get the following integral representation of $1 - \alpha$:

$$(2.8)\qquad 1 - \alpha = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{1+xy} dxdy}{1 - \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y}{1+xy} dxdy}.$$

Using (2.7) and (2.8), we can write

$$(1-\alpha)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{(n+1)^2} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{1+xy} dxdy}{1 - \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y}{1+xy} dxdy} \times$$

$$\left(1 + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y(\cos\theta - xy)}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy\right) + \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy(\cos\theta - xy)}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy$$

$$= \left[\frac{\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{1+xy} dxdy}{1 - \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y}{1+xy} dxdy}\left(1 + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y(\cos\theta - xy)}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy\right)\right.$$

$$-\int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{1+xy}dxdy\Big] + \Big[\int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{1+xy}dxdy + \int_0^1\int_0^1 \frac{xy(\cos\theta - xy)}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}dxdy\Big]$$

$$= \frac{\int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{1+xy}dxdy}{1-\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)y}{1+xy}dxdy}\int_0^1\int_0^1 (1-x)y\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy$$

$$+\int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy,$$

$$= (1-\alpha)\int_0^1\int_0^1 (1-x)y\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy$$

$$+\int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy. \tag{2.9}$$

Hence, using Lemma 2.7 we obtain the inequality

$$\frac{7}{6}\int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy$$

$$\le (1-\alpha)\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{(n+1)^2}, \quad \theta \in [\frac{\pi}{2},\pi]. \tag{2.10}$$

It is easy to see that (2.6) and (2.10) imply (2.5) provided that $\theta \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Now assume that $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Taking into account that the mapping u is strictly decreasing, we can write

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{2xy}{1-x^2y^2}dxdy = \frac{\pi^2}{12} = 0.822\ldots < 0.847\ldots = 4(1-\alpha)\frac{17}{18} < 4(1-\alpha)$$

$$\cdot\Big(1-\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{4\cdot 5^2}-\ldots\Big) = 4(1-\alpha)u(\frac{\pi}{2}) \le 4(1-\alpha)\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\Big)$$

$$= u(\theta), \quad \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]. \tag{2.11}$$

If $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$, then (2.9) implies

$$\int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)}dxdy$$

$$\le (1-\alpha)\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{(n+1)^2}, \quad \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]. \tag{2.12}$$

Combining (2.11) and (2.12) we obtain (2.5) for $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Thus, the inequality (2.5) holds for every $\theta \in [0,\pi]$. □

3. The main results

In this section we state and prove the main results of the paper.

Theorem 3.1. *The functions ψ and φ, defined by the power series*

$$\psi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}, \quad \varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)^2}$$

are convex in the unit disk U, and the radii of convexity of ψ and φ are $r_\psi^c = r_\varphi^c = 1$.

Proof. We first prove the convexity of function ψ. It is well known that the function ψ is convex in U if and only if

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{z\psi''(z)}{\psi'(z)}\right) > 0, \quad z \in U. \tag{3.1}$$

It is easy to see that

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{z\psi''(z)}{\psi'(z)}\right) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{(1-z)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n+1}} - 1 = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\displaystyle\int_0^1 t\frac{1-z}{1-zt}\,dt} - 1.$$

Thus, we have to prove the following inequality:

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{\int_0^1 t\frac{1-z}{1-zt}\,dt} > 1, \quad z \in U. \tag{3.2}$$

According to the minimum principle for harmonic functions it is enough to prove the inequality $\mathrm{Re}\,\frac{1}{\int_0^1 t\frac{1-z}{1-zt}dt} \geq 1$ in the case $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. We have

$$\int_0^1 t\frac{1-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}\,dt = \int_0^1 t\frac{(1+t)(1-\cos\theta)}{1+t^2-2t\cos\theta}\,dt + i\int_0^1 t\frac{(1-t)\sin\theta}{1+t^2-2t\cos\theta}\,dt.$$

Hence, the inequality (3.2) is equivalent to the following:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 t\frac{(1+t)(1-\cos\theta)}{1+t^2-2t\cos\theta}\,dt\right)^2 &+ \left(\int_0^1 t\frac{(1-t)\sin\theta}{1+t^2-2t\cos\theta}\,dt\right)^2\\ &\leq \int_0^1 t\frac{(1+t)(1-\cos\theta)}{1+t^2-2t\cos\theta}\,dt, \quad \theta \in [-\pi,\pi].\end{aligned} \tag{3.3}$$

Let the curve Γ be defined parametrically by $x = x(v)$, $y = y(v)$, $v \in [0,1]$, where $x(v) = \int_0^v t\frac{(1+t)(1-\cos\theta)}{1+t^2-2t\cos\theta}dt$ and $y(v) = \int_0^v t\frac{(1-t)\sin\theta}{1+t^2-2t\cos\theta}dt$. The zero-point of Γ is $O(0,0)$ and the terminus is $A(x(1), y(1))$.

For $\theta \in [-\pi, \pi]$ we can write

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1 t\frac{(1+t)(1-\cos\theta)}{1+t^2-2t\cos\theta}\,dt\right)^2 + \left(\int_0^1 t\frac{(1-t)\sin\theta}{1+t^2-2t\cos\theta}\,dt\right)^2 = \left[d(O,A)\right]^2\\ &\leq \left[l(\Gamma)\right]^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{(x'(v))^2 + (y'(v))^2}\,dv\right)^2 = 4\left(\int_0^1 v\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+v^2-2v\cos\theta}}\,dv\right)^2\\ &= 2(1-\cos\theta)\left(\int_0^1 t\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\theta}}\,dt\right)^2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

On the other hand, according to Lemma 2.2. we have

$$(3.5)\quad 2(1-\cos\theta)\left(\int_0^1 t\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\theta}}dt\right)^2 \le \int_0^1 t\frac{(1+t)(1-\cos\theta)}{1+t^2-2t\cos\theta}dt.$$

Finally, combining (3.4) and (3.5) we get (3.3). Thus, we have proved that ψ is a convex function on U. Next, since the radius of convergence of the power series $\psi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ is equal to one, it follows that $r_\psi^c=1$.

To prove the assertion of the theorem for function φ we recall the Libera operator $\mathbf{L}$, defined in Lemma 2.5, and observe that since $4(\varphi(z)-1)=\mathbf{L}(2(\psi-1))(z)$, then by Lemma 2.5 we have $4(\varphi-1)\in\mathcal{K}$, and hence the convexity of φ with radius of convergence $r_\varphi^c=1$ follows. □

Corollary 3.1. *If $f(0)=1$ and if*

$$(3.6)\qquad \mathrm{Re}\left(1+4zf'(z)+2z^2f''(z)\right)>0,\quad \textit{for all } z\in U,$$

then

$$(3.7)\qquad 2-\frac{1+r}{r}\ln(1+r)<\mathrm{Re}\left(f(z)\right)<2+\frac{1-r}{r}\ln(1-r),\quad z\in U(r)$$

for every $r\in(0,1)$ and $2-\ln 4<\mathrm{Re}\left(f(z)\right)<2$ for all $z\in U$. The bounds are the best possible.

Proof. Let $f(z)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ be the development in power series of a function f. A simple calculation leads to

$$1+4zf'(z)+2z^2f''(z)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_nz^n.$$

According to Herglotz formula there is a probability measure μ such that

$$1+4zf'(z)+2z^2f''(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}}{1-e^{-it}}d\mu(t).$$

Thus, it follows that

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_nz^n=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}}{1-e^{-it}}d\mu(t)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n\int_0^{2\pi}e^{-int}d\mu(t)$$

and we obtain $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-int}d\mu(t)$. Finally we get

$$(3.8)\quad f(z)=\int_0^{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}z^ne^{-int}\right)d\mu(t)=\int_0^{2\pi}\psi(ze^{-it})d\mu(t).$$

The last equality implies that

$$f(z)\in conv\left[\psi(U)\right]=\psi(U)\ \text{ for all } z\in U.$$

where $conv[\psi(U)]$ denotes the convex hull of the set $\psi(U)$ and so we have $f(U) \subset \psi(U)$. Now the inclusion $f(U) \subset \psi(U)$ and the univalence of ψ imply the subordination $f \prec \psi$ and consequently we have $f(U(r)) \subset \psi(U(r))$ for all $r \in (0,1)$. From this inclusion we deduce

$$\inf_{z\in U(r)} \operatorname{Re}\psi(z) \le \operatorname{Re} f(z) \le \sup_{z\in U(r)} \operatorname{Re}\psi(z), \quad z \in U(r).$$

Next, since $\psi(U)$ is a convex domain in $\mathbb{C}$, which is symmetric with respect to real axis, $f(z)$ is real if and only if z is real, and $f(x)$ is strictly increasing on $[-1,1]$, it follows that

$$\inf_{z\in U(r)} \operatorname{Re}\psi(z) = \psi(-r) = 2 - \frac{1+r}{r}\ln(1+r)$$

and

$$\sup_{z\in U(r)} \operatorname{Re}\psi(z) = \psi(r) = 2 + \frac{1-r}{r}\ln(1-r).$$

Thus, the inequalities in (3.7) are proved. The second assertion of the corollary follows from (3.7) by passing to the limit as $r \nearrow 1$. □

Other results regarding the radii of starlikeness and convexity of particular functions can be found in [1]-[4] and [11].

Remark 3.1. *The restriction $a = 1$ does not detract the generality. Indeed, if $a = \alpha + i\beta$ with $\alpha > 0$, then the condition (1.2) is equivalent to the following*

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{4}{\alpha}zf'(z) + \frac{2}{\alpha}z^2f''(z)\right) > 0, \ z \in U,$$

and arguments similar to those used in the proof of Corollary 3.1 lead to

$$f(z) = \int_0^{2\pi}\left(a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{n(n+1)}z^ne^{-int}\right)d\mu(t).$$

Thus we have

$$\operatorname{Re} f(z) = \alpha\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}z^ne^{-int}\right)d\mu(t),$$

and

$$\alpha\left[2 - \frac{1+r}{r}\ln(1+r)\right] < \operatorname{Re}(f(z)) < \alpha\left[2 + \frac{1-r}{r}\ln(1-r)\right], \quad z \in U(r).$$

Corollary 3.2. *If $f(0) = 1$ and if (3.6) holds*

$$|f(z)| < 2 + \frac{1-r}{r}\ln(1-r), \quad z \in U(r) \tag{3.9}$$

for every $r \in (0,1)$ and $|f(z)| < 2$, $z \in U$. The bounds are the best possible.

Proof. Let r be a fixed real number with $r \in (0,1)$. The inclusion $f(U(r)) \subset \psi(U(r))$ implies

$$|f(z)| \le \sup_{z \in U(r)} |\psi(z)| = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n(n+1)} = 2 + \frac{1-r}{r} \ln(1-r),$$

and hence (3.9) follows. The inequality $|f(z)| < 2$ follows from (3.9) by passing to the limit as $r \nearrow 1$. □

Theorem 3.2. *If $f(0) = 1$ and (3.6) then the function $F(z) := \int_0^z f(t)dt$ is starlike of order $\alpha = \frac{2-\ln 4}{3-\ln 4-\frac{\pi^2}{12}} = 0.7756\ldots$, that is, the following inequality holds:*

$$\text{(3.10)} \qquad \operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} > \frac{2-\ln 4}{3-\ln 4-\frac{\pi^2}{12}}, \quad z \in U.$$

The result is sharp.

Proof. Observe first that from condition (3.6) we get the equality (3.8) and this implies

$$F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)^2} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t).$$

According to Lemma 2.3, the function F is starlike of order α if and only if

$$\text{(3.11)} \qquad \frac{F(z)}{z} * \frac{h_T(z)}{z} \neq 0 \text{ for all } z \in U \text{ and } T \in \mathbb{R}.$$

We have

$$\begin{aligned} &\frac{F(z)}{z} * \frac{h_T(z)}{z} \\ &= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)^2} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t)\right) * \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-\alpha+iT}{1-\alpha+iT} z^n\right) \\ &= \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t)\right) * \left(1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-\alpha+iT}{n(n+1)^2(1-\alpha+iT)} z^n\right). \end{aligned}$$

Since $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) \in \mathcal{P}$, according to Lemma 2.4 the condition

$$\text{(3.12)} \qquad \operatorname{Re}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-\alpha+iT}{n(n+1)^2(1-\alpha+iT)} z^n\right) > \frac{1}{2}, \quad z \in U, \ T \in \mathbb{R},$$

implies (3.11). From the minimum principle for harmonic functions we infer that (3.12) is equivalent to

$$\text{(3.13)} \qquad \operatorname{Re}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-\alpha+iT}{n(n+1)^2(1-\alpha+iT)} e^{in\theta}\right) \ge 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \ T \in \mathbb{R}.$$

The condition (3.13) can be rewritten in the following equivalent form

$$T^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\right)+T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{(n+1)^2}+(1-\alpha)^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\right)$$

$$+(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{(n+1)^2}\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi],\quad T\in\mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Now observe that the inequality (3.14) holds for every $T\in\mathbb{R}$ if and only if

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}>0,\quad \theta\in[0,2\pi], \tag{3.15}$$

and

$$\Delta(\theta)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{(n+1)^2}\right)^2-4(1-\alpha)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\right)$$

$$\left[(1-\alpha)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{(n+1)^2}\right]\leq 0,\qquad \theta\in[0,2\pi]. \tag{3.16}$$

The convexity of φ, which has been proved in Theorem 1, implies

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\geq 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)^2}>0,\quad \theta\in[0,2\pi], \tag{3.17}$$

and so, the inequality (3.15) holds.

Thus, to compete the proof we have to prove (3.16). To this end, observe first that since $\Delta(2\pi-\theta)=\Delta(\theta)$, $\theta\in[0,\pi]$, it is enough to prove (3.16) for $\theta\in[0,\pi]$.

By Lemma 2.8 we have

$$\int_0^1\int_0^1\frac{2xy}{1-x^2y^2}dxdy\int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)(1+xy)}dxdy$$

$$\leq 4(1-\alpha)\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\Big)\Big[(1-\alpha)\cdot\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\Big)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{(n+1)^2}\Big],\qquad \theta\in[0,\pi]. \tag{3.18}$$

Hence, we have to show that

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{(n+1)^2}\Big)^2\leq\int_0^1\int_0^1\frac{2xy}{1-x^2y^2}dxdy$$

$$\int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)(1+xy)}dxdy,\ \theta\in[0,\pi]. \tag{3.19}$$

Lemma 2.6 implies

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{(n+1)^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{xy\sin\theta}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}dxdy.$$

and hence the inequality (3.19) can be rewritten in the following equivalent form:

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{xy\sin\theta}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}dxdy\right)^2 \le \int_0^1\int_0^1 \frac{2xy}{1-x^2y^2}dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)(1+xy)}dxdy,\ \theta\in[0,\pi]. \tag{3.20}$$

Notice that the inequality (3.20) holds because by Cauchy-Schwarz inequality we have

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{xy\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{(1+xy)\sqrt{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}}dxdy\right)^2 \le \int_0^1\int_0^1 \frac{2xy}{1-x^2y^2}dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy\frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+x^2y^2-2xy\cos\theta)(1+xy)}dxdy,\ \theta\in[0,\pi]. \tag{3.21}$$

Next, according to Lemma 2.7, we have

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{xy\sin\theta}{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}dxdy$$

$$\le \int_0^1\int_0^1 \frac{xy\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{(1+xy)\sqrt{1+x^2y^2-2xy\cos\theta}}dxdy,\ \theta\in[0,\pi]. \tag{3.22}$$

Finally, combining (3.21) and (3.22) we obtain (3.20). □

Remark 3.2. *As far as we know the result presented in Lemma 2.3 is a new form of starlikeness condition which involves convolution. The idea of use integral representations of Fourier series in order to deduce sharp inequalities, which lead to sharp starlikeness results, has been used many times. Regarding these questions we mention the papers* [12]-[17]. *Geometric properties of particular functions were studied in* [18]. *Also, we mention that* [8] *is a basic work in applications of convolutions in geometric function theory.*

Список литературы

[1] Á. Baricz, D. K. Dimitrov, I. Mező, "Radii of starlikeness and convexity of some q-Bessel functions", arXiv preprint arXiv:1409.0293, (2014) - arxiv.org.

[2] Á. Baricz, N. YaДşmur, "Radii of convexity of some Lommel and Struve functions", arXiv preprint arXiv:1410.5217, (2014) - arxiv.org.

[3] Á. Baricz, R. Szász, "Close-to-convexity of some special functions and their derivatives", arXiv preprint arXiv:1402.0692, (2014) - arxiv.org.

[4] Á. Baricz, R. Szász, "The radius of convexity of normalized Bessel functions of the first kind", Anal. Appl., **12**, Issue 05, September (2014).

[5] D. I. Hallenbeck, T. H. Mac Gregor, "Linear problems and convexity techniques in geometric function theory", Monograph and Studies in Mathematics, **22**, Pitman, Boston (1984).

[6] S. S. Miller, P. T. Mocanu, Differential Subordinations Theory and Applications, Marcel Dekker, New York, Basel (2000).

[7] P. T. Mocanu, T. Bulboacă, G. Şt. Sălăgean, Teoria Geometrică a Funcţiilor Univalente, Ed. a II-a, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 460+9 pag. ISBN 973-686-959-8 (romanian only) (2006).

[8] St. Ruscheweyh, Convolutions in Geometric Function Theory, Presses de l'Université de Montréal, Montréal (1982).
[9] R. Szász, Inequalities in the complex plane, J. of Inequal. Pure Appl. Math., **8**, Issue 1, Article 27 (2007).
[10] R. Szász, "About a differential inequality", Acta Univ. Sapientiae Math., **1**, no. 1, 87 – 93 (2009).
[11] R. Szász, "Geometric properties of the functions Γ and 1/Γ", Math. Nachr., **288**, Iss. 1, 115 – 120 (2015).
[12] R. Szász, "A sharp criterion for the univalence of the Libera operator", Creat. Math. Inform., **17**, no. 1, 65 – 71 (2008).
[13] R. Szász, "Starlike image of a class of analytic functions", Gen. Math., **16**, no. 2, 59 – 67 (2008).
[14] R. Szász, "A sharp criterion for starlikeness", Mathematica (Cluj), **48** (71), no. 1, 89 – 98 (2006).
[15] R. Szász, "The sharp version of a criterion for starlikeness related to the operator of Alexander", Ann. Polon. Math. 94, no. 1, 1 – 14 (2008).
[16] R. Szász, L. R. Albert, "About a condition for starlikeness", J. Math. Anal. Appl., **335**, Iss. 2, 1328 – 1334 (2007).
[17] R. Szász, "Rezultate din teoria geometrică a funcţiilor", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (2010) (romanian only).
[18] R. Szász, "About the starlikeness of Bessel functions", Integral Transforms Spec. Funct., **25**, Iss. 9, 750 – 755 (2014).

Поступила 21 июня 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 3, 2017, стр. 30-45.

О РЯДАХ ХААРА A-ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. НАВАСАРДЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *ggg@ysu.am*, *knavasard@ysu.am*

Аннотация. В работе найдено условие на последовательность натуральных чисел $\{q_n\}$, которое является необходимым и достаточным условием для того, чтобы из сходимости п.в. кубических частичных сумм $S_{q_n}(\mathbf{x})$ кратного ряда Хаара $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ и условия $\liminf\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot mes\{\mathbf{x} : \sup\limits_n |S_{q_n}(\mathbf{x})| > \lambda\} = 0$, коэффициенты a_n однозначно определялись через сумму ряда. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ являлся бы рядом Фурье A-интегрируемой функции.

MSC2010 number: 42C10, 42C20.

Ключевые слова: Система Хаара; сходимость почти всюду; A-интегрирование.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются кратные и простые ряды Хаара, распределение мажоранты некоторых частичных сумм которых удовлетворяет условию, ранее возникающему в некоторых теоремах единственности п.в. сходящихся рядов Хаара.

Напомним, что система Хаара на $[0;1]$ определяется следующим образом (см. например [1]): $\chi_1(x) = 1$, а для $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\chi_n(x) = \chi_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \text{если} \quad \frac{i-1}{2^k} < x < \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{\frac{k}{2}}, & \text{если} \quad \frac{2i-1}{2^{k+1}} < x < \frac{i}{2^k}, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]. \end{cases}$$

Значения функций Хаара в точках разрыва для наших целей не существенны и мы их не приводим. Как обычно, положим $\Delta_n = \operatorname{supp}(\chi_n)$. Ясно, что если $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $\Delta_n = \left[\frac{i-1}{2^k}; \frac{i}{2^k}\right]$.

---

[1]Настоящее исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41

Для $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ ($\mathbb{N}$-множество натуральных чисел) и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in [0;1]^d$ обозначим $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\cdots\chi_{n_d}(x_d)$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\cdots\chi_{n_d}(x_d).$$

Для натурального числа N через $S_N(\mathbf{x})$ обозначим кубические частичные суммы, т. е. $S_N(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}:\ n_i \le N} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$.

Для функции $\varphi(x)$ и положительного числа λ через $[\varphi(x)]_\lambda$ будем обозначать следующую функцию

$$[\varphi(x)]_\lambda = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } |\varphi(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{если } |\varphi(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В работе [2] Геворкяном была доказана следующая

Теорема 1.1. *([2]). Пусть кубические частичные суммы $S_k(\mathbf{x})$ кратного ряда $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ почти всюду (п.в.) сходятся к $f(\mathbf{x})$ и для некоторой последовательности $\lambda_m \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{m\to+\infty} \lambda_m \cdot mes\left\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_k |S_k(\mathbf{x})| > \lambda_m\right\} = 0.$$

тогда для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})]_{\lambda_m^{\mathbf{n}}}\, d\mathbf{x},$$

где $\lambda_m^{\mathbf{n}} = \lambda_m \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty$.

Аналогичные вопросы для одномерного ряда по системе Хаара и по системе Прайса (обобщенной системе Хаара) были рассмотрены в работах Костина [3], [4], а для рядов по системе Франклина, в работах Геворкяна [5] и [6]. Впервые теоремы единственности для п.в. сходящихся рядов были рассмотрены в работах [7], [8]. В настоящей работе доказана следующая

Теорема 1.2. *Пусть $\{q_j\}$- некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})$ и для некоторой последовательности $\{\lambda_m\}$, $\lambda_m \to \infty$*

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \cdot mes\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda_m\} = 0. \tag{1.1}$$

Тогда для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ выполняются

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Напомним,что функция $f(x)$ называется A-интегрируемой на множестве G, если $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot mes\{x\in G: \quad |f(x)|>\lambda\}=0$ и существует предел

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_G [f(x)]_\lambda dx =: (A)\int_G f(x)dx.$$

Скажем, что ряд $\sum a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ является рядом Фурье A-интегрируемой функции, если существует такая A-интегрируемая функция f, определенная на $[0;1]^d$, что коэффициенты $a_{\mathbf{n}}$ определяются следующим образом:

$$a_{\mathbf{n}}=(A)\int_{[0;1]} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Из теоремы 1.2 немедленно следуют теоремы 1.3 и 1.4.

Теорема 1.3. *Пусть $\{q_j\}$ некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой п.в. конечной функции $f(\mathbf{x})$ и*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\cdot mes\left\{\mathbf{x}\in[0;1]^d: \quad \sup_j|S_{q_j}(\mathbf{x})|>\lambda\right\}=0,$$

то все функции $f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$, A-интегрируемы и

$$a_{\mathbf{n}}=(A)\int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d.$$

Теорема 1.4. *Пусть $\{q_j\}$ некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})\in L^1[0;1]^d$ и для некоторой последовательности $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k\nearrow\infty$*

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k\cdot mes\left\{\mathbf{x}\in[0;1]^d: \quad \sup_j|S_{q_j}(\mathbf{x})|>\lambda_k\right\}=0.$$

Тогда

$$a_{\mathbf{n}}=\int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d.$$

Оказывается в теоремах 1.2–1.4 ограниченность отношения $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ существенно. Действительно, верно следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть $\{q_n\}$ — некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что $\sup\dfrac{q_{n+1}}{q_n}=+\infty$. Тогда существует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\chi_n(x)$ такой, что*

1) $a_1\neq 0$, $\quad S_{q_n}(x)\to 0$ п.в., при $n\to\infty$,

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot mes\{x\in[0;1]: \quad \sup\limits_n|S_{q_n}(x)|>\lambda\}=0$.

Напомним,что функция $f(x)$ называется A-интегрируемой на множестве G, если $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes\{x \in G : \quad |f(x)| > \lambda\} = 0$ и существует предел

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_G [f(x)]_\lambda dx =: (A)\int_G f(x)dx.$$

Скажем, что ряд $\sum a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ является рядом Фурье A-интегрируемой функции, если существует такая A-интегрируемая функция f, определенная на $[0;1]^d$, что коэффициенты $a_{\mathbf{n}}$ определяются следующим образом:

$$a_{\mathbf{n}} = (A)\int_{[0;1]} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Из теоремы 1.2 немедленно следуют теоремы 1.3 и 1.4.

Теорема 1.3. *Пусть $\{q_j\}$ некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой п.в. конечной функции $f(\mathbf{x})$ и*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes\left\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda\right\} = 0,$$

то все функции $f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, $\quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, A-интегрируемы и

$$a_{\mathbf{n}} = (A)\int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Теорема 1.4. *Пусть $\{q_j\}$ некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x}) \in L^1[0;1]^d$ и для некоторой последовательности $\{\lambda_k\}$, $\quad \lambda_k \nearrow \infty$*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \cdot mes\left\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda_k\right\} = 0.$$

Тогда

$$a_{\mathbf{n}} = \int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Оказывается в теоремах 1.2–1.4 ограниченность отношения $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ существенно. Действительно, верно следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть $\{q_n\}$ некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что $\sup \dfrac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty$. Тогда существует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ такой, что*

1) $a_1 \neq 0$, $\qquad S_{q_n}(x) \to 0$ п.в., при $n \to \infty$,

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot mes\{x \in [0;1] : \quad \sup\limits_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\} = 0$.

Хорошо известно, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье интегрируемой функции, то, вообще говоря, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$, где $\varepsilon_n = \pm 1$, может не сходится в пространстве L^1. Известно, что (см. [1], [9] и [10]), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ безусловно сходится тогда и только тогда, когда

$$P(x) := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right\}^{1/2} \in L^1[0;1]$$

или

$$S^*(x) := \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right| \in L^1[0;1].$$

В работе [2] доказано, что если выполняется условие

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot mes\{x: \quad S^*(x) > \lambda\} = 0, \tag{1.2}$$

то для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье некоторой A интегрируемой функции. Здесь мы докажем обратное утверждение

Теорема 1.6. *Если для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд по системе Хаара $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье A-интегрируемой функции, то выполняется условие (1.2).*

Отметим, что (см. [2]) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье A интегрируемой функции, то мажоранта частичных сумм этого ряда может не удовлетворять условию (1.2). Следовательно, существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, который является рядом Фурье A-интегрируемой функции, но при некоторых $\varepsilon_n = 0;1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ не является рядом Фурье A интегрируемой функции.

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие того, чтобы для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ являлся бы рядом Фурье A-интегрируемой функции.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд по системе Хаара $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ будет рядом Фурье A интегрируемой функции, тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.2).*

2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_d)$ некоторый элемент из $\mathbb{N}^d$, а число M выбрано так, чтобы

$$\frac{q_{j+1}}{q_j} \le M \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Нетрудно заметить, что для любого $k \ge 1$ функция $\sup\limits_{j\ge k}|S_{q_j}(\mathbf{x})|$ удовлетворяет условию (1.1) с теми же λ_m. Поэтому, без ограничения общности будем считать, что выполняется $n_i \le q_1$ для всех i, $i = 1, 2, \cdots, d$. Ясно, что

$$a_{\mathbf{n}} = \int_{[0;1]^d} S_{q_1}(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{n}}} S_{q_1}(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

где $\Delta_{\mathbf{n}} = \mathrm{supp}(\chi_{\mathbf{n}})$.

Напомним, что двоичный параллелепипед $\Delta \subset [0;1]^d$ называется параллелепипедом постоянства для $S_j(\mathbf{x})$, если $S_j(\mathbf{x})$ постоянная на Δ и непостоянная на любом двоичном параллелепипеде Δ', который содержит Δ. Ясно, что если $\Delta \subset [0;1]^d$ параллелепипед постоянства для $S_j(\mathbf{x})$, то

$$\int_\Delta S_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\Delta S_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \text{для любого } i > j. \tag{2.2}$$

Допустим $\Delta_{\mathbf{n}} = \bigcup\limits_{k=1}^{r} I_k$, где I_k параллелепипеды постоянства для $S_{q_1}(x)$, входящие в $\Delta_{\mathbf{n}}$. Очевидно, что на I_k функция $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ постоянная, (принимает значения $\pm\|\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\|_\infty$), которую обозначим через $\chi_{\mathbf{n}}(I_k)$. Тогда

$$a_{\mathbf{n}} = \sum_{k=1}^{r} \chi_{\mathbf{n}}(I_k) \int_{I_k} S_{q_1}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{2.3}$$

Для каждого k, $(k = 1, 2, \cdots, r)$ и числа $m \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S^*(\mathbf{x}) = \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})|, \qquad E_m^k = \{\mathbf{x} \in I_k : \quad S^*(\mathbf{x}) > \lambda_m\}.$$

Пусть ε-произвольное положительное число, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon < 2^{-d(M+1)} \tag{2.4}$$

Выберем натуральное число m настолько большим, чтобы $\lambda_m > 1$ и (см. (1.1))

$$\lambda_m \cdot mes(E_m^k) < \varepsilon \cdot mes(I_k), \quad (k = 1, 2, \cdots, r). \tag{2.5}$$

Поскольку $S_{q_j}(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$ п.в., при $j \to \infty$, то для этого m можно найти $p_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы для всех k, $(k = 1, 2, \cdots, r)$

$$mes\left\{\mathbf{x} \in I_k : \quad |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \varepsilon\right\} < \frac{\varepsilon}{\lambda_m} \cdot mes(I_k). \tag{2.6}$$

Заметим, что для всех $\mathbf{x} \in \Delta_n$ выполняется неравенство $|S_{q_2}(\mathbf{x})| \le \lambda_m$. Действительно, допустим $\Delta \subset I_k$ — некоторый параллелепипед постоянства для $S_{q_2}(\mathbf{x})$ и на нем выполняется неравенство $|S_{q_2}(\mathbf{x})| > \lambda_m$, тогда из определения множества E^k_m, следует, что $\Delta \subset E^k_m$, откуда, с учетом (2.1), получаем

$$mes(E^k_m) \ge mes(\Delta) \ge 2^{-d(M+1)} mes(I_k) > \varepsilon \cdot mes(I_k),$$

которое противоречит условию (2.5). Пусть $I_k = \bigcup\limits_i \Delta^2_{k,i}$, где $\{\Delta^2_{k,i}\}$-параллелепипеды постоянства для $S_{q_2}(\mathbf{x})$, входящие в I_k. Параллелепипед $\Delta^2_{k,i}$ назовем параллелепипедом первого рода, если выполняется неравенство $|S_{q_2}(\mathbf{x})| \le \lambda_m$ для $\mathbf{x} \in \Delta^2_{k,i}$. В противном случае $\Delta^2_{k,i}$ назовем параллелепипедом второго рода. Обозначим

$$\Gamma'_2 = \{i : \ \Delta^2_{k,i}\text{-параллелепипед первого рода}\},$$

$$\Gamma''_2 = \{i : \Delta^2_{k,i}\text{-параллелепипед второго рода}\}.$$

Ясно, что $I_k = \left(\bigcup_{i\in\Gamma'_2} \Delta^2_{k,i}\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in\Gamma''_2} \Delta^2_{k,i}\right)$. Допустим уже определены параллелепипеды $\{\Delta^2_{k,i}\}, \{\Delta^3_{k,i}\}, \cdots, \{\Delta^{p-1}_{k,i}\}$ и множества $\Gamma'_2, \Gamma''_2, \cdots, \Gamma'_{p-1}, \Gamma''_{p-1}$ и I_k представляется в виде

$$I_k = \left(\bigcup_{s=2}^{p-1} \left(\bigcup_{i\in\Gamma''_s} \Delta^s_{k,i}\right)\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in\Gamma'_{p-1}} \Delta^{p-1}_{k,i}\right).$$

Представим $\bigcup\limits_{i\in\Gamma'_{p-1}} \Delta^{p-1}_{k,i}$ в виде объединения $\bigcup\limits_j \Delta^p_{k,j}$, где $\{\Delta^p_{k,j}\}$-являются параллелепипедами постоянства для $S_{q_p}(\mathbf{x})$. Параллелепипед $\Delta^p_{k,j}$ назовем параллелепипедом первого рода, если для $\mathbf{x} \in \Delta^p_{k,j}$ выполняется неравенство $|S_{q_{p+1}}(\mathbf{x})| \le \lambda_m$, в противном случае $\Delta^p_{k,j}$ назовем параллелепипедом второго рода. Обозначим

$$\Gamma'_p = \{i : \ \Delta^p_{k,i} \text{ параллелепипед первого рода}\},$$

$$\Gamma''_p = \{i : \Delta^p_{k,i}\text{-параллелепипед второго рода}\}.$$

Таким образом, по индукции будем определять параллелепипеды $\{\Delta^2_{k,i}\}, \{\Delta^3_{k,i}\}, \cdots, \{\Delta^{p_0}_{k,i}\}$ и множества $\Gamma'_2, \Gamma''_2, \cdots, \Gamma'_{p_0}, \Gamma''_{p_0}$. Ясно, что

$$I_k = \left(\bigcup_{s=2}^{p_0} \left(\bigcup_{i\in\Gamma''_s} \Delta^s_{k,i}\right)\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in\Gamma'_{p_0}} \Delta^{p_0}_{k,i}\right).$$

Из определения следует, что если для некоторого $p \in \{2, 3, \cdots, p_0\}$, $\Delta^p_{k,i}$ является параллелепипедом второго рода, то некоторое подмножество параллелепипеда $\Delta^p_{k,i}$ (некоторый параллелепипед постоянства для $S_{q_{p+1}}(\mathbf{x})$), мера которого не меньше чем $\frac{1}{2^{d(M+1)}}$ часть меры множества $\Delta^p_{k,i}$, является подмножеством множества E^k_m. Поэтому

$$mes\Big(\bigcup_{s=2}^{p_0}\Big(\bigcup_{i\in\Gamma''_s}\Delta^s_{k,i}\Big)\Big) \le 2^{d(M+1)}\cdot mes(E^k_m). \tag{2.7}$$

Ясно также, что для всех $p\in\{2,3,\cdots,p_0\}$ и для любого i выполняется неравенство

$$|S_{q_p}(\mathbf{x})| \le \lambda_m, \quad \text{для всех } \mathbf{x}\in\Delta^p_{k,i}. \tag{2.8}$$

Обозначим

$$G_{k1} = \left\{\mathbf{x}\in\cup_{i\in\Gamma'_{p_0}}\Delta^{p_0}_{k,i}: \quad |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \le \varepsilon\right\},$$

$$G_{k2} = \left\{\mathbf{x}\in\cup_{i\in\Gamma'_{p_0}}\Delta^{p_0}_{k,i}: \quad |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \varepsilon\right\}.$$

Очевидно, что для всех k, $1\le k\le r$,

$$\left|\int_{I_k} S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m} d\mathbf{x}\right| \le \left|\sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}} S_{q_{p_0}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| + \left|\sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m} d\mathbf{x}\right|$$

$$+\int_{G_{k1}} |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}| d\mathbf{x} + \int_{G_{k2}} |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}| d\mathbf{x}. \tag{2.9}$$

Из (2.7), (2.5), (2.8) и (2.2), следует, что

$$\sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}| d\mathbf{x} \le \lambda_m 2^{d(M+1)}\cdot mes(E^k_m) \le 2^{d(M+1)}\varepsilon\cdot mes(I_k), \tag{2.10}$$

$$\left|\sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}} S_{q_{p_0}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| = \left|\sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}} S_{q_s}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| \le 2^{d(M+1)}\varepsilon\cdot mes(I_k). \tag{2.11}$$

Очевидно, что предпоследнее слагаемое в (2.9) не больше чем $\varepsilon\cdot mes(I_k)$. Для последнего слагаемого в (2.9), с учетом (2.8) и (2.6), получаем

$$\int_{G_{k2}} |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}| d\mathbf{x} \le 2\lambda_m\frac{\varepsilon}{\lambda_m}\cdot mes(I_k) \le 2\varepsilon\cdot mes(I_k). \tag{2.12}$$

Учитывая также (2.3) и (2.2), из (2.9)-(2.12) получаем

$$|a_{\mathbf{n}} - \int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}| = |\sum_{k=1}^{r}\chi_{\mathbf{n}}(I_k)\int_{I_k}(S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m})d\mathbf{x}|$$

$$\le \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty\sum_{k=1}^{r}\varepsilon\cdot mes(I_k)(2^{d(M+1)+1}+3) \le \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty\cdot mes(\Delta_{\mathbf{n}})2^{d(M+1)+2}\varepsilon.$$

Теорема 1.2 доказана.

Для доказательства теоремы 1.5 нам нужен следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть $\{q_n\}$ подпоследовательность натуральных чисел, с условием $\sup\limits_n \frac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty$, а $F(x)$ некоторая неотрицательная функция, определенная на $[0;1]$, и $E = supp(F)$ является конечным обвединением непересекающихся двоичных интервалов, на каждом из которых $F(x)$ постоянная. Тогда для любых $\varepsilon, \delta > 0$ и $N_0 \in \mathbb{N}$ существует полином $P(x) = \sum\limits_{k=N_0}^{M} a_k \chi_k(x)$ такое, что*

1) $supp(P) \subset E$,

2) $\min\{P(x) + F(x) : \quad P(x) + F(x) \neq 0\} > \max F(x)$,

3) $mes(supp(P + F)) \leq \delta$,

4) *для всех $\lambda > \max F(x)$ выполняется неравенство*

$$\lambda \cdot mes\{x : \max_{n: q_n \leq M} \left|F(x) + \sum_{k=N_0}^{q_n} a_k \chi_k(x)\right| > \lambda\} < \varepsilon,$$

5)*для каждого $x \in [0;1]$ и $n \in \mathbb{N}$ с условием $N_0 \leq q_n \leq M$, либо $\sum\limits_{k=N_0}^{q_n} a_k \chi_k(x) = 0$ либо $\sum\limits_{k=N_0}^{q_n} a_k \chi_k(x) = P(x)$.*

Доказательство леммы 2.1. Пусть $E = \mathrm{supp}(F)$ является конечным объединением непересекающихся двоичных интервалов, длина которых больше чем h, а $\gamma := \max\limits_{x \in [0;1]} F(x)$. Выберем натуральное число d так, чтобы выполнялись условия

$$2^d > N_0, \qquad \frac{1}{2^d} < \min\left\{\delta;\ \frac{h}{2};\ \frac{\varepsilon}{2\gamma}\right\}. \tag{2.13}$$

Из последнего неравенства следует, что множество E можно представить в виде объединения непересекающихся двоичных интервалов, длины 2^{-d}:

$$E = \bigcup_{k=1}^{m} I_k, \quad \text{где} \quad I_k = \left[\frac{\alpha_k}{2^d}; \frac{\alpha_k + 1}{2^d}\right]. \tag{2.14}$$

Пусть $\gamma_k := F(I_k)$ значение функции F на множестве I_k. Выберем натуральные числа r_k, $\quad k = 1, 2, \cdots, m$, так, чтобы выполнялись условия

$$\gamma_1 \cdot 2^{r_1} > \gamma, \tag{2.15}$$

$$r_k > r_{k-1}, \qquad \gamma_k \cdot 2^{r_k} > \gamma_{k-1} \cdot 2^{r_{k-1}}, \qquad k = 2, 3, \cdots, m. \tag{2.16}$$

Поскольку $\sup\limits_n \frac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty$, то из последовательности $\{q_n\}$ можно выбрать числа $q_{n_1}, q_{n_2}, \cdots, q_{n_m}$, удовлетворяющие условиям

$$2^d < q_{n_1} < q_{n_2} < \cdots < q_{n_m}. \tag{2.17}$$

$$\frac{q_{n_k+1}}{q_{n_k}} > 2^{r_k+2} \qquad k = 1, 2, \cdots, m.$$

Из последнего неравенства следует, что для каждого k, $(k = 1, 2, \cdots, m)$, существует натуральное число i_k такое, что $q_{n_k} < 2^{i_k}$ и $2^{i_k+r_k} < q_{n_k+1}$.

Ясно, что (см. (2.11) и (2.17)) каждый интервал I_k, $(k = 1, 2, \cdots, m)$, можно представить в виде объединения непересекающихся двоичных интервалов длины 2^{-i_k}:

$$I_k = \bigcup_{s\in\Lambda_k} J_s^{(k)} = \bigcup_{s\in\Lambda_k} \left[\frac{l_s}{2^{i_k}}; \frac{l_s+1}{2^{i_k}}\right]$$

Пусть n натуральное число и $1 \le i \le 2^n$, обозначим $\bar{\chi}_i^{(n)}(x) := 2^{-n/2}\chi_i^{(n)}(x)$ (функция Хаара, нормированная в L_∞). Рассмотрим полиномы по системе Хаара

$$P_k(x) = \sum_{s\in\Lambda_k} \sum_{j=0}^{r_k-1} 2^j \bar{\chi}_{2^j l_s+1}^{(i_k+j)}(x) \qquad k = 1, 2, \cdots, m.$$

Ясно, что

$$\mathbf{1}_{I_k}(x) + P_k(x) = \begin{cases} 2^{r_k}, & \text{если } x \in E_k \subset I_k, \\ 0, & \text{если } x \in [0;1] \setminus E_k, \end{cases} \tag{2.18}$$

где $\mathbf{1}_{I_k}$–характеристическая функция множества I_k, а E_k является конечным объединением двоичных интервалов и

$$mes(E_k) = \sum_{s\in\Lambda_k} \frac{1}{2^{r_k}} \cdot mes(J_s^{(k)}) = \frac{1}{2^{r_k}} mes(I_k) = \frac{1}{2^{d+r_k}}. \tag{2.19}$$

Обозначим

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^{M} a_k\chi_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} \gamma_k P_k(x). \tag{2.20}$$

Утверждения 1) и 5) леммы 2.1, непосредственно, следуют из (2.14), (2.18) и (2.20).

Из определения чисел γ_k, $(\gamma_k = F(I_k))$ (2.18) и (2.20) получаем, что

$$F(x) + P(x) = \begin{cases} \gamma_k 2^{r_k}, & \text{если } x \in E_k, \quad k = 1, 2, \cdots, m, \\ 0, & \text{если } x \in [0;1] \setminus (\bigcup_{k=1}^{m} E_k). \end{cases} \tag{2.21}$$

Комбинируя последнее равенство с (2.15) и (2.16) получаем утверждение 2) леммы 2.1. Из (2.21), (2.19), (2.13) и первого неравенства (2.16) следует, что

$$mes(\operatorname{supp}(F + P)) = \sum_{k=1}^{m} mes(E_k) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{d+r_k}} \le \frac{2}{2^{d+r_1}} \le \frac{1}{2^d} \le \delta.$$

Приступим к доказательству утверждения 4) леммы 2.1. При $\lambda \ge \gamma_m 2^{r_m}$ множество $\{x : F(x)+P(x) > \lambda\} = \emptyset$ (см. (2.16) и (2.21)) и утверждение 4) очевидно. Допустим λ некоторое число из промежутка $(\gamma; \gamma_m 2^{r_m})$, тогда для некоторого числа

s $(s = 1, 2, \cdots, m)$ выполняется неравенство $\gamma_{s-1}2^{r_{s-1}} \le \lambda < \gamma_s 2^{r_s}$ $\quad (\gamma_0 2^{r_0} := \gamma)$, следовательно из (2.21), (2.15) и (2.16) получаем

$$mes\{x: \max_{n: q_n \le M} |F(x) + \sum_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x)| > \lambda\} = mes\left(\bigcup_{k=s}^{m} E_k\right) = \sum_{k=s}^{m} \frac{1}{2^{d+r_k}} < \frac{2}{2^{d+r_s}}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (2.13), получаем

$$\lambda \cdot mes\{x: \max_{n: q_n \le M} |F(x) + \sum_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x)| > \lambda\} < \frac{2\lambda}{2^{d+r_s}} \le \frac{2\gamma_s 2^{r_s}}{2^{d+r_s}} \le \frac{\varepsilon\gamma_s}{\gamma} \le \varepsilon.$$

Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.5. Пусть последовательность $\{q_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.5, а $F_0(x) \equiv 1$ при $x \in E_0 := [0;1]$. Применяя лемму 2.1 для функции $F_0(x)$ и чисел $\varepsilon_1 = \delta_1 = 2^{-1}$, $N_0 = 2$ получаем полином по системе Хаара

$$P_1(x) = \sum_{k=N_0}^{N_1-1} a_k\chi_k(x)$$

удовлетворяющий утверждениям 1)–5) леммы 2.1. Обозначим $F_1(x) := F_0(x) + P_1(x)$ и $E_1 := \mathrm{supp}(F_1)$. Ясно, что $mes(E_1) < 2^{-1}$. Допустим, что для чисел $i = 1, 2, \cdots, m-1$ уже определены полиномы $P_i(x) = \sum_{k=N_{i-1}}^{N_i-1} a_k\chi_k(x)$, функции $F_i(x) := F_{i-1}(x) + P_i(x)$ и множества $E_i := \mathrm{supp}(F_i)$ такие, что E_i можно представить в виде объединения двоичных интервалов, на каждом из которых функция $F_i(x)$ постоянная. Пусть $\Gamma_{m-1} := \max_x F_{m-1}(x)$.

Применяя лемму 2.1 для функции $F_{m-1}(x)$, чисел $\varepsilon_m = 2^{-m}$, $\delta_m = \dfrac{1}{2^m\Gamma_{m-1}}$ и N_{m-1} получаем полином по системе Хаара

$$P_m(x) = \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} a_k\chi_k(x)$$

удовлетворяющий условиям:

$A)$ $\mathrm{supp}(P_m) \subset E_{m-1}$,

$B)$ $\min_x\{F_m(x): \quad F_m(x) \ne 0\} > \Gamma_{m-1}$, где $F_m(x) := F_{m-1}(x) + P_m(x)$,

$C)$ $mes(E_m) \le \dfrac{1}{2^m\Gamma_{m-1}}$, где $E_m := \mathrm{supp}(F_m)$,

$D)$ для всех $\lambda > \Gamma_{m-1}$ выполняется неравенство

$$\lambda \cdot mes\{x: \max_{n: N_{m-1} \le q_n < N_m} |F_{m-1}(x) + \sum_{k=N_{m-1}}^{q_n} a_k\chi_k(x)| > \lambda\} < 2^{-m},$$

E) для каждого $x \in [0;1]$ и натурального числа n, с условием $N_{m-1} \le q_n < N_m$, либо $\sum_{k=N_{m-1}}^{q_n} a_k\chi_k(x) = 0$ либо $\sum_{k=N_{m-1}}^{q_n} a_k\chi_k(x) = P_m(x)$.

Следовательно, по индукции, построим последовательности полиномов $\{P_m(x)\}$, функций $\{F_m(x)\}$, множеств $\{E_m\}$ и чисел $\{\Gamma_m\}$, удовлетворяющие условиям $A) - E)$. Из A) и C) следует, что $F_m(x) \to 0$ п.в. на $[0;1]$.

Рассмотрим ряд

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\chi_k(x) \equiv F_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x). \tag{2.22}$$

Ясно, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$1 + \sum_{k=2}^{N_m-1} a_k\chi_k(x) = F_m(x),$$

поэтому, частичные суммы $S_{q_n}(x)$ ряда (2.22) удовлетворяют следующему условию (см. E)): Для каждого натурального числа n, если $q_n \in [N_{m-1}; N_m)$, то для каждого $x \in [0;1]$ функция $S_{q_n}(x)$ совпадает либо с $F_m(x)$ либо с $F_{m-1}(x)$. Следовательно

$$S_{q_n}(x) \to 0 \quad \text{п.в. на } [0;1], \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть λ некоторое положительное число, больше 1. Тогда для некоторого натурального числа m выполняется неравенство $\Gamma_{m-1} < \lambda \le \Gamma_m$. Учитывая A), B) и E) получаем, что

$$\left\{x: \quad \sup_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\right\} = \left\{x: \max_{n: N_{m-1} \le n < N_m} |S_{q_n}(x)| > \lambda\right\} \cup E_{m+1}.$$

Комбинируя последнее равенство с C) и D), получаем

$$\lambda \cdot mes\left\{x: \quad \sup_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\right\} \le 2^{-m} + \frac{\lambda}{2^{m+1}\Gamma_m} < 2^{-(m-1)}.$$

Теорема 1.5 доказана.

Для доказательства теоремы 1.6 нам нужно следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть* $\sup_N \left|\sum_{n=N_0}^{N} a_n\chi_n(x)\right| > M$ *на некотором множестве* E *положительной меры. Тогда для любого* $\alpha \in (0;1)$ *существуют* $N_1 \in \mathbb{N}$ *и* $\varepsilon_n \in \{0;1\}$ *такие, что*

$$mes\left\{x \in E: \quad \left|\sum_{n=N_0}^{N_1} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)\right| > M\right\} > \alpha \cdot mes(E).$$

Доказательство леммы 2.2. Пусть i_1 — наименьшее натуральное число, для которого существует двоично иррациональное число $x_1 \in E$, с условием $|\sum_{n=N_0}^{i_1} a_n\chi_n(x_1)| > M$. Обозначим через Δ'_1 тот интервал постоянства функции $\chi_{i_1}(x)$, который содержит точку x_1. Ясно, что

$$\left|\sum_{n=N_0}^{i_1} a_n\chi_n(x)\right| > M \qquad \text{для всех } x \in \Delta'_1.$$

Допустим уже определены возрастающие натуральные числа $i_1, i_2, \cdots, i_{p-1}$ и непересекающиеся множества $\Delta'_1, \Delta'_2, \cdots, \Delta'_{p-1}$. Пусть i_p–наименьшее натуральное число, для которого существует двоично иррациональная точка $x_p \in E \setminus \cup_{k=1}^{p-1}\Delta'_k$, удовлетворяющая условию $|\sum_{n=N_0}^{i_p} a_n\chi_n(x_p)| > M$. Допустим Δ'_p тот интервал постоянства функции $\chi_{i_p}(x)$ который содержит точку x_p. Ясно, что

$$\left|\sum_{n=N_0}^{i_p} a_n\chi_n(x)\right| > M \qquad \text{для всех } x \in \Delta'_p. \tag{2.23}$$

Так, по индукции, определим числа $\{i_k\}$ и множества $\{\Delta'_k\}$, удовлетворяющие условию (2.23). Причем, если при некотором p, $mes(E \setminus \cup_{k=1}^{p-1}\Delta'_k) = 0$, то на этом шаге выбор чисел i_k и множеств Δ'_k останавливается. В любом случае, из построения следует, что

$$\Delta'_i \cap \Delta'_j = \emptyset \quad (i \neq j) \qquad \text{и} \qquad E \subset \bigcup_k \Delta'_k.$$

Выберем натуральное число p_0 так, чтобы для множества $E_1 = \cup_{k=1}^{p_0}\Delta'_k$ выполнялось $mes(E_1 \cap E) > \alpha \cdot mes(E)$. Положим

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad \Delta_n := \operatorname{supp}(\chi_n) \subset E_1 \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из (2.23) и определения множества E_1 следует, что

$$\left|\sum_{n=N_0}^{i_{p_0}} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)\right| > M \qquad \text{для всех} \quad x \in E_1.$$

Лемма 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.6. Теорему 1.6 докажем от противного. Допустим для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ сходится п. в. к некоторой A–интегрируемой функции, но для некоторого положительного числа δ выполняется неравенство

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes\,\{x \in [0;1]: \quad S^*(x) > \lambda\} \geq 2\delta > 0. \tag{2.24}$$

где $S^*(x) := \sup_N \left|\sum_{n=1}^N a_n\chi_n(x)\right|$. Рассмотрим 2 случая.

1°. Пусть $S^*(x) < +\infty$ п. в.

Для каждого k положим $E_k := \{x \in [0;1] : \quad S^*(x) > \lambda_k\}$, где возрастающая последовательность $\{\lambda_k\}$ будет определена ниже по индукции. Очевидно, что $E_k \subset E_{k-1}$ и E_k можно представить в виде объединения двоичных интервалов. Допустим $E_k = \cup_m I_{k,m}$ и $E'_k := \cup_m I'_{k,m}$, где $I_{k,m}$ и $I'_{k,m}$ двоичные интервалы такие, что $I_{k,m} \subset I'_{k,m}$, $\quad mes(I'_{k,m}) = 2 \cdot mes(I_{k,m})$ и, кроме того, $I'_{k,m} \not\subset E_k$.

Возьмем число λ_1 так, чтобы $\lambda_1 \cdot mes(E_1) > \delta$ (см. (2.24)). Согласно лемме 2.2, существуют $N_1 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_n = 0; 1$ такие, что для функции $\varphi_1(x) := \sum_{n=1}^{N_1} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ выполняется неравенство

$$mes\{x \in E_1 : \quad |\varphi_1(x)| > \lambda_1\} > \frac{mes(E_1)}{2}. \tag{2.25}$$

Допустим, что уже определены числа λ_i и функции $\varphi_i(x) = \sum_{n=N_{i-1}+1}^{N_i} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$, $i = 1; 2; \cdots; k-1$. Пусть $M_{k-1} = \max_x \sum_{n=1}^{N_{k-1}} |a_n \chi_n(x)|$. Выберем число λ_k такое, чтобы выполнялись неравенства (см. (2.24))

$$\lambda_k > 2(M_{k-1} + \lambda_{k-1}), \tag{2.26}$$

$$mes(E_k) < \frac{mes(E_{k-1})}{16} \quad \text{и} \quad \lambda_k \cdot mes(E_k) > \delta. \tag{2.27}$$

Заметим, что

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n\chi_n(x) \right| \le \lambda_{k-1} \quad \text{для всех } x \in [0;1]. \tag{2.28}$$

Действительно, если бы для некоторого $x_1 \in [0;1]$ в (2.28) выполнялось обратное неравенство, то это означало бы, что $x_1 \in E_{k-1}$, т.е. $x_1 \in I_{k-1,m}$, для некоторого m. Но для всех N сумма $\sum_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n\chi_n(x)$ постоянна на интервале $I'_{k-1,m}$, значит $\sup_N \left| \sum_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n\chi_n(x) \right| > \lambda_{k-1}$ для всех $x \in I'_{k-1,m}$, которое невозможно, поскольку $I'_{k-1,m} \not\subset E_{k-1}$.

Из (2.26), (2.28) и определения числа M_{k-1} следует, что для всех $x \in E_k$ выполняется неравенство

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n=N_{k-1}+1 \\ \Delta_n \subset E'_{k-1}}}^{N} a_n \chi_n(x) \right| \geq S^*(x) - M_{k-1} - \sup_N \left| \sum_{\substack{\dots \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n \chi_n(x) \right| \geq$$

$$\geq \lambda_k - M_{k-1} - \lambda_{k-1} > \frac{\lambda_k}{2}.$$

Отсюда, с применением леммы 2.2 , получаем числа $N_k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_n = 0; 1$ такие, что для функции $\varphi_k(x) := \sum\limits_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ выполняется неравенство

$$mes\{x \in [0;1] : \quad \varphi_k(x) > \lambda_k/2\} > \frac{mes(E_k)}{2}. \tag{2.29}$$

Ясно, что

$$\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset E'_{k-1} \quad \text{и} \quad mes(\operatorname{supp}(\varphi_k)) \leq mes(E'_{k-1}) \leq 2 \cdot mes(E_{k-1}). \tag{2.30}$$

Так, по индукции, будем определять числа $\{\lambda_k\}$, множества E_k, E'_k и функции $\varphi_k(x)$, удовлетворяющие условиям (2.26), (2.27), (2.29) и (2.30).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n a_n \chi_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{2k-1}+1}^{N_{2k}} \varepsilon_n a_n \chi_n(x).$$

Из (2.30) и (2.27) следует, что этот ряд п. в. сходится к некоторой функции $f(x)$. Из определения чисел M_k и (2.26) следует, что для всех натуральных $k > 1$

$$\left\{x : \ |f(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4}\right\} \supset \left\{x : \ |\varphi_{2k}(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4} + M_{2k-2}\right\} \setminus \bigcup_{n=k+1}^{\infty} \operatorname{supp}(\varphi_{2n}(x)) \supset$$

$$\supset \left\{x : \ |\varphi_{2k}(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{2}\right\} \setminus \bigcup_{n=k+1}^{\infty} \operatorname{supp}(\varphi_{2n}(x)).$$

Поэтому, учитывая также (2.29), (2.30) и (2.27) получаем, что

$$mes\left\{x : \ |f(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4}\right\} \geq \frac{mes(E_{2k})}{2} - \frac{mes(E_{2k})}{4} \geq \frac{mes(E_{2k})}{4}.$$

Комбинируя последнее неравенство с вторым неравенством (2.27), получим

$$\lambda_{2k} \cdot mes\left\{x : \ |f(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4}\right\} \geq \frac{\lambda_{2k} \cdot mes(E_{2k})}{4} > \frac{\delta}{4} > 0,$$

которое означает, что $f(x)$ не является A интегрируемой функцией, вопреки нашему предположению. Тем самым теорема 1.6 в случае 1°. доказана.

2°. Пусть, теперь множество $B := \{x : \quad S^*(x) = +\infty\}$ имеет положительную меру. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем двоичный интервал I_k так, чтобы

(2.31) $\quad I_k \cap (\cup_{j=1}^{k-1} I_j) = \emptyset, \quad mes(I_k \cap B) > 0.9 \cdot mes(I_k) \quad$ и $\quad mes(I_k) < \dfrac{mes(B)}{2^k}.$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n:\Delta_n \subset I_k} a_n \chi_n(x)$. Ясно, что во всех точках $x \in I_k \cap B$ выполняется $\sup\limits_N \left| \sum\limits_{n:n \leq N, \Delta_n \subset I_k} a_n \chi_n(x) \right| = +\infty$, поэтому, применяя лемму 2.2 получаем полином $\varphi_k(x) := \sum_{n:\Delta_n \subset I_k} \varepsilon_n^{(k)} a_n \chi_n(x)$, (с некоторого номера все $\varepsilon_n^{(k)}$ равны нулю), удовлетворяющий условию

$$mes\left\{x \in I_k : \quad |\varphi_k(x)| > \frac{1}{|I_k|}\right\} > 0,8 \cdot mes(I_k). \tag{2.32}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n:\Delta_n \subset I_k} \varepsilon_n^{(k)} a_n \chi_n(x).$$

Заметим, что ряд, стоящей в правой части сходится, поскольку $I_k \cap I_j = \emptyset$ при $k \neq j$ и, для каждого x, конечное число слагаемых отличны от нуля в точке x. Очевидно, что (см. (2.32))

$$mes\left\{x : \quad |f(x)| > \frac{1}{|I_k|}\right\} \geq mes\left\{x : \quad |\varphi_k(x)| > \frac{1}{|I_k|}\right\} > 0,8 \cdot mes(I_k),$$

т.е. $f(x)$ не является A-интегрируемой, так как из (2.31) имеем, что $mes(I_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема 1.6 доказана.

Abstract. In this paper we obtain a necessary and sufficient condition on the sequence of natural numbers $\{q_n\}$ such that the almost everywhere convergence of the cubic partial sums $S_{q_n}(\mathbf{x})$ of the multiple Haar series $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ and the condition $\liminf\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot mes\{\mathbf{x} : \sup\limits_n |S_{q_n}(\mathbf{x})| > \lambda\} = 0$, imply that the coefficients $a_{\mathbf{n}}$ can be uniquely determined by the sum of the series. Also, we have obtained a necessary and sufficient condition for the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ with an arbitrary bounded sequence $\{\varepsilon_n\}$ to be a Fourier-Haar series of an A-integrable function.

Список литературы

[1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ (1999).

[2] Г. Г. Геворкян, "О единственности аддитивных функций двоичных кубов и рядов по системе Хаара", Изв. НАН Армении, Серия Математика, **30**, но. 5, 7 – 21 (1995).

[3] В. В. Костин, "К вопросу о восстановлении коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций", Мат. Заметки, **73**, но. 5, 704 – 723 (2003).

[4] В. В. Костин, "Обобщение теоремы Л. А. Балашова о подрядах ряда Фурье–Хаара", Мат. Заметки, textbf76, но. 5, 740 – 747 (2004).

[5] Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, **46**, но. 2, 51 – 58 (1989).

[6] Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, **59**, но. 4, 521 – 545 (1996).

[7] А. Б. Александров, "Об A-интегрируемости граничных значений гармонических функций", Мат. Заметки, **30**, 59 – 72 (1981).

[8] Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов, Мат. Сборник, **180**, но. 11, 1462 – 1474 (1989).

[9] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, "Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales", Acta Math., **124**, 249 – 304 (1970).

[10] B. Davis, "On the integrability of the martingale square function", Israel J. Math., **8**, 187 – 190 (1970).

Поступила 11 марта 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 3, 2017, стр. 46-52.

AN ENTIRE FUNCTION THAT SHARES A SMALL FUNCTION WITH A HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL POLYNOMIAL

I. LAHIRI, B. PAL

University of Kalyani, West Bengal, India.
E-mails: ilahiri@hotmail.com; palbipul86@gmail.com

Abstract. In connection to a result of R. Brück, we study the uniqueness of an entire function when it shares a small function with a homogeneous differential polynomial.

MSC2010 numbers: 30D35.

Keywords: Entire function; sharing; small function; differential polynomial.[1]

1. Introduction

Let f and g be two meromorphic functions in the open complex plane $\mathbb{C}$. For $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, we say that f and g share the value a CM (counting multiplicities) if and only if $f - a$ and $g - a$ have the same set of zeros with the same multiplicities, where by a zero of $f - \infty$ we mean a pole of f.

For standard notation and definitions we refer the reader the monograph [3]. However, we recall some notation and definitions.

Definition 1.1. *Let f be a meromorphic function, $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, and k be a positive integer. Then*

(i) $N_{(k}(r, a; f)$ (respectively $\overline{N}_{(k}(r, a; f)$) denotes the counting function (the reduced counting function) of those zeros of $f - a$ whose multiplicities are not less than k;

(ii) $N_{k)}(r, a; f)$ (respectively $\overline{N}_{k)}(r, a; f)$) denotes the counting function (the reduced counting function) of those zeros of $f - a$ whose multiplicities are not greater than k.

Definition 1.2. *Let f and g be two meromorphic functions and $a, b \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. By $N(r, a; f|g \neq b)$ ($\overline{N}(r, a; f|g \neq b)$) we denote the counting function (the reduced counting function) of those zeros of $f - a$, which are not the zeros of $g - b$.*

[1] The work of the second author was supported by NBHM fellowship.

L. Rubel and C. Yang [5] first considered the uniqueness problem of an entire function which shares certain values with its derivative. R. Brück [2] considered the uniqueness problem of an entire function which shares a single value with its first derivative, and proved the following result.

Theorem A ([2]). *Let f be a nonconstant entire function. If f and f' share the value 1 CM and $N(r,0;f') = S(r,f)$, then $f-1 = c(f'-1)$, where c is a nonzero constant.*

Recall that a meromorphic function $a = a(z)$ is called a small function of an entire function f if $T(r,a) = S(r,f)$. In [1], A. Al-khaladi treated the case of sharing of a small function by an entire function with its higher order derivative, and obtained a result that can be stated as follows.

Theorem B. *Let f be a nonconstant entire function satisfying $\overline{N}(r,0;f^{(k)}) = S(r,f)$, and let $a = a(z)(\not\equiv 0,\infty)$ be a small function of f. If $f-a$ and $f^{(k)}-a$ share 0 CM, then $f-a = \left(1-\frac{P_{k-1}}{a}\right)(f^{(k)}-a)$, where $1-\frac{P_{k-1}}{a} = e^{\beta}$, P_{k-1} is a polynomial of degree at most $k-1$ and β is an entire function.*

In the present paper we consider the problem of sharing a small function by an entire function and a homogeneous differential polynomial generated by the function, and prove the following theorem which is the main result of the paper.

Theorem 1.1. *Let f be a transcendental entire function such that $\psi = \psi(f) = \sum_{i=1}^{p} b_i \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)})^{l_{ij}}$ is nonconstant, where b_i are constants and l_{ij} are nonnegative integers such that $\sum_{j=1}^{k} l_{ij} = n$ for $i = 1,2,\ldots,p$. Suppose that $a = a(z)$ $(\not\equiv 0,\infty)$ is a small function of f. If $f^n - a$ and $\psi - a$ share 0 CM, and $(kn+3)\overline{N}(r,0;f) < \lambda T(r,(f^n)') + S(r,(f^n)')$ for some $\lambda \in (0,1)$, then*

$$f^n - a = \left(1+\frac{c}{a}\right)(\psi - a),$$

where c is a constant and $1+\frac{c}{a} = e^{\gamma}$ for some entire function γ.

2. Proof of Theorem 1.1

We state two lemmas that will be used in the proof of our main result.

Lemma 2.1 ([4]). *Let F be a transcendental meromorphic function and let $K > 1$. Then there exists a set $M(K)$ of upper logarithmic density at most*

$$\delta(K) = \min\{(2e^{k-1} - 1)^{-1}, (1 + e(K-1))exp(e(1-K))\},$$

such that for every positive integer q the following inequality holds:

$$\limsup_{r\to\infty, r\notin M(K)} \frac{T(r,F)}{T(r,F^{(q)})} \le 3eK.$$

If F is an entire function, then in the above inequality $3eK$ can be replaced by $2eK$.

Lemma 2.2 ([3], p. 47). *Let f be a nonconstant meromorphic function, and let a_1, a_2, a_3 be three distinct small functions of f. Then the following inequality holds:*

$$T(r,f) \le \overline{N}(r,0;f-a_1) + \overline{N}(r,0;f-a_2) + \overline{N}(r,0;f-a_3) + S(r,f).$$

Proof. Let $h = \frac{f^n - a}{\psi - a}$. Then h is an entire function without zeros. So, we can put $h = e^{\alpha_1}$, where α_1 is an entire function. Differentiating equation $f^n - a = h\psi - ha$, we get

$$(f^n)' - a' = (h\psi)' - (ha)'. \tag{2.1}$$

We now consider the following two cases: $a' \not\equiv 0$ and $a' \equiv 0$.

Case I: Let $a' \not\equiv 0$. We put

$$W = \frac{(h\psi)'}{h(f^n)'} - \frac{(ha)'}{ha'}. \tag{2.2}$$

If z_0 is a zero of $(f^n)' - a'$ with $a'(z_0)(\ne 0,\infty)$, then by (2.1) we get $W(z_0) = 0$. Assuming that $W \not\equiv 0$, we can write

$$\overline{N}(r,0;(f^n)' - a') \le N(r,0;W) + S(r,f) \le T(r,W) + S(r,f) \le N(r,\infty;W) + S(r,f),$$

because

$$W = \frac{\psi'}{(f^n)'} + \frac{h'}{h}\frac{\psi}{(f^n)'} - 1 - \frac{h'}{h}\frac{a}{a'}.$$

Hence, we have

$$m(r,W) \le m\left(r,\frac{\psi'}{(f^n)'}\right) + m\left(r,\frac{\psi}{(f^n)'}\right) + 2m\left(r,\frac{h'}{h}\right) + S(r,f) = S(r,f).$$

Note that the possible poles of W are contributed by the zeros of $(f^n)' = nf^{n-1}f'$ and a'. Let z_1 be a zero of f with multiplicity q such that $a(z_1) \ne 0,\infty$ and $a'(z_1) \ne 0$.

If $q < k$, then z_1 is a possible pole of W with multiplicity

$$(nq-1) - \min_{1\le i\le p}\{(q-1)l_{i1} + (q-2)l_{i2} + \dots + 2l_{iq-2} + 1l_{iq-1} + t_i\} + 1 \le nq < nk,$$

where l_i is the sum of multiplicities of zeros at z_1, obtained from remaining $k - q$ functions. If $q \geq k$, then W has a possible pole at z_1 with multiplicity

$$\begin{aligned}(nq-1) - \min_{1\leq i\leq p}\{(q-1)l_{i1} + (q-2)l_{i2} + \dots + (q-k)l_{ik}\} + 1 \\ = nq - \min_{1\leq i\leq p}\{nq - (1l_{i1} + 2l_{i2} + \dots + kl_{ik})\} \\ \leq \max_{1\leq i\leq p}(1l_{i1} + 2l_{i2} + \dots + kl_{ik}) \leq nk.\end{aligned}$$

If z_1 is a regular point of W, then we consider it as a pole of W with multiplicity zero. Thus, we can write

$$\begin{aligned}N(r,\infty;W) &\leq kn\overline{N}(r,0;f) + N(r,0;f'|f\neq 0) + S(r,f) \\ &\leq kn\overline{N}(r,0;f) + T\left(r,\frac{f'}{f}\right) + S(r,f) = (kn+1)\overline{N}(r,0;f) + S(r,f).\end{aligned}$$

So, by (2.3) we get

(2.3)
$$\overline{N}(r,0;(f^n)'-a') \leq (kn+1)\overline{N}(r,0;f) + S(r,f).$$

Also, we have

(2.4)
$$\overline{N}(r,0;(f^n)') \leq \overline{N}(r,0;f) + \overline{N}(r,0;f'|f\neq 0) \leq 2\overline{N}(r,0;f) + S(r,f).$$

In view of Lemma 1.1, it is easy to see that $S(r,f)$ can be replaced by $S(r,(f^n)')$ as $r \to \infty$, possibly outside a set of finite upper logarithmic density. Therefore, by Lemma 2.2, we get as $r \to \infty$ at least along a sequence of values

$$\begin{aligned}T(r,(f^n)') &\leq \overline{N}(r,0;(f^n)'-a') + \overline{N}(r,0;(f^n)') + \overline{N}(r,\infty;(f^n)') + S(r,(f^n)') \\ &\leq (kn+3)\overline{N}(r,0;f) + S(r,(f^n)'),\end{aligned}$$

yielding a contradiction.

Therefore $W \equiv 0$, and by (2.1), we get

$$\frac{(h\psi)'}{(f^n)'} = \frac{(ha)'}{a'} = \frac{(h\psi)'-(ha)'}{(f^n)'-a'} = 1,$$

implying that $(ha)' = a'$. Integrating the last equality we obtain $ha = a + c$, and so $h = 1 + \frac{c}{a}$, where c is a constant. Therefore, $f^n - a = \left(1+\frac{c}{a}\right)(\psi - a)$, which for $\alpha_1 = \gamma$ yields $1 + \frac{c}{a} = e^{\gamma}$.

Case II: Let $a' \equiv 0$, so that a is a constant. From (2.1) we get

$$(f^n)' = (h\psi)' - ah' = h\left\{\frac{(h\psi)'}{h} - a\frac{h'}{h}\right\},$$

and so we have

(2.5)
$$\frac{1}{h} = G - \frac{B}{F}.$$

where $F=(f^n)'$, $G=\frac{(h\psi)'}{hF}$ and $B=a\frac{h'}{h}$.

Differentiating (2.5) we obtain

$$-\frac{1}{h}\frac{h'}{h}=G'-\frac{B'}{F}+\frac{B}{F}\frac{F'}{F}. \tag{2.6}$$

Eliminating $\frac{1}{h}$ from (2.5) and (2.6) we get

$$\frac{A}{F}=G'+G\frac{h'}{h}, \tag{2.7}$$

where $A=B\frac{h'}{h}+B'-B\frac{F'}{F}$.

Assume first that $G\equiv 0$. Then $h\psi=d_1$, a nonzero constant. Therefore,

$$f^n=a+h(\psi-a)=a+d_1-ae^{\alpha_1}=a+d_1+e^{\alpha_2}, \tag{2.8}$$

where $\alpha_2=\alpha_1+\log(-a)$.

By logarithmic differentiation we get $n\frac{f'}{f}=\frac{\alpha_2'e^{\alpha_2}}{a+d_1+e^{\alpha_2}}$, and so we have

$$(nf')^n=\frac{(\alpha_2')^n(e^{\alpha_2})^n}{(a+d_1+e^{\alpha_2})^{n-1}}. \tag{2.9}$$

We suppose that $n>1$. Let $a+d_1\neq 0$. Since f is entire, from (2.9) we get

$$\overline{N}(r,-a-d_1;e^{\alpha_2})\leq\overline{N}(r,0;\alpha_2')=S(r,e^{\alpha_2}),$$

which is a contradiction. So, $a+d_1=0$ and from (2.8) we get $f=e^{\alpha}$, where $n\alpha=\alpha_2$. Therefore $\psi=P(\alpha')e^{n\alpha}$, where $P(\alpha')$ is a differential polynomial in α'. Also, we have $\psi=d_1e^{-\alpha_1}=d_2(e^{-\alpha})^n$, where $d_2=-d_1a$. Thus, $(e^{\alpha})^{2n}=\frac{d_2}{P(\alpha')}$, which implies

$$2nT(r,e^{\alpha})\leq T(r,P(\alpha'))+O(1)=S(r,e^{\alpha}),$$

yielding a contradiction.

Next, suppose that $n=1$. Then $f=a+d_1+e^{\alpha_2}$, and so we have $\psi=Q(\alpha_2')e^{\alpha_2}$, where $Q(\alpha_2')$ is a differential polynomial in α_2'. Also, observe that $\psi=d_2e^{-\alpha_2}$, where $d_2=-ad_1$. Therefore, $(e^{\alpha_2})^2=\frac{d_2}{Q(\alpha_2')}$, which is a contradiction. Hence $G\not\equiv 0$.

Now we suppose that $A\equiv 0$. Then from (2.7) we get $\frac{G'}{G}+\frac{h'}{h}\equiv 0$, and so by integration we have $Gh=K$, where K is a nonzero constant. Hence $(h\psi)'=Gh(f^n)'=K(f^n)'$, and so $h\psi=Kf^n+M$, where M is a constant. Since $f^n-a=h\psi-ha$, we get

$$(1-K)f^n=a(1-h)+M. \tag{2.10}$$

If $K=1$, it follows from (2.10) that h is a constant. Hence we have

$$f^n-a=\left(1+\frac{c}{a}\right)(\psi-a),$$

where $c=a(h-1)$ is a constant such that $1+\frac{c}{a}\neq 0$.

If $K \neq 1$, then in view of (2.10), h is non-constant. So, from (2.10) we get

$$f^n = \frac{a+M}{1-K} - \frac{ae^{\alpha_1}}{1-K} = c_1 + e^{\beta_1},$$

where $c_1 = \frac{a+M}{1-K}$ and $\beta_1 = \alpha_1 + \log\frac{-a}{1-K}$. By logarithmic differentiation we obtain $n\frac{f'}{f} = \frac{\beta_1' e^{\beta_1}}{c_1+e^{\beta_1}}$, and so $(nf')^n = \frac{(\beta_1')^n(e^{\beta_1})^n}{(c_1+e^{\beta_1})^{n-1}}$, which is similar to (2.9). Hence using the equality $h\psi = Kf^n + M$ and proceeding as above we arrive at a contradiction, implying that $A \not\equiv 0$. Now

$$m(r,A) \leq 2m(r,B) + m(r,B') + m\left(r,\frac{h'}{h}\right) + m\left(r,\frac{F'}{F}\right) = S(r,f).$$

Since $A = a\left(\frac{h'}{h}\right)^2 + a\left(\frac{h'}{h}\right)' - a\frac{h'}{h}\frac{F'}{F}$, we can write

$$\begin{aligned} N(r,A) &\leq \overline{N}(r,0;f) + \overline{N}(r,0;f'|f\neq 0) = \overline{N}(r,0;f) + \overline{N}\left(r,0;\frac{f'}{f}\right) \leq \overline{N}(r,0;f) + \\ &+ T\left(r,\frac{f'}{f}\right) = \overline{N}(r,0;f) + N\left(r,\frac{f'}{f}\right) + S(r,f) = 2\overline{N}(r,0;f) + S(r,f). \end{aligned}$$

Hence

$$T(r,A) \leq 2\overline{N}(r,0;f) + S(r,f). \tag{2.11}$$

From (2.7) and (2.11) we get

$$\begin{aligned} m\left(r,\frac{1}{F}\right) &\leq m\left(r,\frac{1}{A}\right) + m\left(r,G' + G\frac{h'}{h}\right) \leq T(r,A) + m(r,G) \\ &+ m\left(r,\frac{G'}{G}\right) + m\left(r,\frac{h'}{h}\right) + O(1) \leq 2\overline{N}(r,0;f) + S(r,f). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Since $A \not\equiv 0$, it is clear that $B \not\equiv 0$. Let z_2 be a zero of f with multiplicity q $(\geq k+1)$. Then z_2 is a zero of $B = \frac{aF}{f^n-a} - \frac{a\psi'}{\psi-a}$ with multiplicity at least $qn - kn - 1$. Hence we have $nN_{(k+1}(r,0;f) - (kn+1)\overline{N}_{(k+1}(r,0;f) \leq N(r,0;B) = S(r,f)$, implying that $nN_{(k+1}(r,0;f) \leq (kn+1)\overline{N}_{(k+1}(r,0;f) + S(r,f)$. Therefore, we can write

$$\begin{aligned} & N(r,0;F) \leq nN(r,0;f) - \overline{N}(r,0;f) + N(r,0;f'|f\neq 0) \\ \leq\ & nN(r,0;f) - \overline{N}(r,0;f) + N(r,0;\frac{f'}{f}) \leq nN(r,0;f) - \overline{N}(r,0;f) + T(r,\frac{f'}{f}) \\ =\ & nN(r,0;f) - \overline{N}(r,0;f) + N(r,\frac{f'}{f}) + S(r,f) = nN(r,0;f) - \overline{N}(r,0;f) + \\ +\ & \overline{N}(r,0;f) + S(r,f) = nN(r,0;f) + S(r,f) = nN_{k)}(r,0;f) + nN_{(k+1}(r,0;f) + \\ +\ & S(r,f) \leq nk\overline{N}_{k)}(r,0;f) + (kn+1)\overline{N}_{(k+1}(r,0;f) + \\ & +S(r,f) \leq (kn+1)\overline{N}(r,0;f) + S(r,f). \end{aligned} \tag{2.13}$$

In view of (2.12) and (2.13), by the first fundamental theorem we get

$$T(r,F) \leq (kn+3)\overline{N}(r,0;f) + S(r,f). \tag{2.14}$$

Finally, by Lemma 2.1 and (2.14) we have

$$T(r,(f^n)') \leq (kn+3)\overline{N}(r,0;f) + S(r,(f^n)')$$

as $r \to \infty$, possibly outside a set of finite upper logarithmic density, which is a contradiction. This completes the proof of the theorem 1.1. □

Acknowledgement. The authors are thankful to the referee for valuable suggestions towards improvement of the paper, especially for pointing out the redundancy of a part of the proof of Theorem 1.1 in its initial version.

Список литературы

[1] A. H. H. Al-Khaladi, "On entire functions which share one small function CM with their kth derivative", Results Math., **47**, 1 – 5 (2005).

[2] R. Brück, "On entire functions which share one value CM with their first derivative", Results Math., **30**, 21 – 24 (1996).

[3] W. K. Hayman, Meromorphic Functions, The Clarendon Press, Oxford (1964).

[4] W. K. Hayman and J. Miles, "On the growth of a meromorphic function and its derivatives", Complex Var. Theory Appl., **12**, 245 – 260 (1989).

[5] L. A. Rubel and C. C. Yang, "Values shared by an entire function and its derivative", Lecture Notes in Math., **599**, 101 – 103 (1977).

Поступила 24 мая 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 3, 2017, стр. 53-60.

A NOTE ON SOLUTIONS OF SOME DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

X. QI, Y. LIU AND L. YANG

University of Jinan, Jinan, Shandong, China
Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing, Zhejiang, China
Shandong University, Jinan, Shandong, China
E-mails: *xiaoguang.202@163.com*, *xiaoqqi@mail.sdu.edu.cn*; *yalbipul86@gmail.com*, *liuyongsdu@aliyun.com* *lzyang@sdu.edu.cn*

Abstract. This research is a continuation of the recent paper by X. Qi and L. Yang [15]. In this paper, we continue our study concerning existence of solutions of a Fermat type differential-difference equation, and improve the results obtained by K. Liu et al. in [8, 10].

MSC2010 numbers: 30D35, 39A05.

Keywords: Fermat type functional equation; entire solution; Nevanlinna theory.[1]

1. Introduction

A number of papers are devoted to the study of solutions of the following Fermat type functional equation:

$$f(z)^n + g(z)^n = 1. \tag{1.1}$$

For instance, in the case $n \geq 4$, Gross [3] has proved that the equation (1.1) has no transcendental meromorphic solutions. For the entire case, Montel [11] established that (1.1) has no transcendental entire solutions when $n \geq 3$. For $n = 2$, Gross [4] showed that the equation (1.1) has the entire solutions $f(z) = \sin(h(z))$ and $g(z) = \cos(h(z))$, where $h(z)$ is any entire function, and no other solutions exist. Later on, many authors investigated the generalization of equation (1.1) (see [17, 19, 21], and references therein). Recently, many articles were focused on complex difference equations. The background for these studies lies in the recently developed difference counterparts of Nevanlinna theory (see [1, 2]). Meanwhile, the difference analogues of the Fermat type functional equations have been investigated in a number of papers (see [7, 9, 12, 13, 14, 16, 18, 22]).

[1]This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 11301220, No. 11371225, No. 11401387, No. 11661052 and No. 11626112), the NSF of Shandong Province, China (No.ZR2012AQ020), the NSF of Zhejiang Province, China (No. Q14A10013) and the Fund of Doctoral Program Research of University of Jinan (XBS1211).

In the recent publications Liu et al. [8, 10] discussed the question of existence of entire solutions of finite order for the following Fermat type differential-difference equation:

$$(f'(z))^n + f(z+c)^m = 1. \tag{1.2}$$

Specifically, the following result was obtained.

Theorem A. *The equation (1.2) has no transcendental entire solutions of finite order, provided that $m \neq n$, where m and n are positive integers.*

In [15], the authors of this paper have obtained a similar result for more general equation.

Theorem B. *([15]) Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic function of finite order, m and n be two positive integers such that $m \geq 2n+4$, and let $H(z)$ be a meromorphic function satisfying $\overline{N}(r, \frac{1}{H}) = S(r, f)$. Then $f(z)$ is not a solution of the following equation:*

$$(f'(z))^n + f(z+c)^m = H(z). \tag{1.3}$$

In this paper, we continue our study concerning existence of entire solutions of equation (1.3). To simplify the proofs, we transform the equation (1.3) into the following:

$$f(z)^n + (f'(z+c))^m = P(z). \tag{1.4}$$

In what follows, we assume that the reader is familiar with the elements of Nevanlinna theory (see [6, 20]). Now we are in position to state the main results of this paper.

Theorem 1.1. *Let $P(z)$ be a polynomial, and let n and m be positive integers such that $n \neq m$. Then the equation (1.4) has no transcendental entire solutions of finite order.*

The following question arises naturally: what happens if in equation (1.4), $P(z)$ is a transcendental entire function? Our next result concerns this question, where we consider the special case: $P(z) = r(z)e^{s(z)} + q(z)$.

Theorem 1.2. *Let $P(z) = r(z)e^{s(z)} + q(z)$, where $r(z)$, $s(z)$ and $q(z)$ are nonzero polynomials. If n and m are two positive integers satisfying $n > m+1$, then the equation*

$$f(z)^n + (f'(z+c))^m = r(z)e^{s(z)} + q(z) \tag{1.5}$$

has no transcendental entire solutions of finite order.

Remark. The assertion of Theorem 1.2 is not true, if $n = m + 1$ or $n < m$. For example, when $m = 1$, the following equation

$$f(z)^2 + f'(z+c) = e^{2z} + 1,$$

where $c = \ln 2 + i\pi$, has a finite order transcendental entire solution $f(z) = e^z + 1$, and the transcendental entire function $f(z) = e^z + z$ solves the equation

$$f(z) + (f'(z+c))^2 = \frac{1}{4}e^{2z} + z + 1,$$

where $c = \ln\frac{1}{2} + i\pi$.

The following result contains a partial answer as to what may happen if $n = m$ in Theorem 1.2.

Theorem 1.3. *Let $f(z)$ be an entire function of order $1 \leq \sigma(f) < \infty$ and $\lambda(f) < 1$, and let $P(z) = r(z)e^{s(z)} + q(z)$, where $r(z)$, $s(z)$ and $q(z)$ are nonzero polynomials. Then $f(z)$ is not a solution of equation (1.5) when $n = m$.*

In the above stated results we considered only the finite order solutions of equation (1.4). The next result concerns the existence of infinite order solutions of (1.4).

Theorem 1.4. *Let $P(z)$ be a nonzero entire function of finite order, and let m and n be positive integers. Let $f(z)$ be an entire function satisfying the conditions: $\lambda(f) < \sigma(f) = \infty$ and the hyper-order $\sigma_2(f) < \infty$. Then $f(z)$ is not a solution of equation (1.4).*

2. Some lemmas

Lemma 2.1 ([2], Theorem 2.1). *Let $f(z)$ be a meromorphic function of finite order, and let $c \in \mathbb{C}$. Then*

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) + m\left(r, \frac{f(z)}{f(z+c)}\right) = S(r, f). \tag{2.1}$$

Lemma 2.2 ([1], Theorem 2.1). *Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic function of finite order $\sigma(f)$, and let $c \in \mathbb{C}$. Then*

$$T(r, f(z+c)) = T(r, f(z)) + O(r^{\sigma-1+\varepsilon}) + O(\log r).$$

Thus, if f is a finite order meromorphic function, then

$$T(r, f(z+c)) = T(r, f) + S(r, f).$$

Lemma 2.3 ([6], Theorem 2.4.2). *Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic solution of the equation*

$$f^n A(z, f) = B(z, f),$$

where $A(z,f)$ and $B(z,f)$ are differential polynomials in f and its derivatives with small meromorphic coefficients a_λ, in the sense that $m(r,a_\lambda)=S(r,f)$ for all $\lambda\in I$. If $d(B(z,f))\le n$, then $m(r,A(z,f))=S(r,f)$.

Lemma 2.4 ([20], Theorem 1.51). *Suppose that $f_j(z)$ $(j=1,\dots n)$ $(n\ge 2)$ are meromorphic functions, and $g_j(z)$ $(j=1,\dots,n)$ are entire functions satisfying the following conditions:*

(1) $\sum_{j=1}^{n} f_j(z)e^{g_j(z)}\equiv 0$.

(2) *$g_j(z)-g_k(z)$ are not constants for $1\le j<k\le n$.*

(3) *For $1\le j\le n$ and $1\le h<k\le n$, $T(r,f_j)=o\{T(r,e^{g_h-g_k})\}$, $r\to\infty$, $r\notin E$, where $E\subset(1,\infty)$ is of finite linear measure. Then $f_j(z)\equiv 0$.*

Lemma 2.5 ([5]). *Let $f(z)$ be a transcendental entire function of infinite order and $\sigma_2(f)<\infty$. Then $f(z)$ can be represented in the form $f(z)=U(z)e^{V(z)}$, where $U(z)$ and $V(z)$ are entire functions, and $\lambda(f)=\lambda(U)=\sigma(U)$.*

3. Proof of Theorem 1.1

Suppose there is a transcendental finite order entire solution $f(z)$ of equation (1.4). We discuss the following three cases.

Case 1. If $n>m$, then rewrite the equation (1.4) as follows:

$$f(z)^m f(z)^{n-m}=P(z)-\Big(\frac{f'(z+c)}{f(z+c)}\frac{f(z+c)}{f(z)}\Big)^m f(z)^m.$$

Applying the logarithmic derivative lemma, Lemmas 2.1, 2.3 and taking into account the assumption $n>m$, we conclude that

$$T(r,f^{n-m})=(n-m)T(r,f)=S(r,f),$$

yielding a contradiction.

Case 2. If $m>n=1$, then we have $f(z)+(f'(z+c))^m=P(z)$. Differentiating the above equation, we get

$$f'(z)+m(f'(z+c))^{m-1}f''(z+c)=P'(z). \tag{3.1}$$

Set $f'(z+c)=F(z)$, then $f'(z)=F(z-c)$. Moreover, in view of (3.1), we have

$$F(z-c)+m(F(z))^{m-1}F'(z)=P'(z),$$

Rewrite the above equation as

$$m(F(z))^{m-1}F'(z)=P'(z)-\frac{F(z-c)}{F(z)}F(z).$$

Using Lemmas 2.1, 2.3 and taking into account the assumption $m > n = 1$, we get

$$T(r, f'(z+c)) = T(r, F') = m(r, F') = S(r, F') = S(r, f'(z+c)),$$

yielding a contradiction.

Case 3. If $m > n \geq 2$, then by the second fundamental theorem for three small target functions, we obtain

$$\begin{aligned} mT(r, f'(z+c)) &= T(r, (f'(z+c))^m) \\ &\leq \overline{N}\Big(r, \frac{1}{(f'(z+c))^m}\Big) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{(f'(z+c))^m - P}\Big) + S(r, f). \end{aligned}$$

Furthermore, equation (1.4) gives $mT(r, f'(z+c)) = nT(r, f) + S(r, f)$. Therefore, we can write

$$\begin{aligned} (m-1)T(r, f'(z+c)) &\leq \overline{N}\Big(r, \frac{1}{(f'(z+c))^m - P}\Big) + S(r, f) = \overline{N}(r, \frac{1}{f^n}) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + S(r, f) = \frac{m}{n}T(r, f'(z+c)) + S(r, f), \end{aligned}$$

implying that $T(r, f'(z+c)) \leq (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})T(r, f'(z+c)) + S(r, f)$, which contradicts the assumption that $m > n \geq 2$. Theorem 1.1 is proved.

4. Proof of Theorem 1.2

Let $f(z)$ be a transcendental entire solution of finite order of equation (1.5). Then differentiating (1.5) and eliminating $e^{s(z)}$, we can write

$$\begin{aligned} f(z)^{n-1}\big(nf'(z) - (s'(z) + \frac{r'(z)}{r(z)})f(z)\big) &= q'(z) - m\big(f'(z+c)\big)^{m-1}f''(z+c) \\ &\quad + (s'(z) + \frac{r'(z)}{r(z)})((f'(z+c))^m - q(z)). \end{aligned} \tag{4.1}$$

If $nf'(z) - (s'(z) + \frac{r'(z)}{r(z)})f \equiv 0$, then $f(z)^n = Ar(z)e^{s(z)}$, where A is a non-zero constant. Thus, $f(z)$ can be rewritten as

$$f(z) = h(z)e^{\frac{s(z)}{n}},$$

where $h(z)$ is a polynomial. Substituting $f(z) = h(z)e^{\frac{s(z)}{n}}$ into (1.5), we obtain

$$(A-1)r(z)e^{s(z)} + \Big((h(z+c)e^{\frac{s(z+c)}{n}})'\Big)^m - q(z) = 0. \tag{4.2}$$

Hence,

$$(A-1)r(z)e^{s(z)} + \big(G(z)e^{\frac{s(z+c)}{n}}\big)^m - q(z) = 0, \tag{4.3}$$

where $G(z) = h'(z+c) + \frac{h(z+c)s'(z+c)}{n}$. Clearly, $A \neq 1$. We set $g(z) = e^{\frac{s(z)}{n}}$, and use (4.3) and Lemma 2.2, to obtain

$$nT(r, g) = mT(r, g) + S(r, g).$$

which contradicts the assumption that $n > m + 1$.

Now let $nf'(z) - (s'(z) + \frac{r'(z)}{r(z)})f \not\equiv 0$. We rewrite the equation (4.1) as follows:

$$\begin{aligned}
&f(z)^{n-1}\big(nf'(z) - (s'(z) + \frac{r'(z)}{r(z)})f(z)\big)\\
&= q'(z) - m\Big(\big(\frac{f'(z+c)}{f(z+c)}\frac{f(z+c)}{f(z)}\big)^{m-1}\frac{f''(z+c)}{f(z+c)}\frac{f(z+c)}{f(z)}\Big)f(z)^m\\
&+ (s'(z) + \frac{r'(z)}{r(z)})\Big(\big(\frac{f'(z+c)}{f(z+c)}\frac{f(z+c)}{f(z)}\big)^m f(z)^m - q(z)\Big).
\end{aligned}$$

Applying the logarithmic derivative lemma and Lemmas 2.1, 2.3, and taking into account that by assumption $f(z)$ is entire, we obtain

$$T\big(r, nf'(z) - (s'(z) + \frac{r'(z)}{r(z)})f\big) = S(r,f)$$

and

$$T\big(r, f(nf'(z) - (s'(z) + \frac{r'(z)}{r(z)})f)\big) = S(r,f).$$

Therefore $T(r,f) = S(r,f)$, which is a contradiction. Theorem 1.2 is proved.

5. Proof of Theorem 1.3

Suppose that $f(z)$ is an entire solution of (1.5) satisfying $1 \le \sigma(f) < \infty$ and $\lambda(f) < 1$. Then, by the Hadamard factorization theorem, $f(z)$ can be rewritten as $f(z) = h(z)e^{p(z)}$, where $h(z)$ is an entire function satisfying $\lambda(f) = \lambda(h) = \sigma(h) < 1$, and $p(z)$ is a polynomial. We substitute $f(z)$ into (1.5) to obtain

$$h(z)^n e^{np(z)} + \lambda(z)^n e^{np(z+c)} = r(z)e^{s(z)} + q(z), \tag{5.1}$$

where $\lambda(z) = h'(z+c) + h(z+c)p'(z+c)$. Thus, we have

$$h(z)^n e^{np(z)} + \lambda(z)^n e^{np(z+c)} - r(z)e^{s(z)} - q(z) \equiv 0. \tag{5.2}$$

We discuss the following three cases:

Case 1. If $p(z+c) - p(z) \equiv a_1$, where a_1 is a constant, then we obtain $p(z) = Bz + C$, where $B \ne 0$. Substituting $p(z) = Bz + C$ into (5.2), we get

$$e^{n(Bz+C)}(h(z)^n + \lambda(z)^n e^{na_1}) - r(z)e^{s(z)} - q(z) \equiv 0. \tag{5.3}$$

If $s(z) - n(Bz + C) \equiv a_2$, where a_2 is a constant, then by (5.3), it follows that

$$e^{n(Bz+C)}(h(z)^n + \lambda(z)^n e^{na_1}) - r(z)e^{a_2}) \equiv q(z), \tag{5.4}$$

which is impossible under the assumption that $q(z) \not\equiv 0$.

Next, if $s(z) - n(Bz + C) \not\equiv a_2$, then applying Lemma 2.4 to (5.3), we get $q(z) \equiv 0$, which is a contradiction as well. Hence, $p(z + c) - p(z) \not\equiv a_1$.

Case 2. If $np(z+c) - s(z) \equiv b_1$, where b_1 is a constant, then we get

$$(\lambda(z)^n e^{b_1} - r(z))e^{s(z)} + h(z)^n e^{np(z)} - q(z) \equiv 0. \tag{5.5}$$

Observe that $s(z) - np(z) \not\equiv b_2$. Indeed, if $s(z) - np(z) \equiv b_2$, then we have $np(z+c) - np(z) \equiv b_1 + b_2$, which is a contradiction by Case 1. When $s(z) - np(z) \not\equiv b_2$, then applying Lemma 2.4 to (5.5), we get $q(z) \equiv 0$, which is a contradiction. This shows that $np(z+c) - s(z) \not\equiv b_1$.

Case 3. Arguments, similar to those applied in Case 2, can be used to show that $np(z) - s(z) \not\equiv c_1$, where c_1 is a constant.

Combining the Cases 1 - 3, Lemma 2.4 and formula (5.2), we conclude that $q(z) \equiv 0$, which is a contradiction. Therefore, $f(z)$ is not a solution of equation (1.5). Theorem 1.3 is proved.

6. Proof of Theorem 1.4

Let $f(z)$ be an entire solution of equation (1.4) satisfying $\lambda(f) < \sigma(f) = \infty$ and $\sigma_2(f) < \infty$. Hence, we can apply Lemma 2.5 to obtain

$$f(z) = U(z)e^{V(z)}, \tag{6.1}$$

where $U(z)$ and $V(z)$ are entire functions. Moreover, since $\lambda(U) = \sigma(U) = \lambda(f) < \infty$, $\sigma(f) = \infty$, we have $\sigma(f) = \sigma(e^{V(z)}) = \infty$. Therefore, $V(z)$ is a transcendental function. Substituting (6.1) into (1.4), we obtain

$$U(z)^n e^{nV(z)} + H(z)^m e^{mV(z+c)} = P(z), \tag{6.2}$$

where $H(z) = U'(z+c) + U(z+c)V'(z+c)$. From the assumption $\sigma_2(f) < \infty$, we get $\sigma(V) < \infty$, and so $\sigma(H) < \infty$. We write (6.2) in the form

$$U(z)^n + H(z)^m e^{G(z)} = P(z)e^{-nV(z)},$$

where $G(z) := mV(z+c) - nV(z)$. If $G(z)$ is a polynomial, then we have $\sigma(U(z)^n + H(z)^m e^{G(z)}) < \infty$ and $\sigma(P(z)e^{-nV(z)}) = \infty$, which is a contradiction.

Therefore, $G(z)$ is a transcendental entire function. We write (6.2) as follows

$$U(z)^n e^{nV(z)} + H(z)^m e^{mV(z+c)} - P(z)e^0 = 0, \tag{6.3}$$

and observe that $H_1(z) = e^{G(z)}$, $H_2(z) = e^{nV(z)}$, $H_3(z) = e^{mV(z+c)}$ are entire functions of regular growth with infinite order. Therefore, for $i = 1, 2, 3$ we have $T(r, U^n) = o\{T(r, H_i)\}$, $T(r, H^m) = o\{T(r, H_i)\}$, $T(r, P) = o\{T(r, H_i)\}$.

Applying Lemma 2.5 to (6.3), we conclude that $U(z)^n \equiv H(z)^m \equiv P(z) \equiv 0$, which is a contradiction. Hence, $f(z)$ cannot be a solution of equation (1.4). Theorem 1.4 is proved.

Acknowledgements. The authors thank the referee for valuable suggestions that led to improvement of the present paper.

Список литературы

[1] Y. M. Chiang and S. J. Feng, "On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane", Ramanujan J., **16**, 105 – 129 (2008).

[2] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, "Nevanlinna theory for the difference operator", Ann. Acad. Sci. Fenn., **31**, 463 – 478 (2006).

[3] F. Gross, "On the equation $f^n + g^n = 1$", Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 86 – 88 (1966).

[4] F. Gross, "On the equation $f^n + g^n = h^n$", Am. Math. Mon. **73**, 1093 – 1096 (1966).

[5] G. Jank and L. Volkmann, Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen, Birkhäuser Verlag, Basel (1985).

[6] W. Hayman, Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford (1964).

[7] K. Liu, L. Z. Yang and X. L. Liu, "Existence of entire solutions of nonlinear difference equations", Czech. Math. J., **61**, 565 – 576 (2011).

[8] K. Liu, T. B. Cao and H. Z. Cao, "Entire solutions of Fermat type differential-difference equations", Arch. Math., **99**, 147 – 155 (2012).

[9] K. Liu and T. B. Cao, "Entire solutions of Fermat type q-difference differential equations", Electron. J. Diff. Equ., no. 59, 1 – 10 (2013).

[10] K. Liu and L. Z. Yang, "On entire solutions of some differential-fifference equations, Comput. Methods Funct. Theory, **13**, 433 – 447 (2013).

[11] P. Montel, "Lecons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications" [in French], Gauthier- Villars, Paris, 135 – 136 (1927).

[12] C. W. Peng and Z. X. Chen, "On a conjecture concerning some nonlinear difference equations", Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **36**, 221 – 227 (2013).

[13] X. G. Qi, "Value distribution and uniqueness of difference polynomials and entire solutions of difference equations", Ann. Polon. Math. **102**, 129 – 142 (2011).

[14] X. G. Qi and K. Liu, "Uniqueness and value distribution of differences of entire functions", J. Math. Anal. Appl., **379**, 180 – 187 (2011).

[15] X. G. Qi and L. Z. Yang, "Properties of meromorphic solutions to certain differential-difference equations", Electron. J. Differ. Eq., no. 135, 1 – 9 (2013).

[16] X. G. Qi, Y. H. Cao and Y. Liu, "On properties of entire solutions of difference equations and difference polynomials", Math. Slovaca, **65**, 545 – 554 (2015).

[17] J. F. Tang and L. W. Liao, "The transcendental meromorphic solutions of a certain type of nonlinear differential equations, J. Math. Anal. Appl., **334**, 517 – 527 (2007).

[18] Z. T. Wen, J. Heittokangas and I. Laine, "Exponential polynomials as solutions of certain nonlinear difference equations", Acta Math. Sin. **28**, 1295 – 1306 (2012).

[19] C. C. Yang, "A generalization of a theorem of P. Montel on entire functions", Proc. Am. Math. Soc., **26**, 332 – 334 (1970).

[20] C. C. Yang and H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer Academic Publishers (2003).

[21] C. C. Yang and P. Li, "On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear differential equations", Arch. Math., **82**, 442 – 448 (2004).

[22] C. C. Yang and I. Laine, "On analogies between nonlinear difference and differential equations", Proc. Japan Acad. Ser. A., **86**, 10 – 14 (2010).

Поступила 5 июня 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 3, 2017, стр. 61-76.

COMMUTATORS OF HOMOGENEOUS FRACTIONAL INTEGRALS ON HERZ-TYPE HARDY SPACES WITH VARIABLE EXPONENT

HONGBIN WANG

Shandong University of Technology, Zibo, China
E-mail: *hbwang_2006@163.com*

Abstract. Let $\Omega \in L^s(S^{n-1})$, $s \geq 1$, be a homogeneous function of degree zero, and let σ $(0 < \sigma < n)$ and b be Lipschitz or BMO functions. In this paper, we establish the boundedness of the commutators $[b, T_{\Omega,\sigma}]$, generated by a homogeneous fractional integral operator $T_{\Omega,\sigma}$ and function b, on the Herz-type Hardy spaces with variable exponent.

MSC2010 numbers: 42B20; 42B35.

Keywords: Herz-type Hardy space; variable exponent; commutator; homogeneous fractional integral operator.

1. Introduction

The theory of function spaces with variable exponent has extensively been studied by researchers since the work of Kováčik and Rákosník [10]. In [3] and [16], the boundedness of some integral operators on variable L^p spaces were established. In addition, the authors of [17] have defined the Herz-type Hardy spaces with variable exponent and gave their atomic characterizations.

Given an open set $E \subset \mathbb{R}^n$ and a measurable function $p(\cdot) : E \longrightarrow [1, \infty)$. By $L^{p(\cdot)}(E)$ we denote the set of measurable functions f on E such that for some $\lambda > 0$,

$$\int_E \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx < \infty.$$

This set becomes a Banach function space when equipped with the Luxemburg-Nakano norm:

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(E)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_E \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

These spaces are referred to as variable L^p spaces, since they generalize the standard L^p spaces: if $p(x) = p$ is constant, then $L^{p(\cdot)}(E)$ is isometrically isomorphic to $L^p(E)$.

The space $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(E)$ is defined by

$$L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(E) := \{f : f \in L^{p(\cdot)}(F) \text{ for all compact subsets } F \subset E\}.$$

Define $\mathcal{P}^0(E)$ to be the set of those functions $p(\cdot) : E \longrightarrow (0, \infty)$ for which

$$p^- = \operatorname{ess\,inf}\{p(x) : x \in E\} > 0 \quad \text{and} \quad p^+ = \operatorname{ess\,sup}\{p(x) : x \in E\} < \infty.$$

Also, define $\mathcal{P}(E)$ to be the set of those functions $p(\cdot) : E \longrightarrow [1, \infty)$ for which

$$p^- = \operatorname{ess\,inf}\{p(x) : x \in E\} > 1 \quad \text{and} \quad p^+ = \operatorname{ess\,sup}\{p(x) : x \in E\} < \infty.$$

Denote $p'(x) = p(x)/(p(x) - 1)$. Let $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ be the set of those functions $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ for which the Hardy-Littlewood maximal operator M is bounded on $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Also, by $|A|$ and χ_A we denote the Lebesgue measure and the characteristic function of a measurable set $A \subset \mathbb{R}^n$, respectively. The notation $f \approx g$ means that there exist constants $C_1, C_2 > 0$ such that $C_1 g \le f \le C_2 g$.

The lemmas that follow contain some important properties of the variable L^p spaces.

Lemma 1.1 ([1]). *Let $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ be such that*

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{-\log(|x - y|)}, \quad |x - y| \le 1/2 \tag{1.1}$$

and

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{\log(|x| + e)}, \quad |y| \ge |x|. \tag{1.2}$$

Then $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, that is, the Hardy-Littlewood maximal operator M is bounded on $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 1.2 ([10]). *Let $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. If $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ and $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, then fg is integrable on $\mathbb{R}^n$ and*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \le r_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

where

$$r_p = 1 + 1/p^- - 1/p^+.$$

This inequality is named the generalized Hölder inequality with respect to the variable L^p spaces.

Lemma 1.3 ([8]). *Let $q(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Then there exists a positive constant C such that for all balls B in $\mathbb{R}^n$ and all measurable subsets $S \subset B$ the following inequalities hold:*

$$\frac{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_S\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \le C\frac{|B|}{|S|}, \quad \frac{\|\chi_S\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \le C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_1} \text{ and}$$

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \le C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_2},$$

where δ_1 and δ_2 are constants with $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$.

Throughout the paper constant δ_2 will be the same as in Lemma 1.3.

Lemma 1.4 ([8]). *Suppose $q(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Then there exists a constant $C > 0$ such that for all balls B in $\mathbb{R}^n$ the following inequality holds:*

$$\frac{1}{|B|}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C.$$

Next, we recall the definition of the Herz-type spaces with variable exponent. Let $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^k\}$ and $A_k = B_k \setminus B_{k-1}$ for $k \in \mathbb{Z}$. Denote by $\mathbb{Z}_+$ and $\mathbb{N}$ the sets of all positive and non-negative integers, respectively, $\chi_k = \chi_{A_k}$ for $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{\chi}_k = \chi_k$ if $k \in \mathbb{Z}_+$ and $\tilde{\chi}_0 = \chi_{B_0}$.

Definition 1.1 ([8]). *Let $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p \le \infty$ and $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. The homogeneous Herz space with variable exponent, denoted by $\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, is defined by*

$$\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^{q(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

where

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|^p_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}^{1/p}.$$

The non-homogeneous Herz space with variable exponent, denoted by $K^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, is defined by

$$K^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^{q(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

where

$$\|f\|_{K^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p}\|f\tilde{\chi}_k\|^p_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}^{1/p}.$$

In [17], the authors have defined the Herz-type Hardy spaces with variable exponent $H\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ and gave their atomic decomposition characterizations.

Let $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denote the space of Schwartz functions, and let $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ be the dual space of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Let $G_N(f)(x)$ be the grand maximal function of $f(x)$ defined by

$$G_N(f)(x) = \sup_{\phi \in \mathcal{A}_N} |\phi^*_\nabla(f)(x)|,$$

where $A_N \triangleq \{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \sup_{|\alpha|,|\beta|\leq N} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| \leq 1\}$, $N > n+1$, and ϕ^*_∇ is the nontangential maximal operator defined by

$$\phi^*_\nabla(f)(x) = \sup_{|y-x|<t} |\phi_t * f(y)|$$

with $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(x/t)$.

Definition 1.2 ([17]). *Let $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ and $N > n+1$.*

(i) The homogeneous Herz-type Hardy space with variable exponent $H\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ is defined by

$$H\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : G_N(f)(x) \in \dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

and $\|f\|_{H\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|G_N(f)\|_{\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$.

(ii) The non-homogeneous Herz-type Hardy space with variable exponent $HK^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ is defined by

$$HK^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : G_N(f)(x) \in K^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

and $\|f\|_{HK^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|G_N(f)\|_{K^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$.

For $\alpha \in \mathbb{R}$ we denote by $[\alpha]$ the largest integer less than or equal to α.

Definition 1.3 ([17]). *Let $n\delta_2 \leq \alpha < \infty$ and $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, and let s be a non-negative integer such that $s \geq [\alpha - n\delta_2]$.*

(i) A function $a(x)$ on $\mathbb{R}^n$ is said to be a central $(\alpha, q(\cdot))$-atom, if it satisfies the following conditions:

(1) $\operatorname{supp} a \subset B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

(2) $\|a\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq |B(0,r)|^{-\alpha/n}$.

(3) $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) x^\beta dx = 0$, $|\beta| \leq s$.

(ii) A function $a(x)$ on $\mathbb{R}^n$ is said to be a central $(\alpha, q(\cdot))$-atom of restricted type, if it satisfies the conditions (2), (3) above and

(1') $\operatorname{supp} a \subset B(0,r)$, $r \geq 1$.

Lemma 1.5 ([17]). *Let $n\delta_2 \leq \alpha < \infty$, $0 < p < \infty$ and $q(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Then $f \in H\dot{K}^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ (respectively $f \in HK^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$) if and only if*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k \quad \left(\text{respectively } f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k\right) \quad \text{in the sense of } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

where each a_k is a central $(\alpha, q(\cdot))$-atom (respectively a central $(\alpha, q(\cdot))$-atom of restricted type) with support contained in B_k and $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p < \infty$ (respectively

$\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$). *Moreover,*

$$\|f\|_{HK^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\approx\inf\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{1/p}\left(\text{respectively}\quad\|f\|_{HK^{\alpha,p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\approx\inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{1/p}\right),$$

where the infimum is taken over all above decompositions of f.

Let S^{n-1} denote the unit sphere in $\mathbb{R}^n (n\geq 2)$ equipped with normalized Lebesgue measure, and let $\Omega\in L^s(S^{n-1})$, $s\geq 1$, be a homogeneous function of degree zero. For $0<\sigma<n$, the homogeneous fractional integral operator $T_{\Omega,\sigma}$ is defined by

$$T_{\Omega,\sigma}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\sigma}}f(y)dy.$$

Muckenhoupt and Wheeden [12] have established the weighted (L^p, L^q) boundedness of the operator $T_{\Omega,\sigma}$ with power weights. Recently, Tan and Liu [15] gave the $(L^{p(\cdot)}, L^{q(\cdot)})$, $(H^{p(\cdot)}, L^{q(\cdot)})$ and $(H\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_1(\cdot)}, \dot{K}^{\alpha,p_2}_{q_2(\cdot)})$ boundedness of $T_{\Omega,\sigma}$.

Let b be a locally integrable function. the commutator of a homogeneous fractional integral operator $T_{\Omega,\sigma}$, generated by b and denoted by $[b,T_{\Omega,\sigma}]$, is defined by

$$[b,T_{\Omega,\sigma}]f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\sigma}}(b(x)-b(y))f(y)dy.$$

Motivated by the results of [5] and [15], in this paper we study the boundedness of the commutator $[b,T_{\Omega,\sigma}]$ for a homogeneous fractional integral operator $T_{\Omega,\sigma}$ on the Herz-type Hardy spaces with variable exponent.

2. A BMO ESTIMATE FOR THE COMMUTATOR OF HOMOGENEOUS FRACTIONAL INTEGRAL OPERATOR

Let us first recall that the space $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ consists of all locally integrable functions f such that

$$\|f\|_* = \sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|dx<\infty,$$

where $f_Q=|Q|^{-1}\int_Q f(y)dy$, the supremum is taken over all cubes $Q\subset\mathbb{R}^n$ with sides parallel to the coordinate axes, and $|Q|$ denotes the Lebesgue measure of Q.

A nonnegative locally integrable function $\omega(x)$ on $\mathbb{R}^n$ is said to belong to the class $A(p,q)$ $(1<p,q<\infty)$, if there is a constant $C>0$ such that

$$\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^q dx\right)^{1/q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^{-p'}dx\right)^{1/p'}\leq C<\infty,$$

where $p'=p/(p-1)$. Also, we will say that $\omega\in A_1$ if $M\omega(x)\leq C\omega(x)$ for a.e. x.

Let $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. The weighted (L^p, L^q) boundedness of the commutator $[b, T_{\Omega,\sigma}]$ have been proved by Segovia and Torrea [14], Ding [5], and Ding and Lu [6].

Lemma 2.1 ([5]). *Suppose that $0 < \sigma < n$, $s' < p < n/\sigma$, $1/q = 1/p - \sigma/n$, $\Omega \in L^s(\mathrm{S}^{n-1})$, and $\omega^{s'} \in A(p/s', q/s')$. Then for $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ and $m \in \mathbb{Z}$ there is a constant C, independent of f, such that*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |[b, T_{\Omega,\sigma}]^m f(x)\omega(x)|^q dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\omega(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Lemma 2.2 ([3]). *Given a family $\mathcal{F}$ and an open set $E \subset \mathbb{R}^n$. Assume that for some p_0 and q_0, $0 < p_0 \le q_0 < \infty$, and every weight $\omega \in A_1$,*

$$\left(\int_E f(x)^{q_0}\omega(x)dx\right)^{1/q_0} \le C_0\left(\int_E g(x)^{p_0}\omega(x)^{p_0/q_0}dx\right)^{1/p_0}, \quad (f, g) \in \mathcal{F}.$$

Given $p(\cdot) \in \mathcal{P}^0(E)$ such that $p_0 < p_- \le p_+ < \frac{p_0 q_0}{q_0 - p_0}$, define the function $q(\cdot)$ by

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}, \quad x \in E.$$

If $p(\cdot)$ satisfies the conditions (1.1) and (1.2) of Lemma 1.1, then for all $(f, g) \in \mathcal{F}$ such that $f \in L^{q(\cdot)}(E)$, the following inequality holds:

$$\|f\|_{L^{q(\cdot)}(E)} \le C\|g\|_{L^{p(\cdot)}(E)}.$$

Using Lemmas 2.1 and 2.2, and arguments similar to those applied in the proof of Theorem 1.9 of [15], we can prove the $(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$-boundedness of the commutator $[b, T_{\Omega,\sigma}]$.

Before stating our result, we first recall the definition of the L^s-Dini condition. We say that a function Ω satisfies the L^s-Dini condition if $\Omega \in L^s(\mathrm{S}^{n-1})$ with $s \ge 1$ is homogeneous of degree zero on $\mathbb{R}^n$, and

$$\int_0^1 \frac{\omega_s(\delta)}{\delta} d\delta < \infty,$$

where $\omega_s(\delta)$ denotes the integral modulus of continuity of order s of Ω defined by

$$\omega_s(\delta) = \sup_{|\rho|<\delta}\left(\int_{\mathrm{S}^{n-1}} |\Omega(\rho x') - \Omega(\rho x')|^s dx'\right)^{1/s},$$

and ρ is a rotation in $\mathbb{R}^n$ with $|\rho| = \|p - I\|$.

Now we are ready to state our result concerning the boundedness of the commutator $[b, T_{\Omega,\sigma}]$ on the Herz-type Hardy spaces with variable exponent.

Theorem 2.1. *Suppose that $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \beta \le 1$, $0 < \sigma < n - \beta$, and $q_1(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ satisfies the conditions (1.1) and (1.2) of Lemma 1.1 with $q_1^+ < n/\sigma$*

and $1/q_1(x) - 1/q_2(x) = \sigma/n$. *Let* $\Omega \in L^s(S^{n-1})(s > q_2^+)$ *with* $1 \leq s' < q_1^-$ *and satisfy*

$$\int_0^1 \frac{\omega_s(\delta)}{\delta^{1+\beta}} d\delta < \infty.$$

Let $0 < p_1 \leq p_2 < \infty$ *and* $n\delta_2 \leq \alpha < n\delta_2 + \beta$ *(respectively* $0 < \max(n\delta_2, \alpha_2) \leq \alpha_1 < n\delta_2 + \beta$*). Then the commutator* $[b, T_{\Omega,\sigma}]$ *is bounded from* $H\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *(respectively from* $HK^{\alpha_1,p_1}_{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$*) to* $\dot{K}^{\alpha,p_2}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *(respectively to* $K^{\alpha_2,p_2}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$*).*

To prove Theorem 2.1, we also will need the following lemmas.

Lemma 2.3 ([9]). *Let* $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, k *be a positive integer and* B *be a ball in* $\mathbb{R}^n$. *Then for all* $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *and all* $j, i \in \mathbb{Z}$ *with* $j > i$, *we have*

$$\frac{1}{C}\|b\|_*^k \leq \sup_B \frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \|(b - b_B)^k \chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|b\|_*^k,$$

$$\|(b - b_{B_i})^k \chi_{B_j}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C(j-i)^k \|b\|_*^k \|\chi_{B_j}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

where $B_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^i\}$ *and* $B_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^j\}$.

Lemma 2.4 ([2]). *Given a set* E *and a function* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(E)$, *let* $f : E \times E \to \mathbb{R}$ *be a measurable function (with respect to product measure), such that* $f(\cdot, y) \in L^{p(\cdot)}(E)$ *for almost every* $y \in E$. *Then the following inequality holds:*

$$\left\| \int_E f(\cdot, y) dy \right\|_{L^{p(\cdot)}(E)} \leq C \int_E \|f(\cdot, y)\|_{L^{p(\cdot)}(E)} dy.$$

Lemma 2.5 ([13]). *Let* $\tilde{q}(\cdot)$ *be a variable exponent defined by* $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{\tilde{q}(x)} + \frac{1}{q}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. *Then for all measurable functions* f *and* g *we have*

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^{\tilde{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|fg\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Lemma 2.6 ([4]). *Let* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *satisfy the conditions (1.1) and (1.2) of Lemma 1.1. Then for every cube (or ball)* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *we have*

$$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \begin{cases} |Q|^{\frac{1}{p(x)}} & \text{if } |Q| \leq 2^n \text{ and } x \in Q, \\ |Q|^{\frac{1}{p(\infty)}} & \text{if } |Q| \geq 1, \end{cases}$$

where $p(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} p(x)$.

Lemma 2.7 ([7]). *Suppose that* $0 < \sigma < n$, $s > 1$, *and* Ω *satisfies the* L^s*-Dini condition. If there is a constant* $a_0 > 0$ *such that* $|y| < a_0 R$, *then the following inequality holds:*

$$\left(\int_{R<|x|<2R} \left| \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(x)}{|x|^{n-\sigma}} \right|^s dx \right)^{1/s} \leq C R^{\frac{n}{s}-(n-\sigma)} \left\{ \frac{|y|}{R} + \int_{|y|/2R<\delta<|y|/R} \frac{\omega_s(\delta)}{\delta} d\delta \right\}.$$

Proof of Theorem 2.1. We prove the theorem only for homogeneous case, because in view of embedding $K^{\alpha_1,p_2}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset K^{\alpha_2,p_2}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ for $0 < \alpha_2 \leq \alpha_1$, proved in [18], the non-homogeneous case can be treated similarly. Let $f \in HK^{\alpha,p_1}_{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ and $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. By Lemma 1.5 we have $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j a_j$, where $\|f\|_{HK^{\alpha,p_1}_{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \inf(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1})^{1/p_1}$ (the infimum is taken over above decompositions of f), and a_j is a dyadic central $(\alpha, q_1(\cdot))$-atom with support B_j. Noting that $p_1 \leq p_2$, we can write

$$\begin{aligned}
&\|[b,T_{\Omega,\sigma}](f)\|^{p_1}_{K^{\alpha,p_2}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_2}\|[b,T_{\Omega,\sigma}](f)\chi_k\|^{p_2}_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}^{p_1/p_2}\\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_1}\|[b,T_{\Omega,\sigma}](f)\chi_k\|^{p_1}_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_1}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|\|[b,T_{\Omega,\sigma}](a_j)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right)^{p_1} \qquad (2.1)\\
&\quad + C\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_1}\left(\sum_{j=k-1}^{\infty}|\lambda_j|\|[b,T_{\Omega,\sigma}](a_j)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right)^{p_1}\\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

We first estimate I_1. For each $k \in \mathbb{Z}$, $j \leq k-2$ and a.e. $x \in A_k$, using Lemma 2.4, the Minkowski inequality and the vanishing moments of a_j, we get

$$\begin{aligned}
&\|[b,T_{\Omega,\sigma}](a_j)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \int_{B_j}\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right|(b(\cdot)-b(y))\chi_k(\cdot)\right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|a_j(y)|dy\\
&\leq \int_{B_j}\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right||b(\cdot)-b_{B_j}|\chi_k(\cdot)\right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|a_j(y)|dy\\
&\quad + \int_{B_j}\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right|\chi_k(\cdot)\right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|b_{B_j}-b(y)||a_j(y)|dy\\
&=: I_{11} + I_{12}.
\end{aligned}$$

To estimate I_{11}, we note that $s > q_2^+$, and denote $\tilde{q}_2(\cdot) > 1$ and $\frac{1}{q_2(x)} = \frac{1}{\tilde{q}_2(x)} + \frac{1}{s}$. Then by Lemmas 2.3 and 2.5 we have

$$\begin{aligned}
&\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right||b(\cdot)-b_{B_j}|\chi_k(\cdot)\right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \left\|\left|\frac{\Omega(\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right|\chi_k(\cdot)\right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}\||b(\cdot)-b_{B_j}|\chi_k(\cdot)\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot-y)}{|\cdot-y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right|\chi_k(\cdot)\right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}(k-j)\|b\|_*\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

When $|B_k| \leq 2^n$ and $x_k \in B_k$, by Lemma 2.6 we have

$$\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx |B_k|^{\frac{1}{\tilde{q}_2(x_k)}} \approx \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{s}-\frac{\sigma}{n}}.$$

When $|B_k| \geq 1$ we have

$$\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx |B_k|^{\frac{1}{q_2(\infty)}} \approx \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{s}-\frac{\sigma}{n}}.$$

So, we obtain $\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{s}-\frac{\sigma}{n}}$.

Meanwhile, by Lemma 2.7 we have

$$\begin{aligned}
&\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right| \chi_k(\cdot)\right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq 2^{(k-1)(\frac{n}{s}-(n-\sigma))}\left\{\frac{|y|}{2^k} + \int_{|y|/2^k}^{|y|/2^{k-1}} \frac{\omega_s(\delta)}{\delta}d\delta\right\} \\
&\leq 2^{(k-1)(\frac{n}{s}-(n-\sigma))}\left(2^{j-k+1} + 2^{(j-k+1)\beta}\int_0^1 \frac{\omega_s(\delta)}{\delta}d\delta\right) \\
&\leq C2^{(k-1)(\frac{n}{s}-(n-\sigma))}2^{(j-k)\beta}.
\end{aligned}$$

So, using the generalized Hölder inequality, we obtain the following estimate for I_{11}:

(2.2)

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_{B_j}\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right| |b(\cdot) - b_{B_j}|\chi_k(\cdot)\right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |a_j(y)|dy \\
&\leq C(k-j)\|b\|_* 2^{(k-1)(\frac{n}{s}-(n-\sigma))}2^{(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|B_k|^{-\frac{1}{s}-\frac{\sigma}{n}}\int_{B_j}|a_j(y)|dy \\
&\leq C(k-j)\|b\|_* 2^{-kn+(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

To estimate I_{12}, we use arguments similar to those applied for I_{11}, to obtain

$$\begin{aligned}
&\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right| \chi_k(\cdot)\right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \left\|\left|\frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right| \chi_k(\cdot)\right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|\chi_k(\cdot)\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right| \chi_k(\cdot)\right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C2^{(k-1)(\frac{n}{s}-(n-\sigma))}2^{(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C2^{-kn+(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

So, by Lemma 2.3 and the generalized Hölder inequality, we have

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int_{B_j}\left\|\left|\frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}}\right| \chi_k(\cdot)\right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |b_{B_j} - b(y)||a_j(y)|dy \\
&\leq C2^{-kn+(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\int_{B_j}|b_{B_j} - b(y)||a_j(y)|dy \qquad (2.3) \\
&\leq C2^{-kn+(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|(b_{B_j} - b)\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C\|b\|_* 2^{-kn+(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Next, using (2.2), (2.3), and Lemmas 1.3 and 1.4, we can write

$$\begin{aligned}
&\|[b,T_{\Omega,\alpha}](a_j)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\\
&\le C(k-j)\|b\|_*2^{-kn+(j-k)\beta}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\\
&\le C(k-j)\|b\|_*2^{(j-k)\beta}\|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}\frac{\|\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}{\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}\\
&\le C(k-j)2^{-j\alpha+(j-k)(\beta+n\delta_2)}\|b\|_*.
\end{aligned}$$

So, we have

$$\begin{aligned}
I_1 &\le C\|b\|_*^{p_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|(k-j)2^{-j\alpha+(j-k)(\beta+n\delta_2)}\right)^{p_1}\\
&= C\|b\|_*^{p_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|(k-j)2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)}\right)^{p_1}.
\end{aligned}$$

When $1 < p_1 < \infty$, take $1/p_1 + 1/p_1' = 1$. Since $\beta + n\delta_2 - \alpha > 0$, we can use the Hölder inequality to obtain

$$\begin{aligned}
I_1 &\le C\|b\|_*^{p_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|^{p_1}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)p_1/2}\right)\\
&\qquad\times\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)^{p_1'}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)p_1'/2}\right)^{p_1/p_1'}\\
&\le C\|b\|_*^{p_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|^{p_1}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)p_1/2}\right)\\
&= C\|b\|_*^{p_1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{p_1}\left(\sum_{k=j+2}^{\infty}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)p_1/2}\right)\\
&\le C\|b\|_*^{p_1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{p_1}.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

When $0 < p_1 \le 1$, we have

$$\begin{aligned}
I_1 &\le C\|b\|_*^{p_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}|\lambda_j|^{p_1}(k-j)^{p_1}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)p_1}\right)\\
&= C\|b\|_*^{p_1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{p_1}\left(\sum_{k=j+2}^{\infty}(k-j)^{p_1}2^{(j-k)(\beta+n\delta_2-\alpha)p_1}\right)\\
&\le C\|b\|_*^{p_1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{p_1}.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

Now we estimate I_2. To this end, observe first that by the $(L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n), L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$-boundedness of the commutator $[b, T_{\Omega,\sigma}]$, we have

$$\begin{aligned} I_2 &\le C\|b\|_*^{p_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_1} \left(\sum_{j=k-1}^{\infty} |\lambda_j| \|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p_1} \\ &\le C\|b\|_*^{p_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=k-1}^{\infty} |\lambda_j| 2^{(k-j)\alpha} \right)^{p_1}. \end{aligned}$$

If $0 < p_1 \le 1$, then we have

$$I_2 \le C\|b\|_*^{p_1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1} \sum_{k=-\infty}^{j+1} 2^{(k-j)\alpha p_1} \le C\|b\|_*^{p_1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1}. \tag{2.6}$$

If $1 < p_1 < \infty$, then we can apply the Hölder inequality to obtain

$$\begin{aligned} I_2 &\le C\|b\|_*^{p_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=k-1}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1} 2^{(k-j)\alpha p_1/2} \right) \left(\sum_{j=k-1}^{\infty} 2^{(k-j)\alpha p_1'/2} \right)^{p_1/p_1'} \\ &\le C\|b\|_*^{p_1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Combining (2.1) and (2.4)-(2.7) we complete the proof of the theorem. Theorem 2.1 is proved.

3. A Lipschitz estimate for the commutator of homogeneous fractional integral operator

For $0 < \gamma \le 1$, the Lipschitz space $\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbb{R}^n)$ is defined as follows:

$$\mathrm{Lip}_\gamma(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{\mathrm{Lip}_\gamma} = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n; x\ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty \right\}.$$

Let $b \in \mathrm{Lip}_\gamma(\mathbb{R}^n)$. It is easy to see that $|[b, T_{\Omega,\sigma}]| \le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma} |T_{\Omega,\sigma+\gamma}|$. In [15], the authors proved that the operator $T_{\Omega,\sigma}$ is bounded from $L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ to $L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ for $1/q_1(x) - 1/q_2(x) = \sigma/n$ and $q_1(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ satisfying the conditions (1.1) and (1.2) of Lemma 1.1 with $q_1^+ < n/\sigma$. So, we can state the following theorem.

Theorem 3.1. *Suppose that $b \in \mathrm{Lip}_\gamma(\mathbb{R}^n)$ with $0 < \gamma \le 1$ and $0 < \sigma < n - \gamma$. Let $q_1(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ satisfy the conditions (1.1) and (1.2) of Lemma 1.1 with $q_1^+ < n/(\sigma+\gamma)$, $1/q_1(x) - 1/q_2(x) = (\sigma+\gamma)/n$, and let $\Omega \in L^s(S^{n-1})(s > q_2^+)$ with $1 \le s' < q_1^-$. Then the commutator $[b, T_{\Omega,\sigma}]$ is bounded from $L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ to $L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Next, we give a Lipschitz estimate for the commutator $[b, T_{\Omega,\sigma}]$ on the Herz-type Hardy spaces with variable exponent.

Theorem 3.2. *Suppose that $b \in \mathrm{Lip}_\gamma(\mathbb{R}^n)$ with $0 < \gamma \le 1$ and $0 < \sigma < n - \gamma$. Let $q_1(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ satisfy the conditions (1.1) and (1.2) of Lemma 1.1 with $q_1^+ < n/(\sigma+\gamma)$, $1/q_1(x) - 1/q_2(x) = (\sigma+\gamma)/n$, and let $\Omega \in L^s(S^{n-1})$ $(s > q_2^+)$ with $1 \le s' < q_1^-$ and satisfy $\int_0^1 \frac{\omega_s(\delta)}{\delta^{1+\gamma}} d\delta < \infty$. Further, let $0 < p_1 \le p_2 < \infty$ and $n\delta_2 \le \alpha < n\delta_2 + \gamma$ (respectively $0 < \max(n\delta_2, \alpha_2) \le \alpha_1 < n\delta_2 + \gamma$). Then the commutator $[b, T_{\Omega,\sigma}]$ maps $H\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ (respectively $HK^{\alpha_1,p_1}_{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$) continuously into $\dot{K}^{\alpha,p_2}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ (respectively into $K^{\alpha_2,p_2}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$).*

Proof. Similar to Theorem 2.1, it is enough to prove the theorem only for homogeneous case. Let $f \in H\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ and $b \in \mathrm{Lip}_\gamma(\mathbb{R}^n)$. Then by Lemma 1.5 we have $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j a_j$, where $\|f\|_{H\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \inf(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1})^{1/p_1}$ (the infimum is taken over above decompositions of f), and a_j is a dyadic central $(\alpha, q_1(\cdot))$-atom with support B_j. So, we can write

$$
\begin{aligned}
&\|[b, T_{\Omega,\sigma}](f)\|^{p_1}_{\dot{K}^{\alpha,p_2}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_2}\|[b, T_{\Omega,\sigma}](f)\chi_k\|^{p_2}_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}^{p_1/p_2} \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_1}\|[b, T_{\Omega,\sigma}](f)\chi_k\|^{p_1}_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_1}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} |\lambda_j| \|[b, T_{\Omega,\sigma}](a_j)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right)^{p_1} \\
&\quad + C \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_1}\left(\sum_{j=k-1}^{\infty} |\lambda_j| \|[b, T_{\Omega,\sigma}](a_j)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right)^{p_1} =: J_1 + J_2.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

We first estimate J_1. For each $k \in \mathbb{Z}$, $j \le k-2$ and $a.e.$ $x \in A_k$, using Lemma 2.4, the Minkowski inequality and the vanishing moments of a_j, we get

$$
\begin{aligned}
&\|[b, T_{\Omega,\sigma}](a_j)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \int_{B_j} \left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| (b(\cdot) - b(y))\chi_k(\cdot) \right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |a_j(y)| dy \\
&\le \int_{B_j} \left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| |b(\cdot) - b(0)|\chi_k(\cdot) \right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |a_j(y)| dy \\
&\quad + \int_{B_j} \left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |b(0) - b(y)||a_j(y)| dy =: J_{11} + J_{12}.
\end{aligned}
$$

To estimate J_{11}, we note that $s > q_2^+$, and denote $\tilde{q}_2(\cdot) > 1$ and $\frac{1}{q_2(x)} = \frac{1}{\tilde{q}_2(x)} + \frac{1}{s}$. Then by Lemma 2.5 we have

$$\begin{aligned}
&\left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| |b(\cdot) - b(0)| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \| |b(\cdot) - b(0)| \chi_k(\cdot) \|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma} 2^{k\gamma} \left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

When $|B_k| \le 2^n$ and $x_k \in B_k$, by Lemma 2.6 we have

$$\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx |B_k|^{\frac{1}{\tilde{q}_2(x_k)}} \approx \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_k|^{-\frac{1}{s} - \frac{\sigma+\gamma}{n}}.$$

When $|B_k| \ge 1$ we have

$$\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx |B_k|^{\frac{1}{\tilde{q}_2(\infty)}} \approx \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_k|^{-\frac{1}{s} - \frac{\sigma+\gamma}{n}}.$$

So, we obtain $\|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_k|^{-\frac{1}{s} - \frac{\sigma+\gamma}{n}}$.

Meanwhile, by Lemma 2.7 we have

$$\begin{aligned}
&\left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \\
&\le 2^{(k-1)(\frac{n}{s} - (n-\sigma))} \left\{ \frac{|y|}{2^k} + \int_{|y|/2^k}^{|y|/2^{k-1}} \frac{\omega_s(\delta)}{\delta} d\delta \right\} \\
&\le 2^{(k-1)(\frac{n}{s} - (n-\sigma))} \left(2^{j-k+1} + 2^{(j-k+1)\gamma} \int_0^1 \frac{\omega_s(\delta)}{\delta} d\delta \right) \\
&\le C 2^{(k-1)(\frac{n}{s} - (n-\sigma))} 2^{(j-k)\gamma}.
\end{aligned}$$

So, using the generalized Hölder inequality, we obtain the following estimate for J_{11}:

(3.2)

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \int_{B_j} \left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| |b(\cdot) - b(0)| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |a_j(y)| dy \\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma} 2^{k\gamma} 2^{(k-1)(\frac{n}{s} - (n-\sigma))} 2^{(j-k)\gamma} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_k|^{-\frac{1}{s} - \frac{\sigma+\gamma}{n}} \int_{B_j} |a_j(y)| dy \\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma} 2^{-kn + (j-k)\gamma} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

To estimate J_{12}, we use arguments similar to those applied for J_{11}, to obtain

$$\begin{aligned}
&\left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \|\chi_k(\cdot)\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C 2^{(k-1)(\frac{n}{s} - (n-\sigma))} 2^{(j-k)\gamma} \|\chi_{B_k}\|_{L^{\tilde{q}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C 2^{-kn + (j-k)\gamma - k\gamma} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

So, by the generalized Hölder inequality, we have

$$
\begin{aligned}
J_{12} &= \int_{B_j} \left\| \left| \frac{\Omega(\cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-\sigma}} - \frac{\Omega(\cdot)}{|\cdot|^{n-\sigma}} \right| \chi_k(\cdot) \right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} |b(0) - b(y)||a_j(y)|dy \\
&\le C2^{-kn+(j-k)\gamma-k\gamma} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \int_{B_j} |b(0) - b(y)||a_j(y)|dy \qquad (3.3)\\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma} 2^{-kn+2(j-k)\gamma} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma} 2^{-kn+(j-k)\gamma} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Next, using (3.2), (3.3), and Lemmas 1.3 and 1.4, we can write

$$
\begin{aligned}
&\|[b, T_{\Omega,\sigma}](a_j)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma} 2^{-kn+(j-k)\gamma} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma} 2^{(j-k)\gamma} \|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \frac{\|\chi_{B_j}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}}{\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}} \\
&\le C2^{-j\alpha+(j-k)(\gamma+n\delta_2)} \|b\|_{\mathrm{Lip}_\gamma}.
\end{aligned}
$$

So, we have

$$
\begin{aligned}
J_1 &\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_1} \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} |\lambda_j| 2^{-j\alpha+(j-k)(\gamma+n\delta_2)} \right)^{p_1} \\
&= C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} |\lambda_j| 2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)} \right)^{p_1}.
\end{aligned}
$$

When $1 < p_1 < \infty$, take $1/p_1 + 1/p_1' = 1$. Since $\gamma + n\delta_2 - \alpha > 0$, we can use the Hölder inequality to obtain

$$
\begin{aligned}
J_1 &\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} |\lambda_j|^{p_1} 2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)p_1/2} \right) \\
&\qquad \times \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)p_1'/2} \right)^{p_1/p_1'} \\
&\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} |\lambda_j|^{p_1} 2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)p_1/2} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1} \left(\sum_{k=j+2}^{\infty} 2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)p_1/2} \right) \qquad (3.4)\\
&\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1}.
\end{aligned}
$$

When $0 < p_1 \le 1$, we have

$$\begin{aligned} J_1 &\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} |\lambda_j|^{p_1} 2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)p_1} \right) \\ &= C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1} \left(\sum_{k=j+2}^{\infty} 2^{(j-k)(\gamma+n\delta_2-\alpha)p_1} \right) \\ &\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Now we estimate J_2. Observe first that by the $(L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n), L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$-boundedness of the commutator $[b, T_{\Omega,\sigma}]$, we have

$$\begin{aligned} J_2 &\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p_1} \left(\sum_{j=k-1}^{\infty} |\lambda_j| \|a_j\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p_1} \\ &\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=k-1}^{\infty} |\lambda_j| 2^{(k-j)\alpha} \right)^{p_1}. \end{aligned}$$

If $0 < p_1 \le 1$, then we have

$$J_2 \le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \textstyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1} \sum_{k=-\infty}^{j+1} 2^{(k-j)\alpha p_1} \le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1}. \tag{3.6}$$

If $1 < p_1 < \infty$, then we can apply the Hölder inequality to obtain

$$\begin{aligned} J_2 &\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=k-1}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1} 2^{(k-j)\alpha p_1/2} \right) \left(\sum_{j=k-1}^{\infty} 2^{(k-j)\alpha p_1'/2} \right)^{p_1/p_1'} \\ &\le C\|b\|^{p_1}_{\mathrm{Lip}_\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^{p_1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Combining (3.1) and (3.4)-(3.7) we complete the proof of the theorem. Theorem 3.1 is proved.

Acknowledgements. The author is very grateful to a referee for his/her valuable comments.

Список литературы

[1] C. Capone, D. Cruz-Uribe, SFO and A. Fiorenza, "The fractional maximal operators and fractional integrals on variable L^p spaces", Rev. Mat. Iberoamericana, **23**, 743 – 770 (2007).

[2] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis(Applied and Numerical Harmonic Analysis), Springer, Heidelberg (2013).

[3] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. M. Martell and C. Pérez, "The boundedness of classical operators on variable L^p spaces", Ann. Acad. Sci. Fen. Math., **31**, 239 – 264 (2006).

[4] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžička, "Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents", Lecture Notes in Math., **2017**, Springer, Heidelberg (2011).

[5] Y. Ding, "Weighted boundedness for commutators of integral operators of fractional order with rough kernel" [in Chinese]. Beijing Shifan Daxue Xuebao, **32**. 157 – 161 (1996).

[6] Y. Ding and S. Lu, "Higher order commutators for a class of rough operators", Ark. Mat., **37**, 33 – 44 (1999).

[7] Y. Ding and S. Lu, "Homogeneous fractional integrals on Hardy spaces", Tohoku Math. J., **52**, 153 – 162 (2000).

[8] M. Izuki, "Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization", Anal. Math., **36**, 33 – 50 (2010).

[9] M. Izuki, "Boundedness of commutators on Herz spaces with variable exponent", Rend. del Circolo Mate. di Palermo, **59**, 199 – 213 (2010).

[10] O. Kováčik and J. Rákosník, "On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$", Czechoslovak Math. J., **41**, 592 – 618 (1991).

[11] S. Lu and D. Yang, "The continuity of commutators on Herz-type spaces", Michigan Math. J., **44**, 255 – 281 (1997).

[12] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for singular and fractional integrals", Trans. Amer. Math. Soc., **161**, 249 – 258 (1971).

[13] E. Nakai and Y. Sawano, "Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces", J. Funct. Anal., **262**, 3665 – 3748 (2012).

[14] C. Segovia and J. L. Torrea, "Higher order commutators for vector-valued Calderón-Zygmund operators", Trans. Amer. Math. Soc., **336**, 537 – 556 (1993).

[15] J. Tan and Z. Liu, "Some boundedness of homogeneous fractional integrals on variable exponent function spaces", Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), **58**, 309 – 320 (2015).

[16] H. Wang, Z. Fu and Z. Liu, "Higher-order commutators of Marcinkiewicz integrals and fractional integrals on variable Lebesgue spaces", Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., **32**, 1092 – 1101 (2012).

[17] H. Wang and Z. Liu, "The Herz-type Hardy spaces with variable exponent and their applications", Taiwanese J. Math., **16**, 1363 – 1389 (2012).

[18] H. Wang and Z. Liu, "Some characterizations of Herz-type Hardy spaces with variable exponent", Ann. Funct. Anal., **6**, 224 – 233 (2015).

Поступила 24 мая 2015

Cover to cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 52, No. 2, 2017

CONTENTS

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 52, номер 3, 2017

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 52, No. 3, 2017

Contents