ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2017

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2, 2017, стр. 3-19.

FURTHER RESULTS ON UNIQUENESS OF DERIVATIVES OF MEROMORPHIC FUNCTIONS SHARING THREE SETS

A. BANERJEE, S. MAJUMDER AND B. CHAKRABORTY

University of Kalyani, West Bengal, India
Raiganj University, Raiganj, India
Ramakrishna Mission Vivekananda Centenary College, Rahara, India
E-mails: *abanerjee_kal@yahoo.co.in*, *smajumder05@yahoo.in*,
bikashchakraborty.math@yahoo.com *bikashchakrabortyy@gmail.com*

Abstract. [1] In this paper we prove some uniqueness theorems concerning the derivatives of meromorphic functions when they share three sets. The obtained results improve some recent existing results.

MSC2010 numbers: 30D35.

Keywords: Meromorphic function; uniqueness; weighted sharing; derivative; shared set.

1. Introduction, definitions and results

In this paper by meromorphic functions we always will mean meromorphic functions in the complex plane, and will use the standard notation of value distribution theory (see [7]):

$$T(r,f), \;\; m(r,f), \;\; N(r,\infty;f), \;\; \overline{N}(r,\infty;f), \ldots .$$

By letter E we will denote any set of positive real numbers of finite linear measure, not necessarily the same at each occurrence. We denote by $T(r)$ the maximum of $T(r,f^{(k)})$ and $T(r,g^{(k)})$, and by $S(r)$ any quantity satisfying the relation $S(r)=o(T(r))$ as $r\longrightarrow\infty, r\notin E$.

If for some $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, the functions f and g have the same sets of a-points with the same multiplicities, then we say that f and g share the value a CM (counting multiplicities). If the multiplicities are not taken into account, then we say that f and g share the value a IM (ignoring multiplicities).

Let S be a set of distinct elements of $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Denote $E_f(S):=\bigcup_{a\in S}\{z: f(z)-a=0\}$, where each zero is counted according to its multiplicity. If we do not count

[1]The research is supported by the Council Of Scientific and Industrial Research, Extramural Research Division, CSIR Complex, Pusa, New Delhi-110012, India, under the sanction project no. 25(0229)/14/EMR-II.

the multiplicities, then the set $\bigcup_{a\in S}\{z : f(z) - a = 0\}$ is denoted by $\overline{E}_f(S)$. If $E_f(S) = E_g(S)$, then we say that f and g share the set S CM. On the other hand, if $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$, then we say that f and g share the set S IM. Evidently, if S contains only one element, these definitions coincide with the usual definitions of CM and IM shared values, respectively.

In 1926, R. Nevanlinna showed that a meromorphic function on the complex plane $\mathbb{C}$ is uniquely determined by the pre-images, ignoring multiplicities, of 5 distinct values (including infinity). A few years latter, he showed that when multiplicities are taken into consideration, then 4 points are enough. More precisely, Nevanlinna proved that if two meromorphic functions share four distinct values CM, then either they coincide or one of them is the bilinear transformation of the other.

These two results are the starting point of uniqueness theory. The research became more interesting, although sophisticated, when F. Gross and C. C. Yang transferred the study of uniqueness theory to a more general setting, namely considering sets of distinct elements instead of values. For instance, they proved that if f and g are two non-constant entire functions and S_1, S_2 and S_3 are three distinct finite sets such that $f^{-1}(S_i) = g^{-1}(S_i)$ for $i = 1, 2, 3$, then $f \equiv g$.

The following question was asked in [19].

Question A. *Can one find three finite sets S_j $(j = 1, 2, 3)$ such that any two non-constant meromorphic functions f and g satisfying $E_f(S_j) = E_g(S_j)$ for $j = 1, 2, 3$ must be identical ?*

Question A may be considered as an inception of a new horizon in the uniqueness of meromorphic functions concerning three set sharing problem and so far the quest for affirmative answer to Question A under weaker hypothesis has made a great stride (see, e.g., [1], [2], [5] – [7], [14], [16], [18] – [21], [22]).

Unfortunately the derivative counterparts of the results obtained in the above cited papers are scanty in number. In 2003, in the direction of Question A concerning the uniqueness of derivatives of meromorphic functions, Qiu and Fang obtained the following result.

Theorem A ([18]). *Let $S_1 = \{z : z^n - z^{n-1} - 1 = 0\}$, $S_2 = \{\infty\}$ and $S_3 = \{0\}$, and let $n \geq 3$ and $k > 0$ be integers. Let f and g be two non-constant meromorphic functions such that $E_{f^{(k)}}(S_j) = E_{g^{(k)}}(S_j)$ for $j = 1, 3$ and $E_f(S_2) = E_g(S_2)$, then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.*

In 2004, Yi and Lin [22] proved the following theorem.

Theorem B ([22]). *Let $S_1 = \{z : z^n + az^{n-1} + b = 0\}$, $S_2 = \{\infty\}$ and $S_3 = \{0\}$, where a and b are nonzero constants such that $z^n+az^{n-1}+b = 0$ has no repeated roots, and let $n \geq 3$ and $k > 0$ be integers. Let f and g be two non-constant meromorphic functions such that $E_{f^{(k)}}(S_j) = E_{g^{(k)}}(S_j)$ for $j = 1,2,3$, then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.*

The following examples show that in Theorems A and B the condition $a \neq 0$ is necessary.

Example 1.1 ([4]). *Let $f(z) = e^z$ and $g(z) = (-1)^k e^{-z}$, and let $S_1 = \{z : z^3-1 = 0\}$, $S_2 = \{\infty\}$, $S_3 = \{0\}$. Since $f^{(k)} - \omega^l = g^{(k)} - \omega^{3-l}$, where $\omega = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}$, $0 \leq l \leq 2$, clearly we have $E_{f^{(k)}}(S_j) = E_{g^{(k)}}(S_j)$ for $j = 1,2,3$, while $f^{(k)} \not\equiv g^{(k)}$.*

The following examples establish the sharpness of the lower bound of n in Theorems A and B.

Example 1.2 ([4]). *Let $f(z) = \sqrt{\alpha+\beta}\,\sqrt{\alpha\beta}\,e^z$ and $g(z) = (-1)^k\sqrt{\alpha+\beta}\,\sqrt{\alpha\beta}\,e^{-z}$, and let $S_1 = \{\alpha+\beta, \alpha\beta\}$, $S_2 = \{\infty\}$, $S_3 = \{0\}$ with $\alpha+\beta = -a$ and $\alpha\beta = b$, where a, b are nonzero complex numbers. Clearly we have $E_{f^{(k)}}(S_j) = E_{g^{(k)}}(S_j)$ for $j = 1,2,3$, while $f^{(k)} \not\equiv g^{(k)}$.*

Example 1.3. *Let $f = \alpha\sqrt{\beta}e^z$ and $g = (-1)^k\beta\sqrt{\alpha}e^{-z}$, where α and β are two non zero complex numbers such that $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \neq -1$. Let $S_1 = \{\beta\sqrt{\alpha}, \alpha\sqrt{\beta}\}$, $S_2 = \{\infty\}$ and $S_3 = \{0\}$. Clearly we have $E_{f^{(k)}}(S_j) = E_{g^{(k)}}(S_j)$ for $j = 1,2,3$, while $f^{(k)} \not\equiv g^{(k)}$.*

Example 1.4. *Let $f = \sqrt{2}e^z$ and $g = (-1)^k\sqrt{2}e^{-z}$. Let $S_1 = \{1+i, 1-i\}$, $S_2 = \{\infty\}$ and $S_3 = \{0\}$. Clearly we have $E_{f^{(k)}}(S_j) = E_{g^{(k)}}(S_j)$ for $j = 1,2,3$, while $f^{(k)} \not\equiv g^{(k)}$.*

The above examples assure the fact that in Theorems A and B, the cardinality of the set S_1 cannot be further reduced. Rather, on the basis of these examples, one may try to relax the nature of sharing the range sets. For the purpose of relaxation of the nature of sharing the sets the notion of weighted sharing of values and sets, which appeared in [12, 13], has become an effective tool.

Definition 1.1 ([12, 13]). *Let k be a nonnegative integer or infinity. For $a \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ we denote by $E_k(a; f)$ the set of all a-points of f, where an a-point of multiplicity m is counted m times if $m \leq k$ and $k+1$ times if $m > k$. If $E_k(a; f) = E_k(a; g)$, we say that f and g share the value a with weight k.*

It follows from Definition 1.1 that if f and g share a value a with weight k, then a point z_0 is an a-point of f with multiplicity $m \leq k$ if and only if it is an a-point of

g with multiplicity $m \le k$, and z_0 is an a-point of f with multiplicity $m > k$ if and only if it is an a-point of g with multiplicity $n > k$, where m is not necessarily equal to n.

We will write "f, g share (a,k)" to mean that f and g share the value a with weight k. Clearly if f, g share (a,k), then f, g share (a,p) for any integer p, $0 \le p < k$. Also, we note that f, g share a value a IM or CM if and only if f, g share $(a,0)$ or (a,∞), respectively.

Definition 1.2 ([12]). *Let S be a set of distinct elements of $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, and let k be a nonnegative integer or ∞. We define $E_f(S,k) := \bigcup_{a \in S} E_k(a;f)$. It is clear that $E_f(S) = E_f(S,\infty)$ and $\overline{E}_f(S) = E_f(S,0)$.*

In 2009, Banerjee and Bhattacharjee [3] used the concept of weighted sharing of sets to improve Theorems A and B.

Theorem C ([3]). *Let S_i, $i = 1-3$ be as in Theorem B and k be a positive integer. If f and g are two non-constant meromorphic functions such that $E_{f^{(k)}}(S_1,4) = E_{g^{(k)}}(S_1,4)$, $E_f(S_2,\infty) = E_g(S_2,\infty)$ and $E_{f^{(k)}}(S_3,7) = E_{g^{(k)}}(S_3,7)$, then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.*

Theorem D ([3]). *Let S_i, $i = 1-3$ be as in Theorem B and k be a positive integer. If f and g are two non-constant meromorphic functions such that $E_{f^{(k)}}(S_1,5) = E_{g^{(k)}}(S_1,5)$, $E_f(S_2,\infty) = E_g(S_2,\infty)$ and $E_{f^{(k)}}(S_3,1) = E_{g^{(k)}}(S_3,1)$, then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.*

Theorem E ([3]). *Let S_i, $i = 1,2,3$ be as in Theorem B and k be a positive integer. If f and g are two non-constant meromorphic functions such that $E_{f^{(k)}}(S_1,6) = E_{g^{(k)}}(S_1,6)$, $E_f(S_2,\infty) = E_g(S_2,\infty)$ and $E_{f^{(k)}}(S_3,0) = E_{g^{(k)}}(S_3,0)$, then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.*

In 2011, Banerjee and Bhattacharjee [4] further improved the above results, by proving the following theorems.

Theorem F ([4]). *Let S_i, $i = 1-3$ be as in Theorem B and k be a positive integer. If f and g are two non-constant meromorphic functions such that $E_{f^{(k)}}(S_1,5) = E_{g^{(k)}}(S_1,5)$, $E_f(S_2,\infty) = E_g(S_2,\infty)$ and $E_{f^{(k)}}(S_3,0) = E_{g^{(k)}}(S_3,0)$, then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.*

Theorem G ([4]). *Let S_i, $i = 1, 2, 3$ be as in Theorem B and k be a positive integer. If f and g are two non-constant meromorphic functions such that $E_{f^{(k)}}(S_1, 4) = E_{g^{(k)}}(S_1, 4)$, $E_f(S_2, \infty) = E_g(S_2, \infty)$ and $E_{f^{(k)}}(S_3, 1) = E_{g^{(k)}}(S_3, 1)$, then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.*

Theorem H ([4]). *Let S_i, $i = 1, 2, 3$ be as in Theorem B and k be a positive integer. If f and g are two non-constant meromorphic functions such that $E_{f^{(k)}}(S_1, 5) = E_{g^{(k)}}(S_1, 5)$, $E_f(S_2, 9) = E_g(S_2, 9)$ and $E_{f^{(k)}}(S_3, \infty) = E_{g^{(k)}}(S_3, \infty)$, then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.*

In the present paper we significantly reduce the weight of the range sets in all the above theorems. The following theorem is the main result of this paper.

Theorem 1.1. *Let S_i, $i = 1, 2, 3$ be as in Theorem B and k be a positive integer. If f and g are two non-constant meromorphic functions such that $E_{f^{(k)}}(S_1, k_1) = E_{g^{(k)}}(S_1, k_1)$, $E_f(S_2, k_2) = E_g(S_2, k_2)$ and $E_{f^{(k)}}(S_3, k_3) = E_{g^{(k)}}(S_3, k_3)$, where $k_1 \geq 4$, $k_2 \geq 0$, $k_3 \geq 0$ are integers satisfying*

$$2k_1k_2k_3 > k_1 + k_2 + 2k_3 + k - 2kk_1k_3 - k_1k_2 - kk_1 + 3,$$

then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.

Remark 1.1. Note that Theorem 1.1 holds for $k_1 = 4$, $k_2 = 2$ and $k_3 = 0$, and so it improves Theorems A-H.

Remark 1.2. Examples 1.2-1.4 assure the fact that in Theorem 1.1, $n \geq 3$ is the best possible.

Throughout the paper we will use the standard definitions and notation of the value distribution theory available in [10]. Below we recall some notation and definitions which are used in this paper.

Definition 1.3 ([11]). *For $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and a meromorphic function f, we denote by $N(r, a; f \mid= 1)$ the counting function of simple a-points of f. For a positive integer m we denote by $N(r, a; f \mid\leq m)$ (resp. $N(r, a; f \mid\geq m)$) the counting function of those a-points of f whose multiplicities are not greater (resp. less) than m, where each a-point is counted according to its multiplicity. The functions $\overline{N}(r, a; f \mid\leq m)$ and ($\overline{N}(r, a; f \mid\geq m)$) are defined similarly, where in counting the a-points of f we ignore the multiplicities. Also, the functions $N(r, a; f \mid< m)$, $N(r, a; f \mid> m)$, $\overline{N}(r, a; f \mid< m)$ and $\overline{N}(r, a; f \mid> m)$ are defined analogously.*

Definition 1.4. *We denote by $\overline{N}(r,a;f\mid=k)$ the reduced counting function of those a-points of a function f whose multiplicities are exactly k, where $k\geq 2$ is an integer.*

Definition 1.5 ([2]). *Let f and g be two non-constant meromorphic functions such that f and g share (a,k), where $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Let z_0 be an a-point of f with multiplicity p, and an a-point of g with multiplicity q. We denote by $\overline{N}_L(r,a;f)$ the counting function of those a-points of f and g, for which $p>q$ and each a-point is counted only once. In the same way we can define the function $\overline{N}_L(r,a;g)$.*

Definition 1.6 ([13]). *We denote $N_2(r,a;f)=\overline{N}(r,a;f)+\overline{N}(r,a;f\mid\geq 2)$.*

Definition 1.7 ([12, 13]). *Let f and g share a value a IM. We denote by $\overline{N}_*(r,a;f,g)$ the reduced counting function of those a-points of f whose multiplicities differ from the multiplicities of the corresponding a-points of g. Clearly, we have $\overline{N}_*(r,a;f,g)\equiv\overline{N}_*(r,a;g,f)$ and $\overline{N}_*(r,a;f,g)=\overline{N}_L(r,a;f)+\overline{N}_L(r,a;g)$.*

Definition 1.8 ([15]). *Let $a,b\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. We denote by $N(r,a;f\mid g=b)$ the counting function of those a-points of f, counted according to multiplicity, which are b-points of g.*

Definition 1.9 ([15]). *Let $a,b_1,b_2,\ldots,b_q\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. We denote by $N(r,a;f\mid g\neq b_1,b_2,\ldots,b_q)$ the counting function of those a-points of f, counted according to multiplicity, which are not the b_i-points of g for $i=1,2,\ldots,q$.*

Definition 1.10. *Let f and g be two non-constant meromorphic functions such that $E_f(S,k)=E_g(S,k)$, and let a and b be any two elements of S. We denote by $\overline{N}_*(r,a;f|g=b)$ the reduced counting function of those a-points of f whose multiplicities differ from the multiplicities of the corresponding b-points of g. Clearly, we have $\overline{N}_*(r,a;f|g=b)=\overline{N}_*(r,b;g|f=a)$. Also, if $a=b$, then $\overline{N}_*(r,a;f|g=b)=\overline{N}_*(r,a;f,g)$.*

2. Lemmas

In this section we present some lemmas which will be needed in the sequel.

Let F and G be two non-constant meromorphic functions defined as follows:

$$F=\frac{\left(f^{(k)}\right)^{n-1}\left(f^{(k)}+a\right)}{-b},\qquad G=\frac{\left(g^{(k)}\right)^{n-1}\left(g^{(k)}+a\right)}{-b},\tag{2.1}$$

where $n \geq 2$ and $k > 0$ are integers. Define the following functions:

$$H = \left(\frac{F''}{F'} - \frac{2F'}{F-1}\right) - \left(\frac{G''}{G'} - \frac{2G'}{G-1}\right),$$

$$\Phi_1 = \frac{F'}{F-1} - \frac{G'}{G-1};$$

$$\Phi_2 = \frac{(f^{(k)})'}{f^{(k)}} - \frac{(g^{(k)})'}{g^{(k)}}$$

and

$$\Phi_3 = \left(\frac{(f^{(k)})'}{f^{(k)} - \omega_i} - \frac{(f^{(k)})'}{f^{(k)}}\right) - \left(\frac{(g^{(k)})'}{g^{(k)} - \omega_j} - \frac{(g^{(k)})'}{g^{(k)}}\right),$$

where ω_i and ω_j are any two roots of the equation $z^n + az^{n-1} + b = 0$.

Lemma 2.1 ([13], Lemma 1). *Let F, G share $(1,1)$ and $H \not\equiv 0$. Then*

$$N(r, 1; F \mid= 1) = N(r, 1; G \mid= 1) \leq N(r, H) + S(r, F) + S(r, G).$$

Lemma 2.2. *Let S_1, S_2 and S_3 be as in Theorem 1.1, and let F and G be given by (2.1). If for two non-constant meromorphic functions f and g we have $E_{f^{(k)}}(S_1, 0) = E_{g^{(k)}}(S_1, 0)$, $E_{f^{(k)}}(S_2, 0) = E_{g^{(k)}}(S_2, 0)$, $E_f(S_3, 0) = E_g(S_3, 0)$ and $H \not\equiv 0$, then*

$$\begin{aligned} N(r, H) \leq\ & \overline{N}_*(r, 0; f^{(k)}, g^{(k)}) + \overline{N}_*(r, 1; F, G) + \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; f^{(k)}) + \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; g^{(k)}) \\ & + \overline{N}_*(r, \infty; f, g) + \overline{N}_0(r, 0; (f^{(k)})') + \overline{N}_0(r, 0; (g^{(k)})'), \end{aligned}$$

where $\overline{N}_0(r, 0; (f^{(k)})')$ is the reduced counting function of those zeros of $(f^{(k)})'$ which are not the zeros of $f^{(k)}(F-1)$ and $\overline{N}_0(r, 0; (g^{(k)})')$ is defined similarly.

Proof. Since $E_{f^{(k)}}(S_1, 0) = E_{g^{(k)}}(S_1, 0)$, it follows that F, G share $(1, 0)$. From (2.1) we have

$$F' = [nf^{(k)} + (n-1)a](f^{(k)})^{n-2}(f^{(k)})'/(-b)$$

and

$$G' = [ng^{(k)} + (n-1)a](g^{(k)})^{n-2}(g^{(k)})'/(-b).$$

We can easily verify that the possible poles of H can occur at:

(i) those zeros of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$ whose multiplicities are different from the multiplicities of the corresponding zeros of $g^{(k)}$ and $f^{(k)}$, respectively,

(ii) the zeros of $nf^{(k)} + a(n-1)$ and $ng^{(k)} + a(n-1)$,

(iii) those poles of f and g whose multiplicities are different from the multiplicities of the corresponding poles of g and f, respectively,

(iv) the 1-points of F and G with different multiplicities.

(v) the zeros of $(f^{(k)})'$ which are not zeros of $f^{(k)}(F-1)$,

(vi) the zeros of $(g^{(k)})'$ which are not zeros of $g^{(k)}(G-1)$.

Lemma 2.2 is proved. □

Lemma 2.3 ([17]). *Let f be a non-constant meromorphic function and let*

$$R(f)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kf^k}{\sum\limits_{j=0}^{m}b_jf^j}$$

be an irreducible rational function in f with constant coefficients $\{a_k\}$ and $\{b_j\}$, where $a_n\neq 0$ and $b_m\neq 0$. Then

$$T(r,R(f))=dT(r,f)+S(r,f),$$

where $d=\max\{n,m\}$.

Lemma 2.4 ([4]). *Let F and G be given by (2.1). If $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,0)$ and 0 is not a Picard exceptional value of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$, then $\Phi_1\equiv 0$ implies $F\equiv G$.*

Lemma 2.5 ([4]). *Let F and G be given by (2.1), $n\geq 3$ be an integer and $\Phi_1\not\equiv 0$. If F, G share $(1,k_1)$; f, g share (∞,k_2), and $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$, where $0\leq k_3<\infty$, then*

$$[(n-1)k_3+n-2]\,\overline{N}(r,0;f^{(k)}\mid\geq k_3+1)\leq\ \overline{N}_*(r,1;F,G)+\overline{N}_*(r,\infty;F,G)+S(r).$$

Lemma 2.6. *Let f and g be two non-constant meromorphic functions, F and G be given by (2.1), $n\geq 3$ be an integer and $\Phi_2\not\equiv 0$. If F, G share $(1,k_1)$; $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$, and f, g share (∞,k_2), where $1\leq k_1\leq\infty$, then*

$$k_1\overline{N}(r,1;F\mid\geq k_1+1)\leq\overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)})+\overline{N}_*(r,\infty;f,g)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)}).$$

Proof. Note that

$$k_1\,\overline{N}(r,1;F\mid\geq k_1+1)\leq N(r,0;\Phi_2)\leq N(r,\Phi_2)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\leq$$
$$\overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)})+\overline{N}_*(r,\infty;f,g)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)}),$$

and the result follows. □

Lemma 2.7. *Let f and g be two non-constant meromorphic functions, F and G be given by (2.1), $n\geq 3$ be an integer, and let $\Phi_1\not\equiv 0$, $\Phi_2\not\equiv 0$. If F, G share $(1,k_1)$, where $k_1\geq 2$; $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$, and f, g share (∞,k_2), $0\leq k_2\leq\infty$, then*

$$\overline{N}(r,0;f^{(k)}\mid\geq k_3+1)\leq\frac{k_1+1}{k_1[(n-1)k_3+(n-2)]-1}\overline{N}_*(r,\infty;f,g)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)}),$$

A similar result also holds for $g^{(k)}$.

Proof. Using Lemmas 2.5 and 2.6, and noting that $\overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)}) \leq \overline{N}(r,0;f^{(k)}| \geq k_3+1)$, we can write

$$\begin{aligned}
&[(n-1)k_3+(n-2)]\overline{N}(r,0;f^{(k)}| \geq k_3+1)\\
\leq\ & \overline{N}_*(r,1;F,G)+\overline{N}_*(r,\infty;f,g)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\\
\leq\ & \frac{1}{k_1}\overline{N}(r,0;f^{(k)}| \geq k_3+1)+\frac{k_1+1}{k_1}\overline{N}_*(r,\infty;f,g)\\
&+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)}),
\end{aligned}$$

and the result follows. Lemma 2.7 is proved. □

Lemma 2.8. *Let f and g be two non-constant meromorphic functions. Suppose f, g share $(\infty,0)$ and ∞ is not a Picard exceptional value of f and g. Then $\Phi_3 \equiv 0$ implies $f^{(k)} \equiv \frac{\omega_i}{\omega_j}g^{(k)}$.*

Proof. Suppose $\Phi_3 \equiv 0$. Then by integration we obtain

$$1-\frac{\omega_i}{f^{(k)}} \equiv A\left(1-\frac{\omega_j}{g^{(k)}}\right),$$

where $A \neq 0$. Since f, g share $(\infty,0)$ it follows that $A=1$, and hence $f^{(k)} \equiv \frac{\omega_i}{\omega_j}g^{(k)}$.

Lemma 2.9. *Let f and g be two non-constant meromorphic functions and $\Phi_3 \not\equiv 0$, and let F and G be given by (2.1). If $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$; f, g share (∞,k_2), where $1 \leq k_2 \leq \infty$, and $E_{f^{(k)}}(S_1,k_1)=E_{g^{(k)}}(S_1,k_1)$, where $1 \leq k_1 \leq \infty$ and the set S_1 is as in Theorem 1.1, then*

$$\begin{aligned}
&(k_2+k)\ \overline{N}(r,\infty;f\,| \geq k_2+1)\\
\leq\ & \overline{N}_*\left(r,0;f^{(k)},g^{(k)}\right)+\overline{N}_*(r,1;F,G)+S(r).
\end{aligned}$$

A similar result also holds for $g^{(k)}$.

Proof. If ∞ is an e.v.P. (Picard exceptional value) of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$, then the result follows immediately.

Next, suppose ∞ is not e.v.P. of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$. Since $E_{f^{(k)}}(S_1,k_1)=E_{g^{(k)}}(S_1,k_1)$, it follows that $\overline{N}_*(r,\omega_i;f^{(k)}|g^{(k)}=\omega_j) \leq \overline{N}_*(r,1;F,G)$. Hence we can write

$$\begin{aligned}
& (k_2+k)\ \overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1) \\
= & (k_2+k)\ \overline{N}(r,\infty;g|\geq k_2+1) \\
\leq & N(r,0;\Phi_3) \\
\leq & N(r,\Phi_3)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)}) \\
\leq & \overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)})+\overline{N}_*(r,\omega_i;f^{(k)}|g^{(k)}=\omega_j)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)}) \\
\leq & \overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)})+\overline{N}_*(r,1;F,G)+S(r),
\end{aligned}$$

and the result follows. Lemma 2.9 is proved. □

Lemma 2.10. *Let f and g be two non-constant meromorphic functions, $\Phi_2 \not\equiv 0$, $\Phi_3 \not\equiv 0$, and let F and G be given by (2.1). If $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$; f, g share (∞,k_2), where $0\leq k_2<\infty$, and F, G share $(1,k_1)$, where $k_1>1$, then*

$$\overline{N}(r,\infty;f\,|\geq k_2+1)\frac{k_1+1}{k_1(k_2+k)-1}\overline{N}_*\left(r,0;f^{(k)},g^{(k)}\right)+S(r).$$

A similar result also holds for $g^{(k)}$ also.

Proof. Using Lemmas 2.6 and 2.9 and noting that $\overline{N}_*(r,\infty;f,g)\leq\overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1)$, we can write

$$\begin{aligned}
(k_2+k)\overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1) \leq\ & \overline{N}_*(r,1;F,G)+\overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)})+S(r) \\
\leq\ & \frac{1}{k_1}\overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1)+\frac{k_1+1}{k_1}\overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)}) \\
& +S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)}),
\end{aligned}$$

and the result follows. Lemma 2.10 is proved. □

Lemma 2.11 ([4]). *Let F and G be given by (2.1) and $H\not\equiv 0$. If $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$; f, g share (∞,k_2), where $0\leq k_2<\infty$, and F, G share $(1,k_1)$, where $1\leq k_1\leq\infty$, then*

$$\begin{aligned}
& \{(nk_2+nk+n)-1\}\ \overline{N}(r,\infty;f\,|\geq k_2+1) \\
\leq\ & \overline{N}_*\left(r,0;f^{(k)},g^{(k)}\right)+\overline{N}\left(r,0;f^{(k)}+a\right)+\overline{N}\left(r,0;g^{(k)}+a\right)+\overline{N}_*(r,1;F,G)+S(r).
\end{aligned}$$

A similar result also holds for g.

Lemma 2.12. *Let f and g be two non-constant meromorphic functions. Also, let F and G be given by (2.1), $n\geq 3$ be an integer, and $\Phi_1\not\equiv 0$, $\Phi_2\not\equiv 0$ and $\Phi_3\not\equiv 0$. If F,*

G share $(1,k_1)$; $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$, and f, g share (∞,k_2), where $k_1>1$, $k_2\geq 0$ and $k_3\geq 0$ are integers satisfying

$$2k_1k_2k_3 > k_1+k_2+2k_3+k-2kk_1k_3-k_1k_2-kk_1+3,$$

then

$$\overline{N}(r,1;F|\geq k_1+1)+\overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1)+\overline{N}(r,0;f^{(k)}|\geq k_3+1)=S(r).$$

Proof. Since $\Phi_1\not\equiv 0$ from Lemma 2.5 we get

$$(2k_3+1)\,\overline{N}(r,0;f^{(k)}|\geq k_3+1) \leq \overline{N}(r,1;F|\geq k_1+1)+\overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1)+S(r).$$

Next, since $\Phi_2\not\equiv 0$ and $\Phi_3\not\equiv 0$, we can apply Lemmas 2.6 and 2.9 to obtain

$$k_1\,\overline{N}(r,1;F|\geq k_1+1) \leq \overline{N}(r,0;f^{(k)}|\geq k_3+1)+\overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1)+S(r),$$

and

$$(k_2+k)\;\overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1) \leq \overline{N}(r,1;F|\geq k_1+1)+\overline{N}(r,0;f^{(k)}|\geq k_3+1)+S(r).$$

Using the above inequalities and arguments similar to those applied in the proof of Lemma 2.6 from [20], we can complete the proof the lemma. We omit the details.

□

Lemma 2.13 ([13]). *Let $N(r,0;f^{(k)}\mid f\neq 0)$ be the counting function of those zeros of $f^{(k)}$ which are not zeros of f, where a zero of $f^{(k)}$ is counted according to its multiplicity. Then*

$$N(r,0;f^{(k)}\mid f\neq 0)\leq k\overline{N}(r,\infty;f)+N(r,0;f\,|<k)+k\overline{N}(r,0;f\,|\geq k)+S(r,f).$$

Lemma 2.14. *Let F and G be given by (2.1), F, G share $(1,k_1)$, $2\leq k_1\leq\infty$, and let $\Phi_1\not\equiv 0$ and $n\geq 3$. Also, let $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$ and f, g share (∞,∞). Then*

$$\overline{N}(r,0;f^{(k)})\leq\frac{1}{k_1(n-2)-1}\;\overline{N}(r,\infty;f)+S(r,f^{(k)}).$$

Proof. Using Lemmas 2.3 and 2.13 we can write

$$\overline{N}_*(r,1;F,G)\leq\overline{N}(r,1;F\,|\geq k_1+1)\leq\frac{1}{k_1}\;\left(N(r,1:F)-\overline{N}(r,1;F)\right)$$

$$\leq\;\frac{1}{k_1}\,|\sum_{j=1}^{n}\left(N(r,\omega_j;f^{(k)})-\overline{N}(r,\omega_j;f^{(k)})\right)|\leq\frac{1}{k_1}\;\left(N(r,0;(f^{(k)})'\mid f^{(k)}\neq 0)\right)$$

$$\leq\;\frac{1}{k_1}\left[\overline{N}(r,0;f^{(k)})+\overline{N}(r,\infty;f)\right]+S(r,f^{(k)}),$$

where $\omega_1,\omega_2\ldots\omega_n$ are the distinct roots of equation $z^n+az^{n-1}+b=0$. The rest of the proof follows from Lemma 2.5 with $k_3=0$. □

Lemma 2.15. *Let F and G be given by (2.1). F, G share $(1,k_1)$, $2 \leq k_1 \leq \infty$, and let $\Phi_1 \not\equiv 0$ and $n \geq 3$. Also, let $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$ and f, g share (∞,∞), where $0 \leq k_3 \leq \infty$. Then*

$$\overline{N}_L(r,1;F) \leq \frac{k_1(n-2)}{(k_1+1)[k_1(n-2)-1]}\ \overline{N}(r,\infty;f) + S(r,f^{(k)}).$$

A similar result also holds for G.

Proof. Using Lemmas 2.3 and 2.13 we can write

$$\begin{aligned}\overline{N}_L(r,1;F) &\leq \overline{N}(r,1;F\mid\geq k_1+2) \leq \frac{1}{k_1+1}\ \left(N(r,1:F)-\overline{N}(r,1;F)\right)\\ &\leq \frac{1}{k_1+1}\left[\overline{N}(r,0;f^{(k)})+\overline{N}(r,\infty;f)\right]+S(r,f^{(k)}).\end{aligned}$$

Now using Lemma 2.14 the proof of the lemma can easily be completed. We omit the details. □

Lemma 2.16 ([1]). *Let f and g be two non-constant meromorphic functions sharing $(1,k_1)$, where $2 \leq k_1 \leq \infty$. Then*

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,1;f\mid=2)+2\,\overline{N}(r,1;f\mid=3)+\ldots+(k_1-1)\,\overline{N}(r,1;f\mid=k_1)+k_1\,\overline{N}_L(r,1;f)\\ &\qquad+(k_1+1)\,\overline{N}_L(r,1;g)+k_1\,\overline{N}_E^{(k_1+1}(r,1;g) \leq N(r,1;g)-\overline{N}(r,1;g).\end{aligned}$$

Lemma 2.17. *Let F and G be given by (2.1) and they share $(1,k_1)$. If $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$ and f, g share (∞,k_2), where $2 \leq k_1 \leq \infty$, and $H \not\equiv 0$. Then*

$$\begin{aligned}nT(r,f^{(k)}) \leq\ & \overline{N}(r,\infty;f)+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f^{(k)})+\overline{N}(r,\infty;g)+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g^{(k)})\\ &+\overline{N}(r,0;f^{(k)})+\overline{N}(r,0;g^{(k)})+\overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)})+\overline{N}_*(r,\infty;f,g)\\ &-(k_1-1)\overline{N}_*(r,1;F,G)+\overline{N}_L(r,1;F)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)}).\end{aligned}$$

A similar result also holds for $g^{(k)}$.

Proof. Using Lemmas 2.13 and 2.16 we can write

$$\begin{aligned}(2.2)\qquad & \overline{N}_0(r,0;(g^{(k)})')+\overline{N}(r,1;F\mid\geq 2)+\overline{N}_*(r,1;F,G)\\ &\leq \overline{N}_0(r,0;(g^{(k)})')+\overline{N}(r,1;F\mid=2)+\overline{N}(r,1;F\mid=3)+\ldots+\overline{N}(r,1;F\mid=k_1)\\ &\quad+\overline{N}_E^{(k_1+1}(r,1;F)+\overline{N}_L(r,1;F)+\overline{N}_L(r,1;G)+\overline{N}_*(r,1;F,G)\\ &\leq \overline{N}_0(r,0;(g^{(k)})')-\overline{N}(r,1;F\mid=3)-\ldots-(k_1-2)\overline{N}(r,1;F\mid=k_1)-(k_1-1)\overline{N}_L(r,1;F)\\ &\quad-k_1\overline{N}_L(r,1;G)-(k_1-1)\overline{N}_E^{(k_1+1}(r,1;F)+N(r,1;G)-\overline{N}(r,1;G)+\overline{N}_*(r,1;F,G)\\ &\leq \overline{N}_0(r,0;(g^{(k)})')+N(r,1;G)-\overline{N}(r,1;G)-(k_1-2)\overline{N}_L(r,1;F)-(k_1-1)\overline{N}_L(r,1;G)\\ &\leq \overline{N}_0(r,0;(g^{(k)})')+N(r,1;G)-\overline{N}(r,1;G)-(k_1-2)\overline{N}_L(r,1;F)-(k_1-1)\overline{N}_L(r,1;G)\end{aligned}$$

$$\leq N(r,0;(g^{(k)})' \mid g^{(k)} \neq 0) - (k_1-2)\overline{N}_L(r,1;F) - (k_1-1)\overline{N}_L(r,1;G)$$

$$\leq \overline{N}(r,0;g^{(k)}) + \overline{N}(r,\infty;g) - (k_1-2)\overline{N}_L(r,1;F) - (k_1-1)\overline{N}_L(r,1;G) =$$

$$\overline{N}(r,0;g^{(k)}) + \overline{N}(r,\infty;g) - (k_1-1)\overline{N}_*(r,1;F,G) + \overline{N}_L(r,1;F).$$

where $\overline{N}_0(r,0;(g^{(k)})')$ has the same meaning as in Lemma 2.2. Hence using (2.2), Lemmas 2.1, 2.2 and 2.3, in view of second fundamental theorem, we obtain

$$(2.3) \qquad n\,T(r,f^{(k)}) \leq \overline{N}(r,0;f^{(k)}) + \overline{N}(r,\infty;f) + N(r,1;F \mid= 1)+$$

$$+\overline{N}(r,1;F \mid\geq 2) - N_0(r,0;(f^{(k)})') + S(r,f^{(k)}) \leq \overline{N}(r,0;f^{(k)}) + \overline{N}(r,\infty;f)$$

$$+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f^{(k)}) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g^{(k)}) + \overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)}) + \overline{N}_*(r,\infty;f,g)+$$

$$+\overline{N}_*(r,1;F,G) + \overline{N}(r,1;F\mid\geq 2) + \overline{N}_0(r,0;(g^{(k)})') + S(r,f^{(k)}) + S(r,g^{(k)})$$

$$\leq \overline{N}(r,\infty;f) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f^{(k)}) + \overline{N}(r,\infty;g) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g^{(k)}) + \overline{N}(r,0;f^{(k)})$$

$$+\overline{N}(r,0;g^{(k)}) + \overline{N}_*(r,\infty;f,g) + \overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)}) - (k_1-1)\overline{N}_*(r,1;F,G)+$$

$$+\overline{N}_L(r,1;F) + S(r,f^{(k)}) + S(r,g^{(k)}).$$

This proves the lemma. □

Lemma 2.18 ([4]). *Let F and G be given by (2.1) and they share $(1,k_1)$, and let $n \geq 3$. If $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,0)$ and f, g share (∞,k_2), and $H \equiv 0$. Then $f^{(k)} \equiv g^{(k)}$.*

3. Proofs of the theorem

Proof of Theorem 1.1 Let F and G be given by (2.1). Then F, G share $(1,k_1)$ and $(\infty;k_2)$. We consider the following cases.

Case 1. Let $H \not\equiv 0$. Clearly $F \not\equiv G$ and so $f^{(k)} \not\equiv g^{(k)}$.

Subcase 1.1: Let $\Phi_2 \not\equiv 0$.

Subcase 1.1.1: Suppose $\Phi_3 \not\equiv 0$.

Suppose first that 0 is not an e.v.P. of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$. Then by Lemma 2.4 we get $\Phi_1 \not\equiv 0$. Since $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0,k_3)$ it follows that $\overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)}) \leq \overline{N}(r,0;f^{(k)})$. Hence, successively applying Lemmas 2.17 and 2.7 for $k_3 = 0$, Lemma 2.10 for $k_2 = 0$

and Lemma 2.12, we can write

$$
\begin{aligned}
&(3.1)\ nT(r,f^{(k)})\\
\leq\ & \overline{N}(r,\infty;f)+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f^{(k)})+\overline{N}(r,\infty;g)+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g^{(k)})\\
&+2\ \overline{N}(r,0;f^{(k)})+\overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)})+\overline{N}_*(r,\infty;f,g)-(k_1-1)\overline{N}_*(r,1;F,G)\\
&+\overline{N}_L(r,1;F)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\\
\leq\ & \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f^{(k)})+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g^{(k)})+3\ \overline{N}(r,0;f^{(k)})+2\overline{N}(r,\infty;f)\\
&+\overline{N}_*(r,\infty;f,g)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\\
\leq\ & \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f^{(k)})+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g^{(k)})+\frac{3k_1+3}{(n-2)k_1-1}\ \overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1)\\
&+\overline{N}(r,\infty;f|\geq k_2+1)+\frac{2k_1+2}{k_1k-1}\ \overline{N}(r,0;f^{(k)}|\geq k_3+1)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\\
\leq\ & T(r,f^{(k)})+T(r,g^{(k)})+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\\
\leq\ & 2\ T(r)+S(r).
\end{aligned}
$$

Next, suppose 0 is an e.v.P. of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$. Then $\overline{N}(r,0;f^{(k)})=S(r,f^{(k)})$. Assuming that $\Phi_1\not\equiv 0$, we can apply Lemma 2.10 for $k_2=0$ to get $\overline{N}(r,\infty;f)=S(r)$. Hence $\overline{N}_*(r,\infty;f,g)=S(r)$, showing that (3.1) holds.

Now assume that $\Phi_1\equiv 0$. Then $(F-1)\equiv d(G-1)$, where $d\neq 0,1$. Since f, g share (∞,k_2), it follows that f, g share (∞,∞) which implies $\overline{N}_*(r,\infty;f,g)=S(r)$. Also, by Lemma 2.10 for $k_2=0$ we have $\overline{N}(r,\infty;f)=S(r)$. Therefore, in this case also (3.1) holds.

Arguments similar to those applied above can be used to obtain

$$(3.2)\qquad nT(r,g^{(k)})\ \leq\ 2\ T(r)+S(r).$$

Combining (3.1) and (3.2) we get

$$(3.3)\qquad (n-2)T(r)\leq S(r),$$

which leads to a contradiction for $n\geq 3$.

Subcase 1.1.2: Suppose $\Phi_3\equiv 0$. Then by integration we obtain

$$1-\frac{\omega_i}{f^{(k)}}\equiv A(1-\frac{\omega_j}{g^{(k)}}),$$

where $A\neq 0$. If $A=1$ then $f^{(k)}=\frac{\omega_i}{\omega_j}g^{(k)}$, which contradicts $\Phi_2\not\equiv 0$. So $A\neq 0,1$. Since f, g share (∞,k_3), it follows that $N(r,\infty;f)=S(r,f^{(k)})$ and $N(r,\infty;g)=S(r,g^{(k)})$. Now proceeding as in Subcase 1.1.1, we can arrive at a contradiction.

Subcase 1.2: Let $\Phi_2\equiv 0$.

By integration we have $f^{(k)} \equiv cg^{(k)}$, where $c \neq 0, 1$. Since $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0, k_3)$ and f, g share (∞, k_2), it follows that $\overline{N}_*(r, 0; f^{(k)}, g^{(k)}) = 0$ and $\overline{N}_*(r, \infty; f, g) = 0$.

Subcase 1.2.1 Suppose $\Phi_3 \not\equiv 0$.

If 0 is not an e.v.P. of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$, then by Lemma 2.4 we get $\Phi_1 \not\equiv 0$. Now consecutively applying Lemmas 2.17, 2.14 and 2.9 for $k_2 = 0$, and Lemma 2.15, we can write

$$\begin{aligned}
(3.4)\qquad & nT(r, f^{(k)}) \leq \overline{N}(r, \infty; f) + \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; f^{(k)}) + \overline{N}(r, \infty; g)+ \\
& +\overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; g^{(k)}) + 2\overline{N}(r, 0; f^{(k)}) + \overline{N}_*(r, 0; f^{(k)}, g^{(k)}) + \overline{N}_*(r, \infty; f, g)- \\
& -(k_1 - 1)\ \overline{N}_*(r, 1; F, G) + \overline{N}_L(r, 1; F) + S(r, f^{(k)}) + S(r, g^{(k)}) \leq \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; f^{(k)})+ \\
& \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; g^{(k)}) + 2\ \overline{N}(r, \infty; f) + \frac{2}{k_1(n-2)-1}\ \overline{N}(r, \infty; f) - (k_1 - 1)\ \overline{N}_*(r, 1; F, G)+ \\
& +\overline{N}_L(r, 1; F) + S(r, f^{(k)}) + S(r, g^{(k)}) \leq \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; f^{(k)}) + \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; g^{(k)})+ \\
& +3\ \overline{N}(r, \infty; f) - (k_1 - 1)\overline{N}_*(r, 1; F, G) + \overline{N}_L(r, 1; F) + S(r, f^{(k)}) + S(r, g^{(k)}) \leq 2\ T(r)+ \\
& +\frac{3}{k}\ \overline{N}_*(r, 1; F, G) - (k_1 - 1)\overline{N}_*(r, 1; F, G) + \overline{N}_L(r, 1; F) + S(r, f^{(k)}) + S(r, g^{(k)}) \leq \\
& \leq 2\ T(r) + \frac{k_1(n-2)}{(k_1+1)[k_1(n-2)-1]}\ \overline{N}(r, \infty; g) + S(r, f^{(k)}) + S(r, g^{(k)}) \leq \\
& \leq \left(2 + \frac{3k_1(n-2)}{(k_1+1)(k+1)[k_1(n-2)-1]}\right) T(r) + S(r).
\end{aligned}$$

Therefore

$$(3.5)\qquad \left(n - 2 - \frac{3k_1(n-2)}{(k_1+1)(k+1)[k_1(n-2)-1]}\right) T(r) \leq S(r).$$

Since $n \geq 3$, the inequality (3.5) leads to a contradiction.

In the case where 0 is an e.v.P. of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$, we can apply Lemma 2.9 for $k_2 = 0$, to get $\overline{N}(r, \infty; f) = \frac{1}{k}\overline{N}_*(r, 1; F, G)$. Hence, proceeding as above in this case also we arrive at a contradiction.

Subcase 1.2.2: Suppose $\Phi_3 \equiv 0$.

Suppose ∞ is not an e.v.P. of f and g. Since $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ share $(0, k_3)$ and f, g share (∞, k_2), it follows from Lemma 2.8 that $\overline{N}_*(r, 0; f^{(k)}, g^{(k)}) = 0$ and $\overline{N}_*(r, \infty; f, g) = 0$.

Assuming that 0 is not an e.v.P of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$, by Lemma 2.4 we get $\Phi_1 \not\equiv 0$. Now, consecutively using Lemmas 2.17 and 2.5 for $k_3 = 0$, and Lemma 2.11 for $k_2 = 0$, we can write

$$(3.6)\qquad nT(r, f^{(k)}) \leq \overline{N}(r, \infty; f) + \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; f^{(k)}) + \overline{N}(r, \infty; g)+$$

$$\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g^{(k)})+2\overline{N}(r,0;f^{(k)})+\overline{N}_*(r,0;f^{(k)},g^{(k)})+\overline{N}_*(r,\infty;f,g)-$$

$$-(k_1-1)\ \overline{N}_*(r,1;F,G)+\overline{N}_L(r,1;F)+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\leq\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f^{(k)})+$$

$$+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g^{(k)})+2\overline{N}(r,\infty;f)+2\ \overline{N}_*(r,1;F,G)-(k_1-1)\ \overline{N}_*(r,1;F,G)+\overline{N}_L(r,1;F)+$$

$$+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\leq\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f^{(k)})+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g^{(k)})-$$

$$-(k_1-3)\overline{N}_*(r,1;F,G)+\overline{N}_L(r,1;F)+\frac{2}{nk+n-1}\ \{\overline{N}(r,0;f^{(k)}+a)+\overline{N}(r,0;g^{(k)}+a)+$$

$$+\overline{N}_*(r,1;F,G)\}+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\leq 2\,T(r)+\frac{4}{nk+n-1}\ T(r)+\frac{2}{5}\ \overline{N}_L(r,1;F)+$$

$$+S(r,f^{(k)})+S(r,g^{(k)})\leq\left(2+\frac{4}{nk+n-1}+\frac{2k_1(n-2)}{5(k_1+1)[k_1(n-2)-1]}\right)T(r)+S(r).$$

Therefore

$$\left(n-2-\frac{4}{nk+n-1}-\frac{2k_1(n-2)}{5(k_1+1)[k_1(n-2)-1]}\right)T(r)\leq S(r). \tag{3.7}$$

Since $n\geq 3$, the inequality (3.7) leads to a contradiction.

If 0 is an e.v.P. of $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$, then with the help of Lemmas 2.17 and 2.11 for $k_2=0$ and the above arguments, we arrive at a contradiction.

If ∞ is an e.v.P. of f and g, then proceeding as in Subcase 1.2.1, we can arrive at a contradiction.

Case 2. Let $H\equiv 0$. In this case the assertion of the theorem follows from Lemma 2.18. Theorem 1.1 is proved.

Список литературы

[1] A. Banerjee, "On a question of Gross", J. Math. Anal. Appl., **327**(2), 1273 – 1283 (2007).

[2] A. Banerjee, "Some uniqueness results on meromorphic functions sharing three sets", Ann. Polon. Math., **92**(3), 261 – 274 (2007).

[3] A. Banerjee and P. Bhattacharjee, "Uniqueness of derivatives of meromorphic functions sharing two or three sets", Turk.J. Math., **33**, 1 – 14 (2009).

[4] A. Banerjee and P. Bhattacharjee, "Uniqueness and set sharing of derivatives of meromorphic functions", Math. Slovaca., **61**(2), 197 – 214 (2011).

[5] A. Banerjee and P. Bhattacharjee, "Uniqueness of meromorphic functions that share three sets", Kyungpook Math. J., **49**, 15 – 19 (2009).

[6] A. Banerjee and S. Mukherjee, "Uniqueness of meromorphic functions sharing two or three sets", Hokkaido Math. J., **37**(3), 507 – 530 (2008).

[7] M. L. Fang and W. Xu, "A note on a problem of Gross", Chinese J. Contemporary Math., **18**(4), 395 – 402 (1997).

[8] F. Gross, "Factorization of meromorphic functions and some open problems", Proc. Conf. Univ. Kentucky, Leixngton, Ky (1976); Lecture Notes in Math., **599**, 51 – 69, Springer (Berlin, 1977).

[9] F. Gross and C. C. Yang, "On preimage and range sets of meromorphic functions", Proc. Japan Acad., **58**, 17-20, 1982.

[10] W. K. Hayman, Meromorphic Functions, The Clarendon Press, Oxford (1964).

[11] I. Lahiri, "Value distribution of certain differential polynomials", Int. J. Math. Math. Sci. **28**, no.2, 83 – 91 (2001).

[12] I. Lahiri, "Weighted sharing and uniqueness of meromorphic functions", Nagoya Math. J., **161**, 193 – 206 (2001).

[13] I. Lahiri, "Weighted value sharing and uniqueness of meromorphic functions", Complex Var. Theory Appl. **46**, 241 – 253 (2001).

[14] I. Lahiri and A. Banerjee, "Uniqueness of meromorphic functions with deficient poles", Kyungpook Math. J., **44**, 575 – 584 (2004).

[15] I. Lahiri and A. Banerjee, "Weighted sharing of two sets", Kyungpook Math. J., **46**, 79 – 87 (2006).

[16] W. C. Lin and H. X. Yi, "Uniqueness theorems for meromorphic functions that share three sets", Complex Var. Theory Appl., **48**(4), 315 – 327 (2003).

[17] A. Z. Mokhon'ko, "On the Nevanlinna characteristics of some meromorphic functions", Theo. Funct. Funct. Anal. Appl., Izd-vo Khar'kovsk. Un-ta **14**, 83 – 87 (1971).

[18] H. Qiu and M. Fang, "A unicity theorem for meromorphic functions", Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. **25**, 31 – 38 (2002).

[19] H. X. Yi, "Uniqueness of meromorphic functions and a question of Gross", [J] Science in China (Ser A), **37**(7), 802 – 813 (1994).

[20] H. X. Yi, "Meromorphic functions with weighted sharing of three values", Complex Var., **50**(2), 923 – 934 (2005).

[21] H. X. Yi, "Unicity theorems for meromorphic or entire functions", Bull. Austral. Math. Soc. **49**(2), 257 – 265 (1994).

[22] H. X. Yi and W. C. Lin, "Uniqueness theorems concerning a question of Gross", Proc. Japan Acad., **80**, Ser.A, 136 – 140 (2004).

Поступила 29 апреля 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2. 2017, стр. 20-25.

THE CASAZZA-TREMAIN CONJECTURE IN THE INFINITE DIMENSIONAL HILBERT SPACES

M. A. HASANKHANI FARD

Vali-e-Asr University, Rafsanjan, Iran
E-mail: *m.hasankhani@vru.ac.ir*

Abstract. In this paper, the proof of the Casazza-Tremain Conjecture in the infinite dimensional Hilbert spaces is given.

MSC2010 numbers: 42C15, 46L05.

Keywords: frame; frame sequence; Kadison-Singer problem; Weaver conjecture; Casazza-Tremain conjecture.

1. Introduction

Let $\mathcal{H}$ be a separable Hilbert space with inner product $< .,. >$. A sequence of vectors $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{H}$ is called a frame for $\mathcal{H}$ if there exist constants A and B $(0 < A \leq B < \infty)$, such that for all $f \in \mathcal{H}$ we have

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |< f, f_k >|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{1.1}$$

The constants A and B are called the lower and upper frame bounds, respectively. The second inequality of the frame condition (1.1) is also known as the Bessel condition for $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. If $A = B$, then $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ is called a tight frame, and if $A = B = 1$, then $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ is called a normalized tight frame or Parseval frame. A sequence $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ in Hilbert space $\mathcal{H}$ is called a frame sequence in $\mathcal{H}$ if it is a frame for $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

A bounded linear operator T defined by

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}, \quad T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

is called the synthesis operator of $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Also, a bounded linear operator S defined by

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad Sf = \sum_{k=1}^{\infty} < f, f_k > f_k$$

is called the frame operator of $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. It is easy to show that $S = TT^*$, where T^* is the adjoint operator of T.

Two frames $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ and $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ are called dual frames for $\mathcal{H}$ if

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} < f, f_k > g_k = \sum_{k=1}^{\infty} < f, g_k > f_k, \quad \text{for any} \quad f \in \mathcal{H}.$$

The frame $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ defined by $\tilde{f}_k = S^{-1} f_k$ is a dual frame of frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, and is called the canonical dual frame of $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

A Riesz basis for $\mathcal{H}$ is a family of the form $\{Ae_k\}_{k=1}^{\infty}$, where $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ is an orthonormal basis for $\mathcal{H}$ and $A \in B(\mathcal{H})$ is an invertible operator. Every Riesz basis for $\mathcal{H}$ is a frame for $\mathcal{H}$. A sequence $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ in the Hilbert space $\mathcal{H}$ is called a Riesz basic sequence in $\mathcal{H}$ if it is a Riesz basis for the Hilbert space $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. For more information concerning frames we refer to [2, 3, 11].

In 1959, R. Kadison and I. Singer [4] introduced the problem of extensions of pure states.

Kadison-Singer Problem. *Does every pure state on the (Abelian) von Neumann algebra $\mathbb{D}$ of bounded diagonal operators on ℓ_2 have a unique extension to a (pure) state on $B(\ell_2)$, the von Neumann algebra of all bounded linear operators on the Hilbert space ℓ_2?*

Recall that a state of von Neumann algebra $\mathcal{A}$ is a linear functional Λ on $\mathcal{A}$ with $\Lambda(I) = 1$ and $\Lambda(T) \geq 0$ for all positive operators $T \in \mathcal{A}$. A pure state of $\mathcal{A}$ is an extreme point of the family of states of $\mathcal{A}$.

For $a, b \in \mathbb{R}$, consider the translation and modulation operators on $L_2(\mathbb{R})$, which are defined as $(T_a g)(x) = g(x-a)$, $(E_b g)(x) = e^{2\pi i b x} g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, respectively. A Gabor frame is a frame for $L_2(\mathbb{R})$ of the form $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, where $a, b > 0$ and $g \in L_2(\mathbb{R})$ is a fixed function.

Studying the Gabor frames, H. Fiechtinger noted that all examples of Gabor frames can be written as a finite union of Riesz basis sequence and so he suggested the following conjecture:

Fiechtinger Conjecture. *Every bounded frame can be written as a finite union of Riesz basic sequences.*

This conjecture is equivalent to the Kadison-Singer problem (see [7]), which has been solved recently by Marcus, Spielman and Srivastava [5]. Hence the Fiechtinger conjecture is now a useful theorem in the frame theory.

Another conjecture that is equivalent to the Kadison-Singer problem is the Bourgain-Tzafriri conjecture.

Bourgain-Tzafriri Conjecture. *There is a universal constant $\eta > 0$ so that for* *every $\theta > 1$ there is a natural number $r = r(\theta)$ satisfying: for any natural number n, if $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ is a linear operator with $\|T\| \leq \theta$ and $\|Te_i\| = 1$ for all $i = 1, 2, ..., n$, then there is a partition $\{I_j\}_{j=1}^r$ of $\{1, 2, ..., n\}$ so that for all $j = 1, 2, ..., r$ and all choices of scalars $\{c_i\}_{i\in I_j}$ we have*

$$\| \sum_{i\in I_j} c_i T e_i \|^2 \geq \eta \sum_{i\in I_j} |c_i|^2.$$

In this paper, the proof of two conjectures (the Weaver conjecture KS_2 and the Casazza-Tremain conjecture) in the infinite dimensional Hilbert spaces is given.

2. The conjecture KS_r

The famous Kadison-Singer problem in C^* algebra, posed on 1959, has been solved recently by Marcus, Spielman and Srivastava [5]. In fact, in [5] was proved the Weaver conjecture KS_2 in the finite dimensional Hilbert space $\mathbb{C}^d$, $d \in \mathbb{N}$, which implies the Kadison-Singer problem. Observe that the Kadison-Singer problem is also equivalent to the Paving conjecture (see [1, 10]).

Paving Conjecture: *For any $\epsilon > 0$, there is $r = r(\epsilon) \in \mathbb{N}$ such that for every zero diagonal operator T on $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, there exists a partition $\{I_j\}_{j=1}^r$ of $\{1, 2, ..., n\}$ such that $\|P_{I_j} T P_{I_j}\| \leq \epsilon \|T\|$ for all $j \in \{1, 2, ..., n\}$, where P_{I_j} is the orthogonal projection onto $\{e_i\}_{i\in I_j}$ and $\{e_i\}_{i=1}^n$ is the canonical orthonormal basis for $\mathbb{C}^n$.*

N. Weaver [6] using the equivalence of the Kadison-Singer problem and the Paving conjecture suggested another equivalent Conjecture KS_r.

Conjecture KS_r. *Let $r \in \mathbb{N}$. There exist universal constants $\eta \geq 2$ and $\theta > 0$ such that the following holds. Let $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathbb{C}^n$ with $\|f_k\| \leq 1$ and suppose*

$$\sum_{k=1}^{m} | \langle f, f_k \rangle |^2 \leq \eta \quad \text{for all unit vectors } f \in \mathbb{C}^n.$$

Then there exists a partition $\{I_j\}_{j=1}^r$ of $\{1, 2, ..., n\}$ such that

$$\sum_{k\in I_j} | \langle f, f_k \rangle |^2 \leq \eta - \theta \quad \text{for all unit vectors } f \in \mathbb{C}^n \text{ and all } j \in \{1, 2, ..., r\}.$$

Note that the constants η and $\theta > 0$ must be independent of n and m.

In fact, N. Weaver has proved the following theorem.

Theorem 2.1 ([6]). *The Kadison-Singer problem has a positive solution if and only if Conjecture KS_r is true for some $r \geq 2$.*

Also, N. Weaver has indicated modifications in Conjecture KS_r, which do not alter its truth-value.

Theorem 2.2 ([6]). *If either or both of the following modifications is made to Conjecture KS_r, the resulting conjecture is equivalent to Conjecture KS_r:*
a) require $\theta = 1$;
b) assume $\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \eta$ for all unit vectors $f \in \mathbb{C}^n$ instead of $\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq \eta$.

In [5], A. Marcus, D. Spielman and N. Srivastava using the mixed characteristic polynomials and the above theorem have established the following theorem, and hence proved the Kadison-Singer problem.

Theorem 2.3 ([5]). *There exist universal constants $\eta \geq 2$ and $\theta > 0$ such that the following holds. Let $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathbb{C}^n$ with $\|f_k\| \leq 1$ and suppose*

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \eta \quad \textit{for all unit vectors } f \in \mathbb{C}^n.$$

Then there exist a partition I_1, I_2 of $\{1, 2, ..., n\}$ such that

$$\sum_{k\in I_j} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq \eta - \theta \quad \textit{for all unit vectors } f \in \mathbb{C}^n \textit{ and all } j = 1, 2.$$

It is easy to show that Theorem 2.3 remains true in the case where $\mathbb{C}^n$ is replaced by any finite dimensional Hilbert space. To prove the Weaver Conjecture KS_2 in the infinite dimensional Hilbert spaces we need the following lemma (see [9], Proposition 2.1).

Lemma 2.1. *Fix $r \in \mathbb{N}$ and assume for every natural number n we have a partition $\{I_i^n\}_{i=1}^r$ of $\{1, 2, ..., n\}$. Then there are natural numbers $\{n_1 < n_2 < ...\}$ such that $I_i^{n_j} \subset I_i^{n_k}$ for all $k \geq j$ and $i \in \{1, 2, ..., r\}$. Also, if $I_i := \{j | j \in I_i^{n_j}\} = \{j_1 < j_2 < ...\}$, then $\{I_i\}_{i=1}^r$ is a partition of $\mathbb{N}$ and $\{j_1, j_2, ... j_m\} \subset I_i^{n_{j_m}}$ for all $m \in \mathbb{N}$.*

The proof of Weaver Conjecture KS_2 in the infinite dimensional Hilbert spaces is given in the next theorem.

Theorem 2.4. *There exist universal constants $\eta \geq 2$ and $\theta > 0$ such that the following holds. Let $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence in an infinite dimensional Hilbert space $\mathcal{H}$ with $\|f_k\| \leq 1$ and suppose*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \eta \quad \textit{for all unit vectors } f \in \mathcal{H}.$$

Then there exists a partition I_1, I_2 of $\mathbb{N}$ such that

$$\sum_{k\in I_i} |\langle f, f_k\rangle|^2 \le \eta - \theta \text{ for all unit vectors } f \in \mathcal{H} i = 1, 2. \tag{2.1}$$

Proof. Let $\eta \geq 2$ and $\theta > 0$ be as in Theorem 2.3, and let (2.1) holds. We fix a unit vector $f \in \mathcal{H}$ and for any $n \in \mathbb{N}$ consider the space $\mathcal{H}_n := span\{f_1, f_2, ..., f_n, f\}$. Then for all $n \in \mathbb{N}$ and for all $g \in \mathcal{H}_n$ with $\|g\| = 1$, we have

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle g, f_k\rangle|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, f_k\rangle|^2 = \eta.$$

By Theorems 2.2 and 2.3, for any $n \in \mathbb{N}$ there exists a partition I_1^n, I_2^n of $\{1, 2, ..., n\}$ such that

$$\sum_{k\in I_i^n} |\langle g, f_k\rangle|^2 \le \eta - \theta \text{ for all unit vectors } g \in \mathcal{H}_n \text{ and } i \in \{1, 2\}.$$

Next, by Lemma 2.1, there exist natural numbers $n_1 < n_2 < ...$ such that $I_i^{n_j} \subset I_i^{n_k}$ for all $k \geq j$ and $i \in \{1, 2\}$. Also, if $I_i := \{j | j \in I_i^{n_j}\} = \{j_1 < j_2 < ...\}$, then $\{I_i\}_{i=1}^2$ is a partition of $\mathbb{N}$ and $\{j_1, j_2, ... j_m\} \subset I_i^{n_{j_m}}$ for all $m \in \mathbb{N}$.

Thus, for all $m \in \mathbb{N}$ we have

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_{j_k}\rangle|^2 \le \sum_{k\in I_i^{n_{j_m}}} |\langle f, f_{j_k}\rangle|^2 \le \eta - \theta,$$

and hence we get (2.2). Theorem 2.4 is proved. □

P. Casazza and J. Tremain suggested the following conjecture (see [7, Conjecture 8.2]).

Casazza-Tremain Conjecture. *There exists an $\varepsilon > 0$ so that for large K, for all n and all equal norm Parseval frames $\{f_i\}_{i=1}^{Kn}$ for ℓ_2^n, there is a $J \subset \{1, 2, ..., Kn\}$ so that both $\{f_i\}_{i\in J}$ and $\{f_i\}_{i\in J^c}$ have lower frame bounds which are greater than ε.*

The proof of the Casazza-Tremain Conjecture in the finite dimensional Hilbert spaces can be found in [8]. The following theorem contains a proof of the Casazza-Tremain Conjecture in the infinite dimensional Hilbert spaces.

Theorem 2.5. *Let the constants η and θ be as in Theorem 2.4. Then every η-tight frame in the infinite dimensional Hilbert space $\mathcal{H}$ with normalized elements can be partitioned into two frames with frame bounds θ and η.*

Proof. Let $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a η-tight frame in the infinite dimensional Hilbert space $\mathcal{H}$ with $\|f_k\| \leq 1$. Then by Theorem 2.4, there exists a partition $\{I_i\}_{i=1}^2$ of $\mathbb{N}$ such that

(2.2) holds, and

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \sum_{k\in I_1} |\langle f, f_k\rangle|^2 + \sum_{k\in I_2} |\langle f, f_k\rangle|^2 \le \sum_{k\in I_1} |\langle f, f_k\rangle|^2 + \eta - \theta,$$

and hence $\sum_{k\in I_1} |\langle f, f_k\rangle|^2 \ge \theta$. Therefore

$$\theta \le \sum_{k\in I_1} |\langle f, f_k\rangle|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \eta.$$

Similar arguments can be used to show that

$$\theta \le \sum_{k\in I_2} |\langle f, f_k\rangle|^2 \le \eta.$$

Theorem 2.5 is proved. □

Acknowledgment. We thank a referee for careful reading the paper and useful comments which improved the paper.

Список литературы

[1] J. Anderson, "A conjecture concerning pure states on B(H) and a related theorem", in Topics in modern operator theory, Birkhäuser, 27 – 43 (1981).

[2] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (2002).

[3] C. Heil, D. Walnut, "Continuous and discrete wavelet transform", *SIAM Rev.*, **31**, 628 – 666 (1969).

[4] R. Kadison and I. Singer, "Extensions of pure states", American Jour. Math., **81**, 383 – 400 (1959).

[5] A. Marcus, D. Spielman and N. Srivastava, Interlacing families II: Mixed Characteristic Polynomials and the Kadison-Singer Problem, *arXiv 1306.3969v4*.

[6] N. Weaver, The Kadison-Singer Problem in discrepancy theory, Discrete Math. **278**, 227 – 239 (2004).

[7] P. G. Casazza and J. C. Tremain, "The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering", Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **103** (7): 2032 – 2039 (2006).

[8] P. G. Casazza, J. C. Tremain, Consequences of the Marcus/ Spielman/ Srivastava solution of the Kadison-Singer problem, arXiv:1407:4768.

[9] P. G. Casazza, O. Christensen, A. M. Lindner and R. Vershynin, Frames and the Feichtinger Conjecture, preprint (2003).

[10] J. Bourgain, L. Tzafriri, "On a problem of Kadison and Singer", J. Reine Angew. Math., **420**, 1 – 43 (1991).

[11] R. Young, An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York (1980).

Поступила 16 апреля 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2, 2017, стр. 26-38.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ФРАНКЛИНА

К. А. КЕРЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *karenkeryan@ysu.am*

Аннотация. В работе доказывается теорема о восстановлении коэффициентов ряда Франклина по ее сумме при некотором условии на мажоранту 2^{ν}-частичных сумм ряда Франклина.

MSC2010 number: 42C10; 42C25.

Ключевые слова: Система Франклина; единственность; A-интеграл.

1. Введение

Из теории тригонометрических рядов хорошо известно, что из почти всюду сходимости тригонометрического ряда к нулю не следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю (см. [12]). Такая же ситуация имеет место для других классических систем, например для рядов по системам Хаара, Уолша, Франклина.

В работах [1], [3] впервые были рассмотрены вопросы единственности для почти всюду сходящихся или суммирующихся тригонометрических рядов. Понятно, что при этом были наложены дополнительные условия на ряд.

В работах [6], [7] получены теоремы восстановления коэффициентов рядов по системе Франклина по сумме ряда при условии что мажоранта частичных сумм $S^*(x)$ удовлетворяет условию

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda|\{x\in[0,1]; S^*(x)>\lambda\}|=0.$$

Г. Г. Геворкяном [5], в частности, была получена аналогичная теорема для системы Хаара, а в [9] была доказана теорема восстановления для рядов по системе Хаара с мажорантой удовлетворяющей более слабому условию.

Основной целью этой работы является получение теоремы для рядов по системе Франклина типа теоремы полученной в [9]. Для формулировки полученных

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T-1A006.

результатов дадим некоторые необходимые определения. Пусть $n = 2^k + i$, где $k \geq 0$ и $1 \leq i \leq 2^k$. Обозначим

$$s_{n,j} = \begin{cases} \frac{j}{2^{k+1}}, & \text{при} \quad 0 \leq j \leq 2i; \\ \frac{j-2i}{2^k}, & \text{при} \quad 2i+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных и кусочно линейных на $[0;1]$ с узлами $\{s_{n,j}\}_{j=0}^n$, т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0;1]$ и линейна на каждом отрезке $[s_{n,j-1}; s_{n,j}]$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что $\dim S_n = n+1$ и множество $\{s_{n,j}\}_{j=0}^n$ получается добавлением точки $s_{n,2i-1}$ к множеству $\{s_{n-1,j}\}_{j=0}^{n-1}$. Поэтому, существует единственная, с точностью до знака, функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f_n\|_2 = 1$. Полагая $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $x \in [0;1]$, получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином [11].

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n f_n(x)$. Обозначим

$$\sigma_\nu(x) := \sum_{n=0}^{2^\nu} a_n f_n(x), \quad \sigma^*(x) := \sup_\nu |\sigma_\nu(x)|.$$

Введем следующие обозначения: $t_j^\nu = \frac{j}{2^\nu}$, когда $0 \leq j \leq 2^\nu$, $t_{-1}^\nu = t_0^\nu = 0$ и $t_{2^\nu+1}^\nu = t_{2^\nu}^\nu = 1$. Положим $\Delta_j^\nu = [t_{j-1}^\nu; t_{j+1}^\nu]$ для $1 \leq j \leq 2^\nu$, и $N_j^\nu(t_i^\nu) = \delta_{ij}$ при $0 \leq i \leq 2^\nu$ и линейна на $[t_{i-1}^\nu; t_i^\nu]$ при $1 \leq i \leq 2^\nu$ для $j = 0, \dots, 2^\nu$. Через $M_j^\nu(x)$ обозначим

$$M_j^\nu(x) = \frac{N_j^\nu(x)}{\|N_j^\nu\|_1} = \frac{2}{t_{j+1}^\nu - t_{j-1}^\nu} N_j^\nu(x).$$

Ясно, что $\mathrm{supp} M_j^\nu = \mathrm{supp} N_j^\nu = \Delta_j^\nu$ и

$$\int_0^1 M_j^\nu(x)dx = 1. \tag{1.1}$$

Через $|A|$ обозначим меру Лебега множества A.

Пусть система функций $\{h_m(x)\}$ удовлетворяет следующим условиям.

Функции $h_m(x) : [0,1] \to R$ такие, что

$$0 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \dots \leq h_m(x) \leq \dots, \quad \lim_{m\to\infty} h_m(x) = \infty \tag{1.2}$$

и существуют двоичные точки $0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \dots < t_{m,n_m} = 1$, такие что интервалы $I_k^m = [t_{m,k-1}, t_{m,k})$, $k = 1, \dots, n_m$, двоичны, т.е.

$$t_{m,k} \in \left\{ \frac{i}{2^j}; i,j \in \mathbb{Z} \right\} \text{ и } I_k^m \in \mathcal{D} := \left\{ \left[\frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j} \right]; 0 \leq i \leq 2^j - 1, j \geq 0 \right\},$$

и на этих интервалах функция $h_m(x)$ постоянна: $h_m(x) = \lambda_k^m$ для $x \in I_k^m$, $k = 1, \dots, n_m$.

Кроме того выполнены следующие два условия:

$$\inf_{m,k}\int_{I_k^m} h_m(x)dx = \inf_{m,k}|I_k^m|\lambda_k^m > 0 \tag{1.3}$$

и

$$\sup_{m,k}\left(\frac{\lambda_k^m}{\lambda_{k-1}^m}+\frac{\lambda_{k-1}^m}{\lambda_k^m}\right) < +\infty. \tag{1.4}$$

Иначе говоря, для каждой функции $h_m(x)$ интервал $[0,1]$ можно раздробить на двоичные интервалы, на каждом из которых эта функция принимает значения эквивалентные значениям на соседних интервалах, а интегралы по этим интервалам больше некоторой положительной постоянной.

Оказывается, (см. лемму 2.2) что если функции h_m удовлетворяют условиям (1.2)-(1.4), то можно выбрать новые двоичные интервалы I_k^m, так что вместе с условиями (1.3), (1.4) удовлетворялось бы условие

$$\sup_{m,k}\left(\frac{|I_k^m|}{|I_{k-1}^m|}+\frac{|I_{k-1}^m|}{|I_k^m|}\right) < +\infty. \tag{1.5}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат статьи.

Теорема 1.1. *Пусть последовательность функций $h_m(x)$ удовлетворяет условиям (1.2) – (1.4), последовательность $\sigma_\nu = \sum_{n=0}^{2^\nu} a_n f_n$ сходится по мере к функции f, а мажоранта σ^* частичных сумм σ_ν удовлетворяет следующему условию:*

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\{x\in[0,1];\ \sigma^*(x)>h_m(x)\}} h_m(x)dx = 0. \tag{1.6}$$

Тогда для всех $n \geq 0$ имеют место

$$a_n = \lim_{m\to\infty}\int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} f_n(x)dx, \tag{1.7}$$

где

$$[f(x)]_{\lambda(x)} = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \lambda(x) \\ 0, & |f(x)| > \lambda(x). \end{cases}$$

2. Вспомогательные леммы.

Для доказательства теоремы 1.1 нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ и $h(x) = \lambda_k$ когда $x \in I_k := [t_{k-1}, t_k)$ и $I_k \in \mathcal{D}$ для $k = 1,\ldots,n$. Более того $\gamma > 0$ такая что*

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \leq \gamma, \text{ для } k = 1,\ldots,n-1. \tag{2.1}$$

Тогда существуют точки $0 = \widetilde{t}_0 < \widetilde{t}_1 < \ldots < \widetilde{t}_s = 1$, *такие что интервалы* $\widetilde{I}_l = [\widetilde{t}_{l-1}, \widetilde{t}_l) \in \mathcal{D}$, $l = 1, \ldots, s$, *функция* h *на этих интервалах постоянная:* $h(x) = \widetilde{\lambda}_l$ *для* $x \in \widetilde{I}_l$, $l = 1, \ldots, \widetilde{s}$, *кроме того*

$$\frac{1}{2\gamma} \leq \frac{|\widetilde{I}_l|}{|\widetilde{I}_{l+1}|} \leq 2\gamma, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\widetilde{\lambda}_l}{\widetilde{\lambda}_{l+1}} \leq \gamma, \text{ для } l = 1, \ldots, s-1, \tag{2.3}$$

$$\min_l \int_{\widetilde{I}_l} h_m(x)dx = \min_k \int_{I_k} \widetilde{h}_m(x)dx > 0. \tag{2.4}$$

Из леммы 2.1 легко вывести следующую лемму.

Лемма 2.2. *Пусть функции* $h_m(x)$ *удовлетворяют условиям (1.2)-(1.4), тогда существуют двоичные точки* $0 = \widetilde{t}_{m,0} < \widetilde{t}_{m,1} < \ldots < \widetilde{t}_{m,\widetilde{n}_m} = 1$ *такие, что интервалы* $\widetilde{I}_k^m = [\widetilde{t}_{m,k-1}, \widetilde{t}_{m,k}) \in \mathcal{D}$, *двоичные для всех* $k = 1, \ldots, \widetilde{n}_m$ *и на этих интервалах функция* $h_m(x)$ *постоянная:* $h_m(x) = \widetilde{\lambda}_k^m$ *для* $x \in \widetilde{I}_k^m$, $k = 1, \ldots, \widetilde{n}_m$, *и условия (1.3), (1.4), а также (1.5) удовлетворены для интервалов* $\widetilde{I}_k^m$ *и значений* $\widetilde{\lambda}_k^m$.

Замечание 2.1. *Из леммы 2.2 следует, что при доказательстве теоремы 1.1 мы можем считать, что условие (1.5) также выполнено.*

Доказательство леммы 2.1. Положим $c = \min_k \int_{I_k} h_m(x)dx = \min_k \lambda_k |I_k|$ и пусть $1 \leq k_0 \leq n$, такое что $\lambda_{k_0}|I_{k_0}| = c$. Из определения c следует, что для каждого i, $-k_0 + 1 \leq i \leq n - k_0$ существует целое $n_i \geq 0$ такое, что

$$2^{n_i} c \leq \lambda_{k_0+i}|I_{k_0+i}| < 2^{n_i+1} c. \tag{2.5}$$

Отметим, что $n_0 = 0$. Положим

$$t_{i,j} = t_{k_0+i-1} + \frac{|I_{k_0+i}|}{2^{n_i}} \cdot j, \text{ для } j = 0, \ldots, 2^{n_i},$$

$$I_{i,j} = [t_{i,j-1}, t_{i,j}), \text{ и } \lambda_{i,j} = \lambda_i \text{ для } j = 1, \ldots, 2^{n_i},$$

Следовательно, имеем

$$\int_{I_{0,1}} h_m(x)dx = c \leq \int_{I_{i,j}} h_m(x)dx = \lambda_{i,j}|I_{i,j}| < 2c. \tag{2.6}$$

Из определения c, $I_{i,j}$, (2.5) и (2.1) следует, что

$$|I_{i,j}| = |I_{i,1}| < \frac{2c}{\lambda_{k_0+i}} \leq \frac{2c\gamma}{\lambda_{k_0+i-1}} \leq 2\gamma |I_{i-1,2^{n_{i-1}}}|,$$

аналогично, получаем

$$|I_{i,j}| = |I_{i,1}| \geq \frac{c}{\lambda_{k_0+i}} \geq \frac{c}{\gamma\lambda_{k_0+i-1}} \geq \frac{1}{2\gamma}|I_{i-1,2^{n_{i-1}}}|.$$

Последние два неравенства означают, что соотношение длин интервалов $I_{i,j}$ с общим концом не более чем 2γ. Перенумеровав интервалы $\{I_{i,j}; -k_0+1 \leq i \leq n-k_0, 1 \leq j \leq 2^{n_i}\}$ в порядке возрастания левого конца получим интервалы $\widetilde{I}_l$, $l = 1, \ldots, \sum_{i=-k_0+1}^{n-k_0} 2^{n_i}$, которые удовлетворяют условию (2.2). Равенство (2.4) следует из (2.6). Из определения $\widetilde{I}_l$ следует, что h_m постоянна на каждом $\widetilde{I}_l$, и если обозначить соответствующие значения через $\widetilde{\lambda}_l$, то из (2.1) получим (2.3), так как $\frac{\widetilde{\lambda}_l}{\lambda_{l+1}} = 1$ или существует такое k, что $\frac{\widetilde{\lambda}_l}{\lambda_{l+1}} = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}$.

3. Доказательство теоремы 1.1.

При доказательстве мы будем в основном применять методы работ [8] и [9]. Достаточно доказать, что для любых ν_0, j_0 имеет место следующее соотношение

$$(\sigma_{\nu_0}, M_{j_0}^{\nu_0}) = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} M_{j_0}^{\nu_0}(x)dx. \tag{3.1}$$

Действительно, для любого $n \geq 0$ существует целое k такое, что $n \leq 2^k$, следовательно $f_n \in S_{2^k}$, поэтому существуют числа $\alpha_i, i = 0, \ldots, 2^k$ такие, что $f_n = \sum_{i=0}^{2^k} \alpha_i M_i^k$, откуда, применяя (3.1), получим

$$a_n = \left(\sum_{i=0}^{2^k} a_i f_i, f_n\right) = \sum_{i=0}^{2^k} \alpha_i(\sigma_k, M_i^k) = \sum_{i=0}^{2^k} \alpha_i \lim_{m\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} M_i^k(x)dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} \sum_{i=0}^{2^k} \alpha_i M_i^k(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} f_n(x)dx.$$

Из условий (1.4) и (1.5) вытекает, что существует $\gamma > 0$ такая, что

$$\frac{\lambda_k^m}{\gamma} \leq \lambda_{k+1}^m \leq \gamma\lambda_k^m \quad \text{и} \quad \frac{|I_k^m|}{\gamma} \leq |I_{k+1}^m| \leq \gamma|I_k^m|. \tag{3.2}$$

Обозначим $\varepsilon_0 = \inf_{m,k} \int_{I_k^m} h_m(x)dx = \inf_{m,k} \lambda_k^m |I_k^m|$, и

$$E_m = \left\{x \in \operatorname{supp} M_{j_0}^{\nu_0}; \sigma^*(x) \geq h_m(x)\right\}. \tag{3.3}$$

Зафиксируем ν_0, j_0 и $\varepsilon \leq \varepsilon_0/(16\gamma)$. Из (1.6) следует, что существует m_0 такое, что для $m \geq m_0$ имеет место

$$\int_{E_m} h_m(x)dx < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Так как $(h_m(x))^{-1} \to 0$, и для каждого x последовательность $(h_m(x))^{-1}$ убывающая, следовательно $(h_m(x))^{-1} \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$, поэтому для каждого M существует m_1 такое что для $m \geq m_1$ имеем $h_m(x) \geq M$ для любого $x \in [0,1]$. Взяв $M = 2^{\nu_0+4}\varepsilon$, отсюда и из (3.4) получим, что для $m \geq \max(m_0, m_1) =: m_2$ имеет место

$$M|E_m| \leq \int_{E_m} h_m(x)dx < \varepsilon,$$

откуда получим для $m \geq m_2$ следующее неравенство

$$|E_m| < \frac{1}{16 \cdot 2^{\nu_0}} = \frac{1}{16}|A|, \text{ для любого } A \in \mathcal{D}_{\nu_0}, \tag{3.5}$$

где

$$\mathcal{D}_\nu = \left\{ \left[\frac{i}{2^\nu}, \frac{i+1}{2^\nu} \right]; 0 \leq i \leq 2^\nu - 1 \right\}.$$

Зафиксируем $m \geq m_2$. Докажем, что

$$|E_m \cap I_k^m| < \frac{|I_k^m|}{8} \text{ для любого } k = 1, \dots n_m. \tag{3.6}$$

В противном случае существует k_0, такое что $|E_m \cap I_{k_0}^m| \geq |I_{k_0}^m|/8$, откуда получаем

$$\varepsilon_0 < \lambda_{k_0}^m |I_{k_0}^m| \leq 8\lambda_{k_0}^m |E_m \cap I_{k_0}^m| \leq 8 \int_{E_m} h_m(x)dx \leq 8\varepsilon < \varepsilon_0,$$

т.е. пришли к противоречию.

Для любого $J \in \mathcal{D}$, который можно представить в виде объединения $\cup_{k=l}^j I_k^m$, из (3.6) будем иметь $|J \cap E_m| = \sum_{k=l}^j |I_k^m \cap E_m| \leq 2^{-3} \sum_{k=l}^j |I_k^m| = 2^{-3}|J|$, т.е.

$$|J \cap E_m| \leq \frac{|J|}{8}, \text{ для любого } J = \cup_{k=l}^j I_k^m \in \mathcal{D}. \tag{3.7}$$

Ясно, что

$$\text{если } J \in \mathcal{D} \text{ и } J \supset I_{k_0}^m, \text{ то } J = \cup_{k=l}^j I_k^m \text{ для некоторых } l \leq k_0 \leq j. \tag{3.8}$$

Для $\nu \geq \nu_0$ обозначим

$$\Omega_\nu = \left\{ A : A \in \mathcal{D}_\nu \text{ и } A \subset \operatorname{supp} M_{j_0}^{\nu_0} \right\}.$$

Пусть ν_1-наименьшее натуральное число для которого существует интервал $A \in \Omega_{\nu_1}$ удовлетворяющий условию $|A \cap E_m| > \frac{1}{8}|A|$. Из (3.5) следует, что $\nu_1 > \nu_0$. Теперь для $\nu \geq \nu_0$ по индукции определим семейства Ω_ν^1 и Ω_ν^2. Для $\nu = \nu_0$ положим

$$\Omega_{\nu_0}^1 = \left\{ A \in \Omega_{\nu_0} : |A \cap E_m| > \frac{1}{8}|A| \right\}, \quad Q_{\nu_0} = \bigcup_{A \in \Omega_{\nu_0}^1} A,$$

и

$$\Omega^2_{\nu_0} = \{A \in \Omega_{\nu_0} : A \not\subset Q_{\nu_0}\}, \quad P_{\nu_0} = \bigcup_{A \in \Omega^2_{\nu_0}} A.$$

Из того, что $\nu_1 > \nu_0$, следует, что $Q_{\nu_0} = \emptyset$ и

$$P_{\nu_0} = \mathrm{supp} M^{\nu_0}_{j_0}. \tag{3.9}$$

Допуская, что определены $\Omega^1_{\nu'}$, $\Omega^2_{\nu'}$ и $Q_{\nu'}$, для $\nu' < \nu$, определим семейства Ω^1_ν и Ω^2_ν следующим образом:

$$\Omega^1_\nu = \left\{ A \in \Omega_\nu : |A \cap E_m| > \frac{1}{8}|A| \ \text{ и } \ A \not\subset \bigcup_{\nu' < \nu} Q_{\nu'} \right\}, \tag{3.10}$$

$$Q_\nu = \bigcup_{A \in \Omega^1_\nu} A, \quad \Omega^2_\nu = \left\{ A \in \Omega_\nu : A \not\subset \bigcup_{\nu' \le \nu} Q_{\nu'} \right\}.$$

Положим также $P_\nu = \bigcup_{A \in \Omega^2_\nu} A$. Выше определенные семейства Ω^1_ν, Ω^2_ν и множества Q_ν, P_ν обладают следующими свойствами: $\Omega^1_\nu \subset \Omega_\nu$, $\Omega^2_\nu \subset \Omega_\nu$,

$$\mathrm{supp} M^{\nu_0}_{j_0} = P_\nu \bigcup \left(\bigcup_{\nu' \le \nu} Q_{\nu'} \right), \quad P_\nu \bigcap \left(\bigcup_{\nu' \le \nu} Q_{\nu'} \right) = \emptyset, \tag{3.11}$$

и

$$Q_{\nu'} \bigcap Q_{\nu''} = \emptyset, \quad \text{если} \quad \nu' \ne \nu''. \tag{3.12}$$

Из (3.10) и (3.12) следует, что

$$\left| \bigcup_{\nu' \le \nu} Q_{\nu'} \right| < 8|E_m| \quad \text{для любого} \quad \nu. \tag{3.13}$$

Теперь докажем, что

$$\text{для каждого } A \in \Omega^1_\nu, \nu \ge \nu_0 \text{ существует } k \ \text{ такое что } \ A \subset I^m_k. \tag{3.14}$$

В противном случае существовало бы k_0 такой что $A \supset I^m_{k_0}$, следовательно из (3.8) получим, что $A = \cup_{k=l}^j I^m_k$ для некоторых $l \le k_0 \le j$. Следовательно из (3.7) получим $|A \cap E_m| < 2^{-3}|A|$, что противоречит условию $A \in \Omega^1_\nu$.

Обозначим (напомним, что $\Delta^\nu_j = (t^\nu_{j-1}, t^\nu_{j+1})$)

$$\mathbf{J}_\nu = \left\{ j : \Delta^\nu_j \cap Q_\nu \ne \emptyset \ \text{ и } \ \Delta^\nu_j \subset P_{\nu-1} \right\}. \tag{3.15}$$

Докажем, что

$$|\sigma_\nu(x)| \le 2h_m(x) \text{ для } x \in \Delta^\nu_j, \ j \in \mathbf{J}_\nu \tag{3.16}$$

Пусть A та половинка Δ_j^ν, которая принадлежит Ω_ν^1. Тогда, применяя (3.14), получим что $A \subset I_l^m$ для некоторого l. Докажем, что

$$\Delta_j^\nu \subset I_k^m \cup I_{k+1}^m \text{ для } k = l-1 \text{ или } l. \tag{3.17}$$

Предположим противоположное: рассмотрим случай $\Delta_j^\nu \supset I_{l+1}^m$ (аналогично рассматривается случай $\Delta_j^\nu \supset I_{l-1}^m$). Заметим, что из (3.2) следует $2|A| = |\Delta_j^\nu| > |I_{l+1}^m| \geq |I_l^m|/\gamma$, откуда получим

$$\varepsilon_0 \leq |I_l^m|\lambda_l^m < 2\gamma|A|\lambda_l^m \leq 16\gamma|A \cap E_m|\lambda_l^m \leq 16\gamma\int_{E_m} h_m(x)dx < 16\gamma\varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

что невозможно.

Пусть Δ_1 и Δ_2 соответственно левая и правая половинки интервала Δ_j^ν. Из (3.17) следует, что существуют l_1, l_2 такие, что $\Delta_1 \subset I_{l_1}^m$ и $\Delta_2 \subset I_{l_2}^m$. Ясно, что $|l_1 - l_2| \leq 1$. Следовательно

$$h_m(x) = \lambda_{l_j}^m \text{ для } x \in \Delta_j, j = 1, 2. \tag{3.18}$$

Так как $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta_j^\nu \subset P_{\nu-1}$ (напомним, что $j \in \mathbf{J}_\nu$), следовательно существуют $\widetilde{\Delta}_1, \widetilde{\Delta}_2 \in \mathcal{D}_{\nu-1}$ так что $\Delta_i \subset \widetilde{\Delta}_i \subset P_{\nu-1}$ для $i = 1, 2$, откуда получим

$$|\Delta_i \cap E_m| \leq |\widetilde{\Delta}_i \cap E_m| \leq \frac{1}{8 \cdot 2^{\nu-1}} = \frac{|\Delta_i|}{4} \text{ для } i = 1, 2. \tag{3.19}$$

Докажем (3.16) для $x \in \Delta_1$. Неравенство (3.16) для $x \in \Delta_2$ доказывается аналогично.

Учитывая линейность функции σ_ν на $\Delta_1 = [\alpha, \beta]$, получим, что множество

$$I := \left\{t \in \Delta_1 : |\sigma_\nu(t)| < \lambda_{l_1}^m\right\}$$

является интервалом. Из (3.18) и (3.19) следует, что

$$|I| = |\{t \in \Delta_1 : |\sigma_\nu(t)| \leq h_m(t)\}| \geq |\Delta_1 \cap E_m^c| \geq \frac{3}{4}|\Delta_1|. \tag{3.20}$$

Поэтому, принимая во внимание линейность функции σ_ν и (3.19), получим

$$|\sigma_\nu'(t)| < \frac{2\lambda_{l_1}^m}{\frac{3}{4}(\beta - \alpha)} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\lambda_{l_1}^m}{\beta - \alpha}. \tag{3.21}$$

С учетом (3.20) получим, что точка α удалена от $I =: [a; b]$ меньше чем $\frac{\beta-\alpha}{4}$. Следовательно, из (3.21) получим

$$|\sigma_\nu(\alpha)| < \lambda_{l_1}^m + \frac{8}{3} \cdot \frac{\lambda_{l_1}^m}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha}{4} < 2\lambda_{l_1}^m.$$

Аналогично получается, что $|\sigma_\nu(\beta)| < 2\lambda_{l_1}^m$. Отсюда и из линейности функции σ_ν на $[\alpha; \beta]$, применяя (3.18), получим, что $|\sigma_\nu(t)| < 2h_m(t)$, $t \in [\alpha; \beta] = \Delta_1$. Неравенство (3.16) доказано.

Аналогично неравенству (3.16) доказывается, что

$$|\sigma_\nu(x)| \le 2h_m(x) \text{ для } x \in \Delta_j^\nu \subset P_\nu. \tag{3.22}$$

Теперь по индукции определим разложения ψ_n для $M_{j_0}^{\nu_0}$, удовлетворяющие условиям:

$$M_{j_0}^{\nu_0} = \psi_n = \sum_{\nu\le n}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n M_j^\nu + \sum_{j:\Delta_j^n\subset P_n} \alpha_j^n M_j^n, \tag{3.23}$$

$$\sum_{\nu\le n}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n + \sum_{j:\Delta_j^n\subset P_n} \alpha_j^n = 1, \quad \alpha_{\nu,j}^n \ge 0, \quad \alpha_j^n \ge 0. \tag{3.24}$$

Так как $P_{\nu_0} = \operatorname{supp} M_{j_0}^{\nu_0}$ (см. (3.9)), поэтому положим $\psi_{\nu_0} = M_{j_0}^{\nu_0}$. Очевидно ψ_{ν_0} удовлетворяет условиям (3.23) и (3.24).

Допуская, что определено ψ_n, удовлетворяющее условиям (3.23), (3.24), определим ψ_{n+1}. Для j, с условием $\Delta_j^n \subset P_n$, имеем

$$M_j^n(x) = \sum_{v=0}^{2^{n+1}} M_j^n(t_v^{n+1}) N_v^{n+1}(x) = \sum_{v:\Delta_v^{n+1}\subset \operatorname{supp} M_j^n} \beta_v M_v^{n+1}(x), \quad \text{с } \beta_v \ge 0. \tag{3.25}$$

Заметим, что если $\Delta_j^n \subset P_n$ и $\Delta_v^{n+1} \subset \operatorname{supp} M_j^n = \Delta_j^n$, то либо $\Delta_v^{n+1} \cap Q_{n+1} \ne \emptyset$, и поэтому $v \in \mathbf{J}_{n+1}$, либо $\Delta_v^{n+1} \subset P_{n+1}$. Следовательно, подставляя (3.25) в (3.23), и группируя подобные члены (одно и тоже Δ_v^{n+1} может входить в разные суммы (3.25)), получим

$$M_{j_0}^{\nu_0} = \psi_{n+1} = \sum_{\nu\le n+1}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^{n+1} M_j^\nu + \sum_{j:\Delta_j^{n+1}\subset P_{n+1}} \alpha_j^{n+1} M_j^{n+1}. \tag{3.26}$$

Неотрицательность коэффициентов $\alpha_{\nu,j}^{n+1}$, α_j^{n+1} в (3.26) следует из неотрицательности коэффициентов в (3.25) и (3.23). Учитывая, что интегралы от всех функций M_j^ν равны единице (см. (1.1)), из (3.26) получим

$$\sum_{\nu\le n+1}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^{n+1} + \sum_{j:\Delta_j^{n+1}\subset P_{n+1}} \alpha_j^{n+1} = 1.$$

Итак, доказали возможность представления (3.23), с коэффициентами (3.24). Следовательно, для любого n имеем

$$(\sigma_n, M_{j_0}^{\nu_0}) = \sum_{\nu\le n}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n (\sigma_n, M_j^\nu) + \sum_{j:\Delta_j^n\subset P_n} \alpha_j^n (\sigma_n, M_j^n), \tag{3.27}$$

Отметим, что если $\nu_0 \le \nu \le n$ и $p > 2^\nu$, то $(f_p, M_j^\nu) = 0$. Поэтому

$$(\sigma_n, M_j^\nu) = \sum_{p=0}^{2^n} a_p (f_p, M_j^\nu) = \sum_{p=0}^{2^\nu} a_p (f_p, M_j^\nu) = (\sigma_\nu, M_j^\nu). \tag{3.28}$$

Следовательно, с учетом (3.27), получим

$$(\sigma_{\nu_0}, M_{j_0}^{\nu_0}) - \int_0^1 [f(t)]_{h_m(t)} M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt = (\sigma_n, M_{j_0}^{\nu_0}) - ([f]_{h_m}, M_{j_0}^{\nu_0})$$

$$= \sum_{\nu\le n}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n(\sigma_n - [f]_{h_m}, M_j^\nu) + \sum_{j:\Delta_j^n\subset P_n} \alpha_j^n(\sigma_n - [f]_{h_m}, M_j^n) =: I_n^1 + I_n^2. \tag{3.29}$$

Сначала оценим I_n^1. Из (3.28) и (3.16) следует

$$|I_n^1| = |\sum_{\nu\le n}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n(\sigma_\nu - [f]_{h_m}, M_j^\nu)| \le \sum_{\nu\le n}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n(|\sigma_\nu| + h_m, M_j^\nu)$$

$$\le 3\sum_{\nu\le n}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n(h_m, M_j^\nu) = 3(h_m, \sum_{\nu\le n}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n M_j^\nu).$$

Из (3.23) и (3.24) вытекает, что $\sum_{\nu\le n}\sum_{j\in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n M_j^\nu \le M_{j_0}^{\nu_0}$, следовательно

$$|I_n^1| \le 3\int_{\bigcup\limits_{\nu\le n}\bigcup\limits_{j\in \mathbf{J}_\nu}\Delta_j^\nu} h_m(t)M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt. \tag{3.30}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{J}_\nu^1 := \{j\in \mathbf{J}_\nu : \exists k \text{ s.t. } \Delta_j^\nu \subset I_k^m\},\quad \mathbf{J}_\nu^2 := \mathbf{J}_\nu \backslash \mathbf{J}_\nu^1,$$

$$A_n := \bigcup_{\nu\le n}\bigcup_{j\in \mathbf{J}_\nu^1}\Delta_j^\nu,\quad B_n := \bigcup_{\nu\le n}\bigcup_{j\in \mathbf{J}_\nu^2}\Delta_j^\nu.$$

Поэтому, применяя (3.30), получим

$$|I_n^1| \le 3\left(\int_{A_n} h_m(t)M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt + \int_{B_n} h_m(t)M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt\right)$$

$$\le C\left(\int_{A_n} h_m(t)dt + \int_{B_n} h_m(t)dt\right) =: C(I_n^3 + I_n^4). \tag{3.31}$$

Из (3.17) следует, что для каждого $j\in \mathbf{J}_\nu^2$ существует k такое, что $\Delta_j^\nu \subset I_k^m \cup I_{k+1}^m$, а из определения Q_ν, Ω_ν^1 получим, что для каждого k существует не более одной пары $(\nu(k), j(k))$ для которой $j(k)\in \mathbf{J}_\nu^2$ и $\Delta_{j(k)}^{\nu(k)} \subset I_k^m \cup I_{k+1}^m$. Следовательно из (3.2) получим

$$I_n^4 \le \sum_{k=1}^{n_m}(\lambda_k^m + \lambda_{k+1}^m)|\Delta_{j(k)}^{\nu(k)}| \le (\gamma+1)\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m|\Delta_{j(k)}^{\nu(k)}|.$$

Также заметим, что из определения Q_ν следует

$$|\Delta_{j(k)}^{\nu(k)}| \le 2|Q_{\nu(k)} \cap (I_k^m \cup I_{k+1}^m)| \le 2|\bigcup_{\nu\le n} Q_\nu \cap (I_k^m \cup I_{k+1}^m)|.$$

Объединяя последние два неравенства с (3.2) получим

$$I_n^4 \le 2(\gamma+1)\left(\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_k^m\right| + \gamma\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_{k+1}^m\left|\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_{k+1}^m\right|\right)$$

$$= 2(\gamma+1)^2\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_k^m\right| =: 2(\gamma+1)^2 I_n^5. \tag{3.32}$$

Воспользовавшись (3.14) и определением Q_ν для I_n^5 получим следующую оценку

$$I_n^5 \le 8\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|E_m\cap\left(\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\right)\cap I_k^m\right| \le \tag{3.33}$$

$$\le 8\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|E_m\cap I_k^m\right| = 8\int_{E_m}h_m(t)dt < 8\varepsilon.$$

Оценим I_n^3. Для $j\in \mathrm{J}_\nu^1$ имеем $\Delta_j^\nu\subset I_k^m$ при некотором k, откуда $|\Delta_j^\nu|\le 2|\Delta_j^\nu\cap Q_\nu|$, поэтому $|A_n\cap I_k^m|\le 2|\bigcup\limits_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_k^m|$. Из последней оценки вытекает

$$I_n^3 = \int_{A_n}h_m(t)dt = \sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m|A_n\cap I_k^m| \le 2\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_k^m\right| = 2I_n^5.$$

Объединяя последнее неравенство с (3.31) – (3.33) получим

$$|I_n^1|\le C_\gamma\varepsilon. \tag{3.34}$$

Перейдем к оцениванию I_n^2. Из (3.23) и (3.24) вытекает, что $\sum_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\alpha_j^n M_j^n \le M_{j_0}^{\nu_0}$, следовательно

$$|I_n^2| \le (|\sigma_n - [f]_{h_m}|,\sum_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\alpha_j^n M_j^n) \le \int_{\bigcup\limits_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n}|\sigma_n(t)-[f(t)]_{h_m(t)}|\cdot M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt$$

$$\le C\int_{\bigcup\limits_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n}|\sigma_n(t)-[f(t)]_{h_m(t)}|dt. \tag{3.35}$$

Введем следующие обозначения

$$C_n = \bigcup_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n\cap E_m,\quad D_n = \bigcup_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n\cap E_m^c\cap\{t; |\sigma_n(t)-f(t)|\le\varepsilon\}$$

$$F_n = \bigcup_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n\cap E_m^c\cap\{t; |\sigma_n(t)-f(t)|>\varepsilon\}.$$

Ясно, что $C_n \cup D_n \cup F_n = \bigcup_{j:\Delta_j^n \subset P_n} \Delta_j^n$, а также $|f(t)| \leq h_m(t)$ для п.в. $x \in D_n \cup F_n \subset E_m^c$, что вместе с неравенством (3.35) дает оценку

$$|I_n^2| \leq C\left(\int_{C_n} |\sigma_n(t) - [f(t)]_{h_m(t)}|dt + \int_{D_n} |\sigma_n(t) - f(t)|dt + \int_{F_n} |\sigma_n(t) - f(t)|dt\right)$$

$$=: C(I_n^6 + I_n^7 + I_n^8). \tag{3.36}$$

Для $t \in C_n$ из (3.22) имеем $|\sigma_n(t) - [f(t)]_{h_m(t)}| \leq |\sigma_n(t)| + |[f(t)]_{h_m(t)}| \leq 3h_m(t)$, откуда получим

$$I_n^6 \leq 3\int_{C_n} h_m(t)dt \leq 3\int_{E_m} h_m(t)dt \leq 3\varepsilon. \tag{3.37}$$

Из определения множества D_n следует, что $|\sigma_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ для $t \in D_n$, поэтому

$$I_n^7 \leq \int_{D_n} \varepsilon dt \leq \varepsilon. \tag{3.38}$$

Так как σ_n сходится по мере к f, следовательно существует такое n, что

$$|\{t; |\sigma_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}| < \frac{\varepsilon}{\max\{h_m(t); t \in [0,1]\}}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $|\sigma_n(t) - f(t)| \leq |\sigma_n(t)| + |f(t)| \leq 2h_m(t)$ для п.в. $t \in F_n \subset E_m^c$, получим

$$I_n^8 \leq \int_{F_n} 2h_m(t)dt \leq 2\max\{h_m(t); t \in [0,1]\} \cdot |\{t; |\sigma_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}| < 2\varepsilon. \tag{3.39}$$

Из неравенств (3.36)-(3.39) следует, что $|I_n^2| \leq 6\varepsilon$, которое вместе с (3.29), (3.34) влечет за собой

$$|(\sigma_{\nu_0}, M_{j_0}^{\nu_0}) - \int_0^1 [f(t)]_{h_m(t)} M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt| \leq C_\gamma \varepsilon.$$

Равенство (3.1), и вместе с ним и теорема доказаны.

Работа была выполнена летом 2016 г. во время визита автора в Бостонский Университет, США. Автор благодарен факультету Математики и Статистики Бостонского университет за гостеприимство и хорошие условия для работы.

Abstract. In this paper we prove a theorem on restoration of coefficients of Franklin series by means of its sum under some condition on 2^ν-majorant of partial sums of the series.

Список литературы

[1] А. Б. Александров, "Об A-интегрируемости граничных значений гармонических функций", Матем. заметки, **30**, no. 1, 59 – 72 (1981).

[2] С. М. Галстян, "О единственности аддитивных функций сегмента и тригонометрических рядов", Матем. заметки, **56**, но. 4, 38 – 47 (1994).

[3] Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Матем. сб., **180**, но. 11, 1462 – 1474 (1989).

[4] Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Матем. сб., **184**, но. 11, 93 – 130 (1993).

[5] Г. Г. Геворкян, "О единственности двоичных кубов и рядов по системе Хаара", Изв. НАН Армении, Матем., **30**, но. 5, 7 – 21 (1995).

[6] Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Матем. заметки, **46**, но. 2, 51 – 58 (1989).

[7] Г. Г. Геворкян, М. П. Погосян, "О восстановлении коэффициентов ряда Франклина с "хорошой" мажорантой частичных сумм", Изв. НАН Армении, Матем., в печати.

[8] Г. Г. Геворкян, "Теорема единственности для кратных рядов Франклина", Матем. заметки, **101**, но. 2, 199 – 210 (2017).

[9] К. А. Керян, "Одна теорема единственности аддитивных функций и ее приложения к некоторым ортогональным рядам", Матем. заметки, **97**, но. 3, 382 – 396 (2015).

[10] В. В. Костин, "К вопросу о восстановления коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций", Матем. заметки, **73**, но. 5, 704 – 723 (2003).

[11] Ph. Franklin, "A set of continuos orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928).

[12] D. Menshoff, "Sur l'unicité du développement trigonométrique", Comptes Ren. Acad. Sci., Paris, **163**, 433 – 436 (1916).

[13] K. Yoneda, "On generalized A-integrals. I", Proc. Japan Acad., **45**, no. 3, (1969).

[14] K. Yoneda, "On generalized A-integrals. II", Math. Japon., **18**, no. 2 (1973).

Поступила 20 августа 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2, 2017, стр. 39-52.

RESULTS ON UNIQUENESS OF ENTIRE FUNCTIONS WHOSE DIFFERENCE POLYNOMIALS SHARE A POLYNOMIAL

P. SAHOO AND H. KARMAKAR

University of Kalyani, West Bengal, India
E-mails: *sahoopulak@yahoo.com, sahoopulak1@gmail.com, himadri394@gmail.com*

Abstract. In this paper, we use the concept of weighted sharing of values to investigate the uniqueness results when two difference polynomials of entire functions share a nonzero polynomial or a small function with a finite weight. We also investigate the situation when the original functions share the value 0 CM (counting multiplicities). The obtained results improve some recent related results of X. Li et al. [Ann. Polon. Math, 102 (2011), 111-127] and that of W. Li et al. [Bull. Malay. Math. Sci. Soc., 39 (2016), 499 - 515].

MSC2010 numbers: 30D35, 39A10.
Keywords: uniqueness; entire function; difference polynomial; weighted sharing.

1. Introduction. Definitions and results

In this paper, a meromorphic function means meromorphic in the complex plane. We adopt the standard notation of Nevanlinna's value distribution theory of meromorphic functions as presented in [9], [12] and [23]. By letter E we denote any set of positive real numbers of finite linear measure, not necessarily the same at each occurrence. For a nonconstant meromorphic function h, we denote by $T(r,h)$ the Nevanlinna characteristic function of h and by $S(r,h)$ any quantity satisfying the relation $S(r,h) = o\{T(r,h)\}$, $r \to \infty$, $r \notin E$.

Let f and g be two nonconstant meromorphic functions and let $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. If zeros of $f - a$ and $g - a$ coincide in location and multiplicity, then we say that f and g share the value a CM (counting multiplicities). On the other hand, if zeros of $f - a$ and $g - a$ coincide only in their location, then we say that f and g share the value a IM (ignoring multiplicities). A meromorphic function α is called a small function with respect to f if $T(r,\alpha) = S(r,f)$. Throughout the paper, we denote by $\rho(f)$ the order of f (see [9], [12], [23]). We define the difference operators $\Delta_\eta f(z) = f(z+\eta) - f(z)$ and $\Delta_\eta^n f(z) = \Delta_\eta^{n-1}(\Delta_\eta f(z))$, where η is a nonzero complex number and $n \geq 2$ is an integer. In the special case where $\eta = 1$, we use the usual difference notation $\Delta_\eta f(z) = \Delta f(z)$.

A number of papers has been devoted to the uniqueness of entire and meromorphic functions whose differential polynomials share certain values or fixed points (see [5], [6], [16], [19], [20], [22], and references therein). Recently the value distribution in difference analogue has become a subject of great interest among the researchers. For instance, Halburd and Korhonen [7] established a version of Nevanlinna theory based on difference operators. The difference logarithmic derivative lemma, given by Halburd and Korhonen [8] in 2006, and by Chiang and Feng [4] in 2008, plays an important role in the study of difference analogues of Nevanlinna theory. With the development of difference analogue of Nevanlinna theory, the researchers concentrated their attention to the distribution of zeros of different types of difference polynomials and obtained the corresponding uniqueness results.

Theorem A. *(see [13]) Let f be a transcendental entire function of finite order, and let $\eta \neq 0$ be any complex constant. Then for $n \geq 2$ the function $f^n(z)f(z+\eta)$ assumes every nonzero value $a \in \mathbb{C}$ infinitely often.*

Example 1.1 ([13]). Let $f(z) = 1 + e^z$. Then the function $f(z)f(z+\pi i) - 1 = -e^{2z}$ has no zeros, showing that Theorem A does not hold if $n = 1$.

Example 1.2 ([17]). Let $f(z) = e^{-e^z}$. Then $f^2(z)f(z+\eta) - 2 = -1$ and $\rho(f) = \infty$, where η is the solution of equation $e^\eta = -2$. Evidently, the function $f^2(z)f(z+\eta) - 2$ has no zeros, showing that Theorem A does not hold if f is of infinite order.

Theorem B. *(see [18]) Let f and g be two transcendental entire functions of finite order. Let $\eta \neq 0$ be a complex constant and let $n \geq 6$ be an integer. If $f^n(z)f(z+\eta)$ and $g^n(z)g(z+\eta)$ share 1 CM, then either $fg = t_1$ or $f = t_2 g$ for some constants t_1 and t_2 satisfying $t_1^{n+1} = t_2^{n+1} = 1$.*

Theorem C. *(see [17]) Let f be a transcendental entire function of finite order, and let η be a nonzero complex constant. Then for $n \geq 2$ the function $f^n(z)f(z+\eta) - P_0(z)$ has infinitely many zeros, where $P_0(z) \not\equiv 0$ is any polynomial.*

Example 1.3 ([17]). *Let $f(z) = e^{-e^z}$. Then $f^n(z)f(z+\eta) - P_0(z) = 1 - P_0(z)$ and $\rho(f) = \infty$, where η is a nonzero constant satisfying $e^\eta = -n$, $P_0(z)$ is a nonconstant polynomial, and n is a positive integer. Evidently, the function $f^n(z)f(z+\eta) - P_0(z)$ has finitely many zeros, showing that the condition $\rho(f) < \infty$ in Theorem C is necessary.*

Now the following question arises naturally.

Question 1. *Is there any uniqueness result corresponding to Theorem C ?*

Theorem D. *(see [15]) Let f and g be two distinct transcendental entire functions of finite order, and let $P_0 \not\equiv 0$ be a polynomial. Suppose that η is a nonzero complex constant and $n \geq 4$ is an integer such that $2deg(P_0) < n+1$. Also, suppose that $f^n(z)f(z+\eta) - P_0(z)$ and $g^n(z)g(z+\eta) - P_0(z)$ share 0 CM. Then the following assertions hold.*

(I) If $n \geq 4$ and $f^n(z)f(z+\eta)/P_0(z)$ is a Mobius transformation of $g^n(z)g(z+\eta)/P_0(z)$, then either

(i) $f = tg$, where $t \neq 1$ is a constant satisfying $t^{n+1} = 1$, or

(ii) $f = e^Q$ and $g = te^{-Q}$, where P_0 reduces to a nonzero constant c, t is a constant such that $t^{n+1} = c^2$, and Q is a nonconstant polynomial.

(II) If $n \geq 6$, then I(i) or I(ii) holds.

Theorem E. *(see [15]) Let f and g be two transcendental entire functions of finite order, and let α $(\not\equiv 0, \infty)$ be a meromorphic function such that $\rho(\alpha) < \rho(f)$. Suppose that η is a nonzero complex number, and n and m are positive integers satisfying $n \geq m+6$. If $f^n(z)(f^m(z)-1)f(z+\eta)$ and $g^n(z)(g^m(z)-1)g(z+\eta)$ share $\alpha(z)$ CM, then $f = tg$, where t is a constant such that $t^m = 1$.*

Let $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ be a nonzero polynomial, where $a_n \neq 0$, $a_{n-1}, \ldots, a_0$ are complex constants. Define $\Gamma_1 := m_1 + m_2$ and $\Gamma_2 := m_1 + 2m_2$, where m_1 is the number of simple zeros of P and m_2 is the number of multiple zeros of P. Throughout the paper we use the notation $d = \gcd(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, where $\lambda_i = n+1$ if $a_i = 0$ and $\lambda_i = i+1$ if $a_i \neq 0$.

Theorem F. *(see [21]) Let f be a transcendental entire function of finite order and η be a fixed nonzero complex constant. Then for $n > m$ the function $P(f(z))f(z+\eta) - \alpha(z) = 0$ has infinitely many solutions, where $\alpha \not\equiv 0$ is a small function with respect to f, and m is the number of distinct zeros of P.*

Theorem G. *(see [21]) Let f and g be two transcendental entire functions of finite order, η be a nonzero complex constant, and $n > 2\Gamma_2+1$ be an integer. If $P(f(z))f(z+\eta)$ and $P(g(z))g(z+\eta)$ share 1 CM, then one of the following cases hold:*

(i) $f = tg$, where $t^d = 1$;

(ii) f and g satisfy the algebraic equation $R(f,g) = 0$, where $R(w_1, w_2) = P(w_1)w_1(z+\eta) - P(w_2)w_2(z+\eta)$;

(iii) $f = e^{\alpha}$, $g = e^{\beta}$, *where* α *and* β *are two polynomials and* $\alpha + \beta = c$, *and* c *is a constant satisfying* $a_n^2 e^{(n+1)c} = 1$.

Example 1.4. *(see [21])* Let $P(z) = (z-1)^6(z+1)^6z^{11}$, $f(z) = \sin z$, $g(z) = \cos z$ and $\eta = 2\pi$. It is easy to see that $n > 2\Gamma_2 + 1$ and $P(f(z))f(z+\eta) = P(g(z))g(z+\eta)$. Therefore $P(f(z))f(z+\eta)$ and $P(g(z))g(z+\eta)$ share 1 CM. It is also clear that though f and g satisfy $R(f,g) = 0$, where $R(w_1, w_2) = P(w_1)w_1(z+\eta) - P(w_2)w_2(z+\eta)$, we have $f \not\equiv tg$ for a constant t satisfying $t^m = 1$, where $m \in Z^+$.

Note that the functions f and g in Example 1.4 do not share 0 CM, and the following question arises naturally.

Question 2. *What can be said about* f *and* g, *if* f *and* g *share* 0 *CM in Theorem G?*

Theorem H. *(see [14]) Let* f, g *be two transcendental entire functions of finite order such that* f *and* g *share* 0 *CM. Suppose that* $P_0 \not\equiv 0$ *is a polynomial,* η *is a nonzero complex constant, and* n *is an integer such that* $deg(P_0) < n+1$. *Assume that* $P(f(z))f(z+\eta) - P_0$ *and* $P(g(z))g(z+\eta) - P_0$ *share* 0 *CM. If* $n > 2\Gamma_1 + 1$ *and* $P(f(z))f(z+\eta)$ *is a Mobius transformation of* $P(g(z))g(z+\eta)$, *or if* $n > 2\Gamma_2 + 1$, *then one of the following two cases hold:*

(i) $f = tg$, *where* $t^d = 1$;

(ii) $f = e^{\alpha}$, $g = te^{-\alpha}$, *where* P_0 *reduces to a nonzero constant* c, t *is a constant such that* $t^{n+1} = c^2$, *and* α *is a nonconstant polynomial.*

Regarding Theorems D, E and H, it is natural to ask the following question which is the motivation of the present paper.

Question 3. *Is it possible in some way to relax the nature of sharing in Theorems D, E and H?*

In this paper, our aim is to find out the possible answer to Question 3. We will prove three theorems which improves Theorems D, E and H by relaxing the nature of sharing. To state the main results, we need the following definition of weighted sharing which measures how close a shared value is to being shared CM or to being shared IM.

Definition 1.1 ([10]). *Let* k *be a nonnegative integer or infinity. For* $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *we denote by* $E_k(a; f)$ *the set of all* a*-points of* f *where an* a*-point of multiplicity* m

is counted m times if $m \leq k$ and $k+1$ times if $m > k$. If $E_k(a; f) = E_k(a; g)$, then we say that f and g share the value a with weight k.

This definition implies that if f and g share a value a with weight k, then z_0 is an a-point of f with multiplicity $m \leq k$ if and only if it is an a-point of g with multiplicity $m \leq k$, and z_0 is an a-point of f with multiplicity $m > k$ if and only if it is an a-point of g with multiplicity $n > k$, where m is not necessarily equal to n.

We write f, g share (a, k) to mean that f and g share the value a with weight k. It is clear that if f, g share (a, k), then f, g share (a, p) for any integer p, $0 \leq p < k$. Also, note that f, g share the value a IM or CM if and only if f, g share $(a, 0)$ or (a, ∞), respectively.

Remark 1.1. Let $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and k be a nonnegative integer or infinity. Let $\overline{N}^E_{k)}(r, a; f, g)$ denote the reduced counting function of those a-points of f whose multiplicities are equal to that of the corresponding a-points of g, and both of their multiplicities are not greater than k. Also, let $\overline{N}^0_{(k}(r, a; f, g)$ denote the reduced counting function of those a-points of f which are a-points of g, and both of their multiplicities are not less than k. If

$$\overline{N}(r, a; f \mid\leq k) - \overline{N}^E_{k)}(r, a; f, g) = S(r, f),$$

$$\overline{N}(r, a; g \mid\leq k) - \overline{N}^E_{k)}(r, a; f, g) = S(r, g),$$

$$\overline{N}(r, a; f \mid\geq k+1) - \overline{N}^0_{(k+1}(r, a; f, g) = S(r, f),$$

$$\overline{N}(r, a; g \mid\geq k+1) - \overline{N}^0_{(k+1}(r, a; f, g) = S(r, g),$$

or if $k = 0$ and

$$\overline{N}(r, a; f) - \overline{N}_0(r, a; f, g) = S(r, f),$$

$$\overline{N}(r, a; g) - \overline{N}_0(r, a; f, g) = S(r, g),$$

then we say that f and g share "(a, k)".

Now we are ready to state our main results.

Theorem 1.1. *Let f and g be two distinct transcendental entire functions of finite order, and let $P_0\ (\not\equiv 0)$ be a polynomial. Suppose that η is a nonzero complex constant and $n \geq 4$ is an integer such that $2\deg(P_0) < n+1$. Suppose that $f^n(z)f(z+\eta) - P_0(z)$ and $g^n(z)g(z+\eta) - P_0(z)$ share $(0, 2)$. If $n \geq 4$ and $f^n(z)f(z+\eta)/P_0(z)$ is a Mobius* *transformation of* $g^n(z)g(z+\eta)/P_0(z)$, *or if* $n \geq 6$, *then one of the following two cases hold:*

(i) $f = tg$, *where* $t \neq 1$ *is a constant satisfying* $t^{n+1} = 1$;

(ii) $f = e^Q$ *and* $g = te^{-Q}$, *where* P_0 *reduces to a nonzero constant* c, t *is a constant such that* $t^{n+1} = c^2$, *and* Q *is a nonconstant polynomial.*

Theorem 1.2. *Let* f *and* g *be two transcendental entire functions of finite order, and let* $\alpha\,(\not\equiv 0, \infty)$ *be a meromorphic function such that* $\rho(\alpha) < \rho(f)$. *Suppose that* η *is a nonzero complex number, and* n *and* m *are positive integers such that* $n \geq m+6$. *If* $f^n(z)(f^m(z)-1)f(z+\eta)$ *and* $g^n(z)(g^m(z)-1)g(z+\eta)$ *share* $(\alpha, 2)$, *then* $f = tg$, *where* t *is a constant satisfying* $t^m = 1$.

Theorem 1.3. *Let* f *and* g *be two transcendental entire functions of finite order such that* f *and* g *share* 0 *CM, and let* $P_0(\not\equiv 0)$ *be a polynomial. Suppose that* η *is a nonzero complex constant and* n *is an integer such that* $deg(P_0) < n+1$. *Assume that* $P(f(z))f(z+\eta) - P_0$ *and* $P(g(z))g(z+\eta) - P_0$ *share* $(0, 2)$. *If* $n > 2\Gamma_1 + 1$ *and* $P(f(z))f(z+\eta)/P_0(z)$ *is a Mobius transformation of* $P(g(z))g(z+\eta)/P_0(z)$, *or if* $n > 2\Gamma_2 + 1$, *then one of the following two cases hold:*

(i) $f = tg$, *where* $t^d = 1$;

(ii) $f = e^\beta$, $g = te^{-\beta}$, *where* P_0 *reduces to a nonzero constant* c, t *is a constant such that* $t^{n+1} = c^2$, *and* β *is a nonconstant polynomial.*

Definition 1.2 ([11]). *For* $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *we define* $N(r, a; f \mid= 1)$ *to be the counting function of simple* a*-points of* f. *For a positive integer* p *we define* $N(r, a; f \mid\leq p)$ *to be the counting function of those* a*-points of* f *(counted with proper multiplicities) whose multiplicities are not greater than* p. *By* $\overline{N}(r, a; f \mid\leq p)$ *we denote the corresponding reduced counting function. In an analogous manner we define the functions* $N(r, a; f \mid\geq p)$ *and* $\overline{N}(r, a; f \mid\geq p)$.

Definition 1.3 ([10]). *Let* p *be a positive integer or infinity. We define* $N_p(r, a; f)$ *to be the counting function of* a*-points of* f, *where each* a*-point of multiplicity* m *is counted* m *times if* $m \leq p$ *and* p *times if* $m > p$. *Then define*

$$N_p(r, a; f) := \overline{N}(r, a; f) + \overline{N}(r, a; f \mid\geq 2) + \ldots + \overline{N}(r, a; f \mid\geq p).$$

Clearly, $N_1(r, a; f) = \overline{N}(r, a; f)$.

Definition 1.4 ([1]). *Let* f *and* g *be two nonconstant meromorphic functions such that* f *and* g *share* 1 *IM. Let* z_0 *be an* 1*-point of* f *and* g *with multiplicities* p *and* q, *respectively. Define* $\overline{N}_L(r,1;f)$ *to be the counting function of those 1-points of* f *and* g, *where* $p>q$, $N_E^{1)}(r,1;f)$ *to be the counting function of those 1-points of* f *and* g, *where* $p=q=1$, *and* $N_E^{(k}(r,1;f)$ ($k\geq 2$ *is an integer) to be the counting function of those 1-points of* f *and* g, *where* $p=q\geq k$, *and each point in these counting functions is counted only once. In the same manner we can define the functions* $\overline{N}_L(r,1;g)$, $N_E^{1)}(r,1;g)$ *and* $N_E^{(k}(r,1;g)$.

Definition 1.5 ([10]). *Let* f *and* g *be two nonconstant meromorphic functions such that* f *and* g *share the value* a *IM. Define* $\overline{N}_*(r,a;f,g)$ *to be the reduced counting function of those* a*-points of* f *whose multiplicities differ from that of the corresponding* a*-points of* g. *Clearly,* $\overline{N}_*(r,a;f,g)=\overline{N}_*(r,a;g,f)$ *and* $\overline{N}_*(r,a;f,g)=\overline{N}_L(r,a;f)+\overline{N}_L(r,a;g)$.

2. Lemmas

In this section, we state some lemmas which will be needed in the sequel. We denote by H the following function:

$$H:=\left(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}\right),$$

where F, G are nonconstant meromorphic functions defined in the complex plane $\mathbb{C}$.

Lemma 2.1 (see [23], Proof of Theorem 1.12). *Let* f *be a nonconstant meromorphic function in the complex plane, and let*

$$P(f)=a_nf^n(z)+a_{n-1}f^{n-1}(z)+...+a_1f(z)+a_0, \tag{2.1}$$

where a_0, a_1, ... , a_n *are constants and* $a_n\neq 0$. *Then* $m(r,P(f))=nm(r,f)+O(1)$.

Lemma 2.2 ([4]). *Let* f *be a meromorphic function of order* $\rho(f)<\infty$, *and let* $\eta\,(\neq 0)$ *be a complex number. Then for each* $\varepsilon>0$ *we have*

$$m\left(r,\frac{f(z+\eta)}{f(z)}\right)+m\left(r,\frac{f(z)}{f(z+\eta)}\right)=O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\}.$$

Lemma 2.3 ([4]). *Let* f *be a meromorphic function of order* $\rho(f)<\infty$, *and let* $\eta\,(\neq 0)$ *be a complex number. Then for each* $\varepsilon>0$ *we have*

$$T(r,f(z+\eta))=T(r,f(z))+O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\}+O\{\log r\}.$$

Lemma 2.4. *Let* f *be a transcendental entire function of order* $\rho(f)<\infty$, *and let* $\eta\,(\neq 0)$ *be a complex number. Suppose that* $F=P(f(z))f(z+\eta)$, *where* $P(f)$ *is as* *in (2.1). Then*

$$T(r,F)=(n+1)T(r,f)+O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\}+S(r,f).$$

Besides, we have $S(r,F)=S(r,f)$.

Proof. Noting that f is an entire function of finite order ρ, in view of Lemmas 2.1 and 2.2 and the standard Valiron-Mohon'ko theorem, we can write

$$\begin{aligned}&(n+1)T(r,f)=T(r,f(z)P(f(z)))+S(r,f)\\ =\ & m(r,f(z)P(f(z)))+S(r,f)\leq m\left(r,\frac{f(z)P(f(z))}{F(z)}\right)+m(r,F(z))+S(r,f)\leq\end{aligned}$$

$$m\left(r,\frac{f(z)}{f(z+\eta)}\right)+m(r,F(z))+S(r,f)\leq T(r,F)+O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\}+S(r,f). \tag{2.2}$$

On the other hand, by Lemmas 2.1 and 2.3 and the fact that f is a transcendental entire function of finite order, we obtain

$$\begin{aligned}T(r,F)&\leq T(r,P(f(z)))+T(r,f(z+\eta))+S(r,f)\\ &= nT(r,f)+T(r,f(z+\eta))+S(r,f)\\ &\leq (n+1)T(r,f)+O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\}+S(r,f).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Now the result follows from (2.2) and (2.3). □

Lemma 2.5 ([14]). *Let f and g be two transcendental entire functions of finite order, $\eta(\neq 0)$ be a complex constant. $\alpha(z)$ be a small function of f and g, $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$ be a nonzero polynomial, where $a_0, a_1, \ldots, a_n(\neq 0)$ are complex constants, and let $n>\Gamma_1$ be an integer. If $P(f)f(z+\eta)$ and $P(g)g(z+\eta)$ share $\alpha(z)$ IM, then $\rho(f)=\rho(g)$.*

Lemma 2.6 (see [23], Lemma 7.1). *Let F and G be nonconstant meromorphic functions such that G is a Mobius transformation of F. Suppose that there exists a subset $I\subset R^+$ with linear measure $mesI=+\infty$ such that for $r\in I$ and $r\to\infty$*

$$\overline{N}(r,0;F)+\overline{N}(r,0;G)+\overline{N}(r,\infty;F)+\overline{N}(r,\infty;G)<(\lambda+o(1))T(r,F),$$

where $\lambda<1$. If there exists a point $z_0\in\mathbb{C}$ satisfying $F(z_0)=G(z_0)=1$, then either $F=G$ or $FG=1$.

Lemma 2.7 ([2]). *Let F and G be two nonconstant meromorphic functions sharing $(1,2)$, $(\infty,0)$ and $H\not\equiv 0$. Then the following assertions hold.*
(i) $T(r,F)\leq N_2(r,0;F)+N_2(r,0;G)+\overline{N}(r,\infty;F)+\overline{N}(r,\infty;G)+\overline{N}_*(r,\infty;F,G)-m(r,1;G)-N_E^{(3}(r,1;F)-\overline{N}_L(r,1;G)+S(r,F)+S(r,G)$;

(ii) $T(r,G) \leq N_2(r,0;F) + N_2(r,0;G) + \overline{N}(r,\infty;F) + \overline{N}(r,\infty;G) + \overline{N}_*(r,\infty;F,G) - m(r,1;F) - N_E^{(3}(r,1;G) - \overline{N}_L(r,1;F) + S(r,F) + S(r,G)$.

Lemma 2.8 ([24]). *Let F and G be two nonconstant meromorphic functions, and let $H \equiv 0$. If*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\overline{N}(r,0;F) + \overline{N}(r,\infty;F) + \overline{N}(r,0;G) + \overline{N}(r,\infty;G)}{T(r)} < 1,$$

where $T(r) = \max\{T(r,F), T(r,G)\}$, $r \in I$ and I is a set with infinite linear measure, then either $F \equiv G$ or $FG \equiv 1$.

Lemma 2.9 ([3]). *Let f and g be two transcendental entire functions of finite order, and let $\eta\,(\neq 0)$ be a complex constant. Let n and m be positive integers, such that $n \geq m+5$ and*

$$f^n(z)(f^m(z)-1)f(z+\eta) \equiv g^n(z)(g^m(z)-1)g(z+\eta).$$

Then $f(z) \equiv tg(z)$, where t is a constant satisfying $t^m = 1$.

Though the authors of [3] claimed that the result of Lemma 2.9 is true for $n \geq m+6$, from the proof it can easily be viewed that in fact it is true for $n \geq m+5$.

3. Proof of theorems

Proof of Theorem 1.2. Let $F(z) = \frac{f^n(z)(f^m(z)-1)f(z+\eta)}{\alpha(z)}$ and $G(z) = \frac{g^n(z)(g^m(z)-1)g(z+\eta)}{\alpha(z)}$. Then F and G are transcendental meromorphic functions that share $(1,2)$. Noting that $\rho(\alpha) < \rho(f)$, from Lemma 2.4 we see that

$$T(r,F) = (n+m+1)T(r,f) + O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\} + O\{r^{\rho(\alpha)+\varepsilon}\}, \tag{3.1}$$

$$T(r,G) = (n+m+1)T(r,g) + O\{r^{\rho(g)-1+\varepsilon}\} + O\{r^{\rho(\alpha)+\varepsilon}\}. \tag{3.2}$$

From (3.1) and (3.2) we get

$$\rho(F) \leq \max\{\rho(f),\rho(\alpha)\}, \quad \rho(f) \leq \max\{\rho(F),\rho(\alpha)\}, \tag{3.3}$$

$$\rho(G) \leq \max\{\rho(g),\rho(\alpha)\}, \quad \rho(g) \leq \max\{\rho(G),\rho(\alpha)\}. \tag{3.4}$$

Using (3.3) and the fact that $\rho(\alpha) < \rho(f)$ we obtain

$$\rho(F) = \rho(f). \tag{3.5}$$

Now, using Nevanlinna's second fundamental theorem, we can write

$$\begin{aligned} T(r,F) &\le \overline{N}(r,0;F)+\overline{N}(r,\infty;F)+\overline{N}(r,1;F)+S(r,f)\\ &\le \overline{N}(r,0;f(z))+\overline{N}(r,0;f(z+\eta))+\overline{N}(r,1;f'''(z))\\ &\quad +\overline{N}(r,1;G)+O\{r^{\rho(\alpha)+\varepsilon}\}+S(r,f)\\ &\le (m+2)T(r,f)+T(r,G)+O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\}\\ &\quad +O\{r^{\rho(\alpha)+\varepsilon}\}+S(r,f). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Similarly, we get

$$\begin{aligned} T(r,G) &\le (m+2)T(r,g)+T(r,F)+O\{r^{\rho(g)-1+\varepsilon}\}\\ &\quad +O\{r^{\rho(\alpha)+\varepsilon}\}+S(r,f). \end{aligned} \tag{3.7}$$

From (3.1), (3.5), (3.6) and the condition $\rho(\alpha)<\rho(f)<\infty$ we see that

$$\rho(F)\le\rho(G), \tag{3.8}$$

and from (3.4), (3.5), (3.8) and the condition $\rho(\alpha)<\rho(f)<\infty$ we obtain

$$\rho(G)=\rho(g). \tag{3.9}$$

Also, from (3.2), (3.5), (3.7) - (3.9) and the condition $\rho(\alpha)<\rho(f)<\infty$ we get

$$\rho(G)\le\rho(F). \tag{3.10}$$

Combining (3.5) and (3.8)-(3.10), we obtain

$$\rho(f)=\rho(g)=\rho(F)=\rho(G). \tag{3.11}$$

Suppose that $H\not\equiv 0$. Then using Lemmas 2.3 and 2.7 we can write

$$\begin{aligned} T(r,F)+T(r,G) &\le 2N_2(r,0;F)+2N_2(r,0;G)+2\overline{N}(r,\infty;F)+2\overline{N}(r,\infty;G)\\ &\quad +2\overline{N}_*(r,\infty;F,G)+S(r,F)+S(r,G)\\ &\le 4\overline{N}(r,0;f)+4\overline{N}(r,0;g)+2N(r,1;f''')+2N(r,1;g''')\\ &\quad +2N(r,0;f(z+\eta))+2N(r,0;g(z+\eta))+S(r,f)+S(r,g)\\ &\le (2m+6)\{T(r,f)+T(r,g)\}+O(r^{\rho(f)-1+\varepsilon})+O(r^{\rho(g)-1+\varepsilon})\\ &\quad +S(r,f)+S(r,g). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Therefore, from (3.1), (3.2) and (3.12) we obtain

$$(n-m-5)\{T(r,f)+T(r,g)\}\le O(r^{\rho(f)-1+\varepsilon})+O(r^{\rho(g)-1+\varepsilon})+S(r,f)+S(r,g),$$

yielding a contradiction with the assumption that $n \geq m+6$. Thus we must have $H \equiv 0$. Taking into account that

$$\begin{aligned}
&\overline{N}(r,0;F)+\overline{N}(r,0;G)+\overline{N}(r,\infty;F)+\overline{N}(r,\infty;G)\\
\leq\ & \overline{N}(r,0;f)+\overline{N}(r,0;g)+\overline{N}(r,1;f^m)+\overline{N}(r,1;g^m)\\
&+\overline{N}(r,0;f(z+\eta))+\overline{N}(r,0;g(z+\eta))+S(r,f)+S(r,g)\\
\leq\ & (m+2)\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g)\\
\leq\ & \frac{2m+4}{n+m+1}T(r),
\end{aligned}$$

where $T(r)=\max\{T(r,F),T(r,G)\}$, by Lemma 2.8, we deduce that either $F \equiv G$ or $FG \equiv 1$. Let $FG \equiv 1$. Then we have

$$f^n(z)(f^m(z)-1)f(z+\eta)g^n(z)(g^m(z)-1)g(z+\eta) \equiv \alpha^2,$$

implying that

$$\begin{aligned}
f^n(z)(f(z)-1)(f^{m-1}(z)+f^{m-2}(z)+\ldots+1)f(z+\eta)g^n(z)(g(z)-1)&\\
(g^{m-1}(z)+g^{m-2}(z)+\ldots+1)g(z+\eta)&=\alpha^2.
\end{aligned}$$

Noting that f and g are transcendental entire functions of finite order, it is easily seen from the above equality that $\overline{N}(r,0;f)=S(r,f)$, $\overline{N}(r,1;f)=S(r,f)$ and $\overline{N}(r,\infty;f)=S(r,f)$ for $r \in I$ and $r \to \infty$, where $I \subset (0,+\infty)$ is a subset of infinite linear measure. Thus, we obtain

$$T(r,f) \leq \overline{N}(r,0;f)+\overline{N}(r,1;f)+\overline{N}(r,\infty;f) = S(r,f),$$

for $r \in I$ and $r \to \infty$, which is meaningless. Thus, we must have $F \equiv G$, and hence

$$f^n(z)(f^m(z)-1)f(z+\eta) \equiv g^n(z)(g^m(z)-1)g(z+\eta).$$

Therefore by Lemma 2.9, it immediately follows that $f(z) \equiv tg(z)$, where t is a constant satisfying $t^m=1$. This completes the proof of Theorem 1.2. □

Proof of Theorem 1.3. Let $F_1=\frac{P(f(z))f(z+\eta)}{P_0(z)}$ *and* $G_1=\frac{P(g(z))g(z+\eta)}{P_0(z)}$. *Then* F_1 *and* G_1 *are two transcendental meromorphic functions sharing* $(1,2)$. *From Lemma 2.4 we get*

$$T(r,F_1)=(n+1)T(r,f)+O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\}+O\{\log r\}, \tag{3.13}$$

$$T(r,G_1)=(n+1)T(r,g)+O\{r^{\rho(g)-1+\varepsilon}\}+O\{\log r\}. \tag{3.14}$$

Since f and g are of finite order, it follows from (3.13) and (3.14) that F_1 and G_1 are also of finite order. Moreover, from Lemma 2.5 we deduce that

$$\rho(f) = \rho(g) = \rho(F_1) = \rho(G_1).$$

We now discuss the following two cases separately.

Case 1. Suppose that F_1 is a Mobius transformation of G_1. Then using the standard Valiron-Mohon'ko lemma we obtain $T(r, P(f)f(z+\eta)) = T(r, P(g)g(z+\eta))+O\{\log r\}$. Then from (3.13) and (3.14) and the fact that f and g are transcendental entire functions of finite order we deduce

$$\frac{T(r,f)}{T(r,g)} \to 1, \qquad \frac{T(r,F_1)}{T(r,f)} \to n+1 \quad as \quad r \to \infty \; and \; r \in I.$$

From Lemma 2.3 and the condition that f and g are transcendental entire functions we have

$$\begin{aligned} \overline{N}(r,0;F_1(z)) + \overline{N}(r,\infty;F_1(z)) &\leq \overline{N}(r,0;P(f(z))) + \overline{N}(r,0;f(z+\eta)) + O\{\log r\} \\ &\leq \Gamma_1 T(r,f(z)) + T(r,f(z+\eta)) + O\{\log r\} \\ &\leq (\Gamma_1+1)T(r,f(z)) + O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\} + O\{\log r\}, \end{aligned}$$

as $r \to \infty$ and $r \in I$. Similarly, we get

$$\overline{N}(r,0;G_1(z)) + \overline{N}(r,\infty;G_1(z)) \leq (\Gamma_1+1)T(r,g(z)) + O\{r^{\rho(g)-1+\varepsilon}\} + O\{\log r\},$$

as $r \to \infty$ and $r \in I$. Thus

$$\begin{aligned} &\overline{N}(r,0;F_1(z)) + \overline{N}(r,\infty;F_1(z)) + \overline{N}(r,0;G_1(z)) + \overline{N}(r,\infty;G_1(z)) \\ \text{(3.15)} \quad \leq \; &\frac{2(\Gamma_1+1)}{n+1} T(r,F_1)(1+o(1)), \end{aligned}$$

as $r \to \infty$ and $r \in I$. In view of Nevanlinna's second fundamental theorem, we obtain

$$\begin{aligned} T(r,F_1(z)) &\leq \overline{N}(r,0;F_1(z)) + \overline{N}(r,\infty;F_1(z)) + \overline{N}(r,1;F_1(z)) + O\{\log r\} \\ &\leq \overline{N}(r,0;P(f(z))) + \overline{N}(r,0;f(z+\eta)) + \overline{N}(r,1;F_1(z)) + O\{\log r\} \\ &\leq (\Gamma_1+1)T(r,f(z)) + \overline{N}(r,1;F_1(z)) + O\{r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\} + O\{\log r\}, \end{aligned}$$

which together with (3.13) gives $(n-\Gamma_1)T(r,f) \leq \overline{N}(r,0;F_1(z)) + S(r,f)$, as $r \to \infty$ and $r \in I$. From this and the fact that F_1 and G_1 share $(1,2)$ we conclude that there exists a point $z_0 \in \mathbb{C}$ such that $F_1(z_0) = G_1(z_0) = 1$. Hence from (3.15), Lemma 2.6 and the condition $n > 2\Gamma_1 + 1$ we infer that either $F_1G_1 = 1$ or $F_1 = G_1$. Now the conclusion of the theorem in this case follows from the proof of Case 1.1 and Case 1.2 of Theorem 5 from [14].

Case 2. Now we assume that $n > 2\Gamma_2 + 1$ and $H \not\equiv 0$. Then using Lemmas 2.3 and 2.7 we can write

$$
\begin{aligned}
& T(r,F_1) + T(r,G_1) \le 2N_2(r,0;F_1) + 2N_2(r,0;G_1) + 2\overline{N}(r,\infty;F_1) + 2\overline{N}(r,\infty;G_1) \\
+ \quad & 2\overline{N}_*(r,\infty;F_1,G_1) + S(r,F_1) + S(r,G_1) \\
\le \quad & 2N_2(r,0;P(f)) + 2N_2(r,0;P(g)) + 2N(r,0;f(z+\eta)) + 2N(r,0;g(z+\eta)) + O\{\log r\} \\
\le \quad & 2(\Gamma_2+1)\{T(r,f)+T(r,g)\} + O(r^{\rho(f)-1+\varepsilon}) + O(r^{\rho(g)-1+\varepsilon}) + S(r,f) + S(r,g),
\end{aligned}
$$

which together with (3.13) and (3.14) gives

$$
(n - 2\Gamma_2 - 1)\{T(r,f) + T(r,g)\} \le S(r,f) + S(r,g),
$$

yielding a contradiction with the fact that $n > 2\Gamma_2 + 1$. Thus we must have $H \equiv 0$. Since $n > 2\Gamma_2 + 1 \ge 2\Gamma_1 + 1$, we obtain

$$
\begin{aligned}
& \overline{N}(r,0;F_1) + \overline{N}(r,0;G_1) + \overline{N}(r,\infty;F_1) + \overline{N}(r,\infty;G_1) \\
\le \quad & \overline{N}(r,0;P(f)) + \overline{N}(r,0;P(g)) + \overline{N}(r,0;f(z+\eta)) + \overline{N}(r,0;g(z+\eta)) + O\{\log r\} \\
\le \quad & (\Gamma_1+1)\{T(r,f)+T(r,g)\} + O(r^{\rho(f)-1+\varepsilon}) + O(r^{\rho(g)-1+\varepsilon}) + O\{\log r\} \\
\le \quad & \frac{\Gamma_1+1}{n+1}\{T(r,F_1)+T(r,G_1)\} + O(r^{\rho(f)-1+\varepsilon}) + O(r^{\rho(g)-1+\varepsilon}) + S(r,f) + S(r,g) \\
\le \quad & \frac{2(\Gamma_1+1)}{n+1}T(r) + o\{T(r)\},
\end{aligned}
$$

where $T(r) = \max\{T(r,F_1), T(r,G_1)\}$. Therefore, in view of Lemma 2.8, we can conclude that either $F_1 \equiv G_1$ or $F_1G_1 \equiv 1$. Now the result follows from Case 1. This completes the proof of Theorem 1.3.

Proof of Theorem 1.1. Let $F_2 = \frac{f^n(z)f(z+\eta)}{P_0(z)}$ and $G_2 = \frac{g^n(z)g(z+\eta)}{P_0(z)}$. Then F_2 and G_2 are two transcendental meromorphic functions that share $(1,2)$. Applying arguments similar to those used in the proof of Theorem 1.3, we conclude that in both cases either $F_2G_2 = 1$ or $F_2 = G_2$. Then the conclusion of the theorem follows from the proof of Subcase 1.1 and Subcase 1.2 of Theorem 1 from [15]. Here we omit the details. □

Acknowledgment. *The authors are grateful to a referee for a number of valuable suggestions that led to improvement of the paper.*

Список литературы

[1] T. C. Alzahary and H. X. Yi, "Weighted value sharing and a question of I. Lahiri", Complex Var. Theory Appl., 49, 1063 – 1078 (2004).
[2] A. Banerjee, "Uniqueness of meromorphic functions sharing two sets with finite weight", Portugal. Math. (N.S.) 65, 81 – 93 (2008).

[3] S. S. Bhoosnurmath and S. R. Kabbur, "Value distribution and uniqueness theorems for difference of entire and meromorphic functions", Int. J. Anal. Appl., **2**, 124 – 136 (2013).

[4] Y. M. Chiang and S. J. Feng, "On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane", Ramanujan J., **16**, 105 – 129 (2008).

[5] M. L. Fang and W. Hong, "A unicity theorem for entire functions concerning differential polynomials", Indian J. Pure Appl. Math., **32**, 1343 – 1348 (2001).

[6] M. L. Fang and X. H. Hua, "Entire functions that share one value", J. Nanjing Univ. Math. Biquarterly, **13**, 44 – 48 (1996).

[7] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, "Nevanlinna theory for the difference operator", Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **31**, 463 – 478 (2006).

[8] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, "Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with application to difference equations", J. Math. Anal. Appl., **314**, 477 – 487 (2006).

[9] W. K. Hayman, Meromorphic Functions, The Clarendon Press, Oxford (1964).

[10] I. Lahiri, "Weighted value sharing and uniqueness of meromorphic functions", Complex Var. Theory Appl., **46**, 241 – 253 (2001).

[11] I. Lahiri, "Value distribution of certain differential polynomials", Int. J. Math. Math. Sc., **28**, 83 – 91 (2001).

[12] I. Laine, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin/Newyork (1993).

[13] I. Laine and C. C. Yang, "Value distribution of difference polynomials", Proc. Japan Acad. SerA Math. Sci., **83**, 148 – 151 (2007).

[14] W. L. Li and X. M. Li, "Results on uniqueness of entire functions related to difference polynomial", Bull. Malay. Math. Sci. Soc., **39**, 499 – 515 (2016).

[15] X. M. Li, W. L. Li, H. X. Yi and Z. T. Wen, "Uniqueness theorems for entire functions whose difference polynomials share a meromorphic function of a smaller order", Ann. Polon. Math., **102**, 111 – 127 (2011).

[16] W. C. Lin and H. X. Yi, "Uniqueness theorems for meromorphic function concerning fixed points", Complex Var. Theory Appl., **49**, 793 – 806 (2004).

[17] K. Liu and L. Z. Yang, "Value distribution of the difference operator", Arch. Math. (Basel), **92**, 270 – 278 (2009).

[18] X. G. Qi, L. Z. Yang and K. Liu, "Uniqueness and periodicity of meromorphic functions concerning the difference operator", Computers and Mathematics with Applications, **60**, 1739 – 1746 (2010).

[19] P. Sahoo and S. Seikh, "Nonlinear differential polynomials sharing a small function", Mat. Vesnik, **65**, 151 – 165 (2013).

[20] P. Sahoo and S. Seikh, "Uniqueness of meromorphic functions sharing a nonzero polynomial with finite weight", Lobachevskii J. Math., **34**, 106 – 115 (2013).

[21] L. Xudan and W. C. Lin, "Value sharing results for shifts of meromorphic functions", J. Math. Anal. Appl., **377**, 441 – 449 (2011).

[22] C. C. Yang and X. H. Hua, "Uniqueness and value sharing of meromorphic functions", Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 22 (1997), 395-406.

[23] C. C. Yang and H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer, Dordrecht (2003).

[24] H. X. Yi, "Meromorphic functions that share one or two values", Complex Variables Theory Appl., **28**, 1 – 11 (1995).

Поступила 28 апреля 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2, 2017, стр. 53-64.

DIRICHLET AND NEUMANN PROBLEMS FOR POISSON EQUATION IN HALF LENS

N. TAGHIZADEH, V. S. MOHAMMADI

University of Guilan, Rasht, Iran
E-mails: taghizadeh@guilan.ac.ir, vsoltani@phd.guilan.ac.ir

Abstract. In this article, the Green and Neumann functions are given for a half lens and the Dirichlet and Neumann problems for Poisson equation are solved. All formulas are given in explicit form.

MSC2010 numbers: 30E25; 35J25.

Keywords: Dirichlet problem; Neumann problem; Poisson equation; half lens.

1. Introduction

The Laplace operator $\partial_z\partial_{\bar{z}}$ produces a second order model equation - the Poisson equation. The classical way to solve the Dirichlet and Neumann boundary value problems for Poisson equation involves application of representation formulas via the Green and Neumann functions. Explicit solutions to the Dirichlet and Neumann boundary value problems for Poisson equation are well known for some particular domains, such as, the half disc and half ring [1], the ring domain [2], the quarter ring domain [3], the equilateral triangle [4], and the unit disc [5]. Let $\Omega = \{z \in \Delta | \mathrm{Im} z > 0\}$, where Δ is a lens defined by the following formula (see [6]): $\Delta = \mathbb{D} \cap D_m(r)$, where $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, $D_m(r) = \{z : |z - m| < r\}$, $0 < r < 1 < m$, and $r^2 + 1 = m^2$.

In this article, we provide explicit solutions and solvability conditions for the Dirichlet and Neumann problems for Poisson equation in the half lens Ω.

2. Boundary value problems for Poisson equation

In order to treat the Dirichlet and Neumann boundary value problems for second order complex partial differential equations some special kernel functions, the Green and Neumann functions, have to be constructed. These kernels then are used to solve the Dirichlet and Neumann boundary value problems for Poisson equation via the corresponding integral representation formulas for solutions. The harmonic Green function for half lens Ω is given by the following formula (see [7]):

$$G_1(z,\zeta) = \log\left|\frac{(\overline{\zeta}-z)(1-z\overline{\zeta})(\overline{\zeta}(1-mz)-(m-z))(\overline{\zeta}(m-z)-(1-mz))}{(\zeta-z)(1-z\zeta)(\zeta(1-mz)-(m-z))(\zeta(m-z)-(1-mz))}\right|^2.$$

For $z \in (m-r,1)$, that is, $z=\overline{z}$, we have

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_z} G_1(z,\zeta) &= -i(\partial_z - \partial_{\overline{z}})G_1(z,\zeta) = 4\mathrm{Im}\Big[\tfrac{1}{\zeta-z} + \tfrac{\zeta}{1-z\zeta} + \tfrac{m\zeta-1}{\zeta(1-mz)-(m-z)} \\ &\quad + \tfrac{\zeta-m}{\zeta(m-z)-(1-mz)}\Big],\end{aligned}$$

for $z \in \partial\Omega_{\mathrm{D}}$, that is, $z\overline{z}=1$, we have

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_z} G_1(z,\zeta) &= (z\partial_z + \overline{z}\partial_{\overline{z}})G_1(z,\zeta) = 4\mathrm{Re}\Big[\tfrac{z}{\zeta-z} + \tfrac{1}{1-z\zeta} + \tfrac{z(\zeta-m)}{\zeta(m-z)-(1-mz)} \\ &\quad + \tfrac{(m-\zeta)}{\zeta(mz-1)-(z-m)}\Big],\end{aligned}$$

and for $z \in \partial\Omega_{D_m}$, that is, $|z-m|=r$, we have

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_z} G_1(z,\zeta) &= \Big((\tfrac{z-m}{r})\partial_z + (\tfrac{\overline{z}-m}{r})\partial_{\overline{z}}\Big)G_1(z,\zeta) = \tfrac{4}{r}\mathrm{Re}\Big[\tfrac{z-m}{\zeta-z} + \tfrac{\zeta(z-m)}{1-z\zeta} \\ &\quad + \tfrac{\zeta r^2}{\zeta(mz-1)-(z-m)} + \tfrac{r^2}{\zeta(m-z)-(1-mz)}\Big].\end{aligned}$$

The next theorem contains a representation formula for a class of functions via the Green function, which is used to solve the Dirichlet boundary value problem for Poisson equation (see [8, 9]).

Theorem 2.1. *Let $\Theta \subset \mathbb{C}$ be a regular domain, and let G_1 be the harmonic Green function for Θ. Then any $\omega \in C^2(\Theta;\mathbb{C}) \cap C^1(\overline{\Theta};\mathbb{C})$ can be represented as follows:*

$$w(z) = -\tfrac{1}{4\pi}\int_{\partial\Theta} w(\zeta)\partial_{\nu_\zeta} G_1(z,\zeta)\mathrm{d}s_\zeta - \tfrac{1}{\pi}\int_{\Theta} w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)G_1(z,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

where ν is the outward normal derivative on $\partial\Theta$ and s is the arc length parameter.

Thus, any function $\omega \in C^2(\Omega;\mathbb{C}) \cap C^1(\overline{\Omega};\mathbb{C})$ can be represented as follows:

$$\begin{aligned}\omega(z) &= -\tfrac{1}{4\pi i}\Big[\int_{m-r}^{1}\omega(\zeta)[\partial_\zeta - \partial_{\overline{\zeta}}]G_1(z,\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial\Omega_{\mathrm{D}}}\omega(\zeta)[\zeta\partial_\zeta + \overline{\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}]G_1(z,\zeta)\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_{D_m}} r\omega(\zeta)[(\tfrac{\zeta-m}{r})\partial_\zeta + (\tfrac{\overline{\zeta}-m}{r})\partial_{\overline{\zeta}}]G_1(z,\zeta)\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-m}\Big] \\ &\quad -\tfrac{1}{\pi}\int_{\Omega}\omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)G_1(z,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

where $\partial\Omega_{\mathbb{D}} = \partial\Omega \cap \partial\mathbb{D}$ and $\partial\Omega_{D_m} = \partial\Omega \cap \partial D_m(r)$, and in explicit form the Green representation formula from Theorem 2.1 for Ω is

$$
\begin{aligned}
\omega(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{m-r}^{1} \omega(t)\Big[\frac{z-\overline{z}}{|t-z|^2} - \frac{z-\overline{z}}{|zt-1|^2} + \frac{r^2(z-\overline{z})}{|t(1-mz)-(m-z)|^2} \\
&\quad - \frac{r^2(z-\overline{z})}{|t(m-z)-(1-mz)|^2}\Big]dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{\mathbb{D}}} \omega(\zeta)\Big[\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} - \frac{1-|z|^2}{|\overline{\zeta}-z|^2} \\
&\quad - \frac{r^2(1-|z|^2)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2} + \frac{r^2(1-|z|^2)}{|\overline{\zeta}(1-mz)-(m-z)|^2}\Big]\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}} \omega(\zeta)\Big[\frac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2} \\
&\quad - \frac{r^2-|z-m|^2}{|\overline{\zeta}-z|^2} - \frac{r^2-|z-m|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2} + \frac{r^2-|z-m|^2}{|1-z\zeta|^2}\Big]\frac{d\zeta}{\zeta-m} \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)G_1(z,\zeta)d\xi d\eta. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

In fact formula (2.1) provides a solution to the Dirichlet problem.

Theorem 2.2. *The Dirichlet problem*

$$\omega_{z\overline{z}} = f \quad \text{in } \Omega, \quad \omega = \gamma \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad \gamma(m-r) = \gamma(1) = 0,$$

with given $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$ and $\gamma \in C(\partial\Omega, \mathbb{C})$ is uniquely solvable and the solution is given by

$$
\begin{aligned}
\omega(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{m-r}^{1} \gamma(t)\Big[\frac{z-\overline{z}}{|t-z|^2} - \frac{z-\overline{z}}{|zt-1|^2} + \frac{r^2(z-\overline{z})}{|t(1-mz)-(m-z)|^2} \\
&\quad - \frac{r^2(z-\overline{z})}{|t(m-z)-(1-mz)|^2}\Big]dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{\mathbb{D}}} \gamma(\zeta)\Big[\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} - \frac{1-|z|^2}{|\overline{\zeta}-z|^2} - \\
&\quad \frac{r^2(1-|z|^2)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2} + \frac{r^2(1-|z|^2)}{|\overline{\zeta}(1-mz)-(m-z)|^2}\Big]\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}} \gamma(\zeta)\Big[\frac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2} \\
&\quad - \frac{r^2-|z-m|^2}{|\overline{\zeta}-z|^2} - \frac{r^2-|z-m|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2} + \frac{r^2-|z-m|^2}{|1-z\zeta|^2}\Big]\frac{d\zeta}{\zeta-m} \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} f(\zeta)G_1(z,\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}
$$

Proof. It can easily be verified that ω is a solution to the Poisson equation. So, it remains to verify that the boundary conditions are satisfied for the boundary integrals.

For $|\zeta_0| = 1$, $\zeta_0 \in \partial\Omega_{\mathbb{D}}$, $\zeta_0 \neq 1, \frac{1}{m} + i\frac{r}{m}$, $t \in (m-r, 1)$, $\zeta \in \partial\Omega_{\mathbb{D}}$ and $\eta \in \partial\Omega_{D_m}$, we have

$$
\begin{aligned}
|t-\zeta_0|^2 &= |t\zeta_0 - 1|^2, |t(1-m\zeta_0) - (m-\zeta_0)|^2 = |t(m-\zeta_0) - (1-m\zeta_0)|^2, \\
|\zeta-\zeta_0|^2 &= |1-\overline{\zeta}\zeta_0|^2, |\overline{\zeta}-\zeta_0|^2 = |1-\zeta_0\zeta|^2, \quad 1-|\zeta_0|^2 = 0, \\
|\overline{\eta}-\zeta_0|^2 &\neq 0, |\eta(1-m\zeta_0)-(m-\zeta_0)|^2 \neq 0, |\overline{\eta}(1-m\zeta_0)-(m-\zeta_0)|^2 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Hence, based on the properties of the Poisson kernel for $\mathbb{D}$ (see [10]), we can write

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\zeta_0}\omega(z) &= \lim_{z\to\zeta_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{\mathbb{D}}}\gamma(\zeta)[\tfrac{\zeta}{\zeta-z}+\tfrac{\overline{\zeta}}{\zeta-\overline{z}}-1]\tfrac{d\zeta}{\zeta}\\ &= \lim_{z\to\zeta_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\Gamma_1(\zeta)[\tfrac{\zeta}{\zeta-z}+\tfrac{\overline{\zeta}}{\zeta-\overline{z}}-1]\tfrac{d\zeta}{\zeta}=\Gamma_1(\zeta_0)=\gamma(\zeta_0),\end{aligned}$$

where

$$\Gamma_1(\zeta)=\begin{cases}\gamma(\zeta), & \zeta\in\partial\Omega_{\mathbb{D}},\\ 0, & \zeta\in\partial\mathbb{D}\setminus\partial\Omega_{\mathbb{D}}.\end{cases}$$

For $\zeta_0\in\partial\Omega_{D_m}$, that is, $|\zeta_0-m|=r$, $\zeta_0\neq m-r,\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}$, $t\in(m-r,1)$, $\zeta\in\partial\Omega_{D_m}$ and $\eta\in\partial\Omega_{\mathbb{D}}$, we have

$$\begin{aligned}r^2|t-\zeta_0|^2 &= |t(m-\zeta_0)-(1-m\zeta_0)|^2, r^2|\zeta_0t-1|^2=|t(1-m\zeta_0)-(m-\zeta_0)|^2\\ r^2|\zeta-\zeta_0|^2 &= |\overline{\zeta}(m-\zeta_0)-(1-m\zeta_0)|^2, r^2|\overline{\zeta}-\zeta_0|=|\zeta(1-m\zeta_0)-(m-\zeta_0)|^2\\ |\overline{\eta}-\zeta_0| &\neq 0,\quad |1-\overline{\eta}\zeta_0|\neq 0,\quad |1-\eta\zeta_0|\neq 0.\end{aligned}$$

Therefore

$$\lim_{z\to\zeta_0}\omega(z) = \lim_{z\to\zeta_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_m(r)}\Gamma_2(\zeta)(\tfrac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2})\tfrac{d\zeta}{\zeta-m}=\Gamma_2(\zeta_0)=\gamma(\zeta_0),$$

where

$$\Gamma_2(\zeta)=\begin{cases}\gamma(\zeta), & \zeta\in\partial\Omega_{D_m},\\ 0, & \zeta\in\partial D_m\setminus\partial\Omega_{D_m}.\end{cases}$$

Similarly, for $\zeta_0\in(m-r,1)$, that is, $\zeta_0=\overline{\zeta_0}$, $\zeta\in\partial\Omega_{\mathbb{D}}$, $\eta\in\partial\Omega_{D_m}$ and $t\in(m-r,1)$, we have

$$\begin{aligned}|\zeta-\zeta_0| &= |\overline{\zeta}-\zeta_0|,\quad |\zeta(1-m\zeta_0)-(m-\zeta_0)|^2=|\overline{\zeta}(1-m\zeta_0)-(m-\zeta_0)|^2\\ |1-\zeta_0\overline{\eta}|^2 &= |1-\zeta_0\eta|^2,\quad |\eta-\zeta_0|=|\overline{\eta}-\zeta_0|,\\ |t\zeta_0-1| &\neq 0, |t(1-m\zeta_0)-(m-\zeta_0)|^2\neq 0,\quad |t(m-\zeta_0)-(1-m\zeta_0)|^2\neq 0.\end{aligned}$$

Thus, in view of [11], we get

$$\lim_{z\to\zeta_0}\omega(z)=\lim_{z\to\zeta_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_3(t)\tfrac{z-\overline{z}}{|t-z|^2}dt=\Gamma_3(\zeta_0)=\gamma(\zeta_0),$$

where

$$\Gamma_3(t)=\begin{cases}\gamma(t), & t\in(m-r,1),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(m-r,1).\end{cases}$$

Here the corner points $m-r$, 1, $\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}$ were excluded.

To check the boundary behavior at points $m-r$ and 1, we define

$$\omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{m-r}^{1}\gamma(t)\left[\tfrac{z-\overline{z}}{|t-z|^2}-\tfrac{z-\overline{z}}{|zt-1|^2}+\tfrac{r^2(z-\overline{z})}{|t(1-mz)-(m-z)|^2}-\tfrac{r^2(z-\overline{z})}{|t(m-z)-(1-mz)|^2}\right]dt,$$

$$\omega_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{\mathbb{D}}}\gamma(\zeta)\left[\tfrac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}-\tfrac{1-|z|^2}{|\overline{\zeta}-z|^2}-\tfrac{r^2(1-|z|^2)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2}+\tfrac{r^2(1-|z|^2)}{|\overline{\zeta}(1-mz)-(m-z)|^2}\right]\tfrac{d\zeta}{\zeta}$$

and

$$\begin{aligned}\omega_3(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\gamma(\zeta)\left[\frac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2}-\frac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2}-\frac{r^2\left(r^2-|z-m|^2\right)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{r^2\left(r^2-|z-m|^2\right)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2}\right]\frac{d\zeta}{\zeta-m}.\end{aligned}$$

We first prove that $\lim_{z\to 1}\omega(z)=\gamma(1)=0$. Indeed, using the equalities

$$\int_{m-r}^{1}\gamma(t)\frac{z-\bar{z}}{|zt-1|^2}dt=\int_{1}^{1/(m-r)}\gamma(\tfrac{1}{t})\frac{z-\bar{z}}{|z-t|^2}dt$$

and

$$\int_{m-r}^{1}\gamma(t)\frac{r^2(z-\bar{z})}{|t(m-z)-(1-mz)|^2}dt = \int_{1}^{1/(m-r)}\gamma(\tfrac{1}{t})\frac{r^2(z-\bar{z})}{|t(1-mz)-(m-z)|^2}dt,$$

we can write

$$\omega_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\Big[\int_{m-r}^{1/(m-r)}\Gamma_4(t)\frac{z-\bar{z}}{|t-z|^2}dt+\int_{m-r}^{1/(m-r)}\Gamma_4(t)\frac{r^2(z-\bar{z})}{|t(1-mz)-(m-z)|^2}dt\Big],$$

where

$$\Gamma_4(t)=\begin{cases}\gamma(t), & m-r\le t\le 1,\\ -\gamma(\frac{1}{t}), & 1\le t\le 1/m-r.\end{cases}$$

Hence, based on the properties of the Poisson kernel for half plane, for $t_0\in(m-r,\frac{1}{m-r})$, we have

$$\lim_{z\to t_0}\omega_1(z)=\Gamma(t_0).$$

In particular, the relation $\lim_{z\to 1}\omega_1(z)=\gamma(1)=0$ follows, because of the continuity of Γ_4 at 1. Now we prove that $\lim_{z\to m-r}\omega_1(z)=\gamma(m-r)=0$. Indeed, we have

$$\omega_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\Gamma_5(t)\frac{z-\bar{z}}{|t-z|^2}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\Gamma_5(t)\frac{r^2(z-\bar{z})}{|t(1-mz)-(m-z)|^2}dt,$$

where

$$\Gamma_5(t)=\begin{cases}-\gamma(\frac{1-mt}{m-t}), & -1\le t\le m-r,\\ \gamma(t), & m-r\le t\le 1.\end{cases}$$

So, for $t_0\in(-1,1)$ we have

$$\lim_{z\to t_0}\omega_1(z)=\Gamma(t_0),$$

and, in particular, the relation $\lim_{z\to m-r}\omega_1(z)=\gamma(m-r)=0$ follows, because of the continuity of Γ_5 at $m-r$. Next, we show that $\lim_{z\to 1}\omega_2(z)=0$ and $\lim_{z\to m-r}\omega_2(z)=0$. To this end, we write

$$\begin{aligned}\omega_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_D}\gamma(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\partial\Omega_D}}\gamma(\bar{\zeta})\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\frac{d\zeta}{\zeta}\\ &\quad-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_D}\gamma(\zeta)\frac{r^2(1-|z|^2)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2}\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\partial\Omega_D}}\gamma(\bar{\zeta})\frac{r^2(1-|z|^2)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2}\frac{d\zeta}{\zeta}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta\cap\partial\mathbb{D}}\Gamma_6(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta\cap\partial\mathbb{D}}\Gamma_6(\zeta)\frac{r^2(1-|z|^2)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2}\frac{d\zeta}{\zeta},\end{aligned}$$

where

$$\Gamma_6(\zeta) = \begin{cases} \gamma(\zeta), & \zeta \in \partial\Omega_{\mathbb{D}}, \\ -\gamma(\overline{\zeta}), & \zeta \in \overline{\partial\Omega_{\mathbb{D}}}, \\ 0, & \zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \partial\Delta. \end{cases}$$

Then, for $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D} \cap \partial\Delta$ we have

$$\lim_{z\to\zeta_0} \omega_2(z) = \Gamma_6(\zeta_0) - \lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \Gamma_6(\zeta) \frac{r^2(1-|z|^2)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

and, in particular, the relation $\lim_{z\to 1} \omega_2(z) = \gamma(1) = 0$, follows, because of the continuity of Γ_6 at 1. Next, in view of the equality

$$\omega_2(\tfrac{1-mz}{m-z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \Gamma_6(\zeta) \frac{1-|z|^2}{|1-z\zeta|} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \Gamma_6(\zeta) \frac{r^2(1-|z|^2)}{|\zeta(m-z)-(1-mz)|^2} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

it follows that $\lim_{z\to m-r} \omega_2(\frac{1-mz}{m-z}) = -\lim_{z\to m-r} \omega_2(z)$, and hence

$$\lim_{z\to m-r} \omega_2(z) = 0.$$

Now we examine the limiting behavior of $\omega_3(z)$. We have

$$\begin{aligned} \omega_3(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_{D_m}} \gamma(\zeta) \frac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2} \frac{d\zeta}{\zeta-m} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\partial\Omega_{D_m}}} \gamma(\overline{\zeta}) \frac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2} \frac{d\zeta}{\zeta-m} \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_{D_m}} \gamma(\zeta) \frac{r^2\left(r^2-|z-m|^2\right)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2} \frac{d\zeta}{\zeta-m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\partial\Omega_{D_m}}} \gamma(\overline{\zeta}) \frac{r^2\left(r^2-|z-m|^2\right)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2} \frac{d\zeta}{\zeta-m}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\omega_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_m(r)} \Gamma_7(\zeta) \frac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2} \frac{d\zeta}{\zeta-m} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_m(r)} \Gamma_7(\zeta) \frac{r^2\left(r^2-|z-m|^2\right)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2} \frac{d\zeta}{\zeta-m},$$

where

$$\Gamma_7(\zeta) = \begin{cases} \gamma(\zeta), & \zeta \in \partial\Omega_{D_m}, \\ -\gamma(\overline{\zeta}), & \zeta \in \overline{\partial\Omega_{D_m}}, \\ 0, & \zeta \in \partial D_m \setminus \partial\Delta. \end{cases}$$

Then for $\zeta_0 \in \partial\Delta \cap \partial D_m(r)$ we have

$$\lim_{z\to\zeta_0} \omega_3(z) = \Gamma_7(\zeta_0) - \lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_m(r)} \Gamma_7(\zeta) \frac{r^2\left(r^2-|z-m|^2\right)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2} \frac{d\zeta}{\zeta-m},$$

implying that $\lim_{z\to m-r} \omega_3(z) = \Gamma_7(m-r) = 0$. From

$$\omega_3(\tfrac{1}{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_m(r)} \Gamma_7(\zeta) \frac{r^2\left(r^2-|z-m|^2\right)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2} \frac{d\zeta}{\zeta-m} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_m(r)} \Gamma_7(\zeta) \frac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2} \frac{d\zeta}{\zeta-m},$$

it follows that $\lim_{z\to 1}\omega_3(\frac{1}{z}) = -\lim_{z\to 1}\omega_3(z)$, and hence $\lim_{z\to 1}\omega_3(z) = 0$. Now we show that $\lim_{z\to \frac{1}{m}+i\frac{r}{m}}\omega(z) = \gamma(\frac{1}{m}+i\frac{r}{m})$. We have

$$\begin{aligned}
1 \;=\; & \tfrac{1}{4\pi i}\int_{m-r}^{1}[u_t(z) - u_t(\overline{z}) + u_t(\tfrac{1}{z}) - u_t(\tfrac{1}{\overline{z}}) + u_t(\tfrac{m-z}{1-mz}) - u_t(\tfrac{m-\overline{z}}{1-m\overline{z}}) \\
& + u_t(\tfrac{1-mz}{m-z}) - u_t(\tfrac{1-m\overline{z}}{m-\overline{z}})]\mathrm{d}t + \tfrac{1}{4\pi i}\int_{\partial\Omega_0}[v_\zeta(z) + v_{\overline{\zeta}}(\overline{z}) - v_{\overline{\zeta}}(z) - v_\zeta(\overline{z}) \\
& + v_\zeta(\tfrac{m-z}{1-mz}) + v_{\overline{\zeta}}(\tfrac{m-\overline{z}}{1-m\overline{z}}) - v_{\overline{\zeta}}(\tfrac{m-z}{1-mz}) - v_\zeta(\tfrac{m-\overline{z}}{1-m\overline{z}})]\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \\
& + \tfrac{1}{4\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}[w_\zeta(z) + w_{\overline{\zeta}}(\overline{z}) - w_{\overline{\zeta}}(z) - w_\zeta(\overline{z}) \\
& + w_\zeta(\tfrac{m-z}{1-mz}) + w_{\overline{\zeta}}(\tfrac{m-\overline{z}}{1-m\overline{z}}) - w_{\overline{\zeta}}(\tfrac{m-\overline{z}}{1-mz}) - w_\zeta(\tfrac{m-\overline{z}}{1-m\overline{z}})]\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-m},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

where $u_t(z) = \frac{2}{t-z}$, $v_\zeta(z) = \frac{2\zeta}{\zeta-z}$ and $w_\zeta(z) = \frac{2(\zeta-m)}{\zeta-z}$.

Multiplying (2.2) by $\gamma(\frac{1}{m}+i\frac{r}{m})$ and subtracting the resulting equation from $\omega(z)$, for $z\in\partial\Omega$ we obtain

$$\begin{aligned}
\omega(z) - \gamma(\tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}) \;=\; & \tfrac{1}{2\pi i}\int_{m-r}^{1}\tilde{\gamma}(t)[\tfrac{z-\overline{z}}{|t-z|^2} - \tfrac{z-\overline{z}}{|zt-1|^2} + \tfrac{r^2(z-\overline{z})}{|t(1-mz)-(m-z)|^2} \\
& - \tfrac{r^2(z-\overline{z})}{|t(m-z)-(1-mz)|^2}]\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_0}\tilde{\gamma}(\zeta)[\tfrac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} - \tfrac{1-|z|^2}{|\overline{\zeta}-z|^2} - \\
& \tfrac{r^2(1-|z|^2)}{|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2} + \tfrac{r^2(1-|z|^2)}{|\overline{\zeta}(1-mz)-(m-z)|^2}]\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \\
& + \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\tilde{\gamma}(\zeta)[\tfrac{r^2-|z-m|^2}{|\zeta-z|^2} - \tfrac{r^2-|z-m|^2}{|\overline{\zeta}-z|^2} - \tfrac{r^2-|z-m|^2}{|1-z\zeta|^2} \\
& + \tfrac{r^2-|z-m|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2}]\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-m} - \tfrac{1}{\pi}\int_{\Omega} f(\zeta)G_1(z,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
=\; & \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_0}\tilde{\gamma}(\zeta)\tfrac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta},
\end{aligned}$$

where $\tilde{\gamma}(\zeta) = \gamma(\zeta) - \gamma(\frac{1}{m}+i\frac{r}{m})$, and $\tilde{\gamma}(\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}) = 0$. Thus, we have

$$\lim_{z\to\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}}\omega(z) - \gamma(\tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}) = 0.$$

Theorem 2.2 is proved. □

Another second order representation formula, similar to the one given in Theorem 2.1 is available, where instead of Green function the harmonic Neumann function is used (see [8]).

Theorem 2.3. *Let $\Theta\subset\mathbb{C}$ be a regular domain, and let N_1 be the harmonic Neumann function for Θ. Then any $\omega\in C^2(\Theta;\mathbb{C})\cap C^1(\overline{\Theta};\mathbb{C})$ can be represented as follows:*

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Theta}\{w(\zeta)\partial_{\nu_\zeta}N_1(z,\zeta) - \partial_{\nu_\zeta}w(\zeta)N_1(z,\zeta)\}\mathrm{d}s_\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{\Theta}w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)N_1(z,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

Thus, any function $\omega \in C^2(\Omega;\mathbb{C}) \cap C^1(\overline{\Omega};\mathbb{C})$ can be represented as follows:

$$\begin{aligned}
\omega(z) \;=\; & \tfrac{1}{4\pi i}\Big[\int_{m-r}^{1} N_1(z,\zeta)[\partial_\zeta - \partial_{\overline{\zeta}}]\omega(\zeta)d\zeta + \int_{\partial\Omega_D} N_1(z,\zeta)(\zeta\partial_\zeta + \overline{\zeta}\partial_{\overline{\zeta}})\omega(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta} \\
& + r\int_{\partial\Omega_{D_m}} N_1(z,\zeta)\big[(\tfrac{\zeta-m}{r})\partial_\zeta + (\tfrac{\overline{\zeta}-m}{r})\partial_{\overline{\zeta}}\big]\omega(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta-m}\Big] \\
& - \tfrac{1}{4\pi i}\Big[\int_{m-r}^{1} \omega(\zeta)[\partial_\zeta - \partial_{\overline{\zeta}}]N_1(z,\zeta)d\zeta + \int_{\partial\Omega_D} \omega(\zeta)[\zeta\partial_\zeta + \overline{\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}]N_1(z,\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta} \\
& + r\int_{\partial\Omega_{D_m}} \omega(\zeta)\big[(\tfrac{\zeta-m}{r})\partial_\zeta + (\tfrac{\overline{\zeta}-m}{r})\partial_{\overline{\zeta}}\big]N_1(z,\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta-m}\Big] \\
& - \tfrac{1}{\pi}\int_{\Omega} \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)N_1(z,\zeta)d\xi d\eta. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

It can easily be verified that the harmonic Neumann function $N_1(z,\zeta)$ for the half lens Ω is given by the following formula:

$$\begin{aligned}
N_1(z,\zeta) \;=\; & -\log\big|(\overline{\zeta}-z)(1-z\overline{\zeta})\left(\overline{\zeta}(1-mz)-(m-z)\right) \\
& \left(\overline{\zeta}(m-z)-(1-mz)\right)(\zeta-z)(1-z\zeta)\left(\zeta(1-mz)-(m-z)\right) \\
& \left(\zeta(m-z)-(1-mz)\right)\big|^2.
\end{aligned}$$

For $z \in \partial\Omega_D \setminus \{1, \frac{1}{m} + i\frac{r}{m}\}$ and $\zeta \in \Omega$, we have

$$\begin{aligned}
\partial_{\nu_z} N_1(z,\zeta) \;=\; & \tfrac{z}{\overline{\zeta}-z} + \tfrac{\overline{\zeta}z}{1-z\overline{\zeta}} + \tfrac{(m\overline{\zeta}-1)z}{\overline{\zeta}(1-mz)-(m-z)} + \tfrac{(\overline{\zeta}-m)z}{\overline{\zeta}(m-z)-(1-mz)} \\
& + \tfrac{z}{\zeta-z} + \tfrac{\zeta z}{1-z\zeta} + \tfrac{(m\zeta-1)z}{\zeta(1-mz)-(m-z)} + \tfrac{(\zeta-m)z}{\zeta(m-z)-(1-mz)} \\
& \tfrac{\overline{z}}{\zeta-\overline{z}} + \tfrac{\zeta\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta} + \tfrac{(m\zeta-1)\overline{z}}{\zeta(1-m\overline{z})-(m-\overline{z})} + \tfrac{(\zeta-m)\overline{z}}{\zeta(m-\overline{z})-(1-m\overline{z})} \\
& + \tfrac{\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{z}} + \tfrac{\overline{\zeta}\overline{z}}{1-\overline{z}\overline{\zeta}} + \tfrac{(m\overline{\zeta}-1)\overline{z}}{\overline{\zeta}(1-m\overline{z})-(m-\overline{z})} + \tfrac{(\overline{\zeta}-m)\overline{z}}{\overline{\zeta}(m-\overline{z})-(1-m\overline{z})} = -8.
\end{aligned}$$

Similarly, for $z \in (m-r,1)$, $\zeta \in \Omega$, $z \in \partial\Omega_{D_m} \setminus \{m-r, \frac{1}{m} + i\frac{r}{m}\}$ and $\zeta \in \Omega$, we get

$$\partial_{\nu_z} N_1(z,\zeta) = -i(\partial_z - \partial_{\overline{z}})N_1(z,\zeta) = 0,$$

and

$$\partial_{\nu_z} N_1(z,\zeta) = \Big((\tfrac{z-m}{r})\partial_z + (\tfrac{\overline{z}-m}{r})\partial_{\overline{z}}\Big)N_1(z,\zeta) = -\tfrac{8}{r}.$$

Now we introduce the outward normal derivatives at the corner points. Let the partial outward normal derivatives be given by the following formulas:

$$\partial^+_{\nu_z}\omega(1) = \lim_{\substack{\zeta\to 1\\ \zeta\in\partial\Omega_D\setminus\{1\}}} \partial_{\nu_z}\omega(\zeta), \qquad \partial^-_{\nu_z}\omega(1) = \lim_{\substack{t\to 1\\ t\in(m-r,1)}} \partial_{\nu_z}\omega(t), \tag{2.4}$$

$$\partial^+_{\nu_z}\omega(m-r) = \lim_{\substack{t\to m-r\\ t\in(m-r,1)}} \partial_{\nu_z}\omega(t), \qquad \partial^-_{\nu_z}\omega(m-r) = \lim_{\substack{\zeta\to m-r\\ \zeta\in\partial\Omega_{D_m}\setminus\{m-r\}}} \partial_{\nu_z}\omega(\zeta), \tag{2.5}$$

and

$$\partial^{+}_{\nu_z}\omega(\tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}) = \lim_{\substack{\zeta\to\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\\ \zeta\in\partial\Omega_{D_m}\setminus\{\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\}}} \partial_{\nu_z}\omega(\zeta), \quad \partial^{-}_{\nu_z}\omega(\tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}) = \lim_{\substack{\zeta\to\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\\ \zeta\in\partial\Omega_D\setminus\{\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\}}} \partial_{\nu_z}\omega(\zeta). \tag{2.6}$$

Definition 2.1. *If the partial outward normal derivatives (2.4)-(2.6) exist, then the outward normal derivatives at the three corner points are defined to be*

$$\partial_{\nu_z}\omega(\zeta) = \tfrac{1}{2}\big[\partial^{+}_{\nu_z}\omega(\zeta) + \partial^{-}_{\nu_z}\omega(\zeta)\big], \quad \zeta\in\{m-r, 1, \tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}\}.$$

The formula (2.3) provides a solution to the Neumann boundary value problem for Poisson equation.

Theorem 2.4. *The Neumann problem*

$$\omega_{z\bar z} = f \quad in\ \Omega, \quad \partial_\nu\omega = \gamma \quad on \quad \partial\Omega,$$
$$\frac{1}{\pi i}\int_{\partial\Omega_D}\omega(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta} + \tfrac{1}{\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\omega(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta-m} = c,$$

for $f\in C(\Omega;\mathbb{C})$, $\gamma\in C(\partial\Omega;\mathbb{C})$ and $c\in\mathbb{C}$ is solvable if and only if

$$\int_\Omega f(\zeta)d\xi d\eta = \tfrac{1}{4i}\int_{\partial\Omega_D}\gamma(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta} + \tfrac{r}{4i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\gamma(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta-m} + \tfrac{1}{4}\int_{m-r}^{1}\gamma(t)dt, \tag{2.7}$$

and the weak solution is given by formula:

$$\begin{aligned}
\omega(z) =& -\tfrac{1}{2\pi}\int_{m-r}^{1}\gamma(t)\big[\log|t-z|^2 + \log|1-zt|^2 + \log|t(m-z)-(1-mz)|^2 \\
&+ \log|t(1-mz)-(m-z)|^2\big]dt \\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_D}\gamma(\zeta)\big[\log|\zeta-z|^2 + \log|1-z\zeta|^2 + \log|\zeta(m-z)-(1-mz)|^2 \\
&+ \log|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2\big]\tfrac{d\zeta}{\zeta} \\
&-\tfrac{r}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\gamma(\zeta)\big[\log|\zeta-z|^2 + \log|1-z\zeta|^2 + \log|\zeta(m-z)-(1-mz)|^2 \\
&+ \log|\zeta(1-mz)-(m-z)|^2\big]\tfrac{d\zeta}{\zeta-m} \\
&-\tfrac{1}{\pi}\int_\Omega f(\zeta)N_1(z,\zeta)d\xi d\eta + c.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Proof. It follows from Theorem 2.3 that if the Neumann problem is solvable, then the solution should be of form (2.8). Now we verify that (2.8) indeed is a solution of the Neumann problem. We easily get $\omega_{z\bar z} = f$ in Ω. Next, for $z\in\Omega$, we have

$$-i(\partial_z-\partial_{\bar z})\omega(z) = \tfrac{1}{4\pi i}\int_{m-r}^{1}(\partial_z-\partial_{\bar z})N_1(z,t)\gamma(t)dt - \tfrac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega_D}(\partial_z-\partial_{\bar z})N_1(z,\zeta)\gamma(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta}$$
$$-\tfrac{r}{4\pi}\int_{\partial\Omega_{D_m}}(\partial_z-\partial_{\bar z})N_1(z,\zeta)\gamma(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta-m} + \tfrac{i}{\pi}\int_\Omega f(\zeta)(\partial_z-\partial_{\bar z})N_1(z,\zeta)d\xi d\eta.$$

and for $z \in \Omega$ and $\zeta \in \partial\Omega$ we can write

$$\begin{aligned}(\partial_z - \partial_{\bar z})N_1(z,\zeta) &= 2\big[\tfrac{1}{\zeta - z} + \tfrac{\zeta}{1-z\zeta} + \tfrac{m-\zeta}{(1-mz)-\zeta(m-z)} + \tfrac{1-m\zeta}{(m-z)-\zeta(1-mz)} \\ &\quad - \tfrac{1}{\zeta-\bar z} - \tfrac{\bar\zeta}{1-\bar z\zeta} - \tfrac{m-\bar\zeta}{(1-m\bar z)-\zeta(m-\bar z)} - \tfrac{1-m\bar\zeta}{(m-\bar z)-\zeta(1-m\bar z)}\big].\end{aligned}$$

Therefore, for $t_0 \in (m-r, 1)$, we have

$$\partial_{\nu_z}\omega(t_0) = \lim_{z\to t_0}\big[-i(\partial_z - \partial_{\bar z})\big]\omega(z) = \lim_{z\to t_0}\tfrac{1}{2\pi i}\int_{m-r}^{1}\gamma(t)\tfrac{z-\bar z}{|t-z|^2}\mathrm{d}t = \gamma(t_0).$$

Further, we have

$$\partial^+_{\nu_z}\omega(m-r) = \lim_{\substack{t_0\to m-r\\ t_0\in(m-r,1)}}\partial_{\nu_z}\omega(t_0) = \gamma(m-r), \tag{2.9}$$

$$\partial^-_{\nu_z}\omega(1) = \lim_{\substack{t_0\to 1\\ t_0\in(m-r,1)}}\partial_{\nu_z}\omega(t_0) = \gamma(1). \tag{2.10}$$

Similarly, we obtain

$$\begin{aligned}&(z\partial_z + \bar z\partial_{\bar z})\omega(z) = \tfrac{1}{4\pi}\int_{m-r}^{1}(z\partial_z + \bar z\partial_{\bar z})N_1(z,t)\gamma(t)\mathrm{d}t \\ &+\tfrac{1}{4\pi i}\int_{\partial\Omega_D}(z\partial_z + \bar z\partial_{\bar z})N_1(z,\zeta)\gamma(\zeta)\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + \tfrac{r}{4\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}(z\partial_z + \bar z\partial_{\bar z})N_1(z,\zeta)\gamma(\zeta)\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-m} \\ &-\tfrac{1}{\pi}\int_\Omega f(\zeta)(z\partial_z + \bar z\partial_{\bar z})N_1(z,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

Taking into account that for $z\in\Omega$ and $\zeta\in\partial\Omega$

$$\begin{aligned}(z\partial_z + \bar z\partial_{\bar z})N_1(z,\zeta) &= 2\big[\tfrac{z}{\zeta-z} + \tfrac{z\zeta}{1-z\zeta} + \tfrac{z(m-\zeta)}{(1-mz)-\zeta(m-z)} + \tfrac{z(1-m\zeta)}{(m-z)-\zeta(1-mz)} \\ &\quad + \tfrac{\bar z}{\zeta-\bar z} + \tfrac{\bar z\bar\zeta}{1-\bar z\zeta} + \tfrac{\bar z(m-\bar\zeta)}{(1-m\bar z)-\zeta(m-\bar z)} + \tfrac{\bar z(1-m\bar\zeta)}{(m-\bar z)-\zeta(1-m\bar z)}\big],\end{aligned}$$

for $\zeta_0 \in \partial\Omega_D \setminus \{1, \frac{1}{m} + i\frac{r}{m}\}$, we can write

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_z}\omega(\zeta_0) &= \lim_{z\to\zeta_0}(z\partial_z + \bar z\partial_{\bar z})\omega(z) = \lim_{z\to\zeta_0}\Big\{\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_D}\gamma(\zeta)\big[\tfrac{\zeta}{\zeta-z} + \tfrac{\bar\zeta}{\zeta-\bar z} - 1\big]\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \\ &\quad -\tfrac{2}{\pi}\int_{m-r}^{1}\gamma(t)\mathrm{d}t - \tfrac{2}{\pi i}\int_{\partial\Omega_D}\gamma(\zeta)\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} - \tfrac{2r}{\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\gamma(\zeta)\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-m} \\ &\quad +\tfrac{8}{\pi}\int_\Omega f(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\Big\} = \gamma(\zeta_0) - \tfrac{2}{\pi}\int_{m-r}^{1}\gamma(t)\mathrm{d}t \\ &\quad -\tfrac{2}{\pi i}\int_{\partial\Omega_D}\gamma(\zeta)\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} - \tfrac{2r}{\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\gamma(\zeta)\tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-m} + \tfrac{8}{\pi}\int_\Omega f(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

which implies the necessity and sufficiency of condition (2.7). Thus, we have

$$\partial^+_{\nu_z}\omega(1) = \lim_{\substack{\zeta_0\to 1\\ \zeta_0\in\partial\Omega_D\setminus\{1,\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\}}}\partial_{\nu_z}\omega(\zeta_0) = \gamma(1), \tag{2.11}$$

$$\partial^-_{\nu_z}\omega(\tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}) = \lim_{\substack{\zeta_0\to\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\\ \zeta_0\in\partial\Omega_0\setminus\{1,\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\}}} \partial_{\nu_z}\omega(\zeta_0) = \gamma(\tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}). \tag{2.12}$$

Finally, we observe that

$$\begin{aligned}\Big((\tfrac{z-m}{r})\partial_z + (\tfrac{\overline{z}-m}{r})\partial_{\overline{z}}\Big)\omega(z) &= \tfrac{1}{4\pi}\int_{m-r}^{1}\Big((\tfrac{z-m}{r})\partial_z + (\tfrac{\overline{z}-m}{r})\partial_{\overline{z}}\Big)N_1(z,t)\gamma(t)dt\\ &\quad+\tfrac{1}{4\pi i}\int_{\partial\Omega_0}\Big((\tfrac{z-m}{r})\partial_z + (\tfrac{\overline{z}-m}{r})\partial_{\overline{z}}\Big)N_1(z,\zeta)\gamma(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta}\\ &\quad+\tfrac{r}{4\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\Big((\tfrac{z-m}{r})\partial_z + (\tfrac{\overline{z}-m}{r})\partial_{\overline{z}}\Big)N_1(z,\zeta)\gamma(\zeta)\tfrac{d\zeta}{\zeta-m}\\ &\quad-\tfrac{1}{\pi}\int_{\Omega} f(\zeta)\Big((\tfrac{z-m}{r})\partial_z + (\tfrac{\overline{z}-m}{r})\partial_{\overline{z}}\Big)N_1(z,\zeta)d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Next, taking into account that for $z\in\Omega$, $\zeta\in\partial\Omega$,

$$\begin{aligned}\Big((\tfrac{z-m}{r})\partial_z + (\tfrac{\overline{z}-m}{r})\partial_{\overline{z}}\Big)N_1(z,\zeta) &= \tfrac{2}{r}\Big[\tfrac{(z-m)}{\zeta-z}+\tfrac{(z-m)\zeta}{1-z\zeta}+\tfrac{(z-m)(m-\zeta)}{(1-mz)-\zeta(m-z)}\\ &+\tfrac{(z-m)(1-m\zeta)}{(m-z)-\zeta(1-mz)}+\tfrac{(\overline{z}-m)}{\zeta-\overline{z}}+\tfrac{(\overline{z}-m)\overline{\zeta}}{1-\overline{z}\zeta}+\tfrac{(\overline{z}-m)(m-\overline{\zeta})}{(1-m\overline{z})-\zeta(m-\overline{z})}+\tfrac{(\overline{z}-m)(1-m\overline{\zeta})}{(m-\overline{z})-\zeta(1-m\overline{z})}\Big],\end{aligned}$$

for $\zeta_0\in\partial\Omega_{D_m}\setminus\{m-r,\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\}$, we can write

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_z}\omega(\zeta_0) &= \lim_{z\to\zeta_0}\big((\tfrac{z-m}{r})\partial_z + (\tfrac{\overline{z}-m}{r})\partial_{\overline{z}}\big)\omega(z)\\ &= \lim_{z\to\zeta_0}\Big\{\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\gamma(\zeta)\big[\tfrac{\zeta-m}{\zeta-z}+\tfrac{\overline{\zeta}-m}{\zeta-\overline{z}}-1\big]\tfrac{d\zeta}{\zeta-m}-\frac{2}{r\pi}\int_{m-r}^{1}\gamma(t)dt\\ &\quad-\frac{2}{r\pi i}\int_{\partial\Omega_0}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{2}{\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-m}+\frac{8}{\pi r}\int_{\Omega}f(\zeta)d\xi d\eta\Big\}\\ &= \gamma(\zeta_0)-\frac{2}{r\pi}\int_{m-r}^{1}\gamma(t)dt-\frac{2}{r\pi i}\int_{\partial\Omega_0}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\\ &\quad-\frac{2}{\pi i}\int_{\partial\Omega_{D_m}}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-m}+\frac{8}{\pi r}\int_{\Omega}f(\zeta)d\xi d\eta,\end{aligned}\tag{2.13}$$

which implies the necessity and sufficiency of condition (2.7).

Furthermore, we have

$$\partial^-_{\nu_z}\omega(m-r) = \lim_{\substack{\zeta_0\to m-r\\ \zeta_0\in\partial\Omega_{D_m}\setminus\{m-r,\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\}}} \partial_{\nu_z}\omega(\zeta) = \gamma(m-r), \tag{2.14}$$

$$\partial^+_{\nu_z}\omega(\tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}) = \lim_{\substack{\zeta_0\to\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\\ \zeta_0\in\partial\Omega_{D_m}\setminus\{m-r,\frac{1}{m}+i\frac{r}{m}\}}} \partial_{\nu_z}\omega(\zeta) = \gamma(\tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}). \tag{2.15}$$

Hence, in view of (2.9)-(2.15) and Definition 2.1, we conclude that

$$\partial_{\nu_z}\omega(\zeta)=\gamma(\zeta),\quad \zeta\in\{m-r,1,\tfrac{1}{m}+i\tfrac{r}{m}\}.$$

This completes the proof of Theorem 2.4. □

Acknowledgements. The authors would like to express their sincere gratitude to a referee for his/her useful comments, remarks and suggestions that led to considerable improvement of the paper.

Список литературы

[1] H. Begehr, T. Vaitekhovich, "Harmonic boundary value problems in half disc and half ring", Functiones et Approximatio, **40**(2), 251 – 282 (2009).

[2] T. Vaitekhovich, "Boundary value problems to second order complex partial differential equations in a ring domain", Sauliai Mathematical Seminar, **2** (10), 117 – 146 (2007).

[3] B. Shupeyeva, *"Harmonic boundary value problems in a quarter ring domain"*, Adv. Pure Appl. Math. 3(4), 393–419, 2012.

[4] H. Begehr, T. Vaitekhovich, "Harmonic Dirichlet problem for some equilateral triangle", Complex Var. Elliptic Equ., **57** (2–4), 185 – 196 (2012).

[5] H. Begehr, "Boundary value problems in complex analysis II", F. Bol. Asoc. Mat. Venezolana., **12**, 217 – 250 (2005).

[6] H. Begehr, T. Vaitekhovich, "Schwarz problem in lens and lune", Complex Var. Elliptic Equ. **59** (1), 76 – 84 (2014).

[7] H. Begehr, T. Vaiteknovich, "The parqueting-reflection principle for constructing Green functions", Analytic Methods of Analysis and Differential Equations, AMADE-2012, eds. S. V. Rogosin, M. V. Dubatovskaya, Cambridge Sci., Publ., Cottenham, 11 – 20 (2013).

[8] T. Vaitekhovich, "Boundary value problems for complex partial differential equations in a ring domain" [PhD thesis], FU Berlin (2008). Available from: www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS-thesis-000000003859.

[9] H. Begehr, T. Vaitekhovich, "Iterated Dirichlet problem for higher order Poisson equation", Le Matematiche., **63** (1), 139 – 154 (2008).

[10] H. A. Schwarz, "Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$", J. Reine Angew. Math., **74**, 218 – 253 (1872).

[11] H. Begehr, "Boundary value problems in complex analysis I", Bol. Asoc. Math. Venezolana., **12**, 65 – 85 (2005).

Поступила 9 апреля 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2, 2017, стр. 65-77.

О РЕГУЛЯРНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСАХ

Р. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *khachatryan.rafik@gmail.com*

Аннотация. В статье приведено достаточное условие, при котором пересечение регулярных касательных конусов является касательным конусом. Построены регулярные касательные конусы и шатры для множеств, задаваемых локально липшицевыми функциями. Конусы описываются в терминах K-обобщенных производных.

MSC2010 number: 26E25; 49J52; 46J05.

Ключевые слова: субдифференциал; шатер; касательный конус.

1. Касательные конусы

В работах (см. [3], [5] - [7]) исследуются наиболее известные в литературе различные типы касательных конусов (контингентный, нижний, касательный конус Кларка) как для выпуклых, так и для невыпуклых множеств. Это вызвано тем, что если некоторый из этих типов конусов оказывается выпуклым, то это позволяет изучать невыпуклые экстремальные задачи методами выпуклого анализа [3, 5, 7].

В работе [6] Е. С. Половинкиным определены и изучены другие асимптотические касательные конусы к невыпуклым множествам. В частности, введено понятие регулярного касательного конуса, развивающее понятия шатра Болтянского [1, 2].

В настоящей статье с помощью понятия регулярного касательного конуса введено понятие K- обобщенной производной локально липшицевой функции. В этих терминах построены выпуклые касательные конусы к множествам, задаваемым ограничениями типа равенств и неравенств. Сформулированы необходимые условия экстремума в негладких экстремальных задачах.

В дальнейшем $< a, b >$ – скалярное произведение векторов $a, b \in R^n$. $A \stackrel{*}{-} B \equiv \{x \in R^n / x + B \subseteq A\}$– геометрическая разность множеств A и B (см. [4]).

В [4] (гл. 3, п. 24, лемма 24.3) доказано, что для всякого замкнутого конуса K множество $K \overset{\bullet}{-} K$ является его выпуклым замкнутым подконусом.

Определение 1.1. [6]. *Нижним касательным конусом ко множеству M в точке $x_0 \in M$ называется множество вида*

$$T_M(x_0) := \{\overline{x} \in R^n : \lim_{\lambda \downarrow 0} d(\overline{x}, \lambda^{-1}(M - x_0)) = 0\}.$$

Иными словами, $\overline{x} \in T_M(x_0)$ в том и только в том случае, если для любой последовательности положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящиеся к нулю, найдется последовательность точек $\{\overline{x_k}\}$, сходящаяся к точке $\overline{x}$, и такая, что справедливо включение $x_0 + \lambda_k \overline{x_k} \in M$ для любого $k \in N$.

Определение 1.2 (6). *Пусть $f : R^n \to R-$ локально липшицевая функция и $M \equiv epi(f) = \{(\alpha, x) \in R^{n+1} / \alpha \geq f(x)\}$. Пусть $K \subseteq T_M(x_0, f(x_0))-$ выпуклый замкнутый конус, а $f'_K(x_0, \overline{x})-$ положительно однородная выпуклая функция, надграфиком которой является конус K. Функция $f'_K(x_0, \overline{x})$ называется обобщенной K- производной функции f в точке x_0 по направлениям, а K- субдифференциалом функции f в точке x_0 называется множество*

$$\partial_K f(x_0) \equiv \{x^* \in R^n : f'_K(x_0, \overline{x}) \geq < x^*, \overline{x} > \quad \forall \overline{x} \in R^n\}.$$

Если $K = T_M(x_0, f(x_0)) \overset{\bullet}{-} T_M(x_0, f(x_0))$, то обозначим $f'_K(x_0, \overline{x}) = f'_{AL}(x_0, \overline{x})$. Тогда $\partial_K f(x_0)$ называется нижним асимптотическим субдифференцилом функции f в точке x_0 и обозначается через $\partial_{AL} f(x_0)$ (см. [6]).

Определение 1.3. [8]. *Обобщенная производная Мишеля- Пено функции f по направлению $\overline{x}$, обозначаемая $f'_{MP}(x_0, \overline{x})$, определяется так:*

$$f'_{MP}(x_0, \overline{x}) = \sup_{w \in R^n} \{\limsup_{\lambda \downarrow 0}\} \frac{f(x_0 + \lambda(\overline{x} + w)) - f(x_0 + \lambda w)}{\lambda}\}.$$

Определение 1.4. [8]. *Субдифференциалом Мишеля-Пено для локально липшицевой функции f в точке x_0 называется множество*

$$\partial_{MP} f(x_0) = \{x^* \in R^n / f'_{MP}(x_0, \overline{x}) \geq < x^*, \overline{x} > \ \forall \overline{x} \in R^n\}.$$

Определение 1.5. [7]. *Пусть $f(x)-$ произвольная функция. Положим*

$$F(x_0, \overline{x}) = \lim_{\overline{y} \to \overline{x}, \lambda \downarrow 0} sup \frac{f(x_0 + \lambda \overline{y}) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Положительно однородная выпуклая, замкнутая по $\overline{x}$ функция $h(x_0, \overline{x})$ называется верхней выпуклой аппроксимацией функции f в точке x_0, если

$$h(x_0, \overline{x}) \geq F(x_0, \overline{x}),\ \overline{x} \in R^n.$$

Отметим, что обобщенная производная $f'_C(x_0, \overline{x})$ Ф. Кларка (см. [3], гл. 1, п.2.1) и производная $f'_{MP}(x_0, \overline{x})$ Мишеля- Пено являются верхними выпуклыми аппроксимациями локально липшицевой функции f в точке x_0.

Определение 1.6. [7]. *Выпуклый конус $K_M(x_0)$ называется конусом касательных направлений множества M в точке x_0, если из включения $\overline{x} \in K_M(x_0)$ следует, что существует такая функция $\varphi(\lambda)$, что*

$$x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda) \in M$$

при достаточно малых $\lambda \geq 0$ и $\lambda^{-1}\varphi(\lambda) \to 0$, когда $\lambda \downarrow 0$.

Определение 1.7. [6]. *Выпуклый замкнутый конус $K \subseteq T_M(x_0)$ называется регулярным касательным конусом ко множеству M в точке x_0, если существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и отображение $\varphi(\cdot,\cdot) : (0, \delta_1] \times (K \cap B_{\delta_2}(0)) \to R^n$ такие, что*

$$x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda, \overline{x}) \in M\ \forall\lambda \in (0, \delta_1],\ \overline{x} \in K \bigcap B_{\delta_2}(0),$$

а для функции

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \sup\{\lambda^{-1}\|\varphi(\lambda, \overline{x})\| : \overline{x} \in K \bigcap B_{\delta_2}(0)\}$$

справедливо равенство $\lim_{\lambda\downarrow 0}\tilde{\varphi}(\lambda) = 0$. Кроме этого, если при любом $\lambda \in (0, \delta_1]$ отображение $\varphi(\lambda, \cdot)$ непрерывно на $K \cap B_{\delta_2}(0)$, то K называется непрерывным регулярным конусом.

Определение 1.8. [1]. *Выпуклый конус $K \subseteq T_M(x_0)$ называется шатром множества M в точке $x_0 \in M$, если существует отображение r, определенное в некоторой окрестности $B_\delta(0)$ нуля, такое, что*

$$x_0 + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M,\ \text{если}\ \overline{x} \in K \bigcap B_\delta(0)\ \text{и}\ \frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0\ \text{при}\ \overline{x} \to 0.$$

Очевидно, что если $K-$ шатер, то он и регулярный касательный конус.

Предложение 1.1. *Пусть $f(x)$– липшицевая функция в окрестности $B_\delta(x_0)$ точки x_0. Тогда существует такая непрерывная функция $r(\overline{x}) \geq 0$, определенная в окрестности $B_\delta(0)$ нуля такая, что*

$$f(x_0 + \overline{x}) \leq f(x_0) + f'_{AL}(x_0, \overline{x}) + r(\overline{x}) \ \ \forall \overline{x} \in B_\delta(0), \tag{1.1}$$

причем $\lim_{\overline{x}\to 0} \frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} = 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $f'_{AL}(x_0, \overline{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции $f(x)$ в точке x_0, поскольку тогда неравенство (1.1) непосредственно следует из леммы 3.5 [7](гл. 5, п.3). В [6] показано следующее представление:

$$f'_{AL}(x_0, \overline{x}) = \sup_{w \in R^n} \{f'_L(x_0, \overline{x} + w) - f'_L(x_0, w)\},$$

где

$$f'_L(x_0, u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Отсюда получим

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda \overline{x}) - f(x_0)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\overline{y} \to \overline{x},\ \lambda \downarrow 0} sup \frac{f(x_0 + \lambda \overline{y}) - f(x_0)}{\lambda} = F(x_0, \overline{x}) \leq f'_{AL}(x_0, \overline{x}) = h(x_0, \overline{x}).$$

Предложение 1.2. [6] *(см. теорема 25.2, гл. 3, п. 25). Пусть $f(x)$ липшицева функция в некоторой окрестности $B_\delta(0)$ точки x_0, а $f'_K(x_0, \overline{x})$– некоторая ее обобщенная K- производная в точке x_0.*
Тогда

(1) *существует функция $r(\cdot, \cdot) : (0, \delta] \times B_1(0) \to R_+$ такая, что*

$$f(x_0 + \lambda \overline{x}) \leq f(x_0) + \lambda f'_K(x_0, \overline{x}) + r(\lambda, \overline{x}) \ \ \forall \overline{x} \in B_1(0), \ \lambda \in (0, \delta]. \tag{1.2}$$

(2) *При фиксированном $\lambda \in (0, \delta]$ функция $r(\lambda, \cdot)$ непрерывна на $B_1(0)$.*

(3) *Для функции $\tilde{r}(\lambda) = \sup\{\lambda^{-1} r(\lambda, \overline{x}) : \overline{x} \in B_1(0)\}$ справедливо равенство* $\lim_{\lambda \downarrow 0} \tilde{r}(\lambda) = 0$.

Теорема 1.1. *Пусть x_0– точка минимума локально липшицевой функции $f(x)$ на множестве M. Пусть $\partial_K f(x_0)$– K- субдифференциал функции f, а $K_M(x_0)$–*

выпуклый конус касательных направлений для M в точке x_0. Тогда

$$\partial_K f(x_0) \bigcap K^*_M(x_0) \neq \emptyset,$$

где $K^*_M(x_0) = \{x^* \in R^n :< x^*, \overline{x} >\geq 0 \ \forall \overline{x} \in K_M(x_0)\}$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда согласно теореме отделимости выпуклых множеств существует вектор $e \neq 0$, $\|e\| < 1$ такой, что

$$f'_K(x_0, e) < 0, \quad e \in K_M(x_0).$$

Тогда существует функция $\varphi(\lambda, e) = o(\lambda)$ такая, что

$$x_0 + \lambda e + \varphi(\lambda, e) \in M \text{ при малых } \lambda > 0.$$

Так как существует число $C > 0$ такое, что

$$\|f'_K(x_0, \overline{x})\| \leq C\|\overline{x}\| \ \ \forall \overline{x} \in R^n,$$

то в силу неравенства (1.2), для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$f(x_0 + \lambda e + \varphi(\lambda, e)) \leq f(x_0) + \lambda[f'_K(x_0, e + \frac{\varphi(\lambda, e)}{\lambda}) + \frac{r(\lambda, e + \frac{\varphi(\lambda, e)}{\lambda})}{\lambda}] \leq$$

$$\leq f(x_0) + \lambda[f'_K(x_0, e) + \frac{C\|\varphi(\lambda, e)\|}{\lambda} + \sup_{u \in B_1(0)} \frac{r(\lambda, u)}{\lambda}] < f(x_0).$$

Это противоречие, поскольку $x_0 -$ точка минимума функции f на M. □

В дальнейшем нам понадобиться следующий результат.

Предложение 1.3. [10]. *Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}$ многозначное отображение, графиком которого является такой выпуклый замкнутый конус, что $\mathrm{dom}(a) = R^n$. Тогда существует положительно однородное и липшицевое отображение $P : R^n \to R^m$ такое, что $P(x) \in a(x)$ $\forall x \in R^n$.*

2. Пересечение регулярных касательных конусов

Теорема 2.1. *(о пересечении регулярных касательных конусов). Пусть выпуклые замкнутые конусы K_1 и K_2 являются непрерывными регулярными конусами касательных направлений соответственно для множеств $M_1 \subseteq R^n$ и $M_2 \subseteq R^n$ в точке $x_0 \in M_1 \cap M_2$. Предположим также, что $K_1 - K_2 = R^n$. Тогда конус $Q \equiv K_1 \cap K_2$ является регулярным касательным конусом к множеству $M \equiv M_1 \cap M_2$ в точке x_0.*

Доказательство. Сначала покажем, что существуют положительно однородные и липшицевые отображения $P_1 : R^n \to K_1$, $P_2 : R^n \to K_2$ такие, что для любого $x \in R^n$ имеет место равенство

$$x = P_1(x) - P_2(x) \tag{2.1}$$

Положим

$$a(x) := \{y \in K_1 : (y - x) \in K_2\}.$$

Поскольку $R^n = K_1 - K_2$, то график многозначного отображения a является выпуклый замкнутый конус и $dom(a) = R^n$. Поэтому, согласно предложению 1.3 существует положительно однородное и липшицевое отображение $P_1 : R^n \longrightarrow K_1$ такое, что

$$P_1(x) \in a(x), \quad \|P_1(x)\| \leq C_1\|x\|, \quad x \in R^n,$$

где C_1 – некоторое число. Положим $P_2(x) = P_1(x) - x$ и заметим, что

$$P_2(x) \in K_2, \ \|P_2(x)\| \leq (C_1 + 1)\|x\| \leq C_2\|\overline{x}\| \ \forall x \in R^n,$$

где $C_2 = C_1 + 1$. Поскольку K_1 и K_2 являются непрерывными регулярными конусами, то существуют такие отображения

$$\Psi_i(\lambda, \overline{x}) = x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi_i(\lambda, \overline{x}), \quad i = 1, 2, \tag{2.2}$$

что $\Psi_i(\lambda, \overline{x}) \in M_i \ \forall \overline{x} \in Q \cap B_1(0)$, $\lambda \in (0, 1]$, где φ_i $(i = 1, 2)$ удовлетворяют условиям определения непрерывного регулярного конуса 1.5. Не нарушая общности, предположим также, что для обоих конусов (см. определении 1.7) $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Теперь при фиксированном $\overline{x} \in Q$ рассмотрим систему уравнений, записав ее в векторной форме:

$$g(\overline{x}, \lambda, y) = \Psi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda})) - \Psi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) = 0. \tag{2.3}$$

Используя (2.2), уравнение (2.3) можно переписать в виде:

$$g(\overline{x}, \lambda, y) = y + \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda})) - \varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) = 0.$$

Фиксируем $\overline{x} \in Q$ и рассмотрим на шаре $\|y\| \leq \lambda/(2C_2)$ отображение

$$\Phi(\overline{x}, \lambda, y) \equiv \varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) - \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda})).$$

При любых фиксированных λ и $\overline{x}$ отображение $\Phi(\overline{x}, \lambda, \cdot)$ является непрерывным оператором, поскольку таковым являются отображения $\varphi_1(\lambda, \cdot)$, $\varphi_2(\lambda, \cdot)$, P_1, P_2.

Покажем, что при достаточно малых λ отображение $\Phi(\overline{x}, \lambda, \cdot)$ имеет неподвижную точку на некотором шаре с центром в точке ноль. Пусть теперь $\|\overline{x}\| \leq 1/2$ и $\|y\| \leq \lambda/(2C_2)$. Тогда

$$\|\overline{x} + P_i\left(\frac{y}{\lambda}\right)\| \leq 1, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому имеем

$$\frac{\|\varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) - \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda}))\|}{\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}} \leq$$

$$\leq \frac{\|\varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda}))\|}{\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}} + \frac{\|\varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda}))\|}{\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}} \leq$$

$$\leq \sup_{u \in Q \cap B_1(0)} \frac{\|\varphi_1(\lambda, u)\|}{\lambda} + \sup_{u \in Q \cap B_1(0)} \frac{\|\varphi_2(\lambda, u)\|}{\lambda} = \tilde{\varphi}_1(\lambda) + \tilde{\varphi}_2(\lambda) \equiv \tilde{q}(\lambda).$$

Из определения 1.5, следует, что $\tilde{q}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Таким образом, доказано, что

$$\|\Phi(\overline{x}, \lambda, y)\| \leq \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}.$$

Положим

$$\tau(\lambda) = inf\{\tau > 0 : \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \tau^2} \leq \tau\}.$$

Так как при достаточно малых $\lambda > 0$ имеет место неравенство

$$\tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = \sqrt{2}\lambda\tilde{q}(\lambda) \leq \lambda \quad \text{то} \quad \tau(\lambda) \leq \lambda.$$

По определению точной нижней грани для каждого λ существует $\tau^*(\lambda)$ такое, что

$$\tau(\lambda) \leq \tau^*(\lambda) \leq \tau(\lambda) + \lambda^2, \ \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + (\tau^*(\lambda))^2} \leq \tau^*(\lambda). \tag{2.4}$$

Покажем, что $\frac{\tau^*(\lambda)}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Так как $\tau(\lambda) \leq \lambda$ и $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то из определения $\tau(\lambda)$ получаем

$$\tau(\lambda) - \lambda^2 \leq \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + (\tau(\lambda) - \lambda^2)^2} \leq \tilde{q}(\lambda)(\lambda + \mid \tau(\lambda) - \lambda^2 \mid) \leq 3\lambda\tilde{q}(\lambda).$$

Поэтому $\frac{\tau(\lambda)}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Но тогда из (2.4) следует, что $\frac{\tau^*(\lambda)}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \to 0$. Теперь, если $\|y\| \le \tau^*(\lambda) \le \lambda/(2C_2)$, то согласно неравенству (2.4) имеем

$$\|\Phi(\overline{x}, \lambda, y)\| \le \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2} \le \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + (\tau^*(\lambda))^2} \le \tau^*(\lambda).$$

Таким образом, непрерывное отображение $\Phi(\overline{x}, \lambda, \cdot)$ отображает шар $\|y\| \le \tau^*(\lambda)$ в себя. Значит, по теореме Брауера отображение $\Phi(\overline{x}, \lambda, \cdot)$ имеет неподвижную точку в этом шаре, т.е. существует отображение $y(\lambda, \overline{x})$ такое, что

$$\Phi(\overline{x}, \lambda, y(\lambda, \overline{x})) = y(\lambda, \overline{x}), \quad \|y(\lambda, \overline{x})\| \le \tau^*(\lambda).$$

Следовательно,

$$\sup_{u \in Q \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|y(\lambda, u)\|}{\lambda} \to 0 \text{ при } \lambda \to 0.$$

Таким образом, $\Phi(\overline{x}, \lambda, y(\lambda, \overline{x})) = y(\lambda, \overline{x})$. Окончательно из (2.3) получим, что для $\overline{x} \in Q$, $\|\overline{x}\| \le 1/2$ и для достаточно малых $\lambda > 0$ имеет место равенство

$$x_0 + \lambda\overline{x} + P_1(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})) =$$

$$= x_0 + \lambda\overline{x} + P_2(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})).$$

Поскольку K_1, K_2– выпуклые конусы, то для малых $\lambda > 0$,

$$(\overline{x} + P_1\left(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda}\right)) \in K_1 \bigcap B_1(0), \ (\overline{x} + P_2(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})) \in K_2 \bigcap B_1(0).$$

Поэтому, для малых $\lambda > 0$ имеем

$$x_0 + \lambda\overline{x} + P_1(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})) =$$

$$= x_0 + \lambda\overline{x} + P_2(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})) \in M_1 \bigcap M_2.$$

Положим

$$\varphi(\lambda, \overline{x}) = P_1(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})).$$

Очевидно, что

$$\sup_{u \in Q \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|\varphi(\lambda, u)\|}{\lambda} \to 0 \text{ при } \lambda \to 0,$$

и если $\overline{x} \in Q \bigcap B_{1/2}(0)$, то для достаточно малых $\lambda > 0$ справедливо включение

$$x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda, \overline{x}) \in M. \qquad \square$$

Замечание 2.1. *Функция $\varphi(\lambda,\cdot)$ может не быть непрерывной, и поэтому Q, вообще говоря, не есть непрерывный регулярный касательный конус к M в точке x_0.*

Замечание 2.2. *В [9] построен пример двух замкнутых множеств $M_1 \subseteq R^4$ и $M_2 \subseteq R^4$ и касательных конусов K_1, K_2, таких, что*

1. конус K_1 является шатром к M_1 в точке $0 \in M_1$;

2. K_2 является конусом Кларка для M_2 в точке $0 \in M_2$;

3. $K_1 \bigcap K_2 \neq \{0)\}$, $K_1 - K_2 = R^4$.

Но $M_1 \bigcap M_2 = \{0\}$.

Это означает, что пересечение двух нижних касательных конусов к двум разным множествам в одной общей точке этих множеств может и не быть нижним касательным конусом пересечения множеств в этой точке.

Теперь построим регулярные конусы касательных направлений и шатры ко множеству вида $M = \{x \in R^n : g(x) \leq 0\}$.

Теорема 2.2. *Пусть $g(x)$– локально липшицева функция и для точки x_0 выполнены следующие условия: $g(x_0) = 0$ и $0 \notin \partial_K g(x_0)$. Положим*

$$P_M(x_0) = \{\overline{x} \in R^n : g'_K(x_0, \overline{x}) \leq 0\}.$$

Тогда выпуклый конус $P_M(x_0)$ является регулярным конусом касательных направлений ко множеству M в точке x_0.

Доказательство. Поскольку $0 \notin \partial_K g(x_0)$, то существует вектор w такой, что $g'_K(x_0, w) < 0$. Не нарушая общности, предположим, что $g'_K(x_0, w) = -1$. Пусть $\gamma > 0$. В силу неравенства 1.2, если $\overline{x} \in P_\Omega(x_0)$, $\|\overline{x}\| \leq 1/2$, $\gamma \leq \|w\|\lambda/2$, то для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$g(x_0 + \lambda(\overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)) \leq g(x_0) + \lambda g'_K(x_0, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w) + r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w) \leq$$

$$\leq -\gamma + r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w).$$

Для фиксированных $\overline{x}$ и λ функцию $f(\overline{x}, \lambda, \gamma) = r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)$ непрерывна по γ. Покажем, что она имеет неподвижную точку на некотором отрезке $[0, \nu(\lambda)]$, где

$\nu(\lambda) = o(\lambda)$ при $\lambda \to 0$. Имеем $\|\overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda} w\| \le 1$. Поэтому

$$\frac{r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda} w)}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}} \le \frac{r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda} w)}{\lambda} \le \sup_{u \in B_1(0)} \frac{r(\lambda, u)}{\lambda} \equiv \bar{r}(\lambda) \to 0.$$

Отсюда

$$0 \le f(\overline{x}, \lambda, \gamma) \le \bar{r}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}.$$

Теперь, проводя доказательство аналогично теореме 2.1, получаем, что существует функция $\gamma(\lambda, \overline{x})$ такая, что $f(\overline{x}, \lambda, \gamma(\lambda, \overline{x})) = \gamma(\lambda, \overline{x})$, причем

$$\sup_{u \in P_\Omega(x_0) \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|\gamma(\lambda, u)\|}{\lambda} = o(\lambda).$$

Значит, $g(x_0 + \lambda\overline{x} + \gamma(\lambda, \overline{x})w) \le 0$. Положим $\varphi(\lambda, \overline{x}) = \gamma(\lambda, \overline{x})w$. Ясно, что

$$\sup_{u \in P_\Omega(x_0) \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|\varphi(\lambda, u)\|}{\lambda} = o(\lambda).$$

Теорема 2.2 доказана.

Следствие 2.1. *Пусть существуют векторы e_1 и e_2 такие, что*

$$g'_K(x_0, e_1) < 0, \ (-g)'_K(x_0, e_2) < 0 \tag{2.5}$$

Тогда выпуклый конус $K_\Omega(x_0) = \{\overline{x} \in R^n : g'_K(x_0, \overline{x}) \le 0, \ (-g)'_K(x_0, \overline{x}) \le 0\}$ является регулярным конусом касательных направлений для множества $\Omega = \{x \in R^n : g(x) = 0\}$ в точке x_0.

Доказательство. По теореме 2.2 существуют число $\delta > 0$ и отображения $\varphi_1(\lambda, \overline{x})$, $\varphi_2(\lambda, \overline{x})$, удовлетворяющие условиям определения 1.5 и такие, что для $\overline{x} \in K_\Omega(x_0) \bigcap B_\delta(0)$ и малых $\lambda > 0$ имеют место следующие неравенства:

$$g(x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi_1(\lambda, \overline{x})) \le 0, \ g(x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi_2(\lambda, \overline{x})) \ge 0.$$

Отсюда найдется такое число $\theta(\lambda) \in [0, 1]$, что

$$g(x_0 + \lambda\overline{x} + \theta(\lambda)\varphi_1(\lambda, \overline{x}) + (1 - \theta(\lambda))\varphi_2(\lambda, \overline{x})) = 0.$$

Положив $\varphi(\lambda, \overline{x}) = \theta(\lambda)\varphi_1(\lambda, \overline{x}) + (1 - \theta(\lambda))\varphi_2(\lambda, \overline{x})$, получим $g(x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda, \overline{x})) = 0$, а также

$$\sup_{u \in K_\Omega(x_0) \cap B_\delta(0)} \frac{\|\varphi(\lambda, u)\|}{\lambda} \equiv \bar{\varphi}(\lambda) \to 0 \text{ при } \lambda \to 0. \qquad \square$$

Замечание 2.3. *Если* $g'_K(x_0, \overline{x}) = g'_{MP}(x_0, \overline{x})$, *то известно* [8], *что*

$$g'_{MP}(x_0, -\overline{x}) = (-g)'_{MP}(x_0, \overline{x}).$$

Тогда в (2.5) можно выбрать $e_2 = -e_1$. В этом случае подпространство

$$K_\Omega(x_0) = \{\overline{x} \in R^n : g'_{MP}(x_0, \overline{x}) \le 0,\ g'_{MP}(x_0, -\overline{x}) \le 0\}$$

является регулярным касательным конусом к Ω в точке x_0. Аналогично, используя неравенство (1.1), можно доказать следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть g — локально липшицева функция и для точки x_0 выполнены условия $g(x_0) = 0$, $0 \notin \partial_{AL} g(x_0)$. Тогда выпуклый конус*

$$P_M(x_0) = \{\overline{x} \in R^n : g'_{AL}(x_0, \overline{x}) \le 0\}$$

является шатром к множеству $M = \{x \in R^n : g(x) \le 0\}$ в точке x_0.

3. Необходимое условие минимума в терминах K-субдифференциалов

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$f_0(x) \to min,\ x \in \bigcap_{i=1}^{k} M_i, \tag{3.1}$$

где $M_i = \{x \in R^n : f_i(x) \le 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, а f_i $(i = 1, \ldots, k)$ - локально липшицевы функции.

Теорема 3.1. *Пусть x_0 — решение задачи (3.1). Тогда существуют числа $\lambda_0 \ge 0, \lambda_i \ge 0$, $i \in I(x_0) \equiv \{i \in [1; k] : f_i(x_0) = 0\}$ не равные одновременно нулю, такие, что*

$$0 \in \lambda_0 \partial_K f_0(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \partial_K f_i(x_0),$$

где ∂_K — знак K- субдифференциала.

Доказательство. Предположим противное:

$$0 \notin \lambda_0 \partial_K f_0(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \partial_K f_i(x_0).$$

Это означает, что существует такой вектор e, что для любых λ_0, λ_i чисел, из которых не все равны нулю, выполняется неравенство

$$\lambda_0 f'_{0K}(x_0, e) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i f'_{iK}(x_0, e) < 0.$$

Отсюда следует, что $f'_{0K}(x_0, e) < 0$, $f'_{iK}(x_0, e) < 0$, $i \in I(x_0)$. Согласно предложению 1.2, существуют функции $r_i(\lambda, \overline{x})$ такие, что

$$f_i(x_0 + \lambda\overline{x}) \leq f_i(x_0) + \lambda f'_{iK}(x_0, \overline{x}) + r_i(\lambda, \overline{x}),$$

причем $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} r_i(\lambda, \overline{x}) = 0$, $\forall \overline{x} \in B_1(0)$. Следовательно для достаточно малых $\lambda > 0$ $f_0(x_0 + \lambda e) < f_0(x_0)$, $f_i(x_0 + \lambda e) < f_i(x_0) = 0$, $i \in I(x_0)$. Таким образом при малых $\lambda > 0$ точка $x_0 + \lambda e$ удовлетворяет всем ограничениям, так как в силу непрерывности $f_i(x)$ для достаточно малых $\lambda > 0$ $f_i(x_0 + \lambda e) < 0$, $i \notin I(x_0)$, а также $f_0(x_0 + \lambda e) < f_0(x_0)$. Это противоречит тому, что x_0- решение задачи. □

Теорема 3.2. *Пусть x_0- точка минимума локально липшицевой функции f на множестве $\Omega = \{x \in R^n : g(x) = 0\}$. Пусть выполнены предположения следствия 2.1. Тогда*

$$0 \in \partial_K f(x_0) + cl\{con\partial_K g(x_0) + con\partial_K(-g)(x_0)\}. \tag{3.1}$$

Здесь $cl\{M\}-$ замыкание множества $M \subseteq R^n$.

Доказательство. Согласно следствию 2.1 $K_\Omega(x_0)$ является конусом касательных направлений к множеству M в точке x_0. Поэтому, в силу теоремы 1.1 имеем

$$\partial_K f(x_0) \bigcap K^*_\Omega(x_0) \neq \emptyset. \tag{3.2}$$

Поскольку $K^*_\Omega = cl\{con\partial_K g(x_0) + con\partial_K(-g)(x_0)\}$, то из (3.2) немедленно следует включение (3.1). □

Следствие 3.1. *Если $\partial_K g(x_0) \equiv \partial_{MP} g(x_0)$ и $\partial_K f(x_0) \equiv \partial_{AL} f(x_0)$, то $K^*_\Omega(x_0) = cl\{con\partial_{MP} g(x_0) - con\partial_{MP} g(x_0)\} \equiv Lin\partial_{MP} g(x_0)$, а необходимое условие (3.1) принимает следующий вид $0 \in \partial_{AL} f(x_0) + Lin\partial_{MP} g(x_0)$.*

Abstract. The paper contains a sufficient condition for an intersection of regular tangent cones to be a tangent cone. Regular tangent cones and tents for sets given

by locally Lipschitz functions are constructed. The cones are described in terms of generalized K-derivatives.

Список литературы

[1] В. Г. Болтянский, Оптимальное Управление Дискретными Системами, М. Наука (1973).

[2] В. Г. Болтянский, "Метод шатров в теории экстремальных задач", Успехи мат. наук. **30**, но. 3, 3 – 55 (1975).

[3] Ф. Кларк, Оптимизация и негладкий анализ, Мир, М. (1988).

[4] Е. С. Половинкин, Элементы Теории Многозначных Отображений, М. Изд-во МФТИ (1982).

[5] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, Элементы Выпуклого и Сильно Выпуклого Анализа, Физматлит, М. (2004).

[6] Е. С. Половинкин, Многозначный Анализ и Дифференциальные Включения, М., Физматлит (2014).

[7] Б. Н. Пшеничный, Выпуклий Анализ и Экстремальные Задачи, М., Наука (1980).

[8] P. Michel, J.- P. Penot, "Calcul sous-differentiel pour les functions lipschitziennes et non lipschitziennes", C. R. Acad. Sc. Paris. Ser.I, **291**, 269 – 272 (1984).

[9] A. Bressan, "On the intersection of a Clarke cone with a Boltianskii cone", SIAM J. Cotrol Optim., **45**, no. 6, 2054 – 2064 (2007).

[10] R. A. Khachatryan, "On set-valued mappings with starlike graphs", Journal of Contenporary Matematical Analysis, **47**, no. 1, 28 – 44 (2012).

Поступила 29 января 2016

Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2, 2017, стр. 78-84.

НЕЧЕТКАЯ ОЦЕНКА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПО ВЫПУКЛЫМ ОБОЛОЧКАМ α-УРОВНЕЙ

В. Г. БАРДАХЧЯН, Р. А. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *vardanbardakchyan@gmail.com*, *ruben_gevorgyan@yahoo.com*

Аннотация. В статье рассматривается метод построения оценки наименьших квадратов, когда наблюдения являются нечеткими числами. Хотя оценка может быть смещенной, предложенный метод обеспечивает состоятельность оценки.

MSC2010 number: 62J86, 62F86.

Ключевые слова: нечеткая регрессия; метод наименьших квадратов.

1. Постановка задачи

Основные виды регрессий с нечеткими числами или нечеткими наблюдениями описаны у Шапиро [1]. Формально их можно разделить на несколько групп: регрессия предложенная Танака, регрессия Клеминса и основанная на метрике регрессия Даймонда.

Настоящая работа посвящена последней модели. Интуитивная постановка задачи – найти такой вектор нечетких коэффициентов, для которого нечеткие наблюдения зависимой переменной для выбранной метрики будут как можно ближе к нечетким значениям линейной комбинации объясняющих переменных. Точнее нужно найти нечеткие коэффициенты $\tilde{b}$ такие, чтобы расстояние

$$D(\tilde{Y}, \tilde{b}_1\tilde{X}_1 + \tilde{b}_2\tilde{X}_2 + ... + \tilde{b}_k\tilde{X}_k) \tag{1.1}$$

было минимальным. Здесь $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m)$ - вектор наблюдений объясняемой переменной, а $\tilde{X}_i = (\tilde{x}_{i1}, ..., \tilde{x}_{i,m})$ - вектор соответствующих объясняющих переменных. Элементы каждого из них нечеткие числа. Мы используем следующее определение нечеткого числа (см. [3], стр. 37-39).

Определение 1.1. *n- мерное нечеткое число - это нечеткое множество, с ограниченным носителем из $\mathbb{R}^{n-1}$ каждый α-уровень $A_\alpha = \{a \in R^{n-1},\ \mu_A(a) = \alpha\}$ которого является выпуклым множеством, и функция принадлежности*

$\mu_A(\cdot)$ является полунепрерывной сверху и принимает все значения из интервала $[0, 1]$.

Множество нечетких чисел является подмножеством банахово пространства всех замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$(см. [3]). Для того, чтобы задать на нем метрику, используют тот факт, что все α-уровни функции принадлежности нечетких чисел представляют из себя замкнутые выпуклые множества и могут быть однозначно охарактеризованы своими опорными функциями. Часто берут следующую метрику (см. [2])

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left(n \int_0^1 \int_{S^{n-1}} (s_{\tilde{A}}(x, \alpha) - s_{\tilde{B}}(x, \alpha))^2 dx d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

где $s_{\tilde{A}}(\cdot, \alpha)$ опорная функция α-уровня нечеткого числа $\tilde{A}$, а S^k – единичная сфера в $\mathbb{R}^k$. И соответственно,

$$D(\tilde{Z}, \tilde{U}) = \sum_{j=1}^{m} d^2(\tilde{Z}_j, \tilde{U}_j). \tag{1.3}$$

для любых двух векторов из m нечетких чисел.

При классической регрессии требуется найти статистическую оценку соответствующих коэффициентов. В нашем случае оценка является нечеткой случайной величиной. И желательно выявить ее статистические свойства. То есть мы должны найти оценки случайных нечетких величин $\tilde{b}_j$, при том что $\tilde{Y}_i$ случайные, а $\tilde{X}_{i,j}$ детерминированные величины. Стоит отметить, что так как мы имеем дело с случайными величинами, то подразумевается некоторое вероятностное пространство $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Даймонд в [2] доказал существование минимума (1.1), для (1.3). Однако процедура его нахождения в общем случае зависит от класса нечетких наблюдений, то есть от вида их функций принадлежности. Более того, при такой постановке задачи, труднее рассматривать статистические свойства оценки, так как надо предварительно специфицировать ошибки.

В данной статье мы предлагаем оценку, получаемую с помощью метода наименьших квадратов на значениях опорных функций по направлениям и конвексификацию комбинированных оценок (процедура описана далее). Мы также рассматриваем статистические свойства такой оценки.

2. Построение оценки и ее статистические свойства

Вместо того, чтобы минимизировать сумму квадратов разностей опорных функций по всем направлениям и по всем α-уровням, мы предлагаем провести обычную минимизацию по суммам квадратов ошибок по каждому направлению в отдельности, а именно построить оценку наименьших квадратов на каждом α-уровне, для каждого направления $x \in S^{n-1}$, для

$$\tilde{Y}_{x,\alpha} = \tilde{b}_{1,x,\alpha}\tilde{X}_{1,x,\alpha} + \dots + \tilde{b}_{k,x,\alpha}\tilde{X}_{k,x,\alpha} + \tilde{\epsilon}_{x,\alpha} = \tilde{X}_{x,\alpha}\tilde{B}_{x,\alpha} + \tilde{\epsilon}_{x,\alpha} \tag{2.1}$$

Здесь каждый вектор является столбцом, а через $\tilde{A}_{x,\alpha}$ мы обозначили значение опорной функции по направлению $x \in S^{n-1}$ на α-уровне нечеткого числа $\tilde{A}$. А для нечеткого вектора $\tilde{C} = (\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_m)$ под $\tilde{C}_{x,\alpha}$ будем понимать вектор $(\tilde{c}_{1,x,\alpha}, ..., \tilde{c}_{m,x,\alpha})$. ϵ_α -вектор гауссовских полей. Таким образом, полученная оценка будет оценкой значений опорных функций коэффициентов, и оценка наименьших квадратов будет иметь вид

$$\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha} = (\tilde{X}_{x,\alpha}^T \tilde{X}_{x,\alpha})^{-1} \tilde{X}_{x,\alpha}^T \tilde{Y}_{x,\alpha} \tag{2.2}$$

Так как мы получаем оценку значений опорных функций (или, если брать по всем направлениям $x \in S^{n-1}$, оценку опорной функции), то для того чтобы мы смогли сделать обратную трансформацию для получения α-уровней коэффициентов, нам необходимо, чтобы оценка опорной функции представляла собой некую опорную функцию. Для этого необходимо и достаточно, чтобы эта функция была непрерывной, однородной первого порядка и выпуклой. Однородность первого порядка обеспечена тем, что мы действуем на единичной сфере, то есть $x \in S^{n-1}$. Но для того, чтобы сделать оценку выпуклой функцией, нам понадобится процедура конвексификации – то есть нахождение наиболее близкой к данной функции непрерывной выпуклой функции.

Предложение 2.1. *Если число наблюдений больше числа объясняющих переменных (m>k), то оценка (2.2) непрерывна по всем $n-1$ компонентам x.*

Действительно, оценка (2.2) непрерывна, так как она является некоторой комбинацией опорных функций, которые также непрерывны. А при условии $m > k$ оценка (2.2) существует.

Известно, что ближайшая выпуклая функция непрерывной функции f получается заменой участков вогнутости соответствующей гиперплоскостью. То есть, если на участке U функция вогнута, мы заменяем эту часть гиперплоскостью проходящей через $f(\partial U)$. Это можно сделать исходя из определения вогнутой функции.

Полученную таким образом функцию обозначим через $conv(f(x))$.

Замечание 2.1. *Отметим, что*

1) Такая процедура не меняет степень однородности, так как всякая гиперплоскость является однородной первой степени.

2) Новая оценка не нарушает непрерывности.

3)Функциональный вид данной процедуры зависит от вида начальной функции. Если начальная функция достаточно хороша (дифференцируема), то мы можем найти участки вогнутости и заменить гиперплоскостями.

4) Конвексификацию вектора будем понимать как конвексификацию каждой компоненты.

Верно также следующее утверждение,

Предложение 2.2. *Пусть $A(x), B(x), A_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, некоторые непрерывные функции, на S^{n-1}.*

1) $conv(A(x)) \leq A(x)$ (для каждой x).

2) $conv(A(x) + B(x)) \geq conv(A(x)) + conv(B(x))$.

3) Если функция $A(x)$ выпукла, то $conv(A(x)) = A(x)$.

4) Если $A_n(x) \to A(x)$ п.в. и $A(x)$ выпукла, то $conv(A_n(x)) \to A(x)$ п.в.

Пункты 1)-3) см. в [5], а четвертый можно доказать следующим образом. Множество точек, где $conv(A_n(x)) \not\to A(x)$ состоит из двух подмножеств. Это множество, где $A_n(x)$ не сходится к $A(x)$, и множество, где $A_n(x) \to A(x)$, но $A_n(x)$ там не выпуклые. Но по определению $conv(A_n(x))$ это наиболее близкие к $A_n(x)$ выпуклые функции. В данном случае, так как $A(x)$ выпуклая функция, и $A_n(x) \to A(x)$, то $A(x)$ и есть ближайшая выпуклая функция (на множестве где имеем точечную сходимость).

Замечание 2.2. *Вообще говоря, нельзя утверждать, что $conv(\hat{\hat{B}}_{x,\alpha})$ не смещена. Если $\hat{\hat{B}}_{x,\alpha}$ не выпуклая, то оценка смещенная.*

Однако, наша оценка имеет другое очень важное статистическое свойство. Она состоятельна при некоторых условиях.

Теорема 2.1. *Пусть*

1) $\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}) = \tilde{Q}_{x,\alpha}$, *где* $Q_{x,\alpha}$ *– некоторая* k*-мерная матрица, равномерно ограниченная по всем* x *и* α. ,

2) $\epsilon_\alpha = (\epsilon_{1,\alpha},\dots,\epsilon_{m,\alpha}) \sim iidGF$ *(то есть ошибки – независимые и одинаково распределенные гауссовские поля), где* $\epsilon_{i,\alpha} = \{\epsilon_{i,x,\alpha}|x \in S^{n-1}\}$.

Тогда оценка

$$conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}) \tag{2.3}$$

состоятельна по вероятности, почти для всех x.

Замечание 2.3. *Тут конвексификация производится только по* x *для каждого* $\omega \in \Omega$. *Также отметим, что условие 1 это стандартное требование при установке состоятельности регрессионных оценок, см. например [6] стр. 161-162.*

Доказательство. Из (2.1) и (2.2) имеем что,

$$\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha} = \tilde{B}_{x,\alpha} + (\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha})^{-1}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}) &= conv(\tilde{B}_{x,\alpha} + (\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha})^{-1}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}) \geq conv(\tilde{B}_{x,\alpha}) + \\ &+ conv((\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha})^{-1}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}) = \\ &= \tilde{B}_{x,\alpha} + conv((\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha})^{-1}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}) \\ &= \tilde{B}_{x,\alpha} + conv\left(\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь предпоследнее равенство вытекает из того, что искомый $\tilde{B}_{x,\alpha}$ представляет собой вектор опорных функций искомых выпуклых множеств (α-уровней искомых нечетких чисел, коэффициентов), следовательно его компоненты также выпуклые функции, и можно использовать 3-ий пункт второго утверждения 2.

Заметим, что компоненты $\epsilon_{x,\alpha}$, представляют собой значения опорных функций гауссовских полей. Обозначим через η_α вектор их выпуклых оболочек (по x, естественно). Результат полученный Давидовым и Паулаускосом ([4]) позволяет утверждать, что $\mathrm{plim}_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\tilde{\eta}_{x,\alpha} = E_{x,\alpha}$ (сходится по вероятности), где E является замкнутым эллипсом. Отсюда следует что $\mathrm{plim}_{m\to\infty}\frac{1}{m}\tilde{\eta}_{x,\alpha} = 0$ из чего следует, так как $\epsilon_\alpha \subset \eta_\alpha$, и из условия 1) теоремы, что

$$\mathrm{plim}_{m\to\infty}\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha} = 0, \text{для всех } x \in S^{n-1}, \alpha \in [0,1]. \tag{2.6}$$

На самом деле это означает сходимость по мере на $S^{n-1}\times\Omega$ для пар (x,ω). Отсюда имеем, что существует подпоследовательность $\{m_l\}$ такая, что $\lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_l}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}=0$ для п.в. $(x,\omega)\in S^{n-1}\times\Omega$.

Из условий теоремы, вышесказанного и 4-ого пункта 2-го утверждения следует, что для п.в $x\in S^{n-1}$,

$$\lim_{l\to\infty} conv\left(\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}\right)\right)=0,$$

и следовательно

$$\text{plim}_{l\to\infty}\, conv\left(\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}\right)\right)=0 \tag{2.7}$$

для почти всех $x\in S^{n-1}$.

Из (2.5) и (2.7) вытекает, что

$$\text{plim}_{m\to\infty} conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha})\geq\tilde{B}_{x,\alpha} \tag{2.8}$$

для почти всех $x\in S^{n-1}$.

С другой стороны, согласно пункту 1) утверждения 2,

$$\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}\geq conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}) \tag{2.9}$$

и согласно (2.4),

$$\tilde{B}_{x,\alpha}+\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}\right)\geq conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha})$$

Отсюда при $m\to\infty$, и с учетом (2.6) и (2.8) получим, что

$$\tilde{B}_{x,\alpha}\geq \text{plim}\, conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha})\geq\tilde{B}_{x,\alpha}$$

Следовательно

$$\text{plim}\, conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha})=\tilde{B}_{x,\alpha}$$

для почти всех $x\in S^{n-1}$. Теорема доказана. □

Далее, уже имея оценку (2.3), можно получить саму оценку для коэффициентов ((2.3) оценка для опорных функций) путем реверсии (см. [5], стр. 113-115). То есть если обозначим $\delta_{i,\alpha}(a)=\sup_{x\in S^{n-1}}(x\cdot a-conv(\hat{\tilde{b}}_{i,x,\alpha}))$, то наша оценка α-уровня будет иметь вид

$$\hat{\tilde{b}}_{i,\alpha}=\{a\in R^{n-1}:\delta_{i,\alpha}(a)=0\},$$

где $x\cdot a$ – скалярное произведение.

Abstract. In the article the method for construction of least square estimator is considered, when observations are fuzzy numbers. The estimator is biased in general, while the proposed method guarantees the consistency of it.

Список литературы

[1] A. Shapiro, Fuzzy Regression Models, 2006, Proceedings of Actuaries Research Conference (ARC), Instituto Tecnologico Autonomo de Mexico (ITAM), Mexico, Society of Actuaries, IL, August 11 - 13 (2005).
[2] Ph. Diamond, "Fuzzy least squares", Information sciences, **46**, no. 3, 141 – 157 (1988).
[3] Ph. Diamond, P. Kloeden, "Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications", World Scientific (1994).
[4] Y. Davidov, V. Paulauscas, "On the asymptotic form of convex hulls of Gaussian random fields", Central European Journal of Mathematics, **12**, no. 5, 711 – 720 (2014).
[5] R. Rockafellar, Convex Analysis", Princeton University Press (1970).
[6] Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий, Эконометрика: Начальный курс, Изд. "Дело", Москва (2004).

Поступила 20 декабря 2016

Cover–to–cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 52, No. 1, 2017

CONTENTS

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 52, номер 2, 2017

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 52, No. 2, 2017

Contents